Annales scientifiques de l'É.N.S.

S. Stoïlow

Sur les singularités mobiles des intégrales des équations linéaires aux dérivées partielles et sur leur intégrale générale

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 36 (1919), p. 235-262

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1919_3_36__235_0>

SUR LES SINGULARITÉS MOBILES

DES

INTÉGRALES DES ÉQUATIONS LINÉAIRES AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

ET

SUR LEUR INTÉGRALE GÉNÉRALE

PAR M. S. STOÏLOW.

Introduction.

La plupart des travaux consacrés aux équations linéaires aux dérivées partielles s'occupent d'équations de types particuliers, que l'on rencontre en Physique mathématique, ou ont pour but d'étudier les transformations des équations linéaires et d'établir des classifications.

A ma connaissance, c'est M. Le Roux qui, le premier, s'est occupé des intégrales des équations linéaires quelconques, cherchant à étudier leurs singularités et leurs propriétés analytiques (1).

Vers la même époque et dans un autre ordre d'idées, M. Delassus (2) s'est occupé des équations réelles à caractéristiques réelles établissant la forme des singularités appelées *accidentelles* ou *mobiles*, c'est-à-dire dépendant des fonctions initiales.

Dans ma *Thèse* (3), j'ai démontré une proposition qui rappelle les théorèmes d'existence de la théorie des équations aux dérivées partielles, où j'établis un lien entre les singularités des fonctions initiales

(1) LE ROUX, *Thèse*, Paris, 1895; *Journal de M. Jordan*, 1898, 1900.
(2) DELASSUS, *Annales de l'École Normale supérieure*, 1895.
(3) STOÏLOW, *Thèse*, Paris, 1916.

et la nature analytique des singularités correspondantes des intégrales.

Le présent Mémoire a d'abord pour but de donner une généralisation du théorème de ma Thèse, où les fonctions initiales avaient des singularités d'une nature analytique particulière. Les fonctions initiales seront ici absolument arbitraires, sous cette seule restriction d'être toutes holomorphes en un même point.

On reconnaîtra ainsi la forme analytique d'une intégrale au voisinage d'une singularité mobile quelconque.

Je donne ensuite une expression de l'intégrale générale (au sens aujourd'hui adopté) de l'équation linéaire générale à deux variables, valable dans un domaine assez petit, mais indépendant des fonctions arbitraires. Ce domaine ne contient aucune singularité fixe de l'équation, mais pourra contenir autant de singularités mobiles que l'on voudra, les fonctions arbitraires pouvant y être quelconques.

En particulier, on sera ainsi renseigné sur la forme analytique d'une intégrale au voisinage d'un point par lequel passent plusieurs multiplicités singulières mobiles.

L'expression de cette intégrale générale dépend, comme on le verra, d'un nombre fini ou infini de fonctions attachées à l'équation, selon que l'équation caractéristique a toutes ses racines simples ou possède des racines multiples.

En général, ces fonctions ne seront pas calculables, comme d'ailleurs cela est le cas dans presque toutes les méthodes d'intégration connues, dont le but principal n'est pas de fournir le moyen de calculer effectivement les intégrales, mais bien plutôt de donner une idée de leurs propriétés analytiques.

Je termine en indiquant comment cette méthode, qui consiste dans une analyse de la solution fournie par la méthode des approximations successives de M. Picard (méthode qui, d'ailleurs, a été employée également par MM. Le Roux et Delassus dans les Mémoires cités) conduit, dans le cas des équations dont toutes les familles caractéristiques sont simples, à l'expression de l'intégrale générale donnée par M. Le Roux.

Sous une forme un peu différente, l'énoncé du théorème concernant l'intégrale générale de l'équation linéaire que l'on trouvera ici a été communiqué à l'Académie des Sciences dans la séance du 7 février 1916.

I. — Les termes de la première et de la seconde espèce.

1. Considérons une équation linéaire d'ordre n à deux variables indépendantes x et y, et d'ailleurs absolument quelconques. Dans tout ce qui suivra, les variables seront toujours complexes; il faudra donc toujours entendre par fonction quelconque une fonction analytique quelconque.

Dans l'espace à quatre dimensions des variables indépendantes x et y, envisageons une région qui ne contienne aucun des points des catégories suivantes :

1° Les points singuliers des coefficients;

2° Les points où tous les coefficients des dérivées d'ordre n sont nuls à la fois;

3° Les points singuliers des fonctions caractéristiques, c'est-à-dire des fonctions qui, égalées à une constante, donnent les caractéristiques de l'équation;

4° Les points où deux ou plusieurs caractéristiques sont tangentes *sans être confondues.*

Nous appellerons une pareille région *domaine de l'espace* (x, y), où il n'y a pas de singularités de l'équation. Nous le supposerons toujours limité et nous le désignerons par (D).

Dans un domaine (D), considérons un point qui n'est pas sur sa frontière et que nous pourrons toujours prendre pour origine.

Envisageons une caractéristique passant par ce point et supposons qu'elle corresponde à une racine d'ordre K de l'équation caractéristique algébrique en $\frac{dy}{dx}$. Ce sera une caractéristique *d'ordre k.*

En se bornant à un domaine (D) suffisamment petit, on pourra toujours supposer que la famille dont notre caractéristique fait partie a pour équation

$$x = \text{const.},$$

la caractéristique même étant alors l'axe

$$x = 0.$$

Ceci étant, nous allons écrire l'équation linéaire considérée sous la forme

$$\Delta_n(u) = \Phi(u), \tag{I}$$

où $\Delta_n(u)$ est une expression que l'on peut écrire sous la forme symbolique

$$a_0(x, y)\left(\frac{\partial}{\partial x} + a_1(x, y)\frac{\partial}{\partial y}\right)\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x} + a_{n-k}(x, y)\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\partial^k u}{\partial y^k};$$

et le second membre ne contenant que des dérivées d'ordre $n-1$ au plus.

L'équation

$$\Delta_n(u) = 0$$

admet évidemment, quelles que soient les fonctions $f_i(x)$,

$$\text{l'intégrale : } u_0 = \sum_{i=0}^{k-1} y^i f_i(x).$$

2. On peut déterminer une intégrale de (I) par les conditions initiales suivantes :

1° Sur $x = 0$, cette intégrale, ainsi que ses $n-k-1$ premières dérivées par rapport à x, se réduisent aux polynomes en y, qui représentent les valeurs de u_0 et de ses dérivées par rapport à x pour $x = 0$;

2° Pour $y = 0$, l'intégrale et ses $k-1$ premières dérivées par rapport à y se réduisent respectivement aux fonctions

$$f_0(x), \quad f_1(x), \quad \ldots, \quad f_{k-1}(x),$$

supposées toutes holomorphes à l'origine.

M. Goursat (1) a démontré l'existence de l'intégrale satisfaisant à ces conditions par la méthode des fonctions majorantes.

Dans le cas des équations linéaires, on peut, pour cette démonstra-

(1) Voir Goursat, *Leçons sur l'intégration des équations du second ordre*, t. II, p. 303.

tion, employer la méthode des approximations successives, comme l'a fait M. Le Roux [1].

Ce dernier procédé permet mieux de voir dans la nature de la solution calculée, et nous conduira même, comme on le verra, à la forme analytique de l'intégrale.

Je vais examiner d'abord quelles sont les formes des termes que les approximations successives introduisent.

En écrivant suivant la méthode bien connue de M. Picard :

$$\begin{aligned} \Delta_n(u_0) &= 0, \\ \Delta_n(u_1) &= \Phi(u_0), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \Delta_n(u_{p+1}) &= \Phi(u_p), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

on aura :

$$u_{p+1} = \int_0^y dy \int_0^y dy \ldots \int_0^y dy \int_{c_{n-k}} \mathrm{A}_{n-k}\, dx \ldots \int_{c_1} \mathrm{A}_1 \Phi(u_p)\, dx,$$

les intégrales curvilignes étant prises le long des caractéristiques

$$c_0, \quad c_1, \quad \ldots, \quad c_{n-k}$$

autres que les caractéristiques de la famille

$$x = \text{const.}$$

et à partir de $x = 0$.

Pour simplifier l'opération, nous allons déterminer successivement les intégrales correspondantes aux fonctions initiales

$$u_0 = f(x), \quad u_0 = y f_1(x), \quad \ldots, \quad u_0 = y^{k-1} f_{k-1}(x),$$

dont la somme donnera l'intégrale cherchée.

Nous poserons d'une façon générale

$$u_0 = \mathrm{P}(x, y) f(x),$$

la fonction $\mathrm{P}(x, y)$ étant supposée holomorphe dans (D).

En désignant par C_i la fonction de x et de y qui, égalée à une constante arbitraire, donne les familles caractéristiques $c_1, c_2, \ldots, c_{n-k}$, on pourra développer u_0 en série de la forme

$$u_0 = f(x) \sum_{i_1=0}^{\infty} Q_{i_1}(C_1) x^{i_1},$$

et l'on aura de la même façon

$$A_1 Q_{i_1}(C_1) = \sum_{i_2=0}^{\infty} Q_{i_1 i_2}(C_2) x^{i_2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$A_{n-k-1} Q_{i_1 i_2 \ldots i_{n-k-1}}(C_{n-k-1}) = \sum_{i_{n-k}=0}^{\infty} Q_{i_1 i_2 \ldots i_{n-k}}(C_{n-k}) x^{i_{n-k}},$$

toutes ces séries étant valables dans un domaine (d) défini par

$$(d) \qquad |x| < r, \qquad |y| < r,$$

où r est une quantité positive assez petite, et dans lequel ces séries sont d'ailleurs absolument et uniformément convergentes, ainsi que leurs séries dérivées.

On aura dans (d)

$$P(x, y) f(x) = \frac{f(x)}{A_1 A_2 \ldots A_{n-k}} \sum_{i_1 i_2 \ldots i_{n-k}}^{\infty} Q_{i_1 i_2 \ldots i_{n-k}}(C_{n-k}) x^{i_1 + i_2 + \ldots + i_{n-k}},$$

où d'ailleurs l'on supposera qu'aucune des fonctions A_i (qui ne dépendent toutes que de l'équation proposée) ne s'annule. Nous appellerons dans la suite une série de cette nature *développement normal de*

$$P(x, y) f(x).$$

Il est évident que, dans un développement normal d'une pareille fonction, les Q sont indépendants de $f(x)$,

Ceci étant, on aura évidemment

$$(1) \qquad u_1 = \sum_{m=0}^{n-1} \int_0^y dy \ldots \int_0^y dy \sum_{i_1 i_2 \ldots i_{n-k}=0}^{\infty} Q^m_{i_1 i_2 \ldots i_{n-k}}(C_{n-k})$$
$$\times \int_0^x x^{i_{n-k}} dx \int_0^x x^{i_{n-k-1}} dx \ldots \int_0^x x^{i_1} f^m(x)\, dx.$$

en désignant, pour simplifier l'écriture, par $f^m(x)$ la dérivée $n^{\text{ième}}$ de $f(x)$.

Si $P_m(x, y)$ désigne le coefficient de $f^m(x)$ dans $\Phi(u_1)$, les $Q^m_{i_1 i_2 \ldots i_{n-k}}$ figura dans cette expression sont les coefficients du développement normal de

$$P_m(x, y) f^m(x).$$

Faisons tout de suite une remarque qui nous sera utile plus tard.

Si

$$M^m_{i_1 i_2 \ldots i_{n-k}}$$

désignent les limites supérieures des valeurs absolues de

$$\frac{1}{A_1 A_2 \ldots A_{n-k}} Q^m_{i_1 i_2 \ldots i_{n-k}}(C_{n-k}) x^{i_1+i_2+\ldots+i_{n-k}},$$

dans (d), on peut évidemment choisir ces quantités positives de façon que la série

$$\sum_{i_1 i_2 \ldots i_{n-k}=0}^{\infty} M^m_{i_1 i_2 \ldots i_{n-k}}$$

soit convergente. Soit alors

$$\mathfrak{M}^m$$

sa somme. Nous appellerons cette quantité *limite supérieure normale* de $P_m(x, y)$; si M^m désigne une limite supérieure quelconque de $f^m(x)$, la *limite supérieure normale de*

$$P_m(x, y) f^m(x)$$

sera, par définition, la quantité

$$\mathfrak{M}^m M^m.$$

3. Voyons maintenant quelles espèces de termes introduira dans $\Phi(u)$ la substitution $u = u_1$, u_1 étant donné par (1).

Il est aisé de voir que l'on a toujours

$$\int_0^x \alpha^{i_{n-k}} d\alpha \int_0^\alpha \alpha^{i_{n-k}} d\alpha \ldots \int_0^\alpha \alpha^{i_1} f^m(\alpha)\, d\alpha = \int_0^x S^m_{i_1 i_2 \ldots i_{n-k}}(x, \alpha) f^m(\alpha)\, d\alpha,$$

où $S^m_{i_1 i_2 \ldots i_{n-k}}$ est un polynome facile à calculer.

Tout terme de (1) pourra donc se mettre sous la forme

$$\int_0^x \mathrm{R}^m_{i_1 i_2 \ldots i_{n-k}}(x, y, \alpha) f^m(\alpha)\, d\alpha,$$

où l'on a

$$\mathrm{R}^m_{i_1 i_2 \ldots i_{n-k}}(x, y, \alpha) = \mathrm{S}^m_{i_1 i_2 \ldots i_{n-k}}(x, \alpha) \int_0^y dy \ldots \int_0^y \mathrm{Q}^m_{i_1 i_2 \ldots i_{n-k}}(\mathrm{C}_{n-k})\, dy,$$

les signes $\int_0^y$ étant comme dans (1) au nombre de k. On voit donc immédiatement que :

1° Les fonctions

$$\mathrm{R}^m_{i_1 i_2 \ldots i_{n-k}}(x, y, \alpha)$$

sont nulles ainsi que leurs premières $n - k - 2$ dérivées par rapport à x pour $x = \alpha$.

2° La série

$$\sum_{i_1 i_2 \ldots i_{n-k} = 0}^{\infty} \mathrm{R}^m_{i_1 i_2 \ldots i_{n-k}}(x, y, \alpha)$$

est absolument et uniformément convergente si $|x|, |y|, |\alpha|$ sont assez petits.

Soit $\mathrm{R}^m_1(x, y, \alpha)$ la somme de cette série.

Cette somme possède naturellement la propriété 1° de chacun de ses termes.

On aura par conséquent, dans $\Phi(u_1)$, des termes des deux types suivants :

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{R}^m_1(x, y) f^m(x), \\ \displaystyle\int_0^x \mathrm{R}^m_1(x, y, \alpha) f^m(\alpha)\, d\alpha, \end{array} \right.$$

où les R sont des fonctions dont la forme ne dépend que de $\mathrm{P}(x, y)$ et de l'équation proposée.

De plus, la propriété 1° de $\mathrm{R}^m_1(x, y, \alpha)$ montre que :

Si $k = 1$, le nombre entier positif m dans les expressions (2), figurant dans $\Phi(u_1)$, ne dépasse jamais le nombre $n - 1$.

Si $k > 1$, ce nombre $m > n - 1$.

Ces deux faits sont très importants pour la suite; nous ferons remarquer que ce sont des conséquences des propriétés des fonctions $R'''_{i_1 i_2 \ldots i_{n-k}}(x, y, \alpha)$.

4. Pour avoir maintenant les formes des termes de u_2, il faudra considérer à la place de (1) les expressions analogues provenant de

$$\int_0^y dy \ldots \int_0^y dy \int_{c_{n-k}} A_{n-k}\, dx \ldots \int_{c_1} A_1 R'''_1(x, y) f'''(x)\, dx \tag{3}$$

et de

$$\int_0^y dy \ldots \int_0^y dy \int_{c_{n-k}} A_{n-k}\, dx \ldots \int_{c_1} A_1\, dx \int_0^x R'''_1(x, y, \alpha) f'''(\alpha)\, d\alpha. \tag{4}$$

Pour ce qui est des expressions (3), elles rentrent dans l'étude faite au paragraphe précédent. Elles donneront dans u_2 une somme finie d'expressions de la forme

$$\int_0^x R'''_2(x, y, \alpha) f'''(\alpha)\, d\alpha,$$

où les R'''_2 sont des fonctions différentes des R'''_1, mais ne dépendant toujours que de $P(x, y)$ et de l'équation proposée et possédant les mêmes propriétés 1° et 2°.

En ce qui concerne les expressions de la forme (4), nous ferons d'abord remarquer que, si l'on pose

$$R'''_1(x, y, \alpha) = R'''_{10}(x, y) + R'''_{11}(x, y)\alpha + R'''_{12}(x, y)\alpha^2 + \ldots,$$

ces expressions deviennent des séries uniformément et absolument convergentes d'expressions de la forme (3) où, à la place de $f'''(x)$, on aurait

$$\int_0^x \alpha^{i_0} f'''(\alpha)\, d\alpha,$$

i_0 étant un entier positif quelconque ou nul.

J'appellerai donc *développement normal d'un terme*

$$\int_0^x R'''_1(x, y, \alpha) f'''(\alpha)\, d\alpha$$

la série

$$\sum_{i_0=1}^{\infty} R^m_{1i_0}(x, y)\int_0^x \alpha^{i_0} f^m(\alpha)\,d\alpha,$$

où toutes les fonctions $R^m_{1i_0}$ sont développées en séries normales (*voir* n° 2).

On aura alors, pour les termes de u_2 provenant de (4),

$$\sum_{i_0 i_1 i_2\ldots i_{n-k}=0}^{\infty} \int_0^y dy \ldots \int_0^y dy\, Q^m_{i_0 i_1 i_2 \ldots i_{n-k}}(C_{n-k}) \int_0^x x^{i_{n-k}}\,dx \ldots$$
$$\times \int_0^x x^{i_1}\,dx \int_0^x x^{i_0} f^m(x)\,dx.$$

Comme plus haut, on aura ici des fonctions

$$R^m_{i_0 i_1 i_2 \ldots i_{n-k}}(x, y, \alpha),$$

mais dépendant de $n-k+1$ indices, pour lesquelles on aura les propriétés suivantes :

1° Pour $x=\alpha$, ces fonctions, ainsi que leurs $n-k-1$ premières dérivées par rapport à x, sont nulles ;

2° La série

$$\sum_{i_0 i_1 i_2 \ldots i_{n-k}=0}^{\infty} R^m_{i_0 i_1 i_2 \ldots i_{n-k}}(x, y, \alpha)$$

est absolument et uniformément convergente pour $|x|$, $|y|$ et $|\alpha|$ assez petits.

Nous appellerons de même *limite supérieure normale d'un terme de la forme*

$$\int_0^x R^m_1(x, y, \alpha) f^m(\alpha)\,d\alpha$$

la somme de la série

$$|x|\, M^m \sum^{\infty} M^m_{i_0 i_1 i_2 \ldots i_{n-k}} = x M^m \mathfrak{M}^m_0,$$

où chaque terme représente une limite supérieure de

$$\frac{1}{A_1 A_2 \ldots A_{n-k}} |x| Q^{m}_{i_0 i_1 i_2 \ldots i_{n-k}}(C_{n-k}) x^{i_0+i_1+i_2+\ldots+i_{n-k}} f^m(x),$$

convenablement choisie pour que la série soit convergente.

En se rappelant la propriété 2° de fonctions $R^{m}_{i_0 i_1 i_2 \ldots i_{n-k}}$, on pourra conclure de tout ce qui précède :

Quel que soit le rang p, les expressions obtenues pour $\Phi(u_p)$, par le procédé indiqué, ne contiendront jamais qu'un nombre fini (qui d'ailleurs varie avec p) de termes des types (2).

J'appellerai *termes de la première espèce* ceux de la forme

$$R(x, y) f^m(x),$$

et *termes de la seconde espèce* ceux de la forme

$$\int_0^x R(x, y, \alpha) f^m(\alpha)\, d\alpha,$$

quels que soient le nombre m et les fonctions R.

Comme aux paragraphes précédents, on déduira immédiatement de la propriété 1° des fonctions

$$R^{m}_{i_1 i_2 \ldots i_{n-k}} \quad \text{et} \quad R^{m}_{i_0 i_1 i_2 \ldots i_{n-k}}.$$

Si $k=1$, quel que soit le rang p, le nombre positif m (indiquant l'ordre de dérivation de $f(x)$), *dans les termes de première et de seconde espèce de $\Phi(u_p)$ ne dépassera jamais le nombre $n-1$.*

Si $k>1$, ce nombre m croît indéfiniment avec p. Enfin, on peut ajouter que :

Si $k=1$, les expressions de $\Phi(u_p)$ ne contiendront jamais que des termes de la première espèce. En effet, dans ce cas particulier, on n'aura dans l'expression de u_p aucune intégration par rapport à α.

II. — Sur la convergence des approximations successives. Les intégrales U_c.

5. D'après ce qui a été dit jusqu'ici, toute expression $\Phi(u_p)$, quel que soit p, peut se mettre sous la forme d'une somme finie de termes

de la première et de la seconde espèce. Soit μ le nombre des termes de la première espèce et ν le nombre des termes de la seconde espèce que contient $\Phi(u_p)$. On aura

$$\Phi(u_p) = \sum_{m=0}^{\mu} \mathrm{P}_{mp}(x, y) f^m(x) + \sum_{m=0}^{\nu} \int_0^x \mathrm{R}_{mp}(x, y, \alpha) f^m(\alpha)\, d\alpha,$$

où μ et ν peuvent dépendre de p.

Avec les notations de la section précédente, on pourra écrire les développements normaux

$$\mathrm{P}_{mp}(x, y) f^m(x) = \frac{f^m(x)}{\mathrm{A}_1 \mathrm{A}_2 \ldots \mathrm{A}_{n-k}} \sum_{i_0 i_1 i_2 \ldots i_{n-k}=0}^{\infty} \mathrm{Q}^{mp}_{i_1 i_2 \ldots i_{n-k}}(\mathrm{C}_{n-k})\, x^{i_1+i_2+\ldots+i_{n-k}}$$

et

$$\mathrm{R}_{mp}(x, y, \alpha) f^m(\alpha) = \frac{f^m(\alpha)}{\mathrm{A}_1 \mathrm{A}_2 \ldots \mathrm{A}_{n-k}} \sum_{i_0 i_1 i_2 \ldots i_{n-k}=0}^{\infty} \mathrm{Q}^{mp}_{i_0 i_1 i_2 \ldots i_{n-k}}(\mathrm{C}_{n-k})\, x^{i_1+i_2+\ldots+i_{n-k}} \alpha^{i_0}.$$

Considérons maintenant les limites supérieures normales de P_{mp} et de R_{mp}, soient

$$\mathfrak{M}^{mp} \quad \text{et} \quad \mathfrak{M}_0^{mp},$$

et posons

$$\mathfrak{M} = \sum_{m=0}^{\mu} \mathfrak{M}^{mp} \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{M}_0 = \sum_{m=0}^{\nu} \mathfrak{M}_0^{mp}.$$

Dans un domaine (d') intérieur à (d), on aura pour *limite supérieure normale de* $\Phi(u_p)$ l'expression

$$\lambda_p \mathrm{M}[\mathfrak{M} + |x|\mathfrak{M}_0],$$

où $\mathrm{M} > |f(x)|$ dans (d) et λ_p est une quantité ne dépendant que de (d'), (d) et du rang p choisi.

D'après ce qui a été dit dans la section précédente, on aura pour u_{p+1} une expression qui pourra s'écrire sous la forme d'une somme finie de séries telles que

$$(5) \qquad \sum_{i_1 i_2 \ldots i_{n-k}=}^{\infty} \int_0^y dy \ldots \int_0^y dy\, \mathrm{Q}^{m}_{i_1 i_2 \ldots i_{n-k}}(\mathrm{C}_{n-k}) \int_0^x x^{i_{n-k}} dx \ldots \int_0^x x^{i_1} f^m(x)\, dx$$

et

$$(5') \quad \sum_{i_0 i_1 i_2 \ldots i_{n-k}}^{\infty} \int_0^y dy \ldots \int_0^y dy\, Q^m_{i_0 i_1 i_2 \ldots i_{n-k}}(C_{n-k}) \int_0^x x^{i_{n-k}} dx \ldots \int_0^x x^{i_0} f^m(x)\, dx.$$

Chacun des termes des séries (5) et (5′) peut se mettre sous la forme

$$\int_0^x R^m_{i_1 i_2 \ldots i_{n-k}}(x, y, \alpha) f^m(\alpha)\, d\alpha$$

et la forme

$$\int_0^x R^m_{i_0 i_1 i_2 \ldots i_{n-k}}(x, y, \alpha) f^m(\alpha)\, d\alpha.$$

Ces fonctions (R) sont, dans (d'), limitées supérieurement par l'expression

$$|x|^{n-k-1} |y|^k [M^m_{i_1 i_2 \ldots i_{n-k}} + |x| M^m_{i_0 i_1 i_2 \ldots i_{n-k}}],$$

et les termes de (5) et (5′) eux-mêmes sont limités par

$$\lambda_p |x|^{n-k} |y|^k M [M^m_{i_1 i_2 \ldots i_{n-k}} + |x| M^m_{i_0 i_1 i_2 \ldots i_{n-k}}].$$

On n'aura qu'à multiplier ces limites par

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{|x|}{r}\right)\left(1 - \frac{|y|}{r}\right)}$$

pour avoir des majorantes des R et des termes des séries (5) et (5′), dans (d').

D'autre part, chaque terme de ces séries donne, par sa substitution dans

$$\Phi(u),$$

un nombre de termes au plus égal à n, dont chacun, à cause de la forme des majorantes des R, est limité supérieurement par l'expression

$$\rho\lambda N \lambda_p M [M^m_{i_1 i_2 \ldots i_{n-k}} + \rho M^m_{i_0 i_1 i_2 \ldots i_{n-k}}],$$

où ρ désigne le plus grand des modules $|x|$ et $|y|$, λ une quantité ne dépendant que de (d'), de (d) et de l'équation proposée, et N une limite supérieure des coefficients de $\Phi(u)$ dans (d).

Si donc on désigne par λ une autre quantité ne dépendant toujours que des domaines (d') et (d) et de l'équation proposée, on aura dans (d'), pour

$$\Phi(u_{p+1}),$$

la limite supérieure *normale*

$$\rho\lambda N \lambda_p M[\mathfrak{M} + \rho\mathfrak{M}_0].$$

Ceci étant, il est aisé de voir que la limite supérieure normale de

$$\Phi(u_{p+s}),$$

où s est un entier positif quelconque, est donnée par l'expression

$$(\rho\lambda N)^s \lambda_p M[\mathfrak{M} + \rho\mathfrak{M}_0].$$

Si donc le nombre positif ρ est assez petit pour satisfaire à l'inégalité

$$\rho\lambda N < 1,$$

la série de termes de première et de seconde espèce, représentée par

$$\sum_{p=0}^{\nu} \Phi(u_p),$$

est absolument et uniformément convergente dans un domaine $|\delta|$, défini par

$$|x| < \rho, \quad |y| < \rho,$$

qui, comme on le voit, ne dépend en aucune façon de la fonction $f(x)$.

Dans ce même domaine, la série

$$\sum_{p=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{m=\nu_p} R_{mp}(x, y, \alpha)$$

est aussi absolument et uniformément convergente.

Il résulte de ce que l'on vient de dire que l'on peut changer l'ordre des termes dans

$$\sum_{p=0}^{\infty} \Phi(u_p)$$

et grouper ces termes sous un même signe $\int_0^x$, comme on le voudra.

Si l'on tient compte de ce que l'intégrale cherchée est représentée par

$$\mathrm{U}=\sum_{p=0}^{\infty} u_p,$$

et que l'on se rappelle ce qui a été dit au n° 3, on aura, suivant que $k=1$ ou que $k>1$:

$$(\mathrm{II})\quad\left\{\begin{aligned}&\Delta_n(\mathrm{U})=\sum_{i=0}^{n-1}\left[\mathrm{A}_i(x,y)f^i(x)+\int_0^x \mathrm{B}_i(x,y,\alpha)f^i(\alpha)\,d\alpha\right],\\&\Delta_n(\mathrm{U})=\sum_{j=0}^{k-1}\sum_{i=0}^{\infty}\left[\mathrm{A}_{ij}(x,y)f_j^i(x)+\int_0^x \mathrm{B}_{ij}(x,y,\alpha)f_j^i(\alpha)\,d\alpha\right].\end{aligned}\right.$$

Dans le cas particulier où $k=n$, on aurait identiquement

$$\mathrm{B}_{ij}(x,y,\alpha)\equiv 0,$$

quels que soient i et j.

6. Pour avoir maintenant l'intégrale U, il faudra intégrer (II) avec les fonctions initiales

$$f_j(x)\qquad (j=0,1,2,\ldots,k-1)$$

sur $y=0$, et

$$f_0^i(0)+yf_1^i(0)+\ldots+y^{k-1}f_{k-1}^i(0)\qquad (i=0,1,2,\ldots,n-k-1)$$

sur $x=0$.

Si l'on pose

$$\mathrm{U}=u_0+\mathrm{Z},$$

on aura à déterminer une intégrale Z de (II) avec les fonctions initiales nulles sur $x=0$ et $y=0$. On aura donc :

$$(\mathrm{III})\quad\left\{\begin{aligned}&\mathrm{U}=f(x)+y\sum_{i=0}^{n-1}\int_0^x \mathrm{V}_i(x,y,\alpha)f^i(\alpha)\,d\alpha &&(k=1),\\&\mathrm{U}=\sum_{j=0}^{k-1}y^jf_j(x)+y^k\sum_{j=0}^{k-1}\sum_{i=0}^{\infty}\int_0^x \mathrm{V}_{ij}(x,y,\alpha)f_j^i(\alpha)\,d\alpha &&(k>1),\\&\mathrm{U}=\sum_{j=0}^{n-1}y^jf_j(x)+y^n\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{\infty}\mathrm{Y}_{ij}(x,y)f_j^i(x) &&(k=n),\end{aligned}\right.$$

Dans toutes ces expressions, les fonctions V ne dépendent que de l'équation proposée et en aucune façon des $f(x)$.

Ces expressions sont toutes valables dans un domaine (δ) également indépendant des fonctions arbitraires $f(x)$ qui sont assujetties seulement à être holomorphes dans ce domaine. Cette dernière hypothèse peut être levée.

7. On peut déterminer un domaine (δ) assez petit pour que les expressions (III) y soient valables, c'est-à-dire que les séries convergent dans ce (δ), *quelles que soient les fonctions* $f(x)$ dans ce domaine, pourvu que l'origine soit pour elles un point ordinaire de façon que les intégrales aient un sens bien déterminé. C'est ce que nous allons montrer.

Considérons, pour cela, un cercle Γ situé dans le plan des x et ayant l'origine pour centre, et supposons que les $f(x)$ aient des singularités absolument quelconques dans Γ, à condition d'être holomorphes à l'origine, et cela quelle que soit la branche de ces fonctions si elles sont multiformes.

Ceci étant, envisageons les chemins L, satisfaisant aux conditions suivantes :

1° Ces chemins partent de l'origine et aboutissent en un point quelconque de Γ, où les $f(x)$ sont holomorphes, et restent entièrement situés dans Γ entre ces deux extrémités;

2° Ils ne passent par aucune singularité de Γ;

3° Entre l'origine et un point déterminé de Γ, le chemin L correspondant est le plus court de tous ceux qui satisfont aux conditions 1° et 2°.

Soit l la limite supérieure des longueurs de tous les chemins L ainsi définis. Si (δ) est assez petit pour que l'on ait dans ce domaine

$$l < \rho,$$

on voit que tout ce qui a été dit pour le domaine (δ) primitif, où les $f(x)$ étaient holomorphes, peut être répété pour ce nouveau domaine (δ), qui est toujours indépendant des fonctions $f(x)$, et dans lequel ces fonctions peuvent avoir des singularités.

On peut donc prendre dans (III) *des fonctions* $f_j(x)$ *arbitraires, pourvu que l'origine ne soit pas un point singulier pour ces fonctions.*

Les expressions (III) représentent donc aussi des intégrales non holomorphes dans (δ).

8. Il est clair que l'intégrale (U) définie plus haut, qui dépend d'un nombre de fonctions arbitraires égal à l'ordre de la famille caractéristique

$$x = \text{const.},$$

n'est pas la seule que l'on puisse obtenir ainsi.

Une famille caractéristique quelconque peut être ramenée par un changement de variables à la forme ci-dessus, et une caractéristique quelconque à l'axe $x = 0$.

Il y aura donc des intégrales telles que U relatives à une caractéristique quelconque. Si c désigne cette caractéristique, nous désignerons l'intégrale analogue à U lui correspondant, par

$$U_c.$$

Cette intégrale, par définition, dépend donc d'un nombre de fonctions d'une variable, égal à l'ordre de la caractéristique c.

On peut donner des intégrales U_c la définition suivante : ce sont les intégrales qui possèdent cette propriété que leurs valeurs, ainsi que celles de leurs premières $n - k - 1$ dérivées extérieures à c, sur cette caractéristique, sont données par des polynomes d'une variable de degré $k - 1$ au plus, et qu'elles sont holomorphes en un point de c.

9. Passons maintenant à un ordre d'idées un peu différent et essayons de représenter analytiquement des intégrales déterminées avec d'autres fonctions initiales.

J'ai démontré dans ma *Thèse* (Paris, 1916) que, si l'on se donnait sur une caractéristique d'ordre K, soit

$$C(x, y) = 0,$$

supposée passer par l'origine et satisfaire dans un domaine (D) autour de l'origine à l'inégalité

$$\frac{\partial C}{\partial x} \neq 0,$$

un nombre $n-k$ de fonctions initiales toutes holomorphes dans la région de cette caractéristique définie par :

$$|y| < h \qquad \text{(région à un seul tenant)},$$

et sur la droite $y = 0$, un nombre K de fonctions initiales toutes holomorphes dans la région de cette droite, où

$$|x| < \varepsilon$$

et où ξ est *assez petit par rapport à h*, on peut déterminer un domaine (d) de l'espace (xy) contenant entièrement ces deux régions et dans lequel l'intégrale qui correspond à ces fonctions initiales est holomorphe. Ce domaine (d) est indépendant des données. (Voir *Thèse*, p. 45, lemme I.)

Si nous revenons maintenant aux intégrales U_c, il est facile de généraliser un théorème que j'ai donné dans ma *Thèse* (p. 44) et qui établit un lien entre les singularités des fonctions initiales et la nature analytique des singularités des intégrales correspondantes.

Considérons, en effet, le domaine (d) du lemme que je viens de rappeler, et appelons (γ) et (γ') les régions de la caractéristique et de $y = 0$ où les données sont holomorphes et qui contiennent l'origine.

Déterminons une intégrale avec $n-k$ fonctions initiales holomorphes dans (γ) et K fonctions initiales quelconques dans (γ') holomorphes à l'origine seulement.

Soit u cette intégrale. On pourra déterminer une intégrale du type U_c, où c est la caractéristique

$$C(x, y) = 0,$$

et ayant sur $y = 0$ les mêmes fonctions initiales que u. La différence

$$u - U_c$$

sera, d'après le lemme rappelé holomorphe dans le domaine (d) de ce lemme. D'autre part, U_c sera représenté par (III), dans un domaine (δ) indépendant des données.

On peut donc énoncer la généralisation suivante du théorème de ma *Thèse* (p. 44) :

Toute intégrale déterminée avec des fonctions initiales holomorphes dans (γ) *et quelconque dans* (γ'), *qui est seulement suffisamment petit par rapport à* (γ), *est représentable dans un domaine* (δ) *contenant entièrement* (γ') *et indépendant des fonctions initiales par*

$$U_c + H,$$

où H *désigne une fonction holomorphe dans tout* (δ), *et les arbitraires de* U_c *sont les fonctions initiales sur* (γ').

Dans le cas particulier où $k = n$, l'intégrale U_c représente l'intégrale générale; on voit sur l'expression (III) de cette intégrale qu'il y a alors une infinité de solutions uniformes autour d'une singularité mobile, ce qui n'a pas lieu dans le cas général, et ce qui a été démontré directement dans ma *Thèse* (p. 39) par une autre voie.

III. — Sur certains systèmes d'équations fonctionnelles et sur l'intégrale générale des équations linéaires à deux variables indépendantes.

10. Considérons une expression fonctionnelle de la forme

$$\psi_n = \sum_{i=0}^{n} a_i(x, y) f_i[b_i(x, y)],$$

où les fonctions a_i et b_i sont données et les f_i représentent des fonctions arbitraires d'une variable.

Nous supposerons que, dans un domaine contenant l'origine des axes des coordonnées, les fonctions a_i et b_i sont holomorphes et que l'on n'a en aucun point de ce domaine l'égalité

$$\frac{\partial b_i}{\partial y} = 0.$$

Considérons n fonctions de y :

$$\varphi_0(y), \quad \varphi_1(y), \quad \ldots, \quad \varphi_n(y).$$

assujetties à la seule condition d'être holomorphes à l'origine, et proposons-nous de déterminer les fonctions f_i de telle façon que l'on ait les égalités suivantes pour $x = 0$:

$$(6) \quad \begin{cases} \varphi_0(y) = (\psi_n)_0, \\ \varphi_1(y) = \left(\dfrac{\partial \psi_n}{\partial x}\right)_0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots, \\ \varphi_n(y) = \left(\dfrac{\partial^n \psi_n}{\partial x^n}\right)_0, \end{cases}$$

où $(\psi_n)_0$, $\left(\dfrac{\partial \psi_n}{\partial x}\right)_0$, etc., désignent les valeurs de ψ_n, $\dfrac{\partial \psi_n}{\partial x}$, etc., pour $x = 0$.

Nous allons faire voir que le système (6) peut être réduit à un système différentiel linéaire à $n+1$ inconnues et d'ordre n.

Convenons pour cela de désigner par

$$f_i^n[b_i(x, y)]$$

la dérivée de $f_i[b_i(x, y)]$ prise par rapport à $b_i(x, y)$, cette fonction étant considérée comme variable indépendante.

Considérons la fonction

$$\frac{\partial^n \psi_n}{\partial x^n}$$

et ajoutons et retranchons de cette fonction la même fonction

$$\sum_{i=0}^{n} \left\{ \frac{a_i(x, y)\left[\dfrac{\partial^n f_i}{\partial x^n} - f_i^n\left(\dfrac{\partial b_i}{\partial x}\right)^n\right]}{\left(\dfrac{\partial b_i}{\partial y}\right)^n} \right\},$$

dont le dénominateur ne s'annule pas, d'après l'hypothèse faite sur $\dfrac{\partial b_i}{\partial y}$, dans un domaine contenant l'origine.

Ceci étant, posons

$$\left(\frac{\partial b_i}{\partial y}\right)^n A_i(x, y) = a_i(x, y)\left(\frac{\partial b_i}{\partial x}\right)^n,$$

les $A_i(x, y)$ étant des nouvelles fonctions indépendantes des f_i et naturellement holomorphes à l'origine.

Il est, dès lors, facile de voir que si l'on fait dans l'expression de $\frac{\partial^n \psi_n}{\partial x^n}$, ainsi écrite $x = 0$, la dernière équation de (6) ne contiendra plus de dérivée

$$f_i^n[b_i(0, y)],$$

mais des dérivées

$$\left(\frac{\partial^n f_i}{\partial y^n}\right)_0.$$

On pourra recommencer la même opération pour les dérivées

$$f_i^{n-1}[b_i(0, y)],$$

et l'on finira par réduire, dans toutes les équations du système (6), les dérivées $(f_i^p)_0$ à des dérivées $\left(\frac{\partial^p f_i}{\partial y^p}\right)_0$.

Ce système sera donc transformé en un système linéaire différentiel ordinaire où les inconnues seront

$$f_0[b_0, (0, y)], \quad f_1[b_1(0, y)], \quad \ldots, \quad f_n[b_n(0, y)],$$

où les seconds membres seront linéaires et homogènes par rapport à ces fonctions et leurs dérivées, et les coefficients de ces seconds membres holomorphes à l'origine. L'ordre du système est évidemment n.

Le problème posé au début de ce paragraphe a donc, comme on voit, une infinité de solutions, quel que soit $n \geqq 1$.

L'intégrale générale du système différentiel correspondant à (6), et par conséquent la solution générale du système fonctionnel (6), dépendra (comme il est facile de le voir par un simple calcul des dérivées) *linéairement* des n^2 constantes représentant les valeurs des inconnues et de leurs premières $n-1$ dérivées pour $y = 0$.

Ces constantes ne seront d'ailleurs pas tout à fait arbitraires, devant satisfaire aux premières $n-1$ équations du système différentiel transformé de (6).

11. Tout ce qui vient d'être dit suppose évidemment que les $n+1$ fonctions $\varphi_0(y)$, $\varphi_1(y)$, $\ldots$, $\varphi_n(y)$, sont *données*. Si l'on prend pour ces fonctions des fonctions arbitraires holomorphes à l'origine, il est évident, d'après la forme des équations différentielles du système (6) transformé, que la solution générale dépendra encore *linéairement* des constantes en nombre infini :

$$\varphi_0(0),\quad \varphi_1(0),\quad \ldots,\quad \varphi_n(0),\quad \varphi'_0(0),\quad \varphi'_1(0),\quad \ldots$$

qui déterminent les φ.

Soit alors M une limite supérieure du module de tous les φ, dans un domaine contenant l'origine défini par

$$|x| < r, \qquad |y| < r.$$

On aura dans tout domaine (δ) intérieur à ce domaine la majorante

$$\frac{M}{1 - \dfrac{y}{r}}$$

pour les fonctions φ, et par conséquent dans tout (δ) l'inégalité

$$(7) \qquad |f_i| < \lambda M,$$

où λ désigne une quantité dépendant seulement des $a_i(x,y)$ et $b_i(x,y)$, et nullement des φ, à la condition que l'on choisisse convenablement les n^2 constantes représentant les valeurs des $(f_i)_0$ et de leurs dérivées jusqu'à l'ordre $n-1$, pour $y = 0$.

En effet, on n'aurait qu'à prendre, par exemple,

$$\begin{array}{l}
(f_0)_0 = (f_1)_0 = \ldots = (f_{n-1})_0 = 0, \\
\left(\dfrac{\partial f_0}{\partial y}\right)_0 = \left(\dfrac{\partial f_1}{\partial y}\right)_0 = \ldots = \left(\dfrac{\partial f_{n-1}}{\partial y}\right)_0 = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\left(\dfrac{\partial^{n-1} f_0}{\partial y^{n-1}}\right)_0 = \left(\dfrac{\partial^{n-1} f_1}{\partial y^{n-1}}\right)_0 = \ldots = \left(\dfrac{\partial^{n-1} f_{n-1}}{\partial y^{n-1}}\right)_0 = 0
\end{array}$$

pour $y = 0$.

Les constantes représentant

$$(f_n)_0,\quad \left(\frac{\partial f_n}{\partial y}\right)_0,\quad \ldots,\quad \left(\frac{\partial^{n-1} f_n}{\partial y^{n-1}}\right)_0$$

pour $y = 0$ figureraient alors seules dans l'expression générale de la solution de (6), et l'inégalité (7) aurait naturellement lieu pour ces constantes, donc pour les solutions de (6) ainsi choisies.

Nous appelons ces solutions de (6) *solutions normales*.

12. Nous allons maintenant appliquer ces considérations à la détermination de l'intégrale générale de l'équation (I), qui est l'équation linéaire générale à deux variables.

Reprenons pour cela les expressions (III) (*voir* n° 7) des intégrales U_c, définies dans la section précédente, et posons, pour abréger,

$$U_c = T_c + S_c,$$

où T_c désigne la somme des termes de première espèce et S_c la somme des termes de seconde espèce figurant dans l'expression (III) de U_c.

Considérons alors les équations

$$(a)\quad \sum_c (T_c)_0 = \varphi_0(y), \qquad \sum_c \left(\frac{\partial T_c}{\partial x}\right)_0 = \varphi_1(y), \qquad \ldots, \qquad \sum_c \left(\frac{\partial^{n-1} T}{\partial x^{n-1}}\right)_0 = \varphi_{n-1}(y),$$

où l'indice inférieur o indique, comme plus haut, qu'après les dérivations on a fait $x = 0$.

D'après ce qui a été démontré, il existe des fonctions $f_i(c)$ satisfaisant au système (a). Nous considérerons les *solutions normales* de ce système, et nous les substituerons dans

$$S_c, \quad \frac{\partial S_c}{\partial x}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^{n-1} S_c}{\partial x^{n-1}}.$$

Nous écrirons alors le système

$$(b)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum_c (T_c)_0 = \sum_c (S_c)_0, \qquad \sum_c \left(\frac{\partial T_c}{\partial x}\right)_0 = \sum_c \left(\frac{\partial S_c}{\partial x}\right)_0, \qquad \ldots, \\ &\qquad \sum_c \left(\frac{\partial^{n-1} T_c}{\partial x^{n-1}}\right)_0 = \left(\frac{\partial^{n-1} S_c}{\partial x^{n-1}}\right)_0, \end{aligned}\right.$$

dont nous pourrons encore déterminer un système de solutions normales.

On substituera ces solutions de (b) dans les seconds membres d'un système (c) tout pareil à (b). C'est la méthode des approximations successives de M. Picard appliquées aux expressions de la forme

$$T_c + S_c.$$

La proposition du n° 11 montre que l'on a, pour les solutions de (a),

$$|f| < \lambda M,$$

où M est une limite supérieure des $\varphi(y)$ dans le domaine (δ) où les U_c ont les expressions (III).

On aura donc, pour limite supérieure des modules des seconds membres de (b),

$$\rho\mu\lambda M,$$

où μ comme λ désignent des quantités numériques dépendant seulement de l'équation proposée (I) et du domaine (δ), et ρ le plus grand des modules $[x]$ et $[y]$.

On aura donc, pour les solutions du système (b), la limite supérieure

$$\rho\mu\lambda^2 M,$$

et pour les seconds membres de (c)

$$\rho^2\mu^2\lambda^2 M,$$

et ainsi de suite. On aura donc en général pour le système de rang p la limite supérieure

$$\rho^{p-1}\mu^{p-1}\lambda^{p-1} M$$

pour le second membre, et

$$\rho^{p-1}\mu^{p-1}\lambda^{p} M$$

pour les solutions normales.

Si donc ρ est assez petit pour que

$$\rho\mu\lambda < 1,$$

les solutions normales des systèmes (a), (b), (c), etc. forment une série convergeant absolument et uniformément dans un domaine assez petit autour de l'origine.

Les n fonctions f qui sont les sommes de ces n séries auront la propriété suivante, immédiatement reconnaissable sur la chaîne des systèmes d'approximations successives.

Si l'on remplace dans

$$U_c = T_c + S_c$$

les fonctions arbitraires par ces f, et que l'on fasse ensuite la somme

$$\sum_c \mathrm{U}_c,$$

étendue à toutes les caractéristiques passant par l'origine, on obtient une intégrale qui, sur $x=0$, prend, aussi bien que ses $n-1$ premières dérivées par rapport à x des valeurs données à l'avance,

$$\varphi_0(y), \quad \varphi_1(y), \quad \ldots, \quad \varphi_{n-1}(y),$$

arbitrairement choisies, mais holomorphes à l'origine.

D'où le théorème général suivant :

Toutes les intégrales d'une équation linéaire à deux variables indépendantes, holomorphes en un point O, *sont comprises dans l'expression*

$$\sum_c \mathrm{U}_c,$$

relative aux caractéristiques passant par O *et valable dans un domaine fixe* (δ) *contenant ce point.*

13. L'intégration d'une équation linéaire quelconque à deux variables dépend donc ainsi de la connaissance des fonctions appelées plus haut V_i qui dépendent de la nature de l'équation, et que d'ailleurs en général on ne peut calculer effectivement.

Il existe un cas particulier, bien connu d'ailleurs et qui a été tout particulièrement étudié par M. Appell (*Journal de M. Jordan*, 1892), où les fonctions *intégrantes* V_i sont faciles à calculer.

C'est le cas de l'équation de la théorie de la chaleur

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial u}{\partial y},$$

où l'on a l'intégrale générale

$$u=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{x^{2i}}{i!}f_0^i(y)+\sum_{i=0}^{\infty}\frac{x^{2i+1}}{(i+1)!}f_1^i(y).$$

C'est, comme on voit, un cas particulier de la forme de l'intégrale générale des équations dont toutes les caractéristiques passant par un point sont confondues; qui se confond, d'ailleurs, avec l'intégrale U_c qui est ici unique et dépend de x fonctions arbitraires (*voir* n° 6).

On peut se rendre compte, d'après la forme de l'intégrale générale, que le problème de l'intégration d'une équation à caractéristiques simples est tout différent de celui où il y a des caractéristiques confondues.

Dans le premier cas, il n'intervient qu'un nombre limité de fonctions attachées à l'équation; dans le second cas, il y a une infinité de pareilles fonctions.

L'expression de l'intégrale générale permet aussi de se faire une idée de la nature des intégrales en donnant des renseignements sur leurs principales propriétés analytiques. Ainsi, l'on reconnaît immédiatement que les singularités mobiles sont des caractéristiques, que toute intégrale est décomposable au voisinage d'un point par lequel passent plusieurs multiplicités singulières, en somme d'intégrales n'ayant chacune qu'une seule multiplicité singulière passant par ce point.

On reconnaît aussi immédiatement qu'en dehors des équations dont toutes les caractéristiques passant par un même point sont confondues, les équations linéaires n'admettent pas, en général, des intégrales uniformes au voisinage d'une singularité mobile.

14. Dans un très intéressant Mémoire, publié en 1898 dans le *Journal de M. Jordan*, M. Le Roux a montré comment on pouvait intégrer une équation linéaire d'ordre n, dont toutes les familles caractéristiques sont simples (ce qui est le cas général), lorsque l'on connaît n intégrales dépendant chacune d'un paramètre arbitraire et satisfaisant à certaines conditions, intégrales que l'auteur nomme *principales*.

Il est aisé de voir que l'expression de l'intégrale générale donnée par M. Leroux se déduit de celle qui est donnée par le théorème du n° 12, dans le cas où toutes les familles caractéristiques de l'équation sont simples ($k = 1$).

Considérons pour plus de simplicité le cas de l'équation hyperbolique du second ordre

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \mathrm{A}(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{B}(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} + \mathrm{C}(x, y),$$

où $\mathrm{A}(x,y)$, $\mathrm{B}(x,y)$ et $\mathrm{C}(x,y)$ sont des fonctions quelconques (¹).

L'intégrale générale, d'après le théorème du n° 12, est donnée alors par

$$u(x, y) = f(x) + \varphi(y) + y\int_0^x [\mathrm{V}_0^x(x, y, \alpha)\,f(\alpha) + \mathrm{V}_1^x(x, y, \alpha)\,f'(\alpha)]\,d\alpha$$
$$+ x\int_0^y [\mathrm{V}_0^y(x, y, \alpha)\,\varphi(\alpha) + \mathrm{V}_1^y(x, y, \alpha)\,\varphi'(\alpha)]\,d\alpha.$$

Il suffira de poser

$$f(x) = a + \int_0^x \mathrm{F}(\alpha)\,d\alpha$$

et

$$\varphi(y) = q + \int_0^y \Phi(\alpha)\,d\alpha,$$

où a et b sont des constantes arbitraires, pour obtenir, par un simple calcul d'intégration par partie, la forme donnée par M. Le Roux :

$$u(x, y) = a\,u_0(x, y) + b\,u_1(x, y)$$
$$+ \int_0^x \mathrm{Z}_x(x, y, \alpha)\,\mathrm{F}(\alpha)\,d\alpha + \int_0^y \mathrm{Z}_y(x, y, \alpha)\,\Phi(\alpha)\,d\alpha,$$

où $u_0(x,y)$ et $u_1(x,y)$ sont des intégrales particulières, et Z_x et Z_y des *intégrales principales*.

Il est facile de se rendre compte que, dans le cas des caractéristiques confondues, cette transformation n'est plus possible, et l'intégrale générale donnée au n° 12 nous montre ainsi, en quelque sorte, pourquoi la méthode de M. Le Roux, basée sur l'emploi des intégrales principales, ne pouvait réussir dans ce cas.

Faisons encore remarquer que la forme donnée de l'intégrale géné-

(¹) M. Le Roux a établi pour cette équation, dans sa *Thèse* (*Annales de l'École Normale*, 1895), la plupart des théorèmes qu'il a ensuite généralisés dans le Mémoire cité.

rale de l'équation hyperbolique est susceptible d'une autre transformation.

On peut écrire, en effet :

$$\int_0^x V_1^x(x, y, \alpha) f'(\alpha)\, d\alpha$$
$$= f(x) V_1^x(x, y, x) - f(0) V_1^x(x, y, 0) - \int_0^x \frac{\partial V_1^x}{\partial \alpha} [f(\alpha) - f(0)]\, d\alpha,$$

et une égalité analogue pour

$$\int_0^y V_1^y(x, y, \alpha) \varphi(\alpha)\, d\alpha.$$

On a donc encore

$$u = A(x, y) f(x) + A_0(x, y) f(0) + B(x, y) \varphi(y) + B_0(x, y) \varphi(0)$$
$$+ \int_0^x E(x, y, \alpha) f(\alpha)\, d\alpha + \int_0^y F(x, y, \alpha) \varphi(\alpha)\, d\alpha.$$

Si la fonction $E(x, y, \alpha)$ ou $F(x, y, \alpha)$ est de la forme

$$\lambda(\alpha) P(x, y, \alpha),$$

où $\lambda(\alpha)$ désigne une fonction quelconque de α et $P(x, y, \alpha)$, un polynome en α, à coefficients fonctions quelconques de x et de y, l'équation hyperbolique est intégrable par la méthode de Laplace. En effet, il est alors facile de voir qu'elle admet une intégrale de la forme

$$\sum_{i=0}^{p} a_i(x, y) f^i(x) \quad \text{ou} \quad \sum_{i=0}^{p} a_i(x, y) f^i(y),$$

où p et $a_i(x, y)$ sont quelconques et f une fonction *arbitraire*. On peut montrer que la condition de plus haut est suffisante, et l'on possède ainsi un moyen très simple pour caractériser les équations hyperboliques intégrables par la méthode de Laplace.