Georges Giraud

Sur les fonctions automorphes d'un nombre quelconque de variables

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 36 (1919), p. 187-233
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1919_3_36__187_0>

SUR

LES FONCTIONS AUTOMORPHES

D'UN NOMBRE QUELCONQUE DE VARIABLES

PAR M. GEORGES GIRAUD.

Si l'on entend par fonction automorphe de n variables une fonction $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ telle que l'on ait

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(X_1, X_2, \ldots, X_n,$$

pourvu que $X_1, X_2, \ldots, X_n$ résultent de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ par certaines transformations birationnelles, ou même analytiques biunivoques, formant nécessairement un groupe, on a une catégorie très vaste de fonctions. Les plus anciennement connues furent certainement les fonctions périodiques, et en particulier les fonctions circulaires. Ensuite vinrent les fonctions doublement périodiques d'une variable, ou fonctions elliptiques, puis les fonctions abéliennes de n variables, enfin les célèbres fonctions d'une variable auxquelles le nom de Poincaré restera attaché, et les fonctions de plusieurs variables, dont les premières furent découvertes par M. Picard, et qui généralisent les fonctions de Poincaré.

Dans ce vaste champ d'études, nous nous attacherons ici à une catégorie très particulière de fonctions, ne comprenant notamment ni les fonctions elliptiques et abéliennes, ni les fonctions de Poincaré dont le groupe ne conserve aucun cercle. Nous énoncerons certaines hypothèses (H) auxquelles doit satisfaire le groupe des transformations qui font passer de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ à $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Ces hypothèses (H) sont fort simples, bien qu'elles ne soient pas satisfaites dans les cas qui viennent d'être indiqués. Et surtout, les résultats obtenus moyennant ces hypothèses ont eux-mêmes un caractère de simplicité particulière; on verra que, pourvu qu'un groupe satisfaisant à ces hypothèses soit discontinu, il admet des fonctions automorphes : tandis qu'on sait parfaitement trouver, par exemple, des systèmes de quatre périodes pour deux variables, donnant naissance à des groupes discontinus, et auxquels ne correspond aucune fonction abélienne. A cet égard, les fonctions considérées ici apparaissent donc comme plus simples que les fonctions abéliennes.

Parmi les fonctions auxquelles s'appliquent nos hypothèses se trouvent les fonctions de Poincaré dont le groupe conserve un cercle, et la plupart des fonctions de plusieurs variables que les mathématiciens ont introduites à la suite de M. Picard. Nous énumérerons plusieurs de ces fonctions après la théorie générale qui formera la première Partie de ce travail.

Dans cette théorie générale, nous nous attacherons surtout à prouver l'existence des fonctions automorphes, à indiquer les conditions locales que l'on peut leur imposer et à donner une méthode générale de formation du *polyèdre fondamental* (méthode de rayonnement).

Dans la deuxième Partie, l'objet principal est de prouver que les catégories de fonctions énumérées satisfont aux hypothèses (H).

On peut démontrer, pour plusieurs de ces catégories de fonctions, des théorèmes d'après lesquels $n+1$ fonctions automorphes de n variables sont liées par une relation algébrique [1] : mais les démonstrations actuelles de ces propositions obligent à considérer séparément les différentes catégories de fonctions; elles ne rentreraient donc pas bien dans le cadre du présent travail et sont réservées pour une autre occasion.

Beaucoup des résultats qui suivent sont obtenus depuis longtemps. Une partie de la théorie générale a déjà été trouvée par M. Fubini [2], mais avec des hypothèses différentes : pourtant, il ne semble pas qu'on ait cité jusqu'à présent de catégories de fonctions, ou plutôt de groupes, satisfaisant aux hypothèses (H) et ne satisfaisant pas à

(1) Georges GIRAUD, *Comptes rendus Acad. Sc.*, t. 164, 1917, p. 386 et 487; t. 166, 1918, p. 24; t. 169, 1919, p. 132.

(2) FUBINI, *Annali di matematica*, 3e série, t. XI, 1905, p. 159; t. XII, 1906, p. 347; t. XIV, 1908, p. 33.

celles de M. Fubini. On ne sait donc pas si les deux ensembles d'hypothèses sont ou non équivalents.

D'ailleurs, toute cette théorie générale a été édifiée par des généralisations et des modifications successives des raisonnements de Poincaré, que M. Picard a été le premier à adapter à des fonctions de deux variables. Le cas de plusieurs variables diffère, en effet, de celui d'une variable, notamment pour la formation des fonctions Θ et pour l'emploi de celles-ci à la formation des fonctions automorphes; et les particularités que M. Picard a rencontrées pour ses fonctions de deux variables se retrouvent sans changement dans le cas général. La méthode de formation du polyèdre fondamental qu'on trouvera plus loin a déjà été présentée, sous une forme différente à cause des hypothèses, par M. Fubini; sa première idée paraît remonter (¹) à Dirichlet; MM. Fricke et Klein s'en sont servis pour les groupes de Poincaré.

Quant aux types de groupes énumérés dans la seconde Partie, la plupart sont dus à Poincaré, à M. Picard et à M. Fubini. J'indique pour tous ces types l'*invariant différentiel* qui permet de leur appliquer la théorie de M. Fubini, et j'en déduis l'existence d'*intégrales invariantes* de tous les ordres de multiplicité, de 1 à $2n$, n étant le nombre des variables.

J'écris dans ce Mémoire les intégrales multiples de cette manière :

$$\int_{\mathrm{R}}^{(n)} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, d(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

R désignant le domaine d'intégration, $d(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ l'élément de ce domaine, et n, qu'on remplace par des accents ou des chiffres romains quand il est donné numériquement, l'ordre de multiplicité de l'intégrale. Cette notation, qui permet d'écrire l'aire d'une surface S de l'espace à trois dimensions

$$\int_{\mathrm{S}}^{''} \sqrt{d(y, z)^2 + d(z, x)^2 + d(x, y)^2},$$

sans introduire de paramètres particuliers, est commode pour la démonstration de l'existence des intégrales invariantes.

(¹) Cf. *Bull. des Sc. math.*, t. XXXVIII, 1914, 1re Partie, p. 152.

Les matières traitées dans ce qui suit sont développées plus complètement dans un Ouvrage qui paraîtra prochainement dans la collection de M. Borel sous le titre : *Leçons sur les fonctions automorphes*. Il m'arrivera plusieurs fois de renvoyer à cet Ouvrage, pour des démonstrations omises ou abrégées ici.

PREMIÈRE PARTIE.

Théorie générale.

1. Nous désignerons par (Γ) (entre parenthèses) un groupe dont la substitution générale dépend d'une manière *continue* [1] de certains paramètres, et est birationnelle ou même analytique biunivoque. Si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont les variables, la substitution générale est définie par des formules telles que

$$X_k = f_k(x_1, x_2, \ldots, x_n;\quad a_1, a_2, \ldots, a_m) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

où les X sont les variables transformées et les a des paramètres, qui peuvent d'ailleurs être assujettis à des conditions d'égalité ou d'inégalité. On peut avoir d'autres systèmes de formules concourant, avec le précédent, à former (Γ).

Pour notre théorie, (Γ) sera supposé satisfaire à certaines hypothèses, nommées hypothèses (H). Ces hypothèses font intervenir un *domaine ouvert* D et un *invariant* I. On suppose :

1° Que D est tout entier à distance limitée (c'est-à-dire intérieur à une hypersphère de l'espace à $2n$ dimensions où les coordonnées sont les parties réelles et imaginaires de $x_1, x_2, \ldots, x_n$), ou peut y être ramené par une transformation analytique biunivoque; D est, en outre, linéairement connexe;

2° Que D est changé en lui-même par toute transformation de (Γ);

(1) La continuité n'est pas indispensable; (Γ) est le groupe dont nous extrairons des groupes discontinus.

3° Qu'à tout ensemble fermé R intérieur à D on peut faire correspondre deux nombres positifs M et m tels que le rapport des valeurs absolues du déterminant fonctionnel d'une substitution quelconque de (Γ) en deux points quelconques de R reste compris entre M et m; si D n'est pas à distance limitée, cette hypothèse doit être vérifiée par le groupe transformé de (Γ) par la substitution qui ramène D à distance limitée; il faut, pour que cette hypothèse ait un sens, que les f_k soient holomorphes dans D;

4° Que I est une fonction réelle continue dans D des parties réelles et imaginaires de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et de n autres variables $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$; plus brièvement, I est une fonction de deux points, I(A, B); cette fonction est symétrique :

$$I(A, B) = I(B, A).$$

En outre, I ne change pas si l'on fait subir à A et à B une même transformation de (Γ) :

$$I(A, B) = I(A', B'),$$

pourvu que A′ et B′ soient les transformés de A et B par une substitution de (Γ);

5° Qu'il existe deux nombres réels λ' et λ''

$$\lambda' < \lambda''$$

tels que, pour

$$\lambda' < \lambda < \lambda'',$$

la multiplicité

$$I(A, M) = \lambda, \tag{1}$$

où A est fixe dans D et M variable, partage D en deux régions linéairement connexes, dont l'une, contenant A, n'atteint pas la frontière de D; λ'' peut être remplacé par l'infini;

6° Que si λ tend vers λ', les points de (1) tendent uniformément vers A;

7° Que si M tend vers un point de la frontière de D, I(A, M) tend vers λ'', uniformément par rapport à A et à M.

Telles sont les hypothèses (H); dans la suite, nous les désignerons par (H, 1), (H, 2), etc., selon leur rang dans cette énumération [1].

D se nommera le *domaine principal*, I(A, B) *l'invariant fondamental;* (1) sera une *multiplicité cyclique*, de *paramètre* λ et de *centre* A; la région de D qui est située du même côté de (1) que le centre est l'*intérieur* de la multiplicité, l'autre région est son *extérieur*.

2. Soit Γ (sans parenthèses) un *groupe* d'une infinité énumérable $S_1, S_2, \ldots, S_p, \ldots$ de substitutions de (Γ). Appliquons toutes ces substitutions à un même point A, et comptons chaque transformé pour autant de points qu'il y a de substitutions le déduisant de A. *On dit que* Γ *est discontinu en* A si A n'est pas un point d'accumulation de ses transformés; en particulier, A n'est point double que d'un nombre fini de substitutions de Γ.

3. Théorème. — 1° *Si* Γ *est discontinu en un point du domaine principal,* Γ *est discontinu en tout point de ce domaine;*

2° *Les transformés par* Γ *d'aucun point de* D *n'ont de point d'accumulation dans ce domaine.*

Soit A le point de D en lequel Γ est discontinu. Nous allons tout d'abord trouver un nombre λ tel que les multiplicités cycliques qui ont pour centres A et ses transformés par Γ et pour paramètre λ soient toutes entièrement extérieures les unes aux autres, exception faite pour celles qui ont le même centre et qui sont alors confondues.

A n'est pas point d'accumulation de ses transformés; on peut donc, d'après (H, 6), trouver un nombre $\lambda_1 > \lambda'$ suffisamment voisin de λ' pour que la multiplicité M_1 de centre A et de paramètre λ_1 ait à son *extérieur* tous les transformés de A différents de A.

Soit λ_2 un nombre tel que $\lambda' < \lambda_2 < \lambda_1$. Considérons tous les points intérieurs aux multiplicités M_2 de paramètre λ_2 et de centre non intérieur à M_1, ou situés sur une de ces multiplicités; adjoignons-leur les points de la frontière de D. Nous avons ainsi un *ensemble parfait* R_1.

---

[1] Dans l'Ouvrage *Leçons sur les fonctions automorphes*, les hypothèses (H, 4 à 7) ont leurs numéros augmentés de deux unités; les hypothèses (H, 4 et 5) de cet Ouvrage sont relatives à une intégrale $2n$-uple qui n'est pas indispensable pour notre objet, ainsi qu'on l'explique dans cet Ouvrage.

Car, soit B un point de cet ensemble : s'il est intérieur à une multiplicité M_2 ou situé sur son contour, B est un point d'accumulation des points de R_1; si B est sur la frontière de D, tous les points de cette frontière faisant partie de R_1, B fait encore partie du dérivé de R_1; d'ailleurs les points de D assez voisins d'un point de la frontière font aussi tous partie de R_1. Soit maintenant C un point du dérivé de R_1; si C est sur la frontière de D, il fait partie de R_1; si C n'est pas sur la frontière de D, soient $B_1, B_2, \ldots, B_m, \ldots$ des points de R_1 ayant C pour unique point d'accumulation; les centres $E_1, E_2, \ldots, E_m, \ldots$ des multiplicités M_2 correspondantes n'ont aucun point d'accumulation sur la frontière de D, d'après (H, 7); alors si E est un de leurs points d'accumulation, E n'est pas intérieur à M_1, et C se trouve, d'après la continuité de I, à l'intérieur ou sur le contour de la multiplicité M_2 de centre E; donc C fait partie de R_1. R_1 est identique à son dérivé, donc R_1 est parfait.

Or A ne fait pas partie de R_1; car, d'après (H, 5), une multiplicité dont le centre n'est pas intérieur à M_1 n'a A à son intérieur ou sur son contour que si son paramètre est au moins $\lambda_1 > \lambda_2$.

Donc, d'après (H, 6), il existe un nombre $\lambda_3 > \lambda'$ tel que la multiplicité M_3 de centre A et de paramètre λ_3 ait à son extérieur tous les points de R_1.

Soit λ le plus petit des nombres λ_2 et λ_3; les multiplicités cycliques M de paramètre λ et de centres A et ses transformés sont toutes extérieures les unes aux autres, exception faite pour celles dont les centres sont confondus.

Soit $q \geqq 1$ le nombre fini des substitutions de Γ qui ont A pour point double; tout transformé de A est aussi point double de q substitutions de Γ.

Supposons D ramené à distance finie. Soit R un *ensemble fermé* intérieur à D. Les multiplicités M′ de paramètre λ et dont le centre appartient à R forment, par la réunion de leurs intérieurs et de leurs contours, un *ensemble fermé* R′ : la démonstration est analogue à celle qui, plus haut, concerne R_1. I(B, C) est continu, pourvu que B et C appartiennent à R′; la continuité est donc alors uniforme. Or les multiplicités M dont le centre appartient à R sont des multiplicités M′; donc la distance (au sens ordinaire) d'un point d'une de ces multiplicités à son centre reste supérieure à un certain minimum $\rho > 0$, sinon, à cause de la continuité uniforme, I serait aussi voisin de λ' que veut, donc inférieur à λ. Donc, la distance des centres de deux de ces multiplicités est au moins 2ρ; donc *les transformés de* A *n'ont pas de point d'accumulation dans* R, *ni, par suite, dans* D.

Pour achever de démontrer notre théorème, il suffit de faire voir que Γ est discontinu en un point quelconque B de D. Admettons qu'il n'en soit pas ainsi : nous aboutirons à une contradiction. Soient en effet $B_1, B_2, \ldots, B_m, \ldots$ des transformés de B ayant B pour unique point d'accumulation. Soit $\lambda_1 = I(A, B)$; les points des multiplicités de paramètre λ_1 et de centres $B_1, B_2, \ldots, B_m, \ldots$ n'ont comme point d'accumulation aucun point de la frontière de D, d'après (H, 7); or, chacune de ces multiplicités passe par un transformé de A, d'après (H, 4); donc ces transformés de A ont un point d'accumulation intérieur à D : c'est la contradiction annoncée.

Le théorème est démontré.

4. Théorème. — *Soit* $H(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *une fonction rationnelle ou analytique uniforme qui soit holomorphe dans* D *et sur sa frontière. Soit* $(x_{1,p}, x_{2,p}, \ldots, x_{n,p})$ *le transformé de* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *par la substitution* S_p *du groupe* Γ *discontinu dans* D. *La série*

$$\Theta(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{p=1}^{\infty} H(x_{1,p}, x_{2,p}, \ldots, x_{n,p}) \left[\frac{\partial(x_{1,p}, x_{2,p}, \ldots, x_{n,p})}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}\right]^k,$$

où k est un entier au moins égal à 2, *est absolument et uniformément convergente dans tout ensemble fermé intérieur à* D (*supposé ramené à distance finie*).

Comme, sous les hypothèses faites, $|H|$ est dans D inférieur à un nombre fixe, nous sommes ramenés à prouver la convergence uniforme de la série

$$\sum_{p=1}^{\infty} \left|\frac{\partial(x_{1,p}, x_{2,p}, \ldots, x_{n,p})}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}\right|^2. \tag{2}$$

Soit A un point de D. Soit λ le paramètre des multiplicités, introduites dans la démonstration précédente, qui ont pour centres A et ses transformés, et qui sont toutes extérieures les unes aux autres. Soit M_p l'intérieur de celle d'entre elles qui correspond à S_p. La série d'intégrales $2n$-uples

$$\sum_{p=1}^{\infty} \int_{M_p}^{(2n)} d(x'_1, x''_1, x'_2, \ldots, x''_n) \qquad (x_n = x'_n + i x''_n)$$

est convergente, car la somme d'un nombre quelconque de termes ne dépasse pas, q étant le nombre des substitutions de point double A,

$$\int_{D}^{(2n)} d(x'_1, x''_1, x'_2, \ldots, x'_n)$$

[on désigne ici par $d(x'_1, x''_1, \ldots, x''_n)$ l'élément de domaine d'intégration à $2n$ dimensions]. Or, en supposant que S_1 soit la substitution identique, la même série peut s'écrire

$$\sum_{p=1}^{\infty} \int_{M_1}^{(2n)} \frac{\partial(x'_{1,p}, x''_{1,p}, \ldots, x''_{n,p})}{\partial(x'_1, x''_1, \ldots, x''_n)} d(x'_1, x''_1, \ldots, x''_n).$$

Mais on connaît l'identité

$$\frac{\partial(x'_{1,p}, x''_{1,p}, \ldots, x''_{n,p})}{\partial(x'_1, x''_2, \ldots, x''_n)} = \left| \frac{\partial(x_{1,p}, x_{2,p}, \ldots, x_{n,p})}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \right|^2.$$

Si M et m sont les nombres de l'hypothèse (H, 3) qui correspondent à M_1, on en déduit que la série

$$\sum_{p=1}^{\infty} m \left| \frac{\partial(x_{1,p}, x_{2,p}, \ldots, x_{n,p})}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \right|^2 \int_{M_1}^{(2n)} d(x'_1, x''_1, \ldots, x''_n),$$

où le déterminant fonctionnel est pris en A, a ses termes inférieurs à ceux de la précédente; par suite, la série (2) converge en A.

La convergence uniforme dans tout ensemble fermé intérieur à D résulte alors immédiatement de (H, 3).

Le théorème est démontré.

5. Pour conclure de ce théorème l'existence de fonctions automorphes, il suffit de prouver que la fonction Θ n'est pas nécessairement

identiquement nulle. En effet, la fonction Θ, qui est évidemment holomorphe dans D, satisfait à la relation fonctionnelle

$$\Theta(x_{1,p}, x_{2,p}, \ldots, x_{n,p}) = \Theta(x_1, x_2, \ldots, x_n)\left[\frac{\partial(x_{1,p}, x_{2,p}, \ldots, x_{n,p})}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}\right]^{-k}.$$

Si l'on peut trouver deux fonctions Θ non identiquement nulles correspondant au même nombre k, leur quotient sera une fonction automorphe.

Cette possibilité sera démontrée un peu plus loin; ce sera un cas particulier d'une proposition plus générale. Il est auparavant nécessaire que nous revenions au groupe (Γ).

6. Supposons qu'une substitution S de (Γ) ait un point double A intérieur à D; soit

$$S = (x_1, x_2, \ldots, x_n; X_1, X_2, \ldots, X_n).$$

Formons l'équation en s :

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x_1} - s & \frac{\partial X_1}{\partial x_2} & \frac{\partial X_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial X_2}{\partial x_1} & \frac{\partial X_2}{\partial x_2} - s & \frac{\partial X_2}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ \frac{\partial X_n}{\partial x_1} & \frac{\partial X_n}{\partial x_1} & \frac{\partial X_n}{\partial x_1} - s \end{vmatrix} = 0,$$

où les dérivées sont prises en A. Je dis que *les valeurs absolues de toutes ses racines sont égales à* 1.

En effet, s'il n'en était pas ainsi, on pourrait supposer, en remplaçant au besoin S par son inverse, que l'une des racines est supérieure à *un* en valeur absolue. Si alors s est, par exemple, celle des racines dont la valeur absolue est la plus grande, et si l'on s'arrange pour que A ait pour coordonnées $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, Poincaré a démontré [1] qu'il existe n fonctions d'une variable y, $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y), \ldots, \varphi_n(y)$, méromorphes à distance finie, s'annulant avec y, et telles que

$$\varphi_k(sy) = X_k[\varphi_1(y), \varphi_2(y), \ldots, \varphi_n(y)] \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

---

[1] Poincaré, *Journal de Mathématiques*, 4e série, t. VI, 1890, p. 313.

Si nous considérons les points de coordonnées

$$x_k = \varphi_k(y),$$

leurs transformés par S^p s'obtiennent en changeant y en $s^p y$. Si maintenant p tend vers $-\infty$, on voit que ces points tendent vers A. La multiplicité cyclique de centre A qui passe par l'un d'eux a donc, d'après (H, 4), des points aussi voisins de A que l'on veut; elle a donc, d'après (H, 6), λ' pour paramètre; mais cela contredit alors l'hypothèse (H, 6), d'après laquelle une multiplicité cyclique de paramètre λ' se réduit à son centre. Cette contradiction prouve notre proposition.

7. Si S fait partie d'un groupe discontinu Γ, comme il y a seulement un nombre fini de substitutions de Γ qui aient A pour point double, les arguments de toutes les racines s de l'équation précédente sont commensurables avec π, et, même si quelques-unes de ces racines sont confondues, les termes du premier degré de $X_1, X_2, \ldots, X_n$ n'en sont pas moins susceptibles, par une transformation homographique de l'espace, de prendre la forme

$$X_k = s_k x_k + \ldots \qquad (k = 1, 2, \ldots, n);$$

les termes non écrits étant du second degré au moins. En effet, une certaine puissance de S se réduit à la substitution identique.

8. Les substitutions de S qui ont A comme point double forment un groupe G d'un nombre fini de substitutions. Il est donc facile de former des fonctions invariantes par G. Parmi elles, considérons celles qui sont holomorphes en A, et développons-les en série de puissances de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, A étant à l'origine. Dans ce développement, considérons les termes jusqu'au degré r quelconque choisi à l'avance. Il est presque immédiat qu'ils ne sont pas arbitraires : en effet, l'ensemble des termes de plus bas degré non nul, par exemple, doit se reproduire par les substitutions de G réduites à leurs termes de plus bas degré. Donc, ces termes dépendent linéairement d'un certain nombre de paramètres inférieur au nombre

$$\frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+r)}{1.2\ldots r}$$

de ces termes. Nous dirons que ce sont les paramètres correspondant au point A et à l'entier r.

Si A n'est point double que de la substitution identique de Γ, on peut maintenir la même définition, mais alors le nombre des paramètres est

$$\frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+r)}{1.2\ldots r},$$

c'est-à-dire que tous les coefficients sont arbitraires.

Comme les fonctions automorphes de Γ, supposées existantes, sont invariantes par G, on peut parler de leurs paramètres en A, pourvu qu'elles soient holomorphes en ce point.

Nous arrivons maintenant au théorème qui nous prouve, en particulier, l'existence de fonctions automorphes annoncée au n° 5.

9. Théorème. — *Considérons dans le domaine principal* D *un nombre quelconque* m *de points* $A_1, A_2, \ldots, A_m$ *distincts, tels que deux points différents ne soient pas transformés l'un de l'autre par une substitution du groupe discontinu* Γ. *Soit* r *un entier donné. Il existe des fonctions automorphes de* Γ *dont les paramètres correspondant aux* m *points et à l'entier* r *ont tous des valeurs données à l'avance.*

Cette proposition est utile quand on aborde l'étude des relations algébriques qui existent dans certains cas entre les fonctions automorphes de Γ, et l'étude des équations différentielles ou aux dérivées partielles que ces fonctions permettent d'intégrer.

Pour abréger, nous nous bornerons ici au cas où aucun des points $A_1, A_2, \ldots, A_m$ n'est point double d'une substitution non identique de Γ; la démonstration générale se trouve dans l'Ouvrage cité *Leçons sur les fonctions automorphes*.

Observons qu'il suffit de démontrer l'existence de fonctions automorphes pour lesquelles ces paramètres, c'est-à-dire ici les valeurs des fonctions et des dérivées partielles jusqu'à l'ordre r aux m points, aient des valeurs aussi voisines que l'on veut de celles qui ont été données à l'avance. Car alors on pourra former des fonctions automorphes en nombre égal à celui des conditions imposées, et pour lesquelles le déterminant correspondant ne soit pas nul : en combinant linéairement ces dernières fonctions, on pourra remplir exactement les conditions imposées.

Nous pouvons alors nous borner à prouver qu'il existe deux séries Θ, correspondant au même nombre k, prenant, ainsi que leurs dérivées jusqu'à l'ordre r, des valeurs aux m points aussi voisines que l'on veut de valeurs données : leur quotient sera la fonction automorphe cherchée.

Remarquons que, les séries Θ étant des séries uniformément convergentes de fonctions holomorphes, leurs dérivées partielles s'obtiennent en dérivant terme à terme.

Nous choisirons d'abord [1] la fonction H qui intervient dans la série Θ; ensuite nous déterminerons k.

Il y a seulement un nombre fini de transformations de Γ dont le déterminant fonctionnel en l'un des points $A_1, A_2, \ldots, A_m$ soit au moins égal à *un* en valeur absolue (D étant bien entendu ramené à distance finie). Mettant à part la substitution identique, nous assujettirons tout d'abord H et ses dérivées jusqu'à l'ordre r à s'annuler aux points en lesquels les autres substitutions de cette sorte changent $A_1, A_2, \ldots, A_m$.

De plus, H et ses dérivées jusqu'à l'ordre r doivent prendre en A_1, $A_2, \ldots, A_m$ exactement les valeurs données.

On peut satisfaire à toutes ces conditions en prenant pour H, par exemple, un polynôme. H est alors holomorphe dans D, comme il le faut.

H étant ainsi choisi, on va voir que, si k est assez grand, le résultat cherché est atteint.

En effet, $\Theta(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se compose premièrement du terme $H(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, correspondant à la substitution identique, et deuxièmement d'une série infinie d'autres termes. Il faut prouver que, k étant assez grand, cette deuxième partie et ses dérivées jusqu'à l'ordre r sont aussi petites que l'on veut en $A_1, A_2, \ldots, A_m$.

---

[1] Ce raisonnement n'est qu'une généralisation de celui que M. Picard a employé pour ses fonctions de deux variables (*Acta mathematica*, t. I, 1882, p. 314). M. Picard a d'ailleurs lui-même indiqué des généralisations de son premier résultat (*Acta math.*, t. V, 1884, p. 168 et suiv.).

Soit

$$\mathrm{H}(x_{1,p}, x_{2,p}, \ldots, x_{n,p}) \left[\frac{\partial(x_{1,p}, x_{2,p}, \ldots, x_{n,p})}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}\right]^k$$

un terme quelconque de cette deuxième partie. Une dérivée quelconque d'ordre q de ce terme est le produit de

$$\left[\frac{\partial(x_{1,p}, x_{2,p}, \ldots, x_{n,p})}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}\right]^{k-q}$$

par une fonction qui, par rapport à k, est un polynome d'ordre q (si l'on ne dérive pas, $q = 0$).

Si $q \leqq r$, et si le terme est l'un de ceux dont le déterminant fonctionnel en l'un des points $A_1, A_2, \ldots, A_m$ est au moins égal à *un* en valeur absolue, cette dérivée est nulle quel que soit k, d'après le choix de H.

Traçons des hypersphères de centres $A_1, A_2, \ldots, A_m$ et de rayons assez petits pour être tout entières intérieures à D. Soit g le maximum du rapport des valeurs absolues du déterminant fonctionnel pour l'ensemble fermé formé par ces hypersphères [hypothèse H, 3]. Parmi les termes restants, il y en a seulement un nombre fini pour lesquels la valeur absolue du déterminant fonctionnel en l'un des points A_1, $A_2, \ldots, A_m$ atteint $1 : g$. Ces termes ont, dans Θ et dans ses dérivées, une part aussi petite que l'on veut si k est assez grand.

Pour les autres termes, on a, dans toutes les hypersphères,

$$\left|\frac{\partial(x_{1,p}, x_{2,p}, \ldots, x_{n,p})}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}\right| \leqq \mu_p < 1\,;$$

μ_p est, par exemple, le produit par g du déterminant fonctionnel en A_1.

Le terme de Θ est donc, au plus, égal en valeur absolue à $\mathrm{M}\mu_p^k$, dans toutes ces hypersphères, M étant le maximum de $|\mathrm{H}|$ dans D. Pour les dérivées de ce terme jusqu'à l'ordre r, il faut prendre en $A_1, A_2, \ldots, A_m$ $\mathrm{M}'\mu_p^k$, M′ dépendant de M, de r, et des rayons des hypersphères. En effet, une de ces dérivées est

$$\frac{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!}{(2\pi i)^n}\int^{(n)} \frac{\mathrm{J}(z_1, z_2, \ldots, z_n)\, d(z_1, z_2, \ldots, z_n)}{(z_1 - x_1)^{\alpha+1}(z_2 - x_2)^{\beta+1}\ldots(z_n - x_n)^{\lambda+1}}$$
$$(\alpha + \beta + \ldots + \lambda \leqq r);$$

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont les coordonnées de celui des points $A_1, A_2, \ldots, A_m$ que l'on considère; $J(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est le terme que l'on dérive; le domaine d'intégration est formé, par exemple, de n cercles, tracés dans les plans $z_1, z_2, \ldots, z_n$, avec les centres $x_1, x_2, \ldots, x_n$, et avec le rayon $\frac{\rho}{\sqrt{n}}$, où ρ est le rayon de l'hypersphère correspondante. Ce domaine est alors tout entier situé sur cette hypersphère, ce qui prouve que le terme ne dépasse pas

$$M n^{\frac{r}{2}} \rho^{-r} r! \mu_p^k.$$

On peut donc prendre

$$M' = M n^{\frac{r}{2}} \rho^{-r} r!$$

La série des termes restants est donc moindre que

$$M' \Sigma \mu_p^k.$$

Soit λ le plus grand des μ_p

$$\lambda < 1.$$

Or

$$M' \sum \mu_p^k = M' \lambda^k \sum \left(\frac{\mu_p}{\lambda}\right)^k < M' \lambda^k \sum \frac{\mu_p^2}{\lambda^2}.$$

Donc, pour k assez grand, cette somme est aussi petite que l'on veut : *ce qu'il fallait démontrer*.

10. Nous savons maintenant qu'il existe des fonctions invariantes par le groupe discontinu Γ. Nous restreindrons un peu le sens de l'expression *fonction automorphe*, que nous appliquerons désormais seulement aux fonctions qui peuvent s'obtenir comme quotients de deux fonctions Θ, et aux fonctions rationnelles de celles-ci. Cela revient à dire qu'une fonction automorphe est le quotient de deux polynomes de séries Θ, chaque terme de ces polynomes se multipliant par la même puissance du déterminant fonctionnel quand on applique aux variables les transformations de Γ.

Cette restriction paraît justifiée par cette remarque que, pour les groupes Γ dont on a poussé l'étude à un point plus avancé, les fonctions invariantes obtenues ainsi sont les plus simples de toutes.

Nous voyons que, même en se bornant à ce nouveau sens, il est possible de trouver n fonctions automorphes dont le déterminant fonctionnel ne soit pas identiquement nul.

11. *Polyèdre fondamental.* — On nomme *polyèdre fondamental* du groupe discontinu Γ un domaine P situé dans le domaine principal, et tel que tout point de D ait un transformé par Γ appartenant à P, et que le transformé par une substitution S de Γ d'un point A de P n'appartiennent pas à P, à moins que A ne soit point double de S.

Le polyèdre fondamental, s'il existe, est très indéterminé. Si nous partageons P en deux parties P' et P'', et que nous appliquions à P'' une transformation de Γ qui l'amène en P''', P' et P''' forment ensemble un polyèdre fondamental.

Mais, jusqu'à présent, rien ne nous assure de l'existence de ce polyèdre.

12. Théorème. — *Tout groupe Γ, discontinu dans le domaine principal, admet un polyèdre fondamental (pourvu cependant que l'invariant fondamental soit, par exemple, analytique dans* D *par rapport aux parties réelles et imaginaires des coordonnées des deux points dont il dépend*).

Soient $A_1, A_2, \ldots, A_m$ m points quelconques de D; m peut être quelconque, de *un* à l'infini. Soit

$$\Phi_h = I(M, A_h) \qquad (h = 1, 2, \ldots, m),$$

où I est l'invariant fondamental et M un point variable. Appliquons aux points A_h successivement toutes les substitutions S_p de Γ; soit $\Phi_k S_p$ ce que devient ainsi Φ_h.

Fixons M dans D, et soit λ un nombre compris entre λ' et λ'' [hypothèse (H, 5)]. *Il y a seulement un nombre fini de systèmes de valeurs de p et de h tels que*

$$\Phi_h S_p < \lambda.$$

En effet, quand p augmente indéfiniment, les transformés des A_h ont comme points d'accumulation uniquement des points de la frontière de D, d'après le n° 3. Donc, d'après (H, 7), les $\Phi_h S_p$ tendent vers λ'', ce qui démontre la proposition.

Donc, il y a certains systèmes de valeurs de p et de h pour lesquels $\Phi_h S_p$ atteint son minimum absolu. Il y aura en général un seul système de telles valeurs, si aucun des A_h n'est point double d'une substitution de Γ non identique, et si aucun d'eux n'est transformé en un autre par quelque substitution de Γ : en effet, même si M varie dans un ensemble fermé R, intérieur à D, il y a seulement un nombre fini de $\Phi_h S_p$ inférieurs à λ ; comme deux d'entre eux doivent être égaux pour qu'il n'y ait pas de minimum unique, cette circonstance n'a lieu que pour les points de R appartenant à certaines multiplicités.

Cela étant, une condition *nécessaire* pour que M fasse partie du polyèdre fondamental que nous cherchons à construire est que, pour l'un des $\Phi_h S_p$ correspondant au minimum, $p = 1$, S_1 étant la substitution identique.

Si pour *tous* ces $\Phi_h S_p$, $p = 1$, la condition est aussi *suffisante*.

Si le minimum est atteint pour $p = 1$ et pour diverses autres valeurs $p', p'', \ldots, p^{(k)}$ de p, on range dans P un et un seul des points obtenus en appliquant à M les substitutions inverses de $S_1, S_p, \ldots, S_{p^{(k)}}$. Le choix peut se faire en remplaçant, pour les points qui présentent cette particularité, $A_1, A_2, \ldots, A_m$ par un autre système de points; puis, pour les points sur lesquels cela ne suffirait pas, on introduirait un troisième système, et ainsi de suite. Le seul cas où le minimum reste indéfiniment atteint pour plusieurs valeurs de p est celui où M est point double d'une substitution non identique de Γ : car, pour les autres points, le nombre de dimensions de la multiplicité qu'ils forment diminue à chaque nouveau système introduit. Au bout d'un certain nombre fini d'opérations, P sera entièrement déterminé. Il est évident que c'est bien un polyèdre fondamental. *Le théorème est démontré.*

13. Le polyèdre fondamental qu'on vient de construire se nomme polyèdre fondamental *rayonné;* $A_1, A_2, \ldots, A_m$ sont ses *centres*. En toute rigueur, il faudrait aussi indiquer les centres auxiliaires qui ont remplacé $A_1, A_2, \ldots, A_m$ pour certains points de P; mais, comme il résulte de la démonstration qu'en général ces centres auxiliaires n'interviennent que pour les points-frontières de P, et comme la construction de P, pour ces points-frontières, peut s'achever souvent plus

commodément par d'autres procédés, on se bornera ordinairement à indiquer le premier système de centres.

P n'est pas forcément d'un seul tenant (linéairement connexe).

14. Si l'on applique à P successivement toutes les transformations de Γ, on a un système de polyèdres qui recouvre tout le domaine principal, et une seule fois chaque point de celui-ci autre que les points doubles des transformations non identiques de Γ.

La multiplicité $2n-1$ fois étendue qui sert de frontière commune à P et à l'un de ses transformés se nomme une *face* de P ; la portion de frontière commune à P et à D, si elle a $2n-1$ dimensions, est aussi une face, ou un système de faces.

Si nous excluons le cas où les intersections présenteraient des singularités, nous pouvons dire que les faces se rencontrent suivant des *arêtes* à $2n-2$ dimensions, celles-ci suivant des *arêtes* à $2n-3$ dimensions, et ainsi de suite, jusqu'aux *arêtes* à une dimension qui se rencontrent aux *sommets*.

Si $n=1$, on dit *polygone* au lieu de polyèdre, et *côté* au lieu de face ; il n'y a pas d'arêtes.

15. *Faces opposées*. — Si l'on sort de P en franchissant une de ses faces F, non situées sur la frontière de D, on entre dans un polyèdre fondamental P′ transformé de P par une substitution S de Γ. Appliquons à P′ la transformation S^{-1} : il vient coïncider avec P ; F, considérée comme face de P′, vient coïncider avec une face F′ de P, en général différente de F : on dit que F et F′ sont des faces *opposées* de P.

Nous renvoyons aux *Leçons sur les fonctions automorphes* pour le cas où F et F′ seraient confondues.

16. *Cycles d'arêtes, de sommets*. — On nomme *cycle d'arêtes à p dimensions* ou *cycle de sommets* un système d'arêtes à p dimensions ou de sommets de P tels que chaque élément du cycle soit transformé de l'un d'entre eux par une transformation de Γ et une seule, à moins que tous les points de cet élément ne soient points doubles d'une substitution non identique de Γ.

Nous renvoyons encore aux *Leçons sur les fonctions automorphes* pour la détermination de ces cycles et l'indication des particularités qui se présentent quand P est rayonné, et suivant que les éléments du cycle sont ou non tous situés sur la frontière du domaine principal. C'est une étude assez longue, qui conduit notamment, par la considération des cycles d'arêtes à $2n-2$ dimensions, à des conditions *nécessaires* pour qu'un polyèdre donné P soit polyèdre fondamental d'un groupe discontinu. Si l'on joint à ces conditions d'autres conditions nécessaires relatives aux cycles d'éléments à un nombre quelconque de dimensions entièrement situés sur la frontière de D, et si l'on suppose, en outre, que les arêtes à moins de $2n-2$ dimensions sont linéairement *simplement* connexes, et que D lui-même est linéairement simplement connexe, on a des conditions suffisantes.

17. On peut donner une application immédiate de la notion de polyèdre fondamental en considérant le cas où ce polyèdre ni sa frontière n'atteignent la frontière du domaine principal. Alors, $n+1$ *fonctions automorphes quelconques sont liées par une relation algébrique.*

Soient, en effet, $F_1, F_2, \ldots, F_n$, n fonctions automorphes dont le déterminant fonctionnel n'est pas identiquement nul (n° 10). Elles se comportent dans tout le polyèdre fondamental, frontière comprise, comme des fonctions rationnelles. Donc, les n équations

$$F_k = a_k \qquad (k-1, 2, \ldots, n),$$

où les a_k sont des constantes données, ont en général un nombre fini de racines communes dans ce polyèdre; exceptionnellement, les racines communes peuvent former des multiplicités analytiques [1].

Quand ces points-racines sont en nombre fini, ce nombre est constant. En effet, il ne peut varier que si l'un des points-racines entre dans le polyèdre fondamental ou en sort; mais alors un autre point-racine en sort ou y entre par la face opposée; le total n'est donc pas changé [2]. Soit m ce nombre constant.

(1) *Cf.* Poincaré, *Sur les fonctions abéliennes* (*Acta math.* t. XXVI); ce que l'illustre géomètre appelle théorème A s'applique ici presque sans modification.

(2) C'est le raisonnement employé par M. Picard dans les circonstances de ce genre; Poincaré (*Ibid.*) emploie les intégrales de Kronecker.

Soit F_{n+1} une $(n+1)^{\text{ième}}$ fonction automorphe. On peut la considérer comme fonction de $F_1, F_2, \ldots, F_n$; cette fonction a m déterminations au plus, une pour chaque point-racine. Les fonctions symétriques de ces m déterminations sont sans singularité essentielle [1]; ce sont donc des fonctions rationnelles [2]. Donc, $F_1 \cdot F_2, \ldots, F_n, F_{n+1}$ sont liées par une relation algébrique, C.Q.F.D.

18. En outre, *toutes les fonctions automorphes du groupe s'expriment rationnellement au moyen de* $n+1$ *d'entre elles* (de n dans certains cas).

En effet, nous pouvons choisir F_{n+1} de manière que ses valeurs aux m points-racines, pour un système particulier de valeurs de $F_1, F_2, \ldots, F_n$, soient différentes (n° 9). Si alors F est une fonction automorphe quelconque du groupe, on a identiquement

$$\Phi(F, F_1, F_2, \ldots, F_n) = 0,$$
$$\Psi(F, F_1, F_2, \ldots, F_{n+1}) = 0,$$

Φ et Ψ étant des polynomes; ces deux équations en F ont en général une seule racine commune, donc celle-ci est fonction rationnelle de $F_1, F_2, \ldots, F_{n+1}$.

S'il était possible de choisir $F_1, F_2, \ldots, F_n$ de manière que le nombre m des points-racines soit égal à *un*, F serait fonction rationnelle de $F_1, F_2, \ldots, F_n$.

Les fonctions $F_1, F_2, \ldots, F_{n+1}$, au moyen desquelles toutes les autres sont exprimables rationnellement, sont elles-mêmes liées par une relation algébrique

$$R(F_1, F_2, \ldots, F_{n+1}) = 0;$$

on a là une multiplicité algébrique à un point de laquelle correspond (en général) un point et un seul du polyèdre fondamental, et réciproquement.

19. Les hypothèses (H) ne spécifient rien sur l'extérieur du domaine principal. Introduisons quelques hypothèses supplémentaires pour dire quelques mots de ce qui se passe en dehors de ce domaine. Nous

(1) Poincaré, *loc. cit.*
(2) Cousin, *Acta math.*, t. XIX, 1902.

admettrons que les transformations de (Γ) sont birationnelles (de manière à ne pas introduire tout de suite des singularités essentielles). Nous supposerons en outre que, si A est un point extérieur au domaine principal, B un point de ce domaine, Σ une hypersphère de centre A (ou un domaine ouvert contenant A), le rapport des valeurs absolues en A et en B des déterminants fonctionnels des transformations de Γ qui ne deviennent pas infinis dans Σ, reste inférieur à un nombre fixe; et que cela a encore lieu si l'on remplace A par un point variable A′ d'un ensemble fermé intérieur à Σ :

$$\left|\frac{\Delta_{A'}}{\Delta_B}\right| < M,$$

Δ étant le déterminant fonctionnel; M est indépendant de A′ et de la substitution considérée. Enfin, nous pourrons supposer que l'invariant fondamental a encore un sens, et reste symétrique, quand l'un des points dont il dépend sort du domaine principal.

20. Cela étant, si un groupe Γ discontinu dans le domaine principal est tel que les infinis des déterminants fonctionnels de ses transformations ne pénètrent qu'en nombre fini dans un ensemble ouvert Σ, la convergence des séries Θ aura encore lieu dans Σ si la fonction *rationnelle* H est convenablement choisie (par exemple si H est constante); par suite, les fonctions automorphes existeront. Mais il faut remarquer que nous supposons plus que la discontinuité de Γ dans Σ, sauf si $n = 1$: car, si $n > 1$, les infinis des déterminants fonctionnels forment des multiplicités analytiques, et non des points isolés.

Il peut arriver également que l'on puisse prolonger le polyèdre fondamental à l'extérieur du domaine principal, en considérant les minima, ou les maxima, de certaines suites d'invariants fondamentaux, le ou les centres restant dans le domaine principal (ceci n'est pas indispensable).

21. Voici, brièvement indiquées, quelques-unes des complications que l'on est exposé à rencontrer hors du domaine principal [1].

---

(1) *Voir*, pour les exemples, ma Thèse de Doctorat (*Annales de l'École Normale sup.*, 1915).

Le polyèdre fondamental et ses transformés par Γ peuvent ne pas comprendre un certain ensemble de points; cet ensemble est variable avec le ou les centres choisis.

Les fonctions automorphes ont des singularités essentielles dont la position peut dépendre des fonctions *rationnelles* H qui figurent dans les séries Θ.

Ces singularités essentielles peuvent pénétrer à l'intérieur du polyèdre fondamental, sans qu'il soit possible de se débarrasser de cette particularité en modifiant la construction des fonctions automorphes.

Aucune de ces circonstances gênantes ne se présente pour les groupes de Poincaré ($n=1$); M. Picard a indiqué récemment (¹) un exemple à deux variables qui paraît assez simple à cet égard.

Il faut remarquer que ces particularités ne tiennent pas uniquement à la façon dont (Γ) se comporte en dehors du domaine principal; il y a des cas où elles tiennent au choix du domaine principal : on se rappelle que ce choix influe sur les séries Θ, puisque, pour les former, on ramène ce domaine à distance limitée, et qu'on prend (au moins dans le cas général) H borné dans ce domaine.

Considérons, en effet, le groupe

$$\left(x, y; \frac{ax+b}{cx+d}, \frac{a'y+b'}{c'y+d'}\right) \quad (ad-bc=a'd'-b'c'=1),$$

$a, b, c, d, a', b', c', d'$ étant réels (²). Ces transformations conservent les signes des coefficients de i dans x et y; en associant ces signes de toutes les manières possibles, on obtient quatre domaines ouverts, conservés par le groupe, et dans chacun desquels le groupe se comporte évidemment de la même façon. On verra plus loin que les hypothèses (H) sont satisfaites et que l'un quelconque de ces quatre domaines peut être pris pour domaine principal. Par exemple, si l'on considère le domaine

$$i(x-x_0)<0, \qquad i(y-y_0)<0$$

(¹) Picard, *Annales de l'École Normale*, 3ᵉ série, t. XXXIII. 1916, p. 363.

(²) C'est un sous-groupe invariant du groupe hyperabélien de M. Picard; *voir* la seconde Partie de ce Mémoire.

(les indices zéro servant, ici et dans tout ce travail, à distinguer les imaginaires conjuguées), on le ramène à distance limitée en posant

$$x' = \frac{x-i}{x+i}, \qquad y' = \frac{y-i}{y+i};$$

ce domaine devient, en effet,

$$x'x'_0 < 1, \qquad y'y'_0 < 1.$$

Considérons le groupe des puissances de la substitution

$$(x, y; rx, y) \qquad (r > 1),$$

ou

$$\left(x', y'; \frac{(r+1)x' + r - 1}{(r-1)x' + r + 1}, y'\right).$$

Une série Θ est

$$\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \mathrm{H}\left[\frac{(r^m+1)x' + r^m - 1}{(r^m-1)x' + r^m + 1}, y'\right] \frac{2^{2k} r^{mk}}{[(r^m-1)x' + r^m + 1]^{2k}}.$$

Les infinis du déterminant fonctionnel ont comme points d'accumulations les points des deux multiplicités

$$x' = \pm 1;$$

les infinis provenant de H s'accumulent au voisinage des mêmes multiplicités et, en outre de celles-ci,

$$y' = \beta_p,$$

les β_p étant les pôles des fonctions d'une variable

$$\mathrm{H}(1, y'), \quad \mathrm{H}(-1, y'),$$

supposées non constantes. On aperçoit ainsi des singularités essentielles mobiles, situées dans des domaines qui auraient pu être pris pour domaine principal (en dehors de ces multiplicités, la convergence uniforme a lieu).

C'est à cause de ces complications que, sauf dans le cas d'une variable, des propositions donnant de nouveaux cas, où les fonctions automorphes d'un même groupe sont liées par des relations algébriques, n'ont été trouvées que pour des groupes dont les fonctions automorphes ne se prolongent pas analytiquement hors du domaine principal. De ces derniers groupes, les uns sont complètement donnés numériquement : leur origine est ordinairement arithmétique; d'autres sont supposés seulement jouir de la propriété qui vient d'être énoncée, et de celle que leur polyèdre fondamental a un nombre fini de faces.

SECONDE PARTIE.

I. — Les groupes linéaires de Poincaré, de M. Picard, de M. Fubini.

1. Considérons un hermitien $f(y_1, y_2, \ldots, y_{n+1})$ à $n+1$ variables, de discriminant non nul, décomposable en n normes d'un signe et une de l'autre. Nous prendrons toutes les substitutions semblables de cet hermitien, et nous poserons

$$(1) \qquad x_p = y_p : y_{n+1} \qquad (p = 1, 2, \ldots, n).$$

Les variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ éprouvent alors un groupe (Γ) de substitutions linéaires fractionnaires :

$$(2) \qquad X_m = \frac{\sum_{p=1}^{n} a_{m,p} x_p + a_{m,n+1}}{\sum_{p=1}^{n} a_{n+1,p} x_p + a_{n+1,n+1}} \qquad (m = 1, 2, \ldots, n).$$

On va démontrer que *ce groupe satisfait aux hypothèses* (H). Il suffira de se borner au cas où l'hermitien est

$$(3) \qquad \sum_{p=1}^{n} y_p y_{p,0} - y_{n+1} y_{n+1,0},$$

car, en le ramenant à ce type, on fait subir aux x une transformation linéaire. Alors (Γ) conserve le domaine

$$\sum_{p=1}^{n} x_p x_{p,0} < 1, \tag{4}$$

entièrement situé à distance limitée; on verra que *c'est le domaine principal*. Nous voyons déjà que les deux premières hypothèses (H) sont satisfaites.

2. Pour vérifier la troisième hypothèse (H), calculons le déterminant fonctionnel de la transformation (2); nous n'aurons pas besoin du fait que (4) est conservé par cette transformation.

Nous considérerons, en même temps que (2), la substitution

$$Y_m = \sum_{p=1}^{n+1} a_{m,p} y_p \qquad (m = 1, 2, \ldots, m+1), \tag{5}$$

dont Δ sera le déterminant. Les x sont toujours liés aux y par (1).

Le symbole d servant à désigner les dérivations par rapport à $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_{n+1}$, et le symbole δ celles par rapport aux y, on a, φ étant une fonction quelconque,

$$\frac{d\varphi}{dx_p} = y_{n+1} \frac{\delta\varphi}{\delta x_p} \qquad (p = 1, 2, \ldots, n),$$

$$\frac{d\varphi}{dy_{n+1}} = \sum_{p=1}^{n} x_p \frac{\delta\varphi}{\delta y_p} + \frac{\delta\varphi}{\delta y_{n+1}};$$

d'où

$$\frac{\delta\varphi}{\delta y_p} = \frac{1}{y_{n+1}} \frac{d\varphi}{dx_p} \qquad (p = 1, 2, \ldots, n),$$

$$\frac{\delta\varphi}{\delta y_{n+1}} = \frac{d\varphi}{dy_{n+1}} - \sum_{p=1}^{n} x_p \frac{\delta\varphi}{\delta y_p}.$$

Donc, dans

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\delta Y_1}{\delta y_1} & \frac{\delta Y_1}{\delta y_2} & \cdots & \frac{\delta Y_1}{\delta y_{n+1}} \\ \frac{\delta Y_2}{\delta y_1} & \frac{\delta Y_2}{\delta y_2} & \cdots & \frac{\delta Y_2}{\delta y_{n+1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\delta Y_{n+1}}{\delta y_1} & \frac{\delta Y_{n+1}}{\delta y_2} & \cdots & \frac{\delta Y_{n+1}}{\delta y_{n+1}} \end{vmatrix},$$

nous pouvons remplacer les éléments de la dernière colonne par

$$\frac{\partial Y_1}{\partial y_{n+1}}, \quad \frac{\partial Y_2}{\partial y_{n+1}}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial Y_{n+1}}{\partial y_{n+1}};$$

ensuite on exprimera les autres dérivées ∂ par les dérivées d, ce qui donne

$$\Delta = y_{n+1}^{-n} \frac{\partial(Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n+1})}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_{n+1})}. \tag{6}$$

Mais

$$Y_m = X_m Y_{m+1} \qquad (m = 1, 2, \ldots, n);$$

donc

$$\frac{\partial Y_m}{\partial x_p} = \frac{\partial X_m}{\partial x_p} Y_{n+1} + X_m \frac{\partial Y_{n+1}}{\partial x_p},$$

et, X_m ne dépendant pas de y_{n+1},

$$\frac{\partial Y_m}{\partial y_{n+1}} = X_m \frac{\partial Y_{n+1}}{\partial y_{n+1}} \qquad (m - 1, 2, \ldots, n).$$

Si l'on substitue ces valeurs dans la formule (6), des simplifications se produisent et l'on trouve

$$\Delta = \frac{Y_{n+1}^n}{y_{n+1}^n} \begin{vmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x_1} & \frac{\partial X_1}{\partial x_2} & \cdots & 0 \\ \frac{\partial X_2}{\partial x_1} & \frac{\partial X_2}{\partial x_2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & . \\ \frac{\partial Y_{n+1}}{\partial x_1} & \frac{\partial Y_{n+1}}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial Y_{n+1}}{\partial y_{n+1}} \end{vmatrix};$$

ou, Y_{n+1} dépendant de y_{n+1} d'une façon linéaire et homogène,

$$\Delta = \left(\frac{Y_{n+1}}{y_{n+1}}\right)^{n+1} \frac{\partial(X_1, X_2, \ldots, X_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)},$$

ou bien

$$\frac{\partial(X_1, X_2, \ldots, X_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \frac{\Delta}{\left(\sum_{p=1}^{n} a_{n+1,p} x_p + a_{n+1,n+1}\right)^{n+1}}. \tag{7}$$

3. Ici, (3) étant conservé par (5),

$$|\Delta| = 1; \tag{8}$$

en outre

(9) $$\sum_{p=1}^{n} |a_{n+1,p}|^2 - |a_{n+1,n+2}|^2 = -1.$$

Cette dernière relation prouve que

$$\left|\frac{a_{n+1,p}}{a_{n+1,n+1}}\right| < 1 \qquad (p = 1, 2, \ldots, n).$$

Or le rapport des valeurs absolues du déterminant fonctionnel en deux points de l'ensemble fermé R [hypothèse (H, 5)] ne dépend que des $a_{n+1,p} : a_{n+1,n+1}$ et des coordonnées de ces deux points, en tout $6n$ variables réelles. Le domaine de variation de ces $6n$ variables est borné et fermé; le rapport est une fonction *continue* dans ce domaine; donc les nombres M et m existent.

4. Pour vérifier les hypothèses suivantes, nous allons tout d'abord voir que (Γ) *est transitif dans* (4).

Il suffit de voir que l'origine peut être changée par (Γ) en un point quelconque de ce domaine. Or, le transformé de l'origine par (2) a pour coordonnées

$$x_p = a_{p,n+1} : a_{n+1,n+1},$$

d'où

$$a_{p,n+1} = x_p a_{n+1,n+1}.$$

Mais

$$\sum_{p=1}^{n} |a_{p,n+1}|^2 - |a_{n+1,n+1}|^2 = -1,$$

donc

$$\left(\sum_{p=1}^{n} |x_p|^2 - 1\right) |a_{n+1,n+1}|^2 = -1;$$

cette relation peut être satisfaite, le coefficient de $|a_{n+1,n+1}|^2$ étant par hypothèse négatif. Les $a_{p,n+1}$ étant ainsi obtenus, on trouve sans difficulté les autres coefficients, qui satisfont aux relations

$$\sum_{p=1}^{n} |a_{m,p}|^2 - |a_{m,n+1}|^2 = 1 \qquad (m = 1, 2, \ldots, n),$$

$$\sum_{p=1}^{n} a_{l,p} a_{m,p,0} - a_{l,n+1} a_{m,n+1,0} = 0 \qquad (l, m = 1, 2, \ldots, n+1;\ l \neq m);$$

les conditions de possibilité sont toutes satisfaites.

5. Ce point acquis, on va voir que

$$(10) \qquad \frac{\left|\sum_{p=1}^{n} y_p \eta_{p,0} - y_{n+1}\eta_{n+1,0}\right|^2}{\left(\sum_{p=1}^{n} y_p y_{p,0} - y_{n+1} y_{n+1,0}\right)\left(\sum_{p=1}^{n} \eta_p \eta_{p,0} - \eta_{n+1}\eta_{n+1,0}\right)}$$

jouit des propriétés de l'invariant fondamental.

Tout d'abord (10) ne dépend évidemment que de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et des

$$\xi_p = \eta_p : \eta_{n+1}.$$

En outre, c'est une fonction réelle, symétrique, continue et invariante : c'est l'hypothèse (H, 4).

Pour vérifier (H, 5), il suffit, à cause de la transitivité, de placer le centre $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ à l'origine; la multiplicité (1) de l'hypothèse est alors

$$(11) \qquad \sum_{p=1}^{n} |x_p|^2 = 1 - \frac{1}{\lambda};$$

l'hypothèse est évidemment satisfaite, λ' étant égal à *un*, et λ'' à l'infini.

L'hypothèse (H, 6) se vérifie tout de suite aussi sur (11).

Quant à (H, 7), elle est évidente sur (10).

Ainsi les hypothèses (H) sont toutes satisfaites.

On vérifie aussi facilement les hypothèses du n° 19 (première partie), regardant l'extérieur du domaine principal.

6. On a encore la propriété intéressante suivante :

Un groupe Γ, d'une infinité énumérable de substitutions du type considéré ici, et qui ne contient pas de substitution infinitésimale, est discontinu dans le domaine principal.

On dit qu'un groupe contient une substitution infinitésimale quand, quel que soit le nombre positif ε, il contient une substitution dont les coefficients diffèrent de ceux de la substitution identique de moins de ε en valeur absolue.

Il suffit de prouver qu'un groupe qui n'est pas discontinu dans le domaine principal contient une substitution infinitésimale. Pour cela, on considère les points O ($x_1 = x_2, \ldots, = x_n = 0$) et A_k (tous les x nuls, sauf que $x_k = 1:2$), et l'on démontre que les coefficients $a_{m,p}$ d'une substitution de (Γ) peuvent être considérés comme des fonctions continues des coordonnées des transformés de ces $n+1$ points. Si le groupe Γ n'est pas discontinu, il transforme les points O, A_1, $A_2, \ldots, A_n$ en des systèmes de points tels que les transformés de O aient O pour point d'accumulation, pendant que $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ont d'autres points d'accumulation situés sur l'hypersphère

$$\sum_{p=1}^{n} |x_p|^2 = 1:4.$$

Dans ces conditions, la continuité des $a_{m,n}$ est uniforme, et l'on obtient immédiatement les substitutions infinitésimales. Le calcul complet se trouve dans les *Leçons* citées.

Cette proposition a été énoncée et démontrée par M. Fubini d'une manière plus générale. Si l'on essaie d'appliquer le même raisonnement aux groupes (Γ) de la première Partie, on est conduit à exprimer les paramètres des substitutions de (Γ) en fonctions des coordonnées des transformés d'un nombre suffisant de points du domaine principal. Mais il n'est pas évident que le système de points d'accumulation auquel on est conduit comme ci-dessus soit, dans le cas général, un transformé du système initial de points.

Ce théorème prouve immédiatement la discontinuité dans le domaine principal des groupes obtenus en partant d'un hermitien $f(y_1, y_2, \ldots, y_{n+1})$ du type indiqué et à coefficients entiers d'un corps quadratique imaginaire k : on prend pour Γ les substitutions semblables à coefficients entiers dans k [1].

7. On verra encore, dans les *Leçons*, que, si $n > 1$, on ne peut pas prendre d'autre domaine principal que celui indiqué; si $n = 1$, on peut

---

(1) *Voir*, pour ces groupes, PICARD, *Acta math.*, t. I et V; *Ann. de l'Éc. Norm. sup.*, 3e série, t. I, 1884.

prendre aussi

$$|x_1|^2 > 1,$$

On démontre aussi au même endroit que l'algorithme considéré ici, appliqué à des hermitiens de discriminant non nul et d'un autre type que celui qui a été indiqué, conduit à des groupes qui ne satisfont pas aux hypothèses (H). Cependant, si l'hermitien est défini, le groupe obtenu peut se relier à un groupe qui satisfait à ces hypothèses : on trouve alors que les groupes discontinus qu'on peut obtenir ainsi ne comprennent qu'un nombre fini de substitutions.

8. Si $n = 1$, les groupes considérés dans ce Chapitre coïncident avec les groupes de Poincaré, mais ce point de vue est dû à M. Picard. Si $n = 2$, on obtient des groupes considérés en premier lieu par M. Picard; le cas de $n > 2$ est dû à M. Fubini.

9. Considérons l'expression différentielle, évidemment invariante

$$\frac{\left|\sum_{p=1}^{n} y_{p,0}\, dy_p - y_{n+1,0}\, dy_{n+1}\right|^2 - \left(\sum_{p=1}^{n} |y_p|^2 - |y_{n+1}|^2\right)\left(\sum_{p=1}^{n} |dy_p|^2 - |dy_{n+1}|^2\right)}{\left(\sum_{p=1}^{n} |y_p|^2 - |y_{n+1}|^2\right)^2};$$

on suppose, en l'écrivant, qu'on a affaire à l'hermitien (3). On peut démontrer qu'elle ne dépend que des x et de leurs différentielles. En effet, le numérateur est le produit des matrices

$$-\begin{Vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n & -y_{n+1} \\ dy_1 & dy_2 & \dots & dy_n & -dy_{n+1} \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} y_{1,0} & y_{2,0} & \dots & y_{n+1,0} \\ dy_{1,0} & dy_{2,0} & \dots & dy_{n+1,0} \end{Vmatrix};$$

on peut donc le mettre sous la forme d'une somme de produits de déterminants du second ordre tels que

$$\begin{vmatrix} y_p & y_q \\ dy_p & dy_p \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} y_{p,0} & y_{q,0} \\ dy_{p,0} & dy_{p,0} \end{vmatrix};$$

sur cette nouvelle expression, on voit qu'on peut combiner linéairement les *lignes* des matrices comme celles de déterminants. Or

$$y_p = x_p y_{n+1}, \qquad dy_p = x_p\, dy_{n+1} + y_{n+1}\, dx_p \qquad (p = 1, 2, \ldots, n);$$

on voit ainsi qu'on peut, dans notre invariant différentiel, remplacer y_p et dy_p $(p = 1, 2, \ldots, n)$ par x_p et dx_p, y_{n+1} par 1, dy_{n+1} par 0. L'invariant est donc

$$\frac{\left|\sum_{p=1}^{n} x_{p,0}\, dx_p\right|^2 + \left(1 - \sum_{p=1}^{n} |x_p|^2\right)\sum_{p=1}^{n} |dx_p|^2}{\left(1 - \sum_{p=1}^{n} |x_p|^2\right)^2}.$$

Si $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est dans le domaine principal, cet invariant est, par rapport aux différentielles des parties réelles et imaginaires des x, une forme quadratique définie : car, si $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ vient à l'origine, il devient

$$\sum_{p=1}^{n} |dx_n|^2.$$

Cet invariant joue un grand rôle dans les travaux de M. Fubini.

De l'existence de cet invariant, on déduit l'existence d'intégrales invariantes de tous les ordres de multiplicité, de 1 à $2n$, en s'appuyant sur le théorème algébrique suivant, qu'on trouvera dans les *Leçons* citées :

Soit la substitution linéaire

$$\left(x_m;\ \sum_{p=1}^{n} a_{m,p}\, x_p\right)$$

qui change la forme quadratique

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{m=1}^{n}\ \sum_{p=1}^{n} A_{m,p}\, x_m x_p$$

en

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{m=1}^{n}\ \sum_{p=1}^{n} B_{m,p}\, x_m x_p.$$

Considérons les variables à r indices ($1 \leqq r \leqq n$) $z_{\alpha,\beta,\ldots,\delta}$, *qui changent de signe quand on échange deux indices* (leur nombre est celui des combinaisons de n objets r à r, car les indices peuvent varier de 1 à n). *La substitution*

$$\left(z_{\alpha,\beta,\ldots,\delta};\ \frac{1}{r!}\sum_{\lambda=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{n}\cdots\sum_{\varpi=1}^{n}\begin{vmatrix} a_{\alpha,\lambda} & a_{\alpha,\mu} & \ldots & a_{\alpha,\varpi} \\ a_{\beta,\lambda} & a_{\beta,\mu} & \ldots & a_{\beta,\varpi} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{\delta,\lambda} & a_{\delta,\mu} & \ldots & a_{\delta,\varpi} \end{vmatrix} z_{\lambda,\mu,\ldots,\varpi} \right)$$

change la forme quadratique

$$\left(\frac{1}{r!}\right)^2 \sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n}\cdots\sum_{\delta=1}^{n}\sum_{\lambda=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{n}\cdots\sum_{\varpi=1}^{n}\begin{vmatrix} A_{\alpha,\lambda} & A_{\alpha,\mu} & \ldots & A_{\alpha,\varpi} \\ A_{\beta,\lambda} & A_{\beta,\mu} & \ldots & A_{\beta,\varpi} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{\delta,\lambda} & A_{\delta,\mu} & \ldots & A_{\delta,\varpi} \end{vmatrix} z_{\alpha,\beta,\ldots,\delta}\, z_{\lambda,\mu,\ldots,\varpi}$$

en la forme analogue où les A *sont remplacés par les* B.

Pour appliquer ce théorème à notre objet, on fait jouer aux différentielles des parties réelles et imaginaires de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ le rôle des variables x du théorème, et aux éléments d'intégrale d'ordre r

$$d(x'_1, x'_2, \ldots, x'_r) \qquad (x_p = x'_p + i x''_p)$$

ou autres analogues où les x' et les x'' sont mêlés d'une façon quelconque, le rôle des variables z du théorème.

En particulier, l'intégrale invariante d'ordre $2n$

$$\int^{(2n)} \frac{d(x'_1, x''_1, x'_2, \ldots, x''_n)}{\left(1 - \sum_{p=1}^{n} |x_p|^2\right)^{n+1}}$$

a été employée, pour $n = 2$, par M. Picard. Poincaré a annoncé [1], pour $n = 2$, l'existence des intégrales invariantes doubles et triples, et donné explicitement l'intégrale simple.

Toutes ces intégrales invariantes ont un sens quand la multiplicité d'intégration est dans le domaine principal, car si la forme

---

(1) Poincaré, *Œuvres*, t. II, p. 62.

$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de notre théorème algébrique est définie, il en est de même de la forme relative aux variables z.

II. — Groupes quadratiques, comprenant les groupes hyperabéliens.

1. Considérons une forme quadratique réelle, à $n+2$ variables, de discriminant non nul, décomposable en n carrés d'un signe et *deux* de l'autre; nous l'écrirons pour plus de commodité

$$(1) \qquad y_{n+1}y_{n+2} - \varphi(y_1, y_2, \ldots, y_n),$$

φ ayant un carré positif et un seul. Posons

$$(2) \qquad x_p = y_p : y_{n+2} \qquad (p = 1, 2, \ldots, n+1).$$

Aux substitutions semblables réelles de (1) correspondent des substitutions linéaires fractionnaires pour les x. Si, pour le point initial,

$$(3) \qquad x_{n+1} = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

cette relation subsiste pour le point transformé. En nous bornant aux valeurs des x qui satisfont à (3), nous faisons ainsi correspondre aux substitutions sur les y

$$(4) \qquad \left(y_m; \sum_{p=1}^{n+2} a_{m,p}\, y_p\right) \qquad (m = 1, 2, \ldots, n+2)$$

une substitution sur les x

$$(5) \qquad \left\{ X_m = \frac{\displaystyle\sum_{p=1}^{n} a_{m,p}\, x_p + a_{m,n+1}\, \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) + a_{m,n+2}}{\displaystyle\sum_{p=1}^{n} a_{n+1,p}\, x_p + a_{n+2.n+1}\, \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) + a_{n+2,n+1}} \right. \qquad (m = 1, 2, \ldots, n).$$

Ces formules entraînent

$$\varphi(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \frac{\sum_{p=1}^{n} a_{n+1,p}\,x_p + a_{n+1,n+1}\,\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) + a_{n+1,n+2}}{\sum_{p=1}^{n} a_{n+2,p}\,x_p + a_{n+2,n+1}\,\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) + a_{n+2,n+2}}.$$

Ces transformations (5) se réduisent à des substitutions linéaires fractionnaires si $n = 1$; mais pour $n > 1$, ce sont des transformations birationnelles quadratiques.

Le groupe (Γ) que nous considérons dans cette section est un sous-groupe de celui des transformations (5); on va le définir complètement dans un instant.

2. Les substitutions (4) conservent évidemment l'inégalité

$$(6)\qquad y_{n+1}\,y_{n+2,0} + y_{n+1,0}\,y_{n+2} - \sum_{p=1}^{n} y_{p,0}\,\frac{\partial\varphi}{\partial y_p} < 0.$$

Pour voir ce que cela donne avec les variables x, nous pouvons poser

$$\varphi = y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 - \ldots - y_n^2.$$

Alors, si

$$x_p = x'_p + i x''_p \qquad (p = 1, 2, \ldots, n+1),$$

et si (3) est vérifiée, l'inégalité (6) devient

$$(7)\qquad x''^2_1 - x''^2_2 - x''^2_3 - \ldots - x''^2_n > 0.$$

Ce domaine (7), conservé par (5), n'est évidemment pas linéairement connexe, mais se partage en deux régions linéairement connexes : dans l'une de celles-ci x''_1 est positif ; dans l'autre x''_1 est négatif.

Parmi les transformations (5), les unes échangent ces deux régions, les autres les font revenir chacune sur elle-même : ces dernières constituent un groupe, *qui sera, par définition, le groupe* (Γ).

Disons tout de suite que, pour $n = 1$, nous avons de nouveau le groupe de Poincaré, et que c'est là le propre point de vue du célèbre mathématicien ; pour $n=2$, c'est le groupe hyperabélien, que M. Picard a considéré de cette manière dès son premier Mémoire (¹); pour $n=3$, on retrouve les groupes qui font le sujet de ma Thèse de Doctorat (²).

3. On va voir que, quel que soit n, (Γ) *satisfait* aux hypothèses (H).

Le domaine principal D sera défini par l'inégalité (7) jointe à

$$(8)\qquad x''_1 > 0.$$

On peut le ramener à distance bornée par la transformation birationnelle

$$(9)\qquad z_1 = \frac{1}{x_1+i}, \qquad z_p = \frac{1}{x_1+x_p+i} \qquad (p=2, 3, \ldots, n).$$

car, dans D, chacune des variables z est inférieure à *un* en valeur absolue.

Donc, les hypothèses (H, 1 et 2) sont satisfaites.

4. Calculons le déterminant fonctionnel, pour vérifier (H, 3).

Nous désignerons par des majuscules les variables transformées; le symbole δ désignera ici les dérivations par rapport aux variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$, non liées par (3); ∂ désignera les dérivations par rapport à $x_1, x_2, \ldots, x_n$, (3) ayant lieu.

Nous avons, d'après la première section,

$$(10)\qquad \frac{\delta(X_1, X_2, \ldots, X_{n+1})}{\delta(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})} = \Delta\left(\frac{y_{n+2}}{Y_{n+2}}\right)^{n+2},$$

Δ étant le déterminant de (4), c'est-à-dire ± 1. Mais, f étant une fonction quelconque,

$$\frac{\partial f}{\partial x_p} = \frac{\delta f}{\delta x_p} - \frac{\delta f}{\delta x_{n+1}}\varphi'_{x_p} \qquad (p=1, 2, \ldots, n);$$

alors, dans le premier membre de (10), on peut remplacer les

(¹) Picard, *Journal de Math.*, 4ᵉ série, t. I, 1885.

(²) G. Giraud, *Ann. Éc. Norm. sup.*, 3ᵉ série, t. XXXII, 1915.

dérivées δ, par rapport à $x_1, x_2, \ldots, x_n$, par les dérivées ∂. De plus

$$\frac{\partial X_{n+1}}{\partial x_p} = \sum_{m=1}^{n} \varphi'_{X_m} \frac{\partial X_m}{\partial x_p} \qquad (p + 1, 2, \ldots, n);$$

donc, le premier membre de (10) peut s'écrire

$$\frac{\partial(X_1, X_2, \ldots, X_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \left[\frac{\delta X_{n+1}}{\delta x_{n+1}} - \sum_{m=1}^{n} \varphi'_{X_m} \frac{\delta X_m}{\delta x_{n+1}} \right].$$

Le crochet s'écrit aussi

$$\frac{\delta}{\delta x_{n+1}} [X_{n+1} - \varphi(X_1, X_2, \ldots, X_n)]$$

ou

$$\lim_{x_{n+1}=\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \frac{X_{n+1} - \varphi(X_1, X_2, \ldots, X_n)}{x_{n+1} - \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \left(\frac{y_{n+2}}{Y_{n+2}}\right)^2.$$

En comparant avec (10), nous obtenons

$$(11) \quad \frac{\partial(X_1, X_2, \ldots, X_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \Delta \left(\frac{y_{n+2}}{Y_{n+2}}\right)^n = \frac{\Delta}{\left[\sum_{p=1}^{n} a_{n+2,p} x_p + a_{n+2,n+1} \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) + a_{n+2,n+2} \right]^n}.$$

Ce qui intervient dans (H, 3), c'est

$$\frac{\partial(Z_1, Z_2, \ldots, Z_n)}{\partial(z_1, z_2, \ldots, z_n)},$$

les z étant donnés par (9); ceci s'écrit encore

$$\frac{(x_1 + i)^2 (x_1 + x_2 + i)^2 \ldots (x_1 + x_p + i)^2}{(X_1 + i)^2 (X_1 + X_2 + i)^2 \ldots (X_1 + X_p + i)^2} \frac{\partial(X_1, X_2, \ldots, X_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}.$$

On vérifie facilement [1] que le rapport des valeurs absolues de chaque facteur en deux points de l'ensemble fermé R intérieur à D reste compris entre deux nombres positifs fixes. Donc il en est de même pour le produit, et (H, 3) est vérifié.

---

[1] *Cf.* ma Thèse ou les *Leçons* citées.

5. Pour vérifier les hypothèses suivantes, nous démontrerons encore que (Γ) est *transitif dans* D.

Tout d'abord (Γ) comprend la substitution qui consiste à augmenter chacun des x d'un nombre réel arbitraire; on le vérifie tout de suite. On peut donc amener un point quelconque $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de D à une position où les x soient purement imaginaires. Comme on est dans D, on vérifie tout de suite qu'on peut trouver alors une autre substitution de (Γ) annulant tous les x, sauf x_1, qui prendra la valeur i. La transitivité est ainsi vérifiée.

6. Les expressions suivantes,

$$\left| y_{n+1,0}\eta_{n+2} + y_{n+2,0}\eta_{n+1} - 2y_{1,0}\eta_1 + 2\sum_{p=2}^{n} y_{p,0}\eta_p \right|^2,$$

$$\left| y_{n+1}\ \eta_{n+2} + y_{n+2}\ \eta_{n+1} - 2y_1\ \eta_1 + 2\sum_{p=2}^{n} y_p\eta_p \right|^2,$$

ainsi que le premier membre de (6) et que l'expression analogue dépendant des η, sont invariantes par nos substitutions On peut en tirer plusieurs invariants fondamentaux; nous vérifierons seulement que

$$(12)\qquad \frac{\left\{\begin{aligned} &\left| y_{n+1,0}\eta_{n+2} + y_{n+2,0}\eta_{n+1} - 2y_{1,0}\eta_1 + 2\sum_{p=2}^{n} y_{p,0}\eta_p \right|^2 \\ +&\left| y_{n+1}\ \eta_{n+2} + y_{n+2}\ \eta_{n+1} - 2y_1\ \eta_1 + 2\sum_{p=2}^{n} y_p\eta_p \right|^2 \end{aligned}\right\}}{\left\{\begin{aligned} &\left(y_{n+1,0}y_{n+2} + y_{n+2,0}y_{n+1} - 2y_1y_{1,0} + 2\sum_{p=2}^{n} y_py_{p,0} \right) \\ \times&\left(\eta_{n+1,0}\eta_{n+2} + \eta_{n+2,0}\eta_{n+1} - 2\eta_1,\eta_{1,0} + 2\sum_{p=2}^{n} \eta_p\eta_{p,0} \right) \end{aligned}\right\}}$$

en est un.

L'hypothèse (H, 4) se vérifie sans calcul. Pour vérifier (H, 5), nous pouvons, d'après la transitivité de (Γ), placer le point $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$

$$\xi_m = \eta_m : \eta_n + 2 \qquad (m = 1, 2, \ldots, n).$$

en $\xi_1 = i$, $\xi_2 = \xi_3 = \ldots = \xi_n = 0$. La multiplicité (1) de l'hypothèse est alors

$$(13)\quad \frac{|\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) - 1 + 2ix_1|^2 + |\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) - 1 - 2ix_1|^2}{16(x_1''^2 - x_2''^2 - \ldots - x_n''^2)} = \lambda.$$

Soit $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ un point de D; appliquons-lui une substitution de point double $(i, 0, \ldots, 0)$: le point reste situé du même côté de (13). En particulier, sans changer y_1, y_{n+1}, y_{n+2}, prenons une substitution conservant

$$y_2^2 + y_3^2 + \ldots + y_n^2;$$

nous pouvons en disposer de manière à annuler $x'_3, x'_4, \ldots, x'_n, x''_4, x''_5, \ldots, x''_n$: le point initial est amené dans une position particulière où x_1, x_2, x_3 sont les seules coordonnées non nulles; comme, d'après les propriétés des substitutions orthogonales, les coefficients de la transformation peuvent se ramener d'une façon continue à ceux de la transformation identique, on peut considérer que le point initial est venu dans cette position par un chemin continu ne rencontrant pas (13). On est ramené ainsi à vérifier (H, 5) pour $n = 3$: cela est fait dans ma Thèse ou dans les *Leçons* citées; λ' est égal à *un*, λ'' à l'infini.

Pour vérifier (H, 6), on remarque que, sur (13), $x_1''^2 - \ldots - x_n''^2$ est limité supérieurement, et qu'il en est de même tant que λ reste inférieur à un nombre fixe. Alors on écrit (13) sous la forme

$$|\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) + 1|^2 + 4\sum_{p=2}^{n} |x_p|^2 = 8(\lambda - 1)(x_1''^2 - \ldots - x_n''^2),$$

où l'hypothèse (H, 6) est évidente.

Quant à (H, 7), elle se voit sur (12).

Ainsi les hypothèses (H) sont satisfaites.

Les hypothèses de la première partie, relatives à l'extérieur du domaine principal, le sont également.

7. On peut démontrer (voir *Leçons*) que, pour $n > 2$, il est impossible de prendre un autre domaine principal que celui qu'on a indiqué

ou son imaginaire conjugué. Si $n = 2$ et si

$$\varphi(x_1, x_2) = -x_1 x_2,$$

les plans des variables x_1 et x_2 se partagent chacun en deux demi-plans, qu'on peut associer de toutes les manières possibles pour former le domaine principal, à condition de se borner aux substitutions qui conservent les demi-plans associés. Si $n = 1$, le domaine principal indiqué et son conjugué remplissent tout le plan, sauf l'axe réel.

On démontre aussi que, si l'on applique l'algorithme de cette section à des formes quadratiques de discriminant non nul et qui ne soient pas du type indiqué, le groupe obtenu ne satisfait pas aux hypothèses (H). Cependant, si la forme quadratique est définie, le groupe peut se *prolonger* (au sens de la théorie des groupes) de manière à y satisfaire : on trouve alors que les groupes discontinus de cette dernière sorte comprennent seulement un nombre fini de substitutions.

8. *Un groupe* Γ (du type de cette section) *qui ne comprend pas de substitution infinitésimale est discontinu dans* D.

On le démontre en constatant que les paramètres d'une substitution de (Γ) s'expriment en fonctions continues des coordonnées des transformés des points $A_p[x_p = i, x_1 = 2i, x_m = 0 \text{ si } (m-1)(m-p) \neq 0]$

$$(p = 2, 3, \ldots, n), \quad A_1(x_1 = i, x_2 = \ldots = x_n = 0), \quad A_{n+1}(x_1 = 2i, x_2 = \ldots = x_n = 0).$$

Ce théorème prouve immédiatement la discontinuité des groupes Γ obtenus en considérant les substitutions semblables à coefficients entiers des formes quadratiques du type voulu et à coefficients entiers (1).

9. L'invariant différentiel suivant permet d'appliquer aux groupes

(1) *Cf.* POINCARÉ, *Œuvres*, t. II, p. 463. — PICARD, *Journal de Math.*, 4e série, t. I, 1885. — GIRAUD, *Ann. Éc. Norm. sup.*, 3e série, t. XXXII, 1915, et t. XXXIII, 1916.

de cette section les raisonnements de M. Fubini :

$$\frac{\left\{\begin{array}{l}\left|y_{n+1,0}\,dy_{n+2}+y_{n+2,0}\,dy_{n+1}-2y_{1,0}\,dy_1+2\sum\limits_{p=2}^{n}y_{p,0}\,dy_p\right|^2\\ -\left(y_{n+1,0}\,y_{n+2}+y_{n+2,0}\,y_{n+1}-2\,|y_1|^2+2\sum\limits_{p=2}^{n}|y_p|^2\right)\left(dy_{n+1,0}\,dy_{n+2}\right.\\ \qquad\qquad\left.+\,dy_{n+2,0}\,dy_{n+1}-2\,|dy_1|^2+2\sum\limits_{p=2}^{n}|dy_p|^2\right)\end{array}\right\}}{\left(y_{n+1,0}\,y_{n+2}+y_{n+2,0}\,y_{n+1}-2\,|y_1|^2+2\sum\limits_{p=2}^{n}|y_p|^2\right)^2}.$$

On voit, comme dans la première section, que l'on peut remplacer y_p et dy_p par x_p et dx_p $(p=1, 2, \ldots, n+1)$, y_{n+2} par 1, dy_{n+2} par 0. Si l'on tient compte, en outre, de la valeur de x_{n+1}, cet invariant s'écrit

$$\frac{2\left|x_1''\,dx_1-\sum\limits_{p=2}^{n}x_p''\,dx_p\right|^2-\left(x_1''^2-\sum\limits_{p=2}^{n}x_p''^2\right)\left(|dx_1|^2-\sum\limits_{p=2}^{n}|dx_p|^2\right)}{2\left(x_1''^2-\sum\limits_{p=2}^{n}x_p''^2\right)^2}.$$

Nous avons à vérifier que, dans D, c'est une forme hermitienne définie par rapport aux différentielles. Pour cela, nous plaçons $(x_1, x_p, \ldots, x_n)$ en $(x_1=i,\ x_2=x_3=\ldots=x_n=0)$; l'invariant est alors

$$\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{n}|dx_p|^2;$$

la vérification est faite.

Nous pouvons donc encore affirmer l'existence d'intégrales invariantes de tous les ordres de 1 à $2n$. Celle d'ordre $2n$

$$\int^{(2n)}\frac{d(x_1', x_1'', \ldots, x_n'')}{(x_1''^2-x_2''^2-\ldots-x_n''^2)^n}$$

a été, pour $n=2$, employée par M. Picard.

III. — Groupes formés de plusieurs autres se prolongeant.

1. Soient (Γ_1), (Γ_2), ..., (Γ_r) des groupes à n_1, n_2, ..., n_r variables, satisfaisant aux hypothèses (H). Soient $x_{q,m}$ les variables du groupe (Γ_q) $(m = 1, 2, \ldots, n_q)$. Nous formons un groupe (Γ) à $n_1 + n_2 + \ldots + n_r$ variables en réunissant en un seul système les formules générales des substitutions de (Γ_1), (Γ_2), ..., (Γ_r). Si quelques-uns des groupes (Γ_1), (Γ_2), ..., (Γ_r) ne diffèrent que par les noms des variables, nous admettrons, en outre, dans (Γ) les substitutions qui consistent à échanger les variables d'un de ces groupes avec celles d'un autre, ainsi que les combinaisons de ces dernières substitutions entre elles et avec les précédentes.

On va démontrer que (Γ) *satisfait aux hypothèses* (H).

2, Soit D_q le domaine principal de (Γ_q). Le domaine principal D de (Γ) se projettera sur l'espace $(x_{q,1}, x_{q,2}, \ldots, x_{q,n_q})$ suivant D_q : tout point dont les r projections sur ces r espaces sont respectivement intérieures à D_1, D_2, ..., D_q est dit appartenir à D.

En effet, si l'on effectue sur les r systèmes de variables les subtitutions qui amènent D_1, D_2, ..., D_r à distance bornée, D est ramené à distancc bornée. De plus D est évidemment linéairement connexe. En outre, il est invariant par (Γ). Les hypothèses (H, 1 et 2) sont donc satisfaites.

3. Le déterminant fonctionnel d'une substitution de (Γ) est le produit des déterminants des substitutions composantes de (Γ_1), (Γ_2), ..., (Γ_r) multiplié par une puissance de -1 si quelques-uns des systèmes de variables sont échangés. On en conclut immédiatement que (H, 3) est satisfaite.

4. Soit I_q l'invariant fondamental de (Γ_q); soient λ'_q et λ''_q ses limites d'oscillation dans D_q.

$$I = \sum_{q=1}^{r} \frac{I_q - \lambda'_q}{\lambda''_q - I_q}$$

est un invariant fondamental de (Γ); si λ''_q est infini, le terme correspondant de la somme précédente est à remplacer par $I_q - \lambda'_q$.

En effet, l'hypothèse (H, 4) est évidemment satisfaite.

Pour (H, 5), λ' et λ'' sont à remplacer par zéro et l'infini. En effet, si l'on considère la multiplicité

$$I = \lambda > 0,$$

on voit qu'elle a des points dans D en décomposant λ en r nombres positifs $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$; comme l'équation

$$\frac{I_q - \lambda'_q}{\lambda''_q - I_q} = \lambda_q$$

donne une valeur de I_q comprise entre λ'_q et λ''_q, la vérification est faite. Chacune des régions

$$I > \lambda, \qquad I < \lambda$$

est linéairement connexe. En effet, prenons, par exemple, la seconde; si $\lambda_1, \lambda_1, \ldots, \lambda_r$ sont les valeurs des différents termes de I, chacun de ces termes peut être annulé en faisant décrire au point variable un chemin continu, et sans que, le long de ce chemin, la valeur de ce terme dépasse jamais sa valeur initiale. (H, 5) est donc satisfaite.

(H, 6) est presque évidente, car, si λ tend vers o, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ tendent vers o aussi et, par suite, I_q tend vers λ'_q.

Quant à (H, 7), elle est entièrement évidente.

Les hypothèses (H) *sont donc vérifiées.* On vérifierait de même les hypothèses relatives à l'extérieur du domaine principal, en les supposant vraies pour $(\Gamma_1), (\Gamma_2), \ldots, (\Gamma_r)$.

5. En particulier, les (Γ_q) peuvent être pris parmi les groupes des deux premières sections de cette Partie. Dans ce cas, l'absence de substitution infinitésimale suffit à prouver la discontinuité dans D.

En outre, ces groupes auront des intégrales invariantes de tous les ordres de multiplicité possibles : car en ajoutant purement et simplement les invariants différentiels des (Γ_q) qui sont des formes quadratiques définies de différentielles, on a un invariant du même type pour (Γ).

On retrouve ainsi d'une deuxième manière les groupes hyperabéliens de M. Picard.

NOTE.

Sur quelques groupes automorphes satisfaisant ou non aux hypothèses (H).

On peut déterminer, dans un groupe (Γ) satisfaisant aux hypothèses (H), un sous-groupe composé des substitutions qui satisfont à certaines conditions supplémentaires. On va voir que ce sous-groupe peut présenter des propriétés intéressantes nouvelles. On pourra aussi considérer un groupe *semblable* à ce sous-groupe, mais comportant moins de variables indépendantes : dans certains exemples, ce groupe ne satisfait pas aux hypothèses (H); néanmoins, le lien qui le rattache à un groupe y satisfaisant permet, au moins dans certains cas, de construire des fonctions automorphes correspondant à un groupe discontinu de cette sorte.

1. Les deux catégories de groupes que nous allons citer d'abord sont des généralisations d'un groupe d'origine arithmétique étudié par M. Picard [1].

Considérons, en premier lieu, la forme quadratique

$$y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2 - y_{n+1}^2, \tag{1}$$

avec un carré négatif. Pour toute transformation semblable *réelle* de (1), les variables

$$x_m = y_m : y_{n+1} \qquad (m = 1, 2, \ldots, n)$$

subissent des transformations linéaires, formant un groupe (Γ). Ce groupe peut être considéré comme un sous-groupe de ceux de la Section I de la deuxième partie de ce Mémoire, car il conserve l'hermitien

$$y_1 y_{1,0} + y_2 y_{2,0} + \ldots + y_n y_{n,0} - y_{n+1} y_{n+1,0};$$

[1] Picard, *Ann. Scient. de l'Éc. Norm. sup.*, 3e série, t. XXXIII, 1916, p. 363.

cela suffit à nous montrer que les hypothèses (H) sont satisfaites, le domaine principal étant

$$\sum |x_m|^2 < 1. \tag{2}$$

Mais il y a avantage à rattacher ce groupe à ceux de la Section II. Posons

$$y_{n+2}^2 = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2 - y_{n+1}^2;$$

si aux équations qui définissent une substitution semblable de (1) on ajoute l'équation

$$Y_{n+2} = y_{n+2},$$

on a une substitution semblable de

$$y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2 - y_{n+1}^2 - y_{n+2}^2; \tag{3}$$

et comme, pour les valeurs considérées des y, cette forme est nulle, on est bien dans le cas de la Section II. Les variables non homogènes à introduire seraient, par exemple,

$$z_m = y_m \ : (y_n - y_{n+2}) \qquad (m = 1, 2, \ldots, n-1),$$
$$z_n = y_{n+1} : (y_n - y_{n+2}).$$

Les x sont fonctions rationnelles des z :

$$x_m = z_m : z_n \qquad (m = 1, 2, \ldots, n-1),$$
$$x_n = (z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_{n-1}^2 - z_n^2 + 1) : 2z_n;$$

et les z dépendent rationnellement des x et de

$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 - 1}. \tag{4}$$

Si le groupe ne contient pas de substitution infinitésimale, la discontinuité et l'existence des fonctions automorphes sont assurées dans le *domaine principal*

$$y_1 y_{1,0} + y_2 y_{2,0} + \ldots + y_n y_{n,0} - y_{n+1} y_{n+1,0} - y_{n+2} y_{n+2,0} < 0$$

ou, en revenant aux x,

$$|x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 - 1| - (x_1, x_{1,0} + x_2, x_{2,0} + \ldots + x_n, x_{n,0} - 1) > 0; \tag{5}$$

ce domaine est plus vaste que (2). Comme dans ce domaine y_{n+2} ne peut s'annuler, nous sommes certains que le radical (4) n'empêche pas les fonctions automorphes des z d'être fonctions *uniformes* des x. Si l'on envisageait le prolongement analytique hors de ce domaine, il faudrait, de chaque substitution semblable de (1), en faire deux de (3), en adjoignant successivement les équations

$$Y_{n+2} = y_{n+2}, \qquad Y_{n+2} = -y_{n+2}.$$

On vérifiera, à la suite de M. Picard, que les séries Θ formées à la manière de la Section I, convergent dans tout le domaine (5) pourvu seulement que la fonction rationnelle H soit bornée sur la multiplicité formée des points réels tels que

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 1. \tag{6}$$

2. Si au lieu de (1) on avait pris la forme

$$y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_{n-1}^2 - y_n^2 - y_{n+1}^2, \tag{7}$$

avec deux carrés négatifs, on aurait eu un groupe (Γ) en posant encore

$$x_m = y_m : y_{n+1} \qquad (m = 1, 2, \ldots, n).$$

On se ramène de nouveau au cas de la Section II en posant

$$y_{n+2}^2 = y_n^2 + y_{n+1}^2 - \sum_{m=1}^{n-1} y_m^2.$$

Le domaine principal sera donc

$$\left| \sum_{m=1}^{n-1} x_m^2 - x_n^2 - 1 \right| + \sum_{m=1}^{n-1} |x_m|^2 - |x_n|^2 - 1 < 0.$$

Comme y_{n+2} s'annule dans ce domaine, il sera nécessaire d'adjoindre à chaque substitution semblable de (7) successivement les équations

$$Y_{n+2} = y_{n+2}, \qquad Y_{n+2} = -y_{n+2}.$$

3. Si $n = 2$, les paragraphes 1 et 2 se confondent; nous sommes ramenés au cas hyperabélien. La discontinuité et l'existence de fonctions automorphes, quand il n'y a pas de substitutions infinitésimales,

sont assurées dans tout l'espace, sauf, en reprenant la notation du paragraphe I, sur la multiplicité

$$|x_1^2 + x_2^2 - 1| - |x_1|^2 - |x_2|^2 + 1 = 0.$$

On verra que les séries Θ du paragraphe I convergent partout en dehors de cette multiplicité.

Le groupe d'origine arithmétique étudié par M. Picard dans son Mémoire cité est de cette nature.

4. Prenons la forme quinaire, du type de la Section II,

$$x_4 x_5 - x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \tag{8}$$

et considérons-en les substitutions semblables telles que l'on ait

$$X_1 = \lambda x_1, \qquad \lambda = \pm 1.$$

Alors, pour $x_1 = 0$, nous pouvons introduire les variables ξ, η telles que

$$\xi = \frac{x_2 + ix_3}{x_5}, \qquad \eta = \frac{x_2 - ix_3}{x_5}, \qquad \xi\eta = -\frac{x_4}{x_5}.$$

On constate alors, en imitant le raisonnement relatif aux groupes hyperabéliens, que l'on a des substitutions des deux types

$$\left(\xi, \eta; \frac{a\xi + b}{c\xi + d}, \quad \frac{a_0\eta + b_0}{c_0\eta + d_0}\right), \qquad \left(\xi, \eta; \frac{a\eta + b}{c\eta + d}, \quad \frac{a_0\xi + b_0}{c_0\xi + d_0}\right),$$

a, b, c, d étant quatre nombres complexes, a_0, b_0, c_0, d_0 leurs conjugués. Ces groupes ne satisfont pas aux hypothèses (H); cela n'a rien d'absurde, car, pour $x_1 = 0$, on ne peut pénétrer dans le domaine principal de la Section II.

Si en particulier ξ et η sont des variables imaginaires conjuguées, on obtient les groupes à une variable sans cercle principal.

5. Soit enfin la forme quinaire, du type de la Section II,

$$x_1 x_5 + x_2 x_4 + x_3^2; \tag{9}$$

considérons-en les substitutions semblables telles que l'on ait

$$X_2 = \lambda x_2.$$

Si $x_2 = 0$, nous pouvons introduire les variables ξ, η telles que

$$\xi = x_3 : x_1, \qquad \eta = x_4 : x_1, \qquad \xi\eta = -x_5 : x_1.$$

On constate alors que ξ et η subissent des substitutions du type

$$\left[\xi, \eta; \frac{a\xi + b}{\lambda(c\xi + d)}, \quad \frac{\eta + A\xi^2 + B\xi + C}{\lambda^2(c\xi + d)^2}\right] \; (a, b, c, d, A, B, C \text{ réels}; ad - bc = 1).$$

Les hypothèses (H) ne sont pas satisfaites, même si l'on se borne au cas où $\lambda = \pm 1$; du reste, x_2 ne peut s'annuler dans le domaine principal de la Section II.