ÉMILE COTTON

Sur la notion de nombre caractéristique de M. Liapounoff

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 36 (1919), p. 127-185

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1919_3_36__127_0>

SUR LA NOTION

DE

NOMBRE CARACTÉRISTIQUE DE M. LIAPOUNOFF

PAR M. ÉMILF COTTON,

Professeur à la Faculté des Sciences de l'Université de Grenoble.

INTRODUCTION.

M. Liapounoff, dans son Mémoire bien connu : *Problème général de la stabilité du mouvement*, a introduit, en 1892, dans la Science la notion de nombre caractéristique d'une fonction réelle ou imaginaire $f(t)$, la variable t étant réelle et tendant vers $+\infty$: ce nombre sert à estimer, par comparaison avec la fonction exponentielle, e^t, la rapidité avec laquelle $f(t)$ tend vers zéro (nombre caractéristique positif) ou devient infinie (nombre caractéristique négatif).

On doit, d'autre part, à M. Borel l'idée de noter la croissance d'une fonction positive et réelle $F(x)$ de la variable réelle x par un ensemble (p, q) de deux nombres, qui sont les limites extrêmes d'indétermination, pour x tendant vers $+\infty$, du rapport $\log F(x) : \log x$.

Au début de ce Mémoire (n^{os} 1, 2), je montre comment ces deux notions se relient l'une à l'autre; le nombre caractéristique de M. Liapounoff changé de signe est égal au plus grand, q, des deux nombres p, q définissant l'ordre (p, q) de la fonction $F(x) = |f(\log x)|$ par rapport à la nouvelle variable x liée à l'ancienne par la relation $x = e^t$. Au nombre p correspond de même ce que j'appelle le « nombre caractéristique supérieur de la fonction $f(t)$ ». On peut du reste (n° 3) adopter des fonctions de comparaison autres que la fonction exponentielle.

Le nombre caractéristique d'une suite, fonction définie seulement pour les valeurs entières de la variable, est égal au logarithme du rayon de convergence de la série de Taylor ayant pour coefficient les termes de cette suite. Cette analogie amène à rapprocher les premiers théorèmes de M. Liapounoff de propriétés bien connues des séries entières (nos 4, 5). La proposition concernant le nombre caractéristique d'une intégrale peut, toutefois, être remplacée par un énoncé plus précis quand il s'agit des suites (n° 6). Dans les numéros suivants (7 à 11), cette même proposition est complétée soit par l'emploi de l'intégration par parties, soit par l'usage de la notion généralisée de nombre caractéristique. Les exemples indiqués, et particulièrement ceux qui permettent de déterminer l'existence et la frontière de convergence du domaine de certaines intégrales (extension des fonctions déterminantes de Laplace étudiées plus récemment par M. Pincherle) montrent bien l'intérêt de ces propositions. Les nombres caractéristiques généralisés d'une suite (nos 12, 13) donnent lieu à des propositions analogues qu'il serait facile d'appliquer aux séries de Dirichlet et à leurs généralisations.

Un second Chapitre concerne l'étude des nombres caractéristiques ordinaires ou généralisés d'un ensemble de fonctions; ils sont utiles pour l'étude asymptotique des solutions des systèmes différentiels linéaires. Quand on passe aux suites, les notions correspondantes sont celles du rayon de convergence de n séries de Taylor et des systèmes d'équations linéaires de récurrence déterminant les coefficients de rang $i+1$ en fonction de ceux de rang i. Les n^2 coefficients de ce système sont supposés variables avec i; on les suppose bornés, ainsi que l'inverse du déterminant qu'ils forment; dans ces conditions, il y a au plus n rayons de convergence distincts pour l'ensemble des séries de Taylor associées aux solutions de ce système (n° 14); c'est la généralisation d'une proposition bien connue de Poincaré. L'analogie entre équations différentielles et équations de récurrence se poursuit plus loin encore (nos 15 à 17); soient, par exemple, $y(t)$, $z(t)$, ... une solution d'un système linéaire du type considéré par M. Liapounoff; considérons les suites $y_i=y(i\mathrm{T})$, $z_i=z(i\mathrm{T})$, ... obtenues en prenant les valeurs numériques de ces fonctions pour des valeurs de la variable en progression arithmétique. Le nombre caractéristique c de la solution $y(t)$, $z(t)$, ... est $\frac{1}{\mathrm{T}}\log \mathrm{R}$, R étant le rayon de convergence de l'ensemble des séries de Taylor $\Sigma y_i x^i$, $\Sigma z_i x^i$, ...; et l'ordre de l'ensemble de ces séries sur leur cercle de convergence est, de même, étroitement lié au nombre caractéristique par rapport à t de l'ensemble des produits $e^{ct}y(t)$, $e^{ct}z(t)$, ... Le premier de ces résultats généralise la règle bien connue de calcul des exposants caractéristiques des systèmes différentiels linéaires à coefficients périodiques.

Les notions de systèmes normaux de solutions d'un système différentiel linéaire, de systèmes différentiels réguliers ou réductibles, introduites par M. Liapounoff, ont leurs analogues (n^{os} 18 à 20) dans le cas des systèmes d'équations linéaires de récurrence.

Il en est de même de l'application des nombres caractéristiques à l'étude des solutions asymptotiques d'un système différentiel non linéaire. Étant donné un système E d'équations de récurrence non linéaires, dont on connaît une solution particulière, on peut déterminer les solutions voisines de celle-là en formant d'abord un système V d'équations linéaires analogues aux équations des variations de Poincaré (n° 21). Cela permet de construire un système d'équations aux sommes (analogues aux systèmes d'équations intégrales du type Volterra) déterminant les solutions de E, asymptotiques à la solution inconnue. L'existence de ces solutions se trouve établie dans le présent travail (n^{os} 22, 23) en supposant les équations réductibles; elle s'étendrait vraisemblablement à un domaine plus vaste. Elle généralise une partie des intéressants résultats obtenus par le regretté S. Lattès pour les équations de récurrence à coefficients constants.

On voit, par le résumé qui vient d'en être donné, que le présent Mémoire a pour but de montrer l'importance de la notion de nombre caractéristique dans des domaines très variés ([1]).

([1]) Indiquons, en passant, deux questions qui n'ont pas été abordées dans ce travail : Dans le cas des équations linéaires à coefficients périodiques, les nombres caractéristiques sont les parties réelles changées de signe des exposants caractéristiques. Il serait intéressant, d'une part, de chercher, pour des équations linéaires plus générales, ce qui peut correspondre aux coefficients du symbole i des imaginaires et, d'autre part, d'établir pour les nombres caractéristiques correspondant aux équations aux variations des problèmes de Mécanique, construites en partant d'une solution quelconque, des propriétés

CHAPITRE PREMIER.

1. Nombre caractéristique. — M. Liapounoff [1] a fait correspondre un nombre, appelé par lui *nombre caractéristique*, à toute fonction $f(t)$ réelle ou complexe de la variable t. Ce nombre est la borne supérieure des nombres réels λ tels que $e^{\lambda t} f(t)$ tende vers zéro quand t devient infini par valeurs positives; c'est aussi la borne inférieure des nombres μ tels que $e^{\mu t} f(t)$ ne soit pas borné (on dit aussi soit illimité) quand t devient infini positif.

On peut donner de ce nombre une troisième définition :

Le nombre caractéristique changé de signe d'une fonction $f(t)$ est la plus grande limite, pour t infini positif de

$$\frac{\log |f(t)|}{t}.$$

En effet, si d'abord le produit $e^{\lambda t} f(t)$ tend vers zéro avec $\frac{1}{t}$, il en est de même de $e^{\lambda t} |f(t)|$ et le logarithme réel de ce produit

$$\lambda t + \log |f(t)| = t \left\{ \lambda + \frac{\log |f(t)|}{t} \right\}$$

est nécessairement négatif; donc

$$-\lambda > \frac{\log |f(t)|}{t}$$

pourvu que t soit assez grand. Soit l le nombre caractéristique de $f(t)$, $-l$ est supérieur ou égal à la plus grande limite de

$$\frac{\log |f(t)|}{t}.$$

---

généralisant celles que M. Poincaré et M. Liapounoff ont énoncées pour les exposants caractéristiques relatifs aux solutions périodiques.

(1) Le Mémoire fondamental de M. Liapounoff : *Problème général de la stabilité du mouvement*, a paru en 1892, en langue russe, dans les *Mémoires de la Société mathématique de Karkoff*. Une traduction française de ce Mémoire, due à M. E. Davaux, a été publiée en 1907 dans les *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse* (2e série, t. IX). Les propositions de M. Liapounoff sont indiquées dans le présent travail par des renvois à cette traduction.

En second lieu, si $f(t)e^{\mu t}$ n'est pas borné quand t devient infini positif, il existe des valeurs de t aussi grandes qu'on veut, telles que $e^{\mu t}|f(t)|$ soit supérieur à un nombre donné supérieur à l'unité; pour ces valeurs de t

$$-\mu < \frac{\log|f(t)|}{t},$$

$-l$, borne supérieure des nombres μ, est inférieur ou égal à la plus grande limite de

$$\frac{\log|f(t)|}{t}.$$

En rapprochant ces deux résultats, il vient

$$-l = \overline{\lim_{t=+\infty}} \frac{\log|f(t)|}{t}.$$

C'est ce qu'il fallait établir (¹).

Soit $-$ L la plus petite limite du quotient précédent

$$-\mathrm{L} = \underline{\lim_{t=+\infty}} \frac{\log|f(t)|}{t}.$$

On voit immédiatement que

$$\mathrm{L} = \overline{\lim_{t=+\infty}} \left\{ \frac{1}{t} \log \frac{1}{|f(t)|} \right\}.$$

L *est donc le nombre caractéristique, changé de signe, de* $\frac{1}{f(t)}$; quel que soit le nombre positif ε, les quotients

$$\frac{e^{-(\mathrm{L}+\varepsilon)t}}{f(t)} \quad \text{et} \quad \frac{e^{(-\mathrm{L}+\varepsilon)t}}{f(t)}$$

sont respectivement évanouissant et non borné; et *par suite* $e^{(\mathrm{L}+\varepsilon)t}f(t)$ *devient infini* (²) *quand* t *devient infini positif et* $e^{(\mathrm{L}-\varepsilon)t}f(t)$ *passe, quel que grand que soit* t, *par des valeurs aussi voisines de zéro qu'on le veut.*

Ce nombre L sera appelé *nombre caractéristique supérieur de la fonc-*

(¹) *Voir* dans le Mémoire de Liapounoff la remarque du haut de la page 226.

(²) Ces mots doivent être entendus au sens habituel : au nombre N donné, si grand soit-il, on peut faire correspondre t_0 tel que pour les valeurs de $t > t_0$ on ait

$$e^{(\mathrm{L}+\varepsilon)t}|f(t)| > \mathrm{N}.$$

tion $f(t)$; pour qu'il soit fini, il faut (mais il ne suffit pas nécessairement) que $f(t)$ ne s'annule plus pour des valeurs assez grandes de t (¹).

Par exemple, pour la fonction

$$e^t \sin^2 t + e^{-t} \cos^2 t,$$

le nombre caractéristique supérieur est $+1$, le nombre caractéristique de Liapounoff est -1.

Le nombre caractéristique supérieur L d'une fonction $f(t)$ ne peut pas être plus petit que le nombre caractéristique ordinaire l de cette même fonction; ces deux nombres peuvent être égaux; l'expression

$$\frac{\log|f(t)|}{t}$$

tend alors vers une limite et inversement (lemme VI).

Supposons-les différents; pour tout nombre λ inférieur à l le produit $e^{\lambda t} f(t)$ tend vers zéro quand t devient infini positif; pour tout nombre μ supérieur à L, le produit $e^{\mu t} f(t)$ devient infini dans les mêmes conditions; enfin, pour tout nombre ν inférieur à L et supérieur à l, il existe des valeurs de t supérieures à tout nombre t_0 donné à l'avance, telles que $e^{\nu t}|f(t)|$ surpasse un nombre N, si grand soit-il, et il existe aussi des valeurs de $t > t_0$ telles que ce produit soit inférieur à un nombre positif donné η, si petit qu'on l'ait choisi.

2. Nombres caractéristiques et ordres parenthèses. — Une fonction $f(t)$ peut être considérée comme fonction de $x = e^t$, on a $t = \log x$ et

$$f(t) = f[\log(x)] = f_1(x).$$

La fonction

$$F(x) = |f_1(x)|$$

est par rapport à la variable $x = e^t$ d'un ordre parenthèse (²) (p, q),

---

(¹) M. Liapounoff a utilisé ce nombre (lemmes VI, VII, p. 227; n° 9, p. 237) sans lui donner de nom spécial.

(²) Cette notion est due à M. Émile Borel, *Leçons sur la Théorie de la croissance*, 1910, p. 35.

les nombres p et q étant définis par les égalités :

$$p = \underline{\lim}_{x=+\infty} \frac{\log F(x)}{\log x} = \underline{\lim}_{x=+\infty} \frac{\log |f(t)|}{t};$$
$$q = \overline{\lim}_{x=+\infty} \frac{\log F(x)}{\log x} = \overline{\lim}_{x=+\infty} \frac{\log |f(t)|}{t};$$

il en résulte que $L = -p$, $l = -q$; *le nombre caractéristique et le nombre caractéristique supérieur sont ainsi rattachés à la théorie de M. Borel.*

Nous élargissons toutefois un peu en procédant ainsi le domaine d'application de cette théorie; M. Borel (*loc. cit.*, p. 16) suppose les fonctions qu'il étudie réelles positives et infiniment grandes (les fonctions monotones se ramènent à ce cas et aussi les fonctions réelles quelconques par la considération des enveloppes d'indétermination de P. du Bois-Reymond). En appliquant directement, comme nous venons de le faire, le mode de comparaison de M. Borel à la fonction $F(x)$ qui n'est pas nécessairement monotone, ni même réelle, et qui peut tendre vers zéro, nous pouvons avoir à considérer des nombres p et q de signes quelconques : alors qu'avec les restrictions de M. Borel, p et q ne peuvent pas être négatifs (*loc. cit.*, p. 35).

Bien que les deux notions de M. Liapounoff et de M. Borel soient au fond équivalentes, il nous sera plus commode, dans ce qui suit, de parler de nombres caractéristiques et non d'ordres parenthèses pour ne pas compliquer les énoncés par l'indication des changements de signes.

3. Extension des notions précédentes. — On peut étendre les notions d'ordre parenthèse, de nombre caractéristique supérieur en utilisant des fonctions de comparaison autres que la fonction exponentielle. Soit $\theta(t)$ une fonction positive et croissante de la variable réelle t devenant infinie avec t, et $f(t)$ une fonction quelconque de t. Considérons la plus petite limite p et la plus grande limite q du rapport

$$\frac{\log |f(t)|}{\log \theta(t)}$$

lorsque t tend vers $+\infty$; nous dirons que (p, q) est l'ordre de $|f(t)$

par rapport à la variable $x = \theta(t)$, que $-q$ *est le nombre caractéristique inférieur* [1] *et* $-p$ *le nombre caractéristique supérieur de* $f(t)$ *par rapport à la fonction de comparaison* $\theta(t)$.

Ces notions [2] se ramènent du reste aux précédentes par le changement de variable $u = \log\theta(t)$; il peut évidemment être commode de ne pas effectuer ce changement de variable et de conserver une fonction de comparaison distincte de la fonction exponentielle.

Dans les numéros suivants, il s'agit, sauf indication contraire, des nombres caractéristiques de Liapounoff.

4. Nombre caractéristique d'une suite et rayon de convergence d'une série de Taylor. — La définition du nombre caractéristique est applicable sans que la fonction soit donnée pour toutes les valeurs de t; on peut considérer $f(t)$ comme définie seulement pour les nombres t d'un ensemble E non borné supérieurement. Prenons alors pour E l'ensemble des entiers n et écrivons a_n au lieu de $f(n)$.

Le nombre caractéristique de a_n *est égal au logarithme du rayon de convergence de la série de Taylor* $\Sigma a_n x^n$ *associée à la suite* a_n [3].

En effet, d'après le théorème d'Abel, ce rayon de convergence R est la borne supérieure des nombres X réels et positifs tels que $a_n X^n$ tende vers zéro pour n infini positif; en posant $X = e^\lambda$ ou $\lambda = \log X$, $l = \log R$ est la borne supérieure des nombres λ tels que $a_n e^{\lambda n}$ tende vers zéro avec $\frac{1}{n}$; c'est la définition habituelle du nombre caractéristique [4].

---

[1] Ce dernier mot sera sous-entendu quand il n'y aura pas d'ambiguïté possible.

[2] M. Ettore Bortolotti, dans un Mémoire, *Sugli integrali...*, inséré dans les *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, t. XXXV, 1913, estime l'ordre d'infinitude d'une fonction $f(x)$ par rapport à une autre fonction $\varphi(x)$ en utilisant aussi les notions de limite supérieure et de limite inférieure d'indétermination (*voir* le n° 30 de ce Mémoire). Mais il fait intervenir pour cela les dérivées $f'(x)$, $\varphi'(x)$ des fonctions à comparer; sa définition est donc distincte de celle indiquée ci-dessus, qui ne suppose pas l'existence de ces dérivées. Je l'avais donnée, dans une Communication au Congrès des Sociétés savantes (*Sciences*, 1913, p. 33), en signalant son intérêt dans la théorie des équations différentielles, après l'avoir rapidement signalée dans un Mémoire publié en octobre 1911 dans les *Annales scientifiques de l'École Normale* (3e série, t. XXVIII, p. 475 et 511).

[3] Laplace (*Théories des Probabilités*) donne à la fonction $\Sigma a_n x^n$ le nom de « fonction génératrice de la suite a_n ».

[4] Le nombre caractéristique supérieur de a_n est de même le logarithme du rayon de

On peut pousser plus loin encore ce rapprochement. Dès que l'on connaît, pour une série entière, un nombre positif r inférieur au rayon de convergence, on peut affirmer l'existence d'une fonction majorante de la forme $\dfrac{M}{1-\dfrac{x}{r}}$; c'est-à-dire qu'il existe un nombre M tel que

$$|a_n| < \frac{M}{r^n}.$$

D'une façon analogue, il suffit de savoir qu'un nombre λ est inférieur au nombre caractéristique d'une fonction $f(t)$ pour être certain qu'il existe un nombre μ tel que, pour t réel et assez grand [1],

$$|f(t)| < \mu\, e^{-\lambda t}.$$

Une fonction à nombre caractéristique positif tend vers zéro en même temps que $\frac{1}{t}$; une fonction à nombre caractéristique négatif ne peut pas rester bornée dans les mêmes conditions; le seul fait que le nombre caractéristique est nul ne permet pas de se prononcer; un examen spécial est nécessaire.

5. Premiers théorèmes de M. Liapounoff. — Nous rappellerons brièvement les énoncés de quelques propositions relatives aux nombres caractéristiques, en renvoyant pour les démonstrations au Mémoire cité de M. Liapounoff et en indiquant les analogies ou les généralisations qu'elles suggèrent.

1° *Le nombre caractéristique de la somme de deux fonctions est égal au plus petit des nombres caractéristiques de ces fonctions, si ces nombres sont différents, et ne leur est pas inférieur quand ces nombres sont égaux* (lemme IV, p. 226).

---

convergence de la série de Laurent $\sum \frac{1}{a_n z^n}$, ou le logarithme changé de signe du rayon de convergence de la série de Taylor $\sum \frac{x^n}{a_n}$.

(1) De même, connaissant un nombre Λ plus grand que le nombre caractéristique supérieur de $f(t)$, on peut affirmer qu'il y a des nombres M tels que, pour t assez grand,

$$|f(t)| > M\, e^{-\Lambda t}.$$

La proposition correspondante est bien connue : Le rayon de convergence de la somme de deux séries de Taylor est égal au plus petit des rayons de convergence de ces séries s'ils sont différents et n'est pas inférieur à leur valeur commune s'ils sont égaux ([1]).

On ne peut pas énoncer une proposition analogue et aussi générale concernant les nombres caractéristiques supérieurs; il faut nécessairement introduire des conditions complémentaires.

Par exemple : Étant données *deux fonctions réelles de même signe* $f(t)$ et $f_1(t)$, le nombre caractéristique supérieur de leur somme est au plus égal au plus petit de leurs nombres caractéristiques supérieurs. Soient en effet L et L_1 ces nombres $L < L_1$ on a, ε étant positif,

$$|f(t)| > M e^{-(L+\varepsilon)t}, \qquad |f_1(t)| > M_1 e^{-(L_1+\varepsilon)t},$$
$$|f(t)+f_1(t)| = |f(t)| + |f_1(t)| > M e^{-(L+\varepsilon)t}\left\{ 1 + \frac{M_1}{M} e^{(L-L_1)t} \right\}$$

et le dernier facteur tend vers l'unité quand la variable t devient infinie positive. La démonstration est immédiate si $L = L_1$.

Nous allons étudier un cas plus intéressant. Supposons que les nombres caractéristiques des deux fonctions $f(t)$ et $f_1(t)$ soient l et l_1 et qu'on ait

$$l < L < l_1 < L_1,$$

on peut exprimer ceci en disant que *les intervalles caractéristiques* (l, L) *et* (l_1, L_1) *des deux fonctions* f et f_1 *sont distincts*. Dans ces conditions, on a

$$\left|\frac{f_1(t)}{f(t)}\right| < \frac{m_1 e^{(-l_1+\varepsilon)t}}{M e^{-(L+\varepsilon)t}} = k e^{(L-l_1+2\varepsilon)t},$$

m_1, M, k étant positifs et constants; ε pouvant être aussi voisin de zéro qu'on le veut, ceci montre que $\frac{f_1(t)}{f(t)}$ tend vers zéro avec $\frac{1}{t}$.

On en conclut que $1 + \frac{f_1(t)}{f(t)}$ reste compris, pour t assez grand, entre

---

([1]) Si deux fonctions réelles x_1, x_2 sont toutes deux positives ou toutes deux négatives et ont même nombre caractéristique l, le nombre caractéristique de la somme est égal à l. Car il suffit alors qu'un des produits $x_1 e^{(\lambda+\varepsilon)t}$, $x_2 e^{(\lambda+\varepsilon)t}$ ne soit pas borné pour qu'il en soit de même de leur somme $(x_1 + x_2) e^{(\lambda+\varepsilon)t}$.

deux nombres positifs, $\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{2}$ par exemple; il en résulte que *la somme*

$$f(t)+f_1(t)=f(t)\left\{1+\frac{f_1(t)}{f(t)}\right\}$$

a mêmes nombres caractéristiques l *et* L *que la fonction* $f(t)$.

2° *Le nombre caractéristique du produit de deux fonctions n'est pas inférieur à la somme de leurs nombres caractéristiques* (lemme V, p. 227).

On en conclut : Le rayon de convergence de la série $\Sigma a_n b_n x^n$ n'est pas inférieur au produit des rayons de convergence des séries $\Sigma a_n x^n$, $\Sigma b_n x^n$.

Cette proposition est d'ailleurs une conséquence immédiate du théorème de M. Hadamard : Les seuls points singuliers possibles de la série $\Sigma a_n b_n x^n$ sont ceux qu'on obtient en multipliant les affixes des points singuliers de $\Sigma a_n x^n$ par les affixes des points singuliers de $\Sigma b_n x^n$ (¹).

Une proposition analogue s'applique aux nombres caractéristiques supérieurs; c'est d'ailleurs une conséquence de la précédente : *Le nombre caractéristique supérieur du produit de deux fonctions n'est pas supérieur à la somme des nombres caractéristiques supérieurs de ces fonctions.*

En résumé, si l et L sont le nombre caractéristique et le nombre caractéristique supérieur de $f(t)$, et l_1 et L_1 les éléments caractéristiques analogues pour $f_1(t)$, λ et Λ le nombre caractéristique et le nombre caractéristique supérieur du produit $f(t)\,f_1(t)$, on a

$$l+l_1 \leqq \lambda \leqq \Lambda \leqq L+L_1. \tag{1}$$

Appliquons ces inégalités aux deux fonctions $f(t)\,f_1(t)=\varphi(t)$ et $\frac{1}{f_1(t)}=\varphi_1(t)$ pour lesquels les éléments caractéristiques (²) sont λ, Λ et $-L_1$, $-l_1$; le produit $\varphi\varphi_1$ étant précisément f, on a

$$\lambda-L_1 \leqq l \leqq L \leqq \Lambda-l_1,$$

(¹) *Voir* le Chapitre VII (n° 4) de l'Ouvrage de M. Hadamard : *La série de Taylor et son prolongement analytique*, où sont résumés les travaux de MM. Hadamard, Borel, Leau, etc., au sujet de cet important théorème.

(²) On suppose ici que ces nombres sont finis.

ce qui donne

$$(2) \qquad \lambda \leqq l + L_1, \qquad \Lambda > L + l_1.$$

On a de même

$$(3) \qquad \lambda \leqq l_1 + L, \qquad \Lambda \geqq L_1 + l \quad (^1).$$

Dans le cas particulier où le nombre caractéristique et le nombre caractéristique supérieur de l'une des fonctions sont égaux entre eux, les inégalités (1) et (2) donnent alors, ainsi que M. Liapounoff l'a remarqué (lemme VII), les valeurs exactes des éléments caractéristiques du produit.

Pour les séries de Taylor, ce cas particulier est celui où $\sqrt[n]{|a_n|}$ tend vers une limite pour n infini; dans ces conditions, quelle que soit la série $\Sigma b_n x^n$, le rayon de convergence de la série $\Sigma a_n b_n x^n$ est le produit des rayons de convergence des séries $\Sigma a_n x^n$, $\Sigma b_n x^n$.

6. Cas des intégrales et des sommes définies [2]. — A une fonction intégrable $f(t)$ M. Liapounoff fait correspondre l'une ou l'autre des intégrales

$$\int_{t_0}^{t} f(t)\,dt, \qquad \int_{t}^{+\infty} f(t)\,dt$$

selon que le nombre caractéristique de $f(t)$ est non positif ou positif; il démontre alors (lemme VIII) que *le nombre caractéristique d'une intégrale n'est pas inférieur à celui de la fonction à intégrer.*

En général on ne peut pas énoncer une proposition aussi simple pour les nombres caractéristiques supérieurs. On peut le faire cependant quand la fonction $f(t)$ garde, pour t assez grand, un signe constant; supposons-la positive, et soit L son nombre caractéristique

(1) Ces propositions s'appliquent à la théorie de la croissance; elles s'énoncent alors de la façon suivante : « Étant données deux fonctions $F(x)$, $F_1(x)$ d'ordres respectifs (p, q), (p_1, q_1), soit (P, Q) l'ordre de leur produit; P et Q sont compris entre $p + q_1$ et $q + q_1$ et comprennent entre eux $p + q_1$ et $p_1 + q$. » Les nombres p, q, p_1, q_1, P, Q peuvent avoir des signes quelconques (*voir* n° 3), mais sont supposés finis. C'est une extension des théorèmes classiques concernant l'ordre d'infinitude ou l'ordre infinitésimal d'un produit.

(2) *Voir* à ce propos les *Leçons sur la Théorie de la croissance* de M. E. Borel.

supérieur. La fonction $f(t)$ domine [1] alors une fonction de la forme $\mathrm{M}e^{-(\mathrm{L}+\varepsilon)t}$, ε étant positif et arbitrairement petit; l'intégrale

$$\int f(t)\,dt,$$

où les limites sont respectivement t et $+\infty$ ou t_0 et t suivant que $\mathrm{L}>0$ ou que $\mathrm{L}\leqq 0$ domine une fonction de même forme; c'est dire que le nombre caractéristique supérieur de l'intégrale est au plus égal à L.

En résumé, dans le cas d'une fonction $f(t)$ de signe constant et dont les nombres caractéristiques sont de même signe, les nombres caractéristiques de l'intégrale sont intérieurs à l'intervalle formé par les nombres caractéristiques de la fonction, ou placés aux bornes de cet intervalle.

Nous allons donner un théorème analogue au précédent pour les suites a_n. Mais il faut d'abord préciser quels éléments nous ferons alors correspondre à ces intégrales.

Lorsque le rayon de convergence de la série ne surpassera pas l'unité, nous prendrons

$$\mathrm{S}_n = \sum_0^n a_i = a_0 + a_1 + \ldots + a_{n-1}, \qquad \mathrm{S}_0 = 0,$$

et lorsque ce rayon sera supérieur à l'unité,

$$\mathrm{S}_n = \sum_{+\infty}^n a_i = -(a_n + a_{n+1} + \ldots).$$

Dans les deux cas, on a

$$\Delta\mathrm{S}_n = \mathrm{S}_{n+1} - \mathrm{S}_n = a_n,$$

et, suivant une dénomination adoptée dans la théorie des diffé-

---

(1) Une fonction $f(t)$ *domine*, dans un intervalle où reste comprise la variable réelle t, une autre fonction $\varphi(t)$ lorsqu'elle en surpasse le module; c'est-à-dire qu'on a

$$f(t) \geqq |\varphi(t)|.$$

rences ([1]), nous dirons que S_n est la somme définie correspondant à la suite.

On a, dans la première hypothèse,

$$F(x) = \Sigma S_n x^n = a_0 x + (a_0 + a_1) x^2 + (a_0 + a_1 + a_2) x_3 = \ldots = \frac{x}{1-x} f(x),$$

en désignant par $f(x)$ la somme de la série $\Sigma a_n x^n$. Dans la seconde hypothèse, écrivons

$$S = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots, \qquad S'_n = S + S_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_{n-1},$$

S_n ayant le sens indiqué plus haut; il vient

$$F(x) = \Sigma S_n x^n = \frac{x}{1-x} f(x) - \frac{S}{1-x} = \frac{x f(x) - f(1)}{1-x}$$

et l'on peut diviser haut et bas par $x - 1$; $x = 1$ n'est donc pas un point singulier pour $F(x)$.

Dans les deux cas, les deux fonctions $F(x)$ et $f(x)$ ont mêmes points singuliers (sauf peut-être $x = 1$) et par suite *la série $\Sigma S_n x^n$ associée aux sommes définies S_n a même rayon de convergence que la série $\Sigma a_n x^n$ associée à la suite a_n.*

Dans les cas des suites et de leurs sommes définies, il y a donc égalité des nombres caractéristiques. Pour les fonctions et leurs intégrales l'inégalité des nombres caractéristiques peut effectivement avoir lieu : pour le montrer, *nous construirons une fonction ayant un nombre caractéristique l négatif donné à l'avance et dont l'intégrale aura pour nombre caractéristique zéro.*

Soit (C) la courbe $y = e^{l't}$, où $l' = -l$; et une série convergente à termes positifs et inférieurs à $\frac{1}{2}$

$$(u) \qquad u_1 + u_2 + u_3 + \ldots.$$

Je construis la fonction $f(t)$ représentée graphiquement par une brisée dont les sommets seront les uns sur (C), les autres sur Ox. (Le lecteur est prié de faire la figure.) Chaque point O_n situé sur Ox ayant

([1]) Voir *Encyclopédie des Sciences mathématiques* (édition française), t. I, fasc. 1, p. 55.

pour abscisse un nombre entier n est le milieu d'un segment porté par cet axe, A_nB_n, de longueur $2u_n e^{ln}$; soit C_n le point de (C) qui se projette en O_n; la ligne représentative de $f(t)$ se compose des segments de droite

$$OA_1,\ A_1C_1,\ C_1B_1,\ B_1A_2,\ \ldots,\ A_nC_n,\ C_nB_n,\ B_nA_{n+1},\ \ldots.$$

Les segments B_nA_{n+1} n'empiètent pas les uns sur les autres, puisque u_n étant inférieur à $\frac{1}{2}$ et l étant négatif, la valeur commune $u_n e^{ln}$ des segments A_nO_n, O_nB_n est inférieure à $\frac{1}{2}$.

On voit du reste immédiatement que, si petit que soit le nombre positif ε, $e^{(l-\varepsilon)t}f(t)$ tend vers zéro avec $\frac{1}{t}$ et que dans les mêmes conditions $e^{(l+\varepsilon)t}f(t)$ ne reste pas bornée; *l est bien le nombre caractéristique de $f(t)$.*

Ce nombre est négatif, nous étudions par suite l'intégrale $\int_0^t f(t)\,dt$; il suffit de faire la figure pour voir que, si t est compris entre $n+\frac{1}{2}$ et $n+\frac{3}{2}$, cette intégrale est comprise entre la somme des n premiers termes de la série (u) et celle des $n+1$ premiers termes. L'intégrale tend donc pour t infini vers la somme de la série; *son nombre caractéristique est bien nul.*

7. Généralisation des résultats précédents. — A la fin du n° 3 nous avons défini les notions de nombres caractéristiques (inférieur et supérieur) d'une fonction $f(t)$ par rapport à une fonction de comparaison $\theta(t)$ positive croissante et devenant infinie quand t tend vers $+\infty$. *Les premières propositions de M. Liapounoff* (n° 5) *s'appliquent encore à ces nouveaux nombres.* Mais il y a lieu de modifier l'énoncé quand il s'agit de l'intégration, ainsi que nous allons le voir.

On a

$$f(t)\,dt = \frac{f(t)}{\theta'(t)}\,d\theta,$$

où $\theta'(t)$ désigne la dérivée $\frac{d\theta}{dt}$; ce sont les nombres caractéristiques du quotient $\frac{f(t)}{\theta'(t)}$ qui vont remplacer ceux de $f(t)$ dans les énoncés du n° 5. Ils permettent encore de déterminer, suivant les cas, une fonction supérieure au module de la fonction à intégrer ou une fonction positive inférieure au module de la fonction à intégrer, et des éléments analogues pour l'intégrale elle-même. Il nous suffira d'énoncer les propositions auxquelles on est ainsi conduit.

A. *Soit p un nombre fini inférieur ou égal au nombre caractéristique du quotient $\frac{f(t)}{\theta'(t)}$ par rapport à la fonction de comparaison $\theta(t)$, en considérant l'intégrale $\int_{t_0}^{t} f(t)\,dt$ lorsque $p \leqq 1$ et l'intégrale $\int_{t}^{+\infty} f(t)\,dt$ lorsque $p > 1$, le nombre caractéristique inférieur de l'intégrale par rapport à $\theta(t)$ n'est pas inférieur à $p-1$.*

Remarques. — 1° Les nombres caractéristiques de la dérivée $\theta'(t)$ de la fonction de comparaison (dérivée dont nous admettons l'existence) sont des constantes intéressantes attachées à cette fonction. Toutefois ces constantes ne sont pas nécessairement finies, comme le montre l'exemple de $\theta(t) = \log t$.

2° La fonction $f(t)$ peut dans cet énoncé être une fonction complexe, mais la variable t est supposée réelle.

3° La condition $p > 1$ suffit pour que l'intégrale $\int_{t}^{+\infty} f(t)\,dt$ ait un sens.

B. *Lorsque la fonction $f(t)$ est réelle et de signe constant, et que* P *est un nombre fini supérieur ou égal au nombre caractéristique supérieur du quotient $\frac{f(t)}{\theta'(t)}$ par rapport à la fonction de comparaison $\theta(t)$, en prenant $\int_{t_0}^{t} f(t)\,dt$ quand $\mathrm{P} \leqq 1$ et $\int_{t}^{+\infty} f(t)\,dt$ lorsque $\mathrm{P} > 1$, le nombre caractéristique supérieur de l'intégrale par rapport à $\theta(t)$ n'est pas supérieur à $\mathrm{P}-1$.*

En particulier, si $\mathrm{P} < 1$, on peut affirmer que l'intégrale $\int_{t_0}^{t} f(t)\,dt$ devient infinie quand t tend vers $+\infty$.

Si $P = p = 1$ les propositions précédentes ne permettent pas de se prononcer, on substituera alors, comme on sait, à la fonction $\theta(t)$ la nouvelle fonction de comparaison $\log \theta(t)$.

Le cas le plus favorable est celui où les théorèmes A et B sont simultanément applicables et où les différences $p - 1$, $P - 1$ sont de même signe; les théorèmes précédents renseignent d'une façon complète sur la convergence ou la divergence de l'intégrale $\int f(t)\,dt$, et donnent une double estimation, par défaut et par excès, de la rapidité de cette convergence ou de cette divergence.

8. Exemples : 1° Si $\theta(t) = e^t$, $\theta'(t) = \theta(t)$, les nombres caractéristiques inférieur et supérieur de $\theta'(t)$ sont tous deux égaux à -1, et si p et P sont les nombres caractéristiques de $\frac{f(t)}{\theta'(t)}$ par rapport à $\theta(t)$, ceux du produit $\frac{f(t)}{\theta'(t)}\theta'(t) = f(t)$ sont, d'après une remarque antérieure (n° 5), égaux à $p - 1$ et $P - 1$; les deux propositions A et B sont identiques à celles du n° 6.

2° En prenant pour $\theta(t)$ la fonction $\log_i(t)$ obtenue par itération de la fonction logarithmique,

$$\log_2 t = \log\log t, \qquad \ldots, \qquad \log_i t = \log\log_{i-1} t,$$

on est amené à considérer le produit $f(t)\,t\log t \ldots \log_{i-1} t$ et ses nombres caractéristiques par rapport à $\theta(t)$, ainsi que l'a fait M. Boutroux dans l'étude qu'il a dû faire [1] des intégrales $\int \frac{dx}{u(x)}$.

3° Soit $F(t; x, y)$ une fonction réelle ou imaginaire de la variable réelle d'intégration t et d'autres variables x, y qui pourraient être en nombre quelconque et que nous pouvons, par suite, supposer réelles. On veut étudier l'une ou l'autre des intégrales

$$\int_{t_0}^{t} F(t; x, y)\,dt, \qquad \int_{t}^{+\infty} F(t; x, y)\,dt$$

lorsque la borne t de l'intervalle d'intégration croît indéfiniment.

---

(1) *Acta mathematica*, t. XXVIII, 1904, p. 106.

L'application du théorème A et de la définition du nombre caractéristique amène à rechercher comment se comporte, pour de grandes valeurs de t, le logarithme de F. Nous ferons à ce propos l'hypothèse suivante :

On peut poser

$$\log F(t; x, y) = [h(x, y) + k(t) + u(t; x, y)] g(t),$$

$g(t)$ désignant une fonction réelle de t, positive, croissante, devenant infinie quand t tend vers $+\infty$.

Les fonctions $h(x, y)$, $k(t)$, $u(t; x, y)$ peuvent être réelles ou complexes. En désignant par $\mathcal{R}(z)$, suivant l'usage, la partie réelle du nombre complexe z, on admet que $\mathcal{R}k(t)$ reste bornée supérieurement quand t tend vers $+\infty$ et que, x, y restant dans un domaine D et t tendant vers $+\infty$, $\mathcal{R}u(t; x, y)$ tend vers zéro.

Cette hypothèse, que nous appellerons *hypothèse* I, étant admise, nous prendrons comme fonction de comparaison

$$\theta(t) = e^{g(t)}.$$

Tant que le point x, y reste dans une partie D' du domaine D où $\mathcal{R}h(x, y)$ reste bornée supérieurement, le nombre caractéristique de $F(t; x, y)$ par rapport à $\theta(t)$ reste fini ; il est égal à

$$-\{\mathcal{R}h(x, y) + K\},$$

K désignant la borne supérieure de $\mathcal{R}[k(t)]$.

Quand on passe de F à $\frac{F}{\theta'}$, on doit considérer

$$\log F - \log\theta' = \log F - g - \log g', \qquad g' = \frac{dg}{dt},$$

et

$$\frac{1}{g}\log\frac{|F|}{\theta'} = \frac{\log|F|}{g} = 1 - \frac{\log g'}{g}.$$

Nous admettrons (ce sera l'*hypothèse* II) que $\frac{\log g'}{g}$ *reste borné inférieurement;* soit γ sa borne inférieure, le nombre caractéristique de $\frac{F}{\theta'}$ est

$$-\mathcal{R}[h(x, y)] - K + \gamma + 1$$

et celui de l'intégrale est au moins égal à

$$-\mathcal{R}[h(x, y)] - \mathrm{K} + \gamma.$$

Par suite, l'intégrale

$$\mathrm{I} = \int_{t_0}^{t} \mathrm{F}(t;\, x, y)\, dt$$

a certainement une limite quand t tend vers $+\infty$ si

$$\mathcal{R}[h(x, y)] < \gamma - \mathrm{K},$$

puisque le nombre caractéristique est alors positif.

Des intégrales de la forme précédente se rencontrent dans des questions variées d'Analyse et de Physique (¹).

On peut pousser plus loin l'étude de ces intégrales, en utilisant deux théorèmes que je vais indiquer.

9. Autres estimations des nombres caractéristiques des intégrales. — *Nous désignerons pour abréger par $c(f)$ le nombre caractéristique d'une fonction $f(t)$ par rapport à la fonction de comparaison* $\theta(t)$, qui peut toujours être distincte de la fonction exponentielle.

C. *Soient f et φ deux fonctions de t, f' et φ' leurs dérivées,* θ *la fonction de comparaison,* θ' *sa dérivée ; on pose*

$$p' = c(f) + c\left(\frac{\varphi'}{\theta'}\right).$$

Si p' est supérieur à l'unité, l'intégrale $\int_t^{+\infty} f(t)\varphi'(t)dt$ a un sens et son nombre caractéristique n'est pas inférieur à $p' - 1$; si $p' \leqq 1$, le nombre caractéristique de $\int_{t_0}^{t} f(t)\varphi'(t)dt$ n'est pas inférieur à $p' - 1$.

(¹) Citons, par exemple, la théorie des *fonctions déterminantes* de Laplace, dont l'étude a été reprise de nos jours par M. Pincherle. *Voir* dans l'*Encyclopédie des Sciences mathématiques*, édition française, l'article II, 26 (Équations et Opérations fonctionnelles), où l'analyste italien donne (nº 23) une bibliographie de la question; *voir* aussi son article plus récent (*Acta mathematica*, 1913) et le travail signalé plus haut, de M. Bortolotti : *Sugli integrali...*, Chap. VI. Nous indiquerons, en Physique, la Théorie de la chaleur, en renvoyant au *Traité d'Analyse* de M. Goursat, t. III, Chap. XIX.

Cette proposition est une conséquence immédiate de celle concernant le nombre caractéristique d'un produit et du théorème A du n° 7.

Les critères précédents sont des critères de convergence absolue, les suivants peuvent être d'un emploi plus large.

Les mêmes intégrales s'étudient au moyen des formules d'intégration par parties :

$$\int_{t_0}^{t} f\varphi'\,dt = [f\varphi]_{t_0}^{t} - \int_{t_0}^{t} \varphi f'\,dt \tag{1}$$

et

$$\int_{t}^{+\infty} f\varphi'\,dt = [f\varphi]_{t}^{+\infty} - \int_{t}^{+\infty} \varphi f'\,dt. \tag{2}$$

D'après les théorèmes concernant les nombres caractéristiques d'une somme et d'un produit, et la proposition C, on cherche le plus petit des nombres $c(f) + c(\varphi)$ et $c(\varphi) + c\left(\frac{f'}{\theta'}\right) - 1$.

On écrit

$$f(t) = -\int_{t}^{+\infty} f'(t)\,dt \quad \text{lorsque} \quad c\left(\frac{f'}{\theta'}\right) - 1 > 0$$

et

$$f(t) = f(t_0) + \int_{t_0}^{t} f'(t)\,dt \quad \text{lorsque} \quad c\left(\frac{f'}{\theta'}\right) - 1 \leqq 0,$$

le nombre caractéristique de la constante $f(t_0)$ est nul, et par suite le théorème A nous apprend que, dans l'un et l'autre cas,

$$c(f) \geqq c\left(\frac{f'}{\theta'}\right) - 1.$$

On a donc

$$c(f) + c(\varphi) \geqq c\left(\frac{f'}{\theta'}\right) + c(\varphi) - 1$$

et l'on peut énoncer le théorème suivant :

D. *En posant*

$$p'' \leqq c\left(\frac{f'}{\theta'}\right) + c(\varphi),$$

l'intégrale $\int_{t}^{+\infty} f\varphi'\,dt$ *a un sens si* $p'' > 1$ *et son nombre caractéristique est* *supérieur ou égal à* $p''-1$; si $p''<1$, *le nombre caractéristique de*

$$\int_{t_0}^{t} f\varphi'\,dt$$

n'est pas inférieur à $p''-1$.

On observe que si φ' est seul connu, on peut prendre suivant que $c(\varphi')>1$ ou que $c(\varphi')<1$,

$$\varphi=-\int_{t}^{+\infty}\varphi'\,dt \qquad \text{ou} \qquad \varphi=\int_{t_0}^{t}\varphi'\,dt.$$

Remarque. — Pour estimer $c\left(\frac{f'}{\theta'}\right)$, on peut écrire $\frac{f'}{\theta'}=\frac{f}{\theta'}\cdot\frac{f'}{f}$ et il vient

$$c\left(\frac{f'}{\theta'}\right)\gtreqless c\left(\frac{f}{\theta'}\right)+c\left(\frac{f'}{f}\right).$$

10. Domaine de convergence de certaines intégrales définies. — Nous allons appliquer ces derniers théorèmes à la théorie des intégrales

$$\mathrm{I}(x,y)=\int_{t_0}^{+\infty}a(t)\,\mathcal{F}(t;\,x,y)\,dt,$$

analogues aux fonctions déterminantes de Laplace. Celles-ci ont été plus récemment étudiées par divers auteurs et en particulier par M. Pincherle [1].

Ces intégrales sont de la forme considérée plus haut, mais la présence du facteur $a(t)$ nous permet, sans diminuer la généralité, de supposer nul le terme analogue à $k(t)$.

Écrivons donc

$$\log\mathcal{F}(t;\,x,y)'=g(t)[h(x,y)+u(t;\,x,y)].$$

Aux hypothèses antérieures, I et II (p. 144), nous substituons maintenant l'*hypothèse* III :

La fonction $g(t)$ est réelle, positive, croissante, devient infinie avec t; elle sert à former la fonction de comparaison $\theta(t)=e^{g(t)}$; la

(1) *Voir* la note de la page 145.

dérivée $g'(t)$ a ses deux nombres caractéristiques ordinaire et supérieur égaux à zéro. Quand le point x, y reste dans un domaine D et que t tend vers $+\infty$, la fonction $\mathcal{R}[h(x, y)]$ reste bornée, $u(t; x, y)$ tend vers zéro, et sa dérivée $u'_t(t; x, y)$ reste bornée.

Dans ces conditions, le nombre γ de tout à l'heure est nul et les deux nombres caractéristiques de $\mathcal{F}$ sont égaux. On voit de plus que le nombre caractéristique du quotient

$$\frac{\mathcal{F}'_t(t; x, y)}{\mathcal{F}(t; x, y)} = g'(t)[h(x, y) + u(t; x, y)] + g(t)u'_t(t; x, y)$$

est nul ou positif.

Ceci posé, admettons que l'intégrale

$$\varphi(t) = -\int_t^{+\infty} a(t)\mathcal{F}(t; x_0, y_0)\,dt$$

ait un sens (x_0, y_0 étant un point particulier de D). Le nombre caractéristique $c(\varphi)$ est positif ou nul, puisque φ tend vers zéro avec $\frac{1}{t}\cdot$ On peut écrire

$$\varphi' = a(t)\mathcal{F}(t; x_0, y_0)$$

et

$$a(t)\mathcal{F}(t; x, y) = f\varphi',$$

en posant

$$f = \frac{\mathcal{F}(t; x, y)}{\mathcal{F}(t; x_0, y_0)}\cdot$$

En raisonnant comme plus haut, on a d'abord

$$c\left(\frac{f}{\theta'}\right) = \mathcal{R}[h(x_0, y_0)] - \mathcal{R}[h(x, y)] + 1.$$

D'autre part,

$$c\left(\frac{f'}{f}\right) = c\left[\frac{\mathcal{F}'(t; x, y)}{\mathcal{F}(t; x, y)} - \frac{\mathcal{F}'_t(t; x_0, y_0)}{\mathcal{F}(t; x_0, y_0)}\right]$$

est nul ou positif, comme nombre caractéristique d'une somme de deux termes à nombres caractéristiques nuls ou positifs. On voit (n° 9) que

$$p'' = c\left(\frac{f'}{\theta'}\right) + c(\varphi) \geqq c\left(\frac{f}{\theta'}\right) = \mathcal{R}[h(x_0, y_0)] - \mathcal{R}[h(x, y)] + 1$$

est supérieur à l'unité dès que

$$\mathcal{R}[h(x, y)] < \mathcal{R}[h(x_0, y_0)].$$

En définitive, *si l'intégrale*

$$I(x, y) = \int_{t_0}^{+\infty} a(t)\,\mathcal{F}(t;\, x, y)\,dt$$

a un sens pour un point x_0, y_0 du domaine D, elle aura également un sens pour tous les points du même domaine tels que la partie réelle de la fonction $h(x, y)$ reste inférieure à la partie réelle de l'expression $h(x_0, y_0)$.

Supposons qu'il y ait, dans le domaine D, des points où l'intégrale précédente $I(x, y)$ soit convergente et d'autres où elle ne le soit pas; admettons, de plus, la continuité de la fonction $h(x, y)$ ou, tout au moins, celle de sa partie réelle $\mathcal{R}[h(x, y)]$, *il existe alors une frontière de convergence, séparant la région de convergence de la région de divergence, et l'équation de cette frontière est de la forme*

$$\mathcal{R}[h(x, y)] = \alpha,$$

α désignant une constante.

11. Détermination de la frontière de convergence. — *Cette constante est égale au nombre caractéristique de l'intégrale*

$$A_1(t) = -\int_{t}^{+\infty} a(t)\,dt,$$

quand cette intégrale existe et que son nombre caractéristique est positif, ou à celui de l'intégrale

$$A_2(t) = \int_{t_0}^{t} a(t)\,dt,$$

quand l'intégrale précédente n'existe pas ou, qu'existant, elle a un nombre caractéristique nul (il ne peut pas être négatif); nous désignerons par $c(A)$ celui de ces nombres que nous aurons à considérer.

En se reportant à la définition du nombre caractéristique d'une fonction $f(t)$ par rapport à la fonction de comparaison $\theta(t)$

$$c(f) = -\overline{\lim_{t=+\infty}}\,\frac{\log|f(t)|}{\log\theta(t)},$$

on voit que la proposition qui vient d'être énoncée est une généralisation étendue des théorèmes de M. Pincherle [1] donnant l'abscisse de convergence d'une fonction déterminante.

Pour la démonstration, je suppose d'abord que x_0, y_0 soit un point de D intérieur au domaine de convergence; le mot *intérieur* est entendu au sens étroit : il existe d'autres points x'_0, y'_0 du domaine de convergence pour lesquels

$$\mathcal{R}[h(x_0, y_0)] < \mathcal{R}[h(x'_0, y'_0)].$$

Posons

$$\varphi(t) = -\int_t^{+\infty} a(t)\,\mathcal{F}(t;\, x_0, y_0)\,dt,$$

il résulte de la démonstration antérieure (x_0, y_0 et x, y jouaient alors respectivement le rôle de x'_0, y'_0 et x_0, y_0) que $c(\varphi) > 0$.

Écrivons

$$a(t) = a(t)\,\mathcal{F}(t;\, x_0, y_0)\,\frac{1}{\mathcal{F}(t;\, x_0, y_0)}.$$

Nous avons

$$\varphi' = a(t)\,\mathcal{F}(t;\, x_0, y_0)$$

et nous posons

$$f(t) = \frac{1}{\mathcal{F}(t;\, x_0, y_0)}.$$

Appliquons le théorème antérieur D, cherchons, pour cela, $c\left(\frac{f'}{\theta'}\right)$ ou plutôt $c\left(\frac{f}{\theta'}\right) + c\left(\frac{f'}{f}\right)$, qui ne peut surpasser le nombre précédent.

On a, sans difficulté,

$$c\left(\frac{f}{\theta'}\right) = \mathcal{R}[h(x_0, y_0)] + 1,$$

et, puisque $\frac{f'}{f} = -\frac{\mathcal{F}'_t(t;\, x_0, y_0)}{\mathcal{F}(t;\, x_0, y_0)}$,

$$c\left(\frac{f'}{f}\right) \geqq 0 \quad (\text{n}^\text{o}\ \mathbf{10}).$$

Prenons

$$p'' = \mathcal{R}[h(x_0, y_0)] + 1,$$

---

(1) *Voir* les articles cités, p. 145.

ce nombre est bien inférieur ou égal à $c\left(\frac{f'}{\theta'}\right)+c(\varphi)$ et nous savons que le nombre caractéristique $c(\mathrm{A})$ de l'intégrale $\mathrm{A}=\int a(t)\,dt$ (d'une façon plus précise A_1 dans le cas de $p''>1$, ou $\mathcal{R}[h(x_0,y_0)]>0$, A_2 dans le cas de $p''\leqq 1$, ou $\mathcal{R}[h(x_0,y_0)]\leqq 0$), n'est pas inférieur à $p''-1$; donc, si $\mathcal{R}[h(x_0,y_0)]<\alpha$, on a aussi

$$c(\mathrm{A})\geqq\mathcal{R}[h(x_0,y_0)].$$

On peut, du reste, supposer que x_0, y_0 est assez voisin de la frontière du domaine de convergence pour que $\mathcal{R}[h(x_0,y_0)]$ ait le signe de α; il en est de même, alors, de $c(\mathrm{A})$, et la règle du début de ce numéro est vraie pour les signes; de plus, des inégalités précédentes on déduit, x_0, y_0 étant aussi voisin qu'on veut de la frontière du domaine de convergence,

$$c(\mathrm{A})\geqq\alpha. \tag{1}$$

Prenons maintenant un point x_0, y_0 du domaine D tel qu'on ait

$$\mathcal{R}[h(x_0,y_0)]<c(\mathrm{A})$$

et écrivons

$$a(t)\,\mathcal{F}(t;\,x_0,y_0)=f\varphi',$$

où

$$f=\mathcal{F}(t;\,x_0,y_0),\qquad \varphi'=a(t),$$

φ désignant, suivant le signe de $c(\mathrm{A})$, l'une des intégrales A_1 ou A_2, nous avons

$$c(\varphi)=c(\mathrm{A}),\qquad c\left(\frac{f'}{\theta'}\right)\geqq-\mathcal{R}[h(x_0,y_0)]+1$$

et, par conséquent, en prenant

$$p''=c(\varphi)+c\left(\frac{f'}{\theta'}\right),$$

on a

$$p''\geqq c(\mathrm{A})-\mathcal{R}[h(x_0,y_0)]+1.$$

Comme $p''>1$, l'intégrale $\int_t^{+\infty}f\varphi'\,dt$ a un sens, ce qui démontre que l'intégrale

$$\int_t^{+\infty}a(t)\,\mathcal{F}(t;\,x_0,y_0)\,dt$$

est convergente. Par suite, on a $\mathcal{R}[h(x_0, y_0)] < \alpha$, et, puisque $\mathcal{R}[h(x_0, y_0)]$, tout en étant inférieur à $c(A)$, peut en être aussi voisin qu'on le veut,

$$c(A) \leqq \alpha.$$

En rapprochant cette inégalité de l'inégalité (1), p. 151, on voit que

$$c(A) = \alpha,$$

ce qu'il fallait établir.

12. Nombres caractéristiques généralisés d'une suite. — Étant donnée une suite indéfinie de nombres réels ou complexes

$$(a) \qquad a_0, \quad a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_n, \quad \ldots,$$

on peut encore en estimer (par excès) la croissance en la comparant à une suite

$$(\theta) \qquad \theta_0, \quad \theta_1, \quad \theta_2, \quad \ldots, \quad \theta_n, \quad \ldots$$

formée de nombres positifs croissants avec l'indice, devenant infinis en même temps que lui, et en suivant la même marche que plus haut (n° 3, fin). L'expression

$$c_\theta(a) = -\overline{\lim_{n=+\infty}} \frac{\log|a_n|}{\log\theta_n},$$

que nous désignerons aussi par $c(a)$ quand il n'y aura pas d'ambiguïté, définit le *nombre caractéristique (inférieur ou ordinaire) de la suite (a) par rapport à la suite de comparaison* (θ). C'est ainsi qu'en prenant

$$\theta_n = e^n,$$

on a les nombres caractéristiques de M. Liapounoff intervenant dans la théorie des suites des coefficients de séries de Taylor, c'est-à-dire les logarithmes des rayons de convergence des séries associées.

Un autre exemple intéressant se présente encore dans l'étude des séries de Taylor. Soit $\Sigma a_n x^n$ une telle série dont le rayon de convergence est égal à l'unité; prenons $\theta_n = n$, le nombre caractéristique

$$c_\theta(a) = -\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{\log|a_n|}{\log n}$$

étant censé fini, si l'on pose

$$c_0(a) = 1 - \omega,$$

$\omega = 1 - c_0(a)$ est un nombre dont M. Hadamard [1] a montré l'importance et qu'il appelle l'*ordre de la série sur son cercle de convergence*.

La connaissance du nombre caractéristique $c(a)$ ou simplement d'un nombre λ inférieur à $c(a)$ donne une suite dominant la suite a_n,

$$\nu_n = M\,\theta_n^{-\lambda} > |a_n|.$$

Cette inégalité est vérifiée dès les premiers termes si M est convenablement choisi; elle l'est certainement à partir d'une certaine valeur de n si le nombre positif M a été pris d'une façon quelconque.

On définit d'une façon analogue le nombre caractéristique supérieur de la suite (a) relativement à la suite (θ).

Les premiers théorèmes de M. Liapounoff, concernant les nombres caractéristiques d'une somme d'un produit, les fonctions à nombres caractéristiques supérieur et inférieur égaux entre eux, etc., s'étendent manifestement aux nombres caractéristiques des suites, au sens général où nous l'entendons actuellement.

C'est ainsi que le second des exemples cités plus haut nous montre que si l'on a deux séries de Taylor $\varphi(x)$ et $\psi(x)$, l'ordre de leur somme $f(x) = \varphi(x) + \psi(x)$ est égal au plus grand des ordres des fonctions φ et ψ s'ils sont différents et ne leur est pas supérieur s'ils sont égaux (*voir* HADAMARD, *La série de Taylor*, p. 46).

Si l'on a

$$\varphi(x) = \Sigma a_n x^n, \qquad \psi(x) = \Sigma b_n x^n$$

et si l'on pose

$$F(x) = \Sigma a_n b_n x^n,$$

toutes ces séries ayant pour rayon de convergence l'unité, l'ordre de F n'est pas supérieur au produit des ordres de φ et de ψ.

Le cas des sommes définies exige plus d'attention. Comme plus

---

[1] Thèse, *Journal de Mathématiques*, 4ᵉ série, t. VIII, 1892, p. 171; *La série de Taylor*, p. 45 à 49.

haut (nº 6), nous considérons la suite S′ formée par les sommes

$$S'_n = -(a_n + a_{n+1} + \ldots),$$

c'est-à-dire par les restes changés de signe de la série lorsque nous serons sûrs de la convergence de cette série, et la suite S″ formée par les sommes des premiers termes

$$S''_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_{n-1}$$

quand nous ne pourrons pas affirmer la convergence de cette série. Il est du reste facile de s'assurer que, pour une série convergente,

$$c(S') \geqq c(S'').$$

C'est évident si la somme de la série est nulle, puisque alors $S''_n = S'_n$; si la somme de la série est $S \neq 0$, on a

$$\lim S''_n = S,$$

d'où

$$c(S'') = c(S) = 0,$$

alors que $c(S')$, nombre caractéristique d'une suite tendant vers zéro avec $\frac{1}{n}$, est positif ou nul.

Bref, nous considérerons le nombre caractéristique des restes de la série quand nous la saurons convergente, celui des sommes des premiers termes quand la série sera divergente ou que la convergence ne pourra être affirmée.

Cherchons à estimer $c(S')$ ou $c(S'')$. Pour cela nous écrirons, suivant les cas,

(1) $$a_i = \frac{a_i}{\Delta\theta_{i-1}} \Delta\theta_{i-1}, \qquad \Delta\theta_{i-1} = \theta_i - \theta_{i-1}$$

ou

(2) $$a_i = \frac{a_i}{\Delta\theta_i} \Delta\theta_i, \qquad \Delta\theta_i = \theta_{i+1} - \theta_i$$

et nous regarderons $|a_i|$ comme l'aire d'un rectangle, dont la base portée par l'axe des abscisses $O\theta$ joindra les points $\theta_{i-1}\theta_i$ ou $\theta_i\theta_{i+1}$. Cette aire est inférieure à celle qui est comprise entre les mêmes ordonnées, l'axe $O\theta$ et la courbe $\alpha = M\theta^{-p}$, où M est une constante positive et $-p$ un exposant convenablement choisi.

Nous prendrons $\Delta\theta_i$ lorsque la fonction $\alpha = M\theta^{-p}$ sera croissante ou constante, c'est-à-dire lorsque $p \leqq 0$; nous prendrons $\Delta\theta_{i-1}$ pour $p > 0$. En évaluant l'aire correspondant à la courbe, on a le théorème suivant analogue au théorème A du n° 7 :

A'. 1° Si $c\left(\frac{a_n}{\Delta\theta_{n-1}}\right) > 1$ et si p est un nombre quelconque satisfaisant à la double inégalité $1 < p < c\left(\frac{a_n}{\Delta\theta_{n-1}}\right)$, *la série* Σa_n *converge* et

$$c(S') > p - 1;$$

2° Si $1 \geqq c\left(\frac{a_n}{\Delta\theta_{n-1}}\right) > 0$ et si $0 < p < c\left(\frac{a_n}{\Delta\theta_{n-1}}\right)$, *on ne peut pas affirmer la convergence de la série*, mais on a

$$c(S'') > p - 1;$$

3° Si $c\left(\frac{a_n}{\Delta\theta_{n-1}}\right) \leqq 0$, *nous essayerons* $c\left(\frac{a_n}{\Delta\theta_n}\right)$; soit p un nombre négatif ou nul et inférieur à $c\left(\frac{a_n}{\Delta\theta_n}\right)$, on a

$$c(S'') > p - 1.$$

13. Remarques. — L'énoncé précédent fait intervenir les nombres caractéristiques des suites $\frac{a_n}{\Delta\theta_n}$ et $\frac{a_n}{\Delta\theta_{n-1}}$; on peut, du reste, estimer ces nombres en utilisant $c(a_n)$, $c\left(\frac{1}{\Delta\theta_n}\right)$ et $c\left(\frac{1}{\Delta\theta_{n-1}}\right)$ et appliquant la règle concernant le nombre caractéristique d'un produit.

Les nombres $c\left(\frac{1}{\Delta\theta_n}\right)$, $c\left(\frac{1}{\Delta\theta_{n-1}}\right)$ et les nombres caractéristiques supérieurs correspondants ou encore les éléments caractéristiques des différences $\Delta\theta_n$, $\Delta\theta_{n-1}$ sont des constantes attachées à la suite de comparaison.

Dans le cas où $\theta_n = e^n$, ces nombres sont égaux à $+1$.

Si $\theta_n = n^\alpha$, les nombres en question sont égaux à $\frac{\alpha - 1}{\alpha}$; si $\theta_n = \log n$, ils sont infinis négatifs, etc.

Comme on a

$$\frac{\log\dfrac{1}{\Delta\theta_{n-1}}}{\log\theta_n} = -1 + \frac{1}{\log\theta_n}\log\frac{1}{1-\dfrac{\theta_{n-1}}{\theta_n}}, \qquad \theta_{n-1} < \theta_n, \qquad \lim_{n=\infty}\theta_n = \infty,$$

on voit que le nombre $c\left(\frac{1}{\Delta\theta_{n-1}}\right)$ est au plus égal à 1.

Si l'on applique en particulier les critères précédents à l'étude de la convergence de la série $\Sigma\theta_n^{-\alpha}$, déduite de la suite $\theta_n^{-\alpha}$ dont le nombre caractéristique est α, on voit que cette série sera convergente dès que

$$\alpha + c\left(\frac{1}{\Delta\theta_{n-1}}\right) > 1$$

ou

$$\alpha > 1 - c\left(\frac{1}{\Delta\theta_{n-1}}\right).$$

On voit ainsi que $1 - c\left(\frac{1}{\Delta\theta_{n-1}}\right)$ est une limite supérieure pour l'exposant de convergence [1] de la suite θ_n qui joue, comme on sait, un rôle important dans la théorie des fonctions.

Le critère suffisant de convergence donné par le théorème A' est un critère de convergence absolue, puisque le nombre caractéristique ne dépend que du module; on peut le compléter de diverses façons. Dans le cas des séries à termes positifs, on peut donner des critères suffisants de divergence analogues (en utilisant les nombres caractéristiques supérieurs) et correspondant au théorème B (n° 7).

Nous n'insistons pas davantage sur ce point, parce que les critères donnés par la méthode précédente peuvent être obtenus par comparaison avec les séries que M. Dini [2] forme en partant d'une série divergente à termes positifs, ce qui revient à construire la suite θ_i en se donnant θ_0 et les différences $\Delta\theta_{i-1}$.

On peut enfin, et particulièrement dans le cas des séries à termes de signes quelconques ou à termes complexes, utiliser la formule

---

(1) BOREL, *Leçons sur les fonctions entières*, p. 18 et suiv.

(2) Voir *Encyclopédie des Sciences mathématiques*, I, 4, p. 224, n°s 57 et suiv.

souvent désignée sous le nom de *formule de transformation d'Abel* (¹).

Elle s'applique aux séries de la forme

$$\Sigma a_n b_n.$$

Nous poserons

$$B''_n = b_0 + b_1 + \ldots + b_{n-1}$$

ou, si la série Σb_n est convergente,

$$B'_n = -(b_n + b_{n+1} + \ldots);$$

nous avons donc

$$\Delta B'_n = b_n, \qquad \Delta B''_n = b_n$$

et, par suite,

$$a_n b_n = a_n \Delta B'_n = a_n B'_{n+1} - a_{n-1} B'_n - B'_n(a_n - a_{n-1}) = \Delta(a_{n-1} B'_n) - B'_n \Delta a_{n-1};$$

de même

$$a_n b_n = \Delta(a_{n-1} B''_n) - B''_n \Delta a_{n-1}.$$

Bref, en désignant, suivant les cas, B'_n ou B''_n par B_n,

$$a_n \Delta B_n = a_n b_n = \Delta(a_{n-1} B_n) - B_n \Delta a_{n-1}.$$

La sommation de la série $\Delta(a_{n-1} B_n)$ est immédiate; en estimant le nombre caractéristique des restes ou celui des sommes de ses premiers termes, ceux de B_n et de $\dfrac{\Delta a_{n-1}}{\Delta \theta_{n-1}}$ ou $\dfrac{\Delta a_{n-1}}{\Delta \theta_n}$, et appliquant les théorèmes antérieurs, on estimera le nombre caractéristique des restes ou des sommes des premiers termes de la série $\Sigma a_n b_n$. Tous ces nombres caractéristiques sont relatifs à la même suite de comparaison θ_n.

Le parallélisme avec le cas des intégrales est assez manifeste pour que les indications précédentes puissent suffire. On peut ainsi, en suivant la même voie que plus haut (nᵒˢ 7 à 11), démontrer l'existence de l'abscisse de convergence des séries de Dirichlet et des séries analogues et en retrouver l'expression de cette abscisse. La suite de

(¹) *Voir*, au sujet de cette formule, *Encyclopédie des Sciences mathématiques*, article I, 4, nº 14. *Voir* aussi un article de M. E. Bortolotti, *Il metodo della Sommazione per parti* (*Giornale di Mathematiche di Battaglini*, vol. LIV, 1916).

comparaison se déduit de l'étude asymptotique du terme général; dans le cas d'une série de Dirichlet $\Sigma b_n e^{-\lambda_n z}$, elle est $\theta_n = e^{\lambda_n}$ (¹).

CHAPITRE II.

14. Nombre caractéristique d'un groupe de fonctions. — M. Liapounoff appelle *nombre caractéristique d'un groupe de fonctions* le plus petit des nombres caractéristiques des fonctions composant le groupe; il a démontré (p. 229, théorème I) qu'*étant donné un système différentiel linéaire*

$$(1) \qquad \frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + p_{s2}x_2 + \ldots + p_{s\alpha}x_\alpha \qquad (s = 1, 2, \ldots, \alpha),$$

où les p désignent des fonctions de t continues (²) *réelles bornées, toute solution de ce système* (*autre que* $x_1 = x_2 = \ldots = x_\alpha = 0$) *a un nombre caractéristique fini*.

La démonstration qu'il en a donnée prouve, de plus, que si $x_1, x_2, \ldots, x_\alpha$ est la solution considérée, ces fonctions étant réelles, le nombre caractéristique supérieur de $\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_\alpha^2}$ est également fini; et si les x sont complexes il en est de même pour $\sqrt{|x_1^2| + \ldots + |x_\alpha^2|}$.

Nous appellerons *nombre caractéristique supérieur d'un groupe de fonctions* de la variable réelle t le nombre caractéristique supérieur de la racine carrée de la somme des carrés de leurs modules.

C'est aussi le nombre caractéristique supérieur de la somme des modules, car on a

$$1 < \frac{\{|x_1| + \ldots + |x_\alpha|\}^2}{|x_1|^2 + \ldots + |x_\alpha|^2} < 1 + \alpha(\alpha - 1).$$

Le *rayon de convergence de l'ensemble de plusieurs séries de Taylor*

(¹) Ces questions bien connues, surtout depuis la *Thèse* de M. Cahen, sont abordées à un point de vue un peu différent dans un article du *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XLVI, 1918.

(²) Ces hypothèses pourraient être élargies, notamment en ce qui concerne la continuité et la nature réelle des fonctions.

sera, par définition, le plus petit des rayons de convergence de ces diverses séries. C'est encore le logarithme du nombre caractéristique du groupe des coefficients d'une même puissance de la variable considérés comme fonctions de l'exposant de cette puissance (n° 4). Cette définition va nous conduire à un théorème analogue à la proposition de M. Liapounoff que nous venons de rappeler.

Considérons, par exemple, deux suites

$$(2) \qquad \begin{cases} (y) & y_0, \quad y_1, \quad \ldots, \quad y_i, \quad \ldots, \\ (z) & z_0, \quad z_1, \quad \ldots, \quad z_i, \quad \ldots \end{cases}$$

qui se déterminent de proche en proche par les équations de récurrence linéaires

$$(3) \qquad \begin{cases} y_{i+1} = \alpha_i y_i + \beta_i z_i, \\ z_{i+1} = \gamma_i y_i + \delta_i z_i, \end{cases}$$

que nous pouvons écrire encore sous forme d'équations aux différences

$$(4) \qquad \begin{cases} \Delta y_i = y_{i+1} - y_i = (\alpha_i - 1) y_i + \beta_i z_i, \\ \Delta z_i = z_{i+1} - z_i = \gamma_i y_i \qquad + (\delta_i - 1) z_i, \end{cases}$$

dont les propriétés rappellent celles des équations (1). Par exemple la solution générale y_i, z_i du système (3) s'exprime par une combinaison linéaire de deux solutions particulières y'_i, z'_i et y''_i, z''_i,

$$(5) \qquad y_i = c' y'_i + c'' y''_i, \qquad z_i = c' z'_i + c'' z''_i,$$

où c' et c'' sont des constantes indépendantes de l'indice i, dont on peut disposer pour donner à y_0 et z_0 telles valeurs qu'on veut. Supposons que α_i, β_i, γ_i, δ_i restent inférieurs en module à un nombre fixe M et que, de plus, les modules des déterminants $\alpha_i \delta_i - \beta_i \gamma_i$ restent supérieurs à un nombre m, *toute solution* (2) *du système* (3) (*autre que la solution* $y_i = z_i = 0$, *toujours écartée dans ce qui suit*) *donne naissance à deux séries de Taylor* $\Sigma y_n x^n$, $\Sigma z_n x^n$ *dont l'ensemble a un rayon de convergence fini et différent de zéro.*

Pour le démontrer, nous observons d'abord que les solutions

$$\begin{cases} (\mathrm{Y}') & \mathrm{Y}_0, \quad \mathrm{Y}_1, \quad \mathrm{Y}_2, \quad \ldots, \quad \mathrm{Y}_n, \quad \ldots, \\ (\mathrm{Z}') & \mathrm{Z}_0, \quad \mathrm{Z}_1, \quad \mathrm{Z}_2, \quad \ldots, \quad \mathrm{Z}_n, \quad \ldots \end{cases}$$

du système

$$(3') \quad \begin{cases} Y_{i+1} = M(Y_i + Z_i), \\ Z_{i+1} = M(Y_i + Z_i) \end{cases}$$

dominent évidemment celles du système (3) quand on a

$$Y_0 > |y_0|, \qquad Z_0 > |z_0|.$$

Comme de plus

$$Y_{i+1} = Z_{i+1} = (Y_0 + Z_0) M^i,$$

le rayon de convergence de $\Sigma y_n x^n$ et $\Sigma z_n x^n$ n'est pas inférieur à $\frac{1}{M}$.

D'autre part, on a

$$q_i = \frac{y_{i+1}^2 + z_{i+1}^2}{y_i^2 + z_i^2} = \frac{(\alpha_i^2 + \gamma_i^2) y_i^2 + 2(\alpha_i \beta_i + \gamma_i \delta_i) y_i z_i + (\beta_i^2 + \delta_i^2) z_i^2}{y_i^2 + z_i^2};$$

si nous supposons réels tous les coefficients α, β, γ, δ, ainsi que y_0, z_0, il en sera de même de y_i, z_i, ... et le rapport précédent est compris entre les deux racines S'_i, S''_i de l'équation en S

$$\begin{vmatrix} \alpha_i^2 + \gamma_i^2 - S & \alpha_i \beta_i + \gamma_i \delta_i \\ \alpha_i \beta_i + \gamma_i \delta_i & \beta_i^2 + \delta_i^2 - S \end{vmatrix} = 0.$$

Ces racines sont positives et évidemment inférieures à $4M^2$. Si nous supposons $S'_i \geqq S''_i$, comme on a

$$S'_i S''_i = (\alpha_i \delta_i - \beta_i \gamma_i)^2 > m^2,$$

on peut écrire

$$S'_i \geqq q_i \geqq S''_i > \frac{m^2}{S'_i} > \frac{m^2}{4M^2}.$$

On en conclut qu'il existe des valeurs de x telles que le produit $(y_i^2 + z_i^2) x^{2i}$ croît indéfiniment avec i; c'est dire que l'un au moins des produits $y_i x^i$, $z_i x^i$ ne peut rester borné, le rayon de convergence des séries $\Sigma y_i x^i$, $\Sigma z_i x^i$ est donc fini. La proposition est démontrée. Elle s'applique, ainsi que les suivantes, au cas où il y aurait p suites analogues à (2) déterminées par des équations de récurrence linéaires, des hypothèses analogues étant faites sur les coefficients des substitutions et sur leurs déterminants. On trouvera facilement les petites modifications à apporter aux inégalités précédentes.

Enfin, en suivant la même voie que M. Liapounoff (p. 231), on étend le résultat d'abord au cas des solutions complexes d'équations de récurrence à coefficients réels, puis au cas des équations à coefficients complexes.

Il ne peut exister plus de deux rayons de convergence distincts pour l'ensemble des deux séries de Taylor associées aux diverses solutions de (3).

Ce théorème est une conséquence du précédent et s'établit comme le théorème correspondant de M. Liapounoff (théorème II, p. 232).

Une équation différentielle linéaire d'ordre n équivaut, comme on sait, à un système de n équations linéaires du premier ordre; la théorie de M. Liapounoff s'applique donc aux solutions d'une telle équation.

Semblablement, une relation de récurrence linéaire, liant un terme d'une suite aux p termes précédents, se remplace par p relations de récurrence linéaires entre les termes de p suites, relations liant les termes de rang i aux termes de rang $i-1$. Ainsi, en prenant $p=2$

$$y_{i+2}=\alpha_i y_{i+1}+\beta_i y_i$$

et introduisant la nouvelle suite (z) déterminée par

$$y_{i+1}=y_i+z_i,$$

on a le système

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i+z_i,\\ z_{i+1} &= (\alpha_i-1)(y_i+z_i)+\beta_i y_i, \end{aligned}$$

qui est bien de la forme voulue.

On pourra donc adapter les propositions que nous donnons ici aux suites déterminées ainsi par des relations de récurrence liant $p+1$ termes consécutifs. Par exemple :

Si les coefficients d'une série de Taylor $\Sigma y_i x^i$ se déterminent de proche en proche par une relation de récurrence linéaire à coefficients variables, mais bornés,

$$(6)\qquad y_{i+p}=\alpha_{i,1}y_{i+p-1}+\alpha_{i,2}y_{i+p-2}+\ldots+\alpha_{i,p}y_i,$$

la série admet un rayon de convergence fini et non nul. Les coefficients de la série dépendent encore de p constantes arbitraires et il y a au plus p rayons de convergence distincts pour les séries qu'on peut ainsi obtenir.

Ces résultats sont une généralisation de ceux indiqués par Poincaré dans son Mémoire *Sur les équations linéaires aux différentielles ordinaires et aux différences finies* (*American Journal*, t. VII, 1885). Les coefficients des relations de récurrence telles que (6) y sont supposés fonctions rationnelles de l'indice i; alors que nous supposons ces fonctions quelconques.

La notion de nombre caractéristique d'un groupe de fonctions peut être généralisée en prenant, comme plus haut (n° 3), une fonction de comparaison $\theta(t)$ autre que la fonction exponentielle : c'est toujours le plus petit des nombres caractéristiques des fonctions composant le groupe. Dans un article antérieur (*Congrès des Sociétés savantes*, 1913 : *Sciences*) j'ai donné, à ce propos, l'extension du théorème de M. Liapounoff aux solutions de systèmes différentiels linéaires dont les coefficients satisfont à certaines conditions de croissance différentes de celles indiquées ci-dessus.

On pourra de même parler du nombre caractéristique généralisé (n° 12) de plusieurs suites; par exemple, en prenant pour suite de comparaison $\theta_i = i$ et supposant qu'il y ait deux suites (y), (z), dont les séries associées $\Sigma y_i x^i$, $\Sigma z_i x^i$ convergent pour $|x| < 1$, le nombre caractéristique c des deux suites donne ce qu'on peut appeler l'ordre ω des deux séries sur le cercle $|x| = 1$ par la relation $c = 1 - \omega$ (*voir* n° 12). Il serait évidemment possible de donner pour ces nombres caractéristiques généralisés des suites et pour les systèmes de récurrence des propositions analogues à celles qui concernent les nombres caractéristiques ordinaires et les systèmes différentiels linéaires.

Remarque. — Dans le cas où l'on a une seule suite (y) satisfaisant aux équations de récurrence

$$y_{i+1} = \alpha_i y_i \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots),$$

la proposition précédente montre que si dans une série de Taylor $\Sigma y_i x^i$ le module du rapport α_i d'un coefficient au précédent reste compris entre deux nombres fixes, le rayon de convergence de la série est fini et différent de zéro.

La suite des α_i détermine alors les y_i à un facteur constant près; il est naturel de se demander quelles relations existent entre les points singuliers des séries de Taylor

$$f(x) = \Sigma y_i x^i, \qquad g(x) = \Sigma \alpha_i x^i.$$

Voici une remarque intéressante à ce sujet.

On peut écrire

$$\frac{f(x) - y_0}{x} = \mathrm{F}(x),$$

$\mathrm{F}(x)$ est une fonction régulière à l'origine, admettant évidemment les mêmes points singuliers que $f(x)$. D'autre part,

$$\begin{aligned}\mathrm{F}(x) &= y_1 + y_2 x + \ldots + y_{i+1} x^i + \ldots\\ &= y_0\alpha_0 + y_1\alpha_1 x + \ldots + y_i\alpha_i x^i + \ldots\end{aligned}$$

se déduit de $f(x)$ et de $g(x)$ par l'opération de M. Hadamard (*voir* n° 5); c'est dire qu'en désignant par c, c', γ les affixes de points singuliers de F, f et g, on a

$$c = c'\gamma,$$

d'où $\gamma = \frac{c}{c'}$. Mais si γ a cette forme, il ne faut pas en conclure que tout quotient $\frac{c}{c'}$ donne l'affixe d'un point singulier. En effet, du moment que $|\alpha_i|$ et $\frac{1}{|\alpha_i|}$ sont bornés, $\frac{1}{i}\log|\alpha_i|$ tend vers zéro quand i devient infini, le rayon de convergence de la série $g(x)$ est donc égal à l'unité; ceci nous montre déjà qu'il faudrait écarter les quotients $\frac{c}{c'}$ de module inférieur à l'unité.

Une remarque de même nature s'applique aux séries

$$\mathrm{Y}(x) = \Sigma y_i x^i, \qquad \mathrm{Z}(x) = \Sigma z_i x^i,$$
$$\mathrm{A}(x) = \Sigma\alpha_i x^i, \qquad \mathrm{B}(x) = \Sigma\beta_i x^i, \qquad \mathrm{C}(x) = \Sigma\gamma_i x^i, \qquad \mathrm{D}(x) = \Sigma\delta_i x^i,$$

associées respectivement aux suites (y), (z), (α), (β), (γ), (δ) constituées par les divers facteurs figurant dans les seconds membres des équations (3); désignons par η, η', ... les affixes des points singuliers de $Y(x)$, par $\zeta, \zeta', \ldots$ ceux des points singuliers de $Z(x)$, par a, b, c, d les mêmes éléments pour $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$, $D(x)$, on a nécessairement des relations de la forme

$$a = \frac{\eta'}{\eta}, \qquad b = \frac{\zeta}{\eta''}, \qquad c = \frac{\eta'''}{\zeta'}, \qquad d = \frac{\zeta''}{\zeta'''}.$$

Il est facile de former des exemples.

Nous nous contentons de signaler ici ces questions, une étude plus approfondie nous entraînerait loin de l'objet du présent travail.

15. Équations de récurrence attachées a un système différentiel et a des valeurs de la variable en progression arithmétique. — Soit un système différentiel linéaire

$$(7) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= py + qz, \\ \frac{dz}{dt} &= ry + sz, \end{aligned} \right.$$

où les coefficients p, q, r, s sont des fonctions de t réelles [1] et bor-

---

(1) Du moment que la variable t reste réelle et que les résultats énoncés ici par un système à deux fonctions inconnues y, z s'appliquent encore au cas où il y a n fonctions inconnues, l'hypothèse que les coefficients p, q, r, s sont réels ne diminue pas la généralité. En effet, si le système linéaire comportait n fonctions inconnues imaginaires, si ses coefficients étaient imaginaires, son étude se ramène (pour t réel) à celle d'un système à $2n$ fonctions inconnues et à coefficients réels. Par exemple, si l'on a

$$p = p' + ip'', \qquad q = q' + iq'', \qquad r = r' + ir'',$$
$$s = s' + is'', \qquad y = y' + iy'', \qquad z = z' + iz'', \qquad i = \sqrt{-1},$$

e système (7) équivaut, pour t réel, à

$$\frac{dy'}{dt} = p'y' - p''y'' + q'z' - q''z'',$$
$$\frac{dz'}{dt} = r'y' - r''y'' + s'z' - s''z'',$$
$$\frac{dy''}{dt} = p''y' + p'y'' + q''z' + q'z'',$$
$$\frac{dz''}{dt} = r''y' + r'y'' + s''z' + s'z''.$$

où tous les éléments sont réels.

nées en valeur absolue, il existe un nombre μ tel que

$$|p| < \mu, \qquad |q| < \mu, \qquad |r| < \mu, \qquad |s| < \mu.$$

Considérons une solution réelle de ce système; les fonctions inconnues $y(t)$, $z(t)$ prennent respectivement pour

$$t = 0, \qquad t = \mathrm{T}, \qquad t = 2\mathrm{T}, \qquad \ldots, \qquad t = i\mathrm{T}$$

les valeurs

$$\begin{matrix} y_0, & y_1, & y_2, & \ldots, & y_i, & \ldots, \\ z_0, & z_1, & z_2, & \ldots, & z_i, & \ldots. \end{matrix}$$

Laissons y_0, z_0 arbitraires; les valeurs y_i, z_i peuvent se déterminer de proche en proche par des formules de récurrence

$$(8) \qquad \begin{cases} y_{i+1} = \alpha_i y_i + \beta_i z_i, \\ z_{i+1} = \gamma_i y_i + \delta_i z_i, \end{cases}$$

dont les coefficients s'interprètent aisément : α_i et γ_i sont les valeurs pour $t = (i+1)\mathrm{T}$ de la solution $y = \eta_1(t)$, $z = \zeta_1(t)$ du système (7) déterminée par les conditions

$$\eta_1(i\mathrm{T}) = 1, \qquad \zeta_1(i\mathrm{T}) = 0,$$

β_i, γ_i sont les valeurs pour $t = (i+1)\mathrm{T}$ de la solution $y = \eta_2(t)$, $z = \zeta_2(t)$ de (7) déterminée par

$$\eta_2(i\mathrm{T}) = 0, \qquad \zeta_2(i\mathrm{T}) = 1.$$

Ces coefficients satisfont aux conditions indiquées au numéro précédent. En effet, η_1 et ζ_1 sont dominés [1] respectivement par les solutions de

$$\frac{dy}{dt} = \mu(y+z),$$
$$\frac{dz}{dt} = \mu(y+z),$$

satisfaisant aux mêmes conditions initiales, c'est dire qu'on a

$$|\eta_1(t)| < \frac{1}{2}\left[e^{2\mu(t-i\mathrm{T})} + 1\right], \qquad |\zeta_1(t)| < \frac{1}{2}\left[e^{2\mu(t-i\mathrm{T})} - 1\right]$$

---

[1] *Voir* un Mémoire de M. GOURSAT, *Annales de l'École Normale*, 3e série, t. XXIII, 1906, p. 433.

et des inégalités analogues pour η_2 et ζ_2; elles entraînent les suivantes :

$$|\alpha_i| < \frac{1}{2}[e^{2\mu T}+1], \qquad |\gamma_i| < \frac{1}{2}[e^{2\mu T}-1],$$

$$|\beta_i| < \frac{1}{2}[e^{2\mu T}-1], \qquad |\delta_i| < \frac{1}{2}[e^{2\mu T}+1].$$

Les coefficients des formules (8) sont donc bornés; quant au déterminant qu'ils forment, il est, d'après une formule connue,

$$\alpha_i\delta_i - \beta_i\gamma_i = e^{-\int_{iT}^{(i+1)T}(p+s)\,dt}$$

et, par suite, sa valeur absolue

$$|\alpha_i\delta_i - \beta_i\gamma_i| > e^{-2\mu T}$$

est bornée inférieurement.

L'ensemble des séries de Taylor $\Sigma y_i x^i$, $\Sigma z_i x^i$ associées ainsi à une solution déterminée $y(t)$, $z(t)$ du système différentiel (7) a donc un rayon de convergence fini R. Nous allons le rattacher au nombre caractéristique de cette solution.

16. Relations entre les nombres caractéristiques des solutions d'un système différentiel linéaire et les rayons de convergence des séries de Taylor déterminées par les équations précédentes de récurrence. — Observons d'abord que le nombre caractéristique du carré x^2 d'une fonction (réelle) $x(t)$ est double de celui de x, puisque $\log x^2 = 2\log x$ et que le nombre caractéristique de la somme y^2+z^2 des carrés de deux fonctions réelles $y(t)$, $z(t)$ est double du nombre caractéristique de l'ensemble de ces deux fonctions [(p. 136, note (1))].

De même le rayon de convergence de la série de Taylor associée à la suite $y_i^2+z_i^2$ est le carré du rayon de convergence des séries associées aux suites de nombres réels y_i, z_i.

Cela dit, posons

$$f(t) = y^2 + z^2$$

et comparons les plus grandes limites pour t et t_i infinis positifs de $\frac{\log f(t)}{t}$ et de $\frac{\log f(t_i)}{t_i}$, où $t_i = iT$ est le plus grand multiple de T contenu dans t, Nous avons

$$\frac{\log f(t)}{t} = \frac{\log f(t)}{t_i}\,\frac{t_i}{t}; \tag{9}$$

la dernière fraction tend vers l'unité; tout revient à étudier

$$\frac{\log f(t)}{t_i} = \frac{\log f(t_i)}{t_i} + \frac{\log f(t) - \log f(t_i)}{t_i}.$$

Or

$$\frac{d \log f(t)}{dt} = 2\,\frac{y\dfrac{dy}{dt} + z\dfrac{dz}{dt}}{y^2 + z^2} = 2\,\frac{p y^2 + (q + r) y z + s z^2}{y^2 + z^2}$$

en vertu des hypothèses antérieures (n° 15) $\left|\dfrac{d\log f(t)}{dt}\right| < 4\mu$, par suite

$$-4\mu T < -4\mu(t - t_i) < |\log f(t) - \log f(t_i)| < 4\mu(t - t_i) < 4\mu T.$$

La fraction $\dfrac{\log f(t) - \log f(t_i)}{t_i}$ tend donc vers zéro quand t et i deviennent infinis, elle est négligeable dans la recherche de la plus grande limite du second membre de la relation (9); la plus grande limite de $\dfrac{\log f(t)}{t}$ et de $\dfrac{\log f(t_i)}{t_i} = \dfrac{1}{T}\,\dfrac{\log f(iT)}{i}$ sont égales. Par suite :

Le nombre caractéristique l de la solution y, z du système (7) est

$$l = \frac{1}{T}\log R, \tag{10}$$

R *étant le rayon de convergence de l'ensemble des séries de Taylor associées aux suites y_i, z_i du n° 15.*

17. Exemples. Extension des résultats précédents. — Quand le système différentiel linéaire est à coefficients constants, les nombres caractéristiques sont égaux aux parties réelles changées de signe des racines de l'équation caractéristique (*voir* le Mémoire de M. Liapounoff, p. 269); la propriété précédente se vérifie immédiatement sur les expressions bien connues des solutions du système.

Si le système (7) est à coefficients périodiques, on prend pour T la période, la vérification est encore facile (*Ibid.*, p. 392 à 396; Poincaré, *Méthodes nouvelles*, p. 167-179). Dans ces deux cas, le système d'équations de récurrence est à coefficients constants.

On peut étendre les résultats précédents aux nombres caractéristiques généralisés. Si $\theta(t)$ est la fonction de comparaison, nous savons que $\log\theta(t)$ croît indéfiniment avec t, et nous admettrons que le quotient $\frac{\log\theta(t_i)}{\log\theta(t)}$, où $t_i = i\mathrm{T} < t < t_{i+1}(i+1)\mathrm{T}$ tend vers l'unité quand i croît indéfiniment. On a du reste, en posant $t = t_i + h$,

$$\log\theta(t) = \log\theta(t_i) + h\frac{\theta'(t')}{\theta(t')} \qquad (t_i < t' < t):$$

cette dernière hypothèse est donc vérifiée dès que la dérivée logarithmique $\frac{\theta'(t)}{\theta(t)}$ de $\theta(t)$ reste finie quand t devient infini.

Dans ces conditions, le raisonnement du n° 16 reste valable. Par exemple, si l'on prend $\theta(t) = t$ en considérant une solution $y(t)$, $z(t)$ du système (7) et les suites y_i, z_i vérifiant les équations de récurrence (8) et telles qu'on ait

$$y_0 = y(0), \qquad z_0 = z(0),$$

le nombre caractéristique l de cette solution et le rayon de convergence R de $\Sigma y_i x^i$, $\Sigma z_i x^i$ sont liés par la relation précédente (10) et, de plus, l'ordre ω des séries $\Sigma y_i \mathrm{R}^i \xi^i$, $\Sigma z_i \mathrm{R}^i \xi^i$ sur leur cercle de convergence (de rayon égal à l'unité) est lié au nombre caractéristique c_t de l'ensemble $e^{lt}y(t)$, $e^{lt}z(t)$ par rapport à t par la relation (n° 12)

$$1 - \omega = c_t.$$

La vérification est facile pour les systèmes à coefficients constants ou périodiques.

18. Systèmes normaux de solutions. — La définition des systèmes ou groupes normaux de solutions d'un système différentiel linéaire (p. 232 à 238 du Mémoire de M. Liapounoff) s'applique également aux solutions d'un système E d'équations aux différences linéaires : n solutions distinctes d'un système E à n suites inconnues constituent un *système normal* ou *groupe normal* si l'ensemble des n séries de Taylor, associées à toute combinaison linéaire d'un nombre quelconque p de

ces solutions, a un rayon de convergence égal à celui de l'ensemble des *np* séries de Taylor associées aux solutions combinées. Les premières propriétés des systèmes normaux subsistent également (théorèmes I à IV), leurs démonstrations restent valables, mais le théorème V appelle de petites modifications que nous indiquons brièvement; pour simplifier l'écriture, prenons $n = 3$.

Considérons le système

$$(\mathrm{E}) \qquad \begin{cases} x_{i+1} = \alpha_i x_i + \beta_i y_i + \gamma_i z_i, \\ y_{i+1} = \alpha'_i x_i + \beta'_i y_i + \gamma'_i z_i, \\ z_{i+1} = \alpha''_i x_i + \beta''_i y_i + \gamma''_i z_i, \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{aligned} \Delta x_i &= (\alpha_i - 1) x_i + \beta_i y_i + \gamma_i z_i, \\ \Delta y_i &= \alpha'_i x_i + (\beta'_i - 1) y_i + \gamma'_i z_i, \\ \Delta z_i &= \alpha''_i x_i + \beta''_i y_i + (\gamma''_i - 1) z_i. \end{aligned}$$

En posant

$$\Theta_i = \begin{vmatrix} \alpha_i & \beta_i & \gamma_i \\ \alpha'_i & \beta'_i & \gamma'_i \\ \alpha''_i & \beta''_i & \gamma''_i \end{vmatrix}, \qquad \Delta_i = \begin{vmatrix} x_i & y_i & z_i \\ x'_i & y'_i & z'_i \\ x''_i & y''_i & z''_i \end{vmatrix},$$

$x_i, y_i, z_i;\ x'_i, y'_i, z'_i;\ x''_i, y''_i, z''_i$ étant trois solutions distinctes de (E), on a évidemment

$$\Delta_{i+1} = \Theta_i \Delta_i$$

et

$$\Delta_i = \Delta_0 \Theta_0 \Theta_1 \ldots \Theta_{i-1}.$$

L'égalité précédente montre que *le produit des rayons de convergence des n ensembles de séries de Taylor construites avec n solutions indépendantes de* (E) *ne peut être supérieur au rayon de convergence de la série de Taylor associée à*

$$u_i = \Theta_0 \Theta_1 \ldots \Theta_{i-1}.$$

C'est l'analogue du théorème V (p. 235).

Au corollaire donné par M. Liapounoff (p. 236) correspond l'énoncé suivant : « S'il existe un système de n solutions de (E) tel que le produit des rayons de convergence des n ensembles de séries de Taylor construites avec ces solutions égale le rayon de convergence de la série associée à u_i, le système en question est normal. »

19. Systèmes linéaires réguliers d'équations différentielles et d'équations aux différences. — Parmi les systèmes d'équations différentielles linéaires qu'il étudie (systèmes à coefficients bornés), M. Liapounoff (p. 237-242) a distingué les *systèmes réguliers*. Rappelons-en la définition : Soient un système

$$(11) \qquad \frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + p_{s2}x_2 + \ldots + p_{sn}x_n \qquad (s = 1, 2, \ldots, n),$$

et $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ les nombres caractéristiques d'un groupe normal de ses solutions; le déterminant Δ qu'elles forment ne diffère que par un facteur constant de l'expression

$$e^{\int \sum_{s=1}^{n} p_{ss}\, dt}.$$

Désignons par m et μ les nombres caractéristiques ordinaire et supérieur de Δ; ceux de $\frac{1}{\Delta}$ sont $-\mu$ et $-m$, et l'on a

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n \leqq m \leqq -\mu;$$

le nombre

$$-\sigma = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n + \mu$$

est négatif ou nul. S'il est nul, le système (11) est dit *régulier* [1]; dans tous les cas σ peut être appelé « la mesure de l'irrégularité du système (11) ».

M. Liapounoff a montré l'importance de ces notions dans la recherche des solutions d'un système différentiel non linéaire S asymptotique à une solution connue (p. 243-254); on peut résumer ses résultats de la façon suivante :

Soit L le système d'équations aux variations correspondant à S et à la solution connue; L est un système linéaire; si ce système est régulier et s'il admet p solutions distinctes à nombres caractéristiques positifs, S admet une famille de solutions asymptotiques (pour les valeurs positives indéfiniment croissantes de la variable indépendante t) à la solution connue, dépendant au moins de p paramètres

---

[1] Pour qu'un système soit régulier, il faut évidemment que $\lambda + \mu = 0$.

arbitraires. Si L est irrégulier, le résultat reste valable pourvu qu'on désigne par p le nombre des solutions distinctes de L dont les nombres caractéristiques surpassent la mesure de son irrégularité [1].

D'une façon analogue, un système d'équations de récurrence (E) sera dit *régulier* si le produit $R_1 R_2 \ldots R_n$ des rayons de convergence des ensembles de séries de Taylor associées aux solutions d'un système normal est égal à l'inverse du rayon de convergence ρ de la série associée à la suite $\frac{1}{u_i}$, où u_i est l'expression définie au n° 18. Si le système n'est pas régulier, la mesure de son irrégularité est donnée par le logarithme changé de signe du produit $\rho R_1 R_2 \ldots R_n$, produit qui est inférieur à l'unité.

Les systèmes d'équations de récurrence dont les coefficients sont constants sont réguliers; mais dans le cas des coefficients variables il paraît bien difficile de reconnaître si un système (E) donné est régulier ou non. On peut le faire toutefois pour des systèmes d'un type particulier analogue au système différentiel étudié, du même point de vue, par M. Liapounoff (p. 237); indiquons le résultat dans le cas de deux équations.

Le système

$$(12)\qquad \begin{cases} x_{i+1} = \alpha_i x_i, \\ y_{i+1} = \beta_i x_i + \gamma_i y_i \end{cases}$$

admet comme solutions particulières

$$x_i^1 = \alpha_0 \alpha_1 \ldots \alpha_{i-1}, \qquad y_i^1 = \gamma_0 \gamma_1 \ldots \gamma_{i-1} \left[\frac{\beta_0}{\gamma_0} + \frac{\alpha_0 \beta_1}{\gamma_0 \gamma_1} + \ldots + \frac{\alpha_0 \alpha_1 \ldots \alpha_{i-2} \beta_{i-1}}{\gamma_0 \gamma_1 \ldots \gamma_{i-1}} \right]$$

et

$$x_i^2 = 0, \qquad y_i^2 = \gamma_0 \gamma_1 \ldots \gamma_{i-1};$$

la solution générale est une combinaison linéaire de celles-là. *Pour*

---

(1) Dans le Chapitre II d'un Mémoire inséré dans les *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure* (3e série, t. XXXIII, 1911), j'ai donné une démonstration du théorème en question avec des hypothèses un peu plus générales que celles de M. Liapounoff, en supposant toutefois le système L régulier; mais on peut encore étendre la démonstration au cas des systèmes irréguliers.

qu'il soit régulier, il faut et il suffit que chacune des expressions

$$\sqrt[i]{|\alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_{i-1}|},\qquad \sqrt[i]{|\gamma_0\gamma_1\ldots\gamma_{i-1}|}$$

tende vers une limite quand i augmente indéfiniment.

On peut donner de ce théorème une démonstration analogue à celle de M. Liapounoff pour la proposition correspondante; on peut aussi l'en déduire en construisant un système

$$(13)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ax,\\ \frac{dy}{dt} &= bx+cy,\end{aligned}\right.$$

auquel cette proposition s'applique et où les solutions $x(t)$, $y(t)$ prennent pour les valeurs entières i de la variable t les valeurs x_i, y_i déterminées par les relations de récurrence (12). On prend (¹) par exemple, pour $i<t<i+1$,

$$a=\log\alpha_i,\qquad c=\log\gamma_i,\qquad b=\frac{\beta_i}{\alpha_i-\gamma_i}\log\frac{\alpha_i}{\gamma_i}.$$

Le système (13) étant ainsi formé, on utilise la proposition de M. Liapounoff et celle que nous avons donnée à la fin du n° 16.

20. Systèmes réductibles. — L'analogie existant entre équations de récurrence et équations différentielles se poursuit encore à propos du caractère d'invariance des nombres caractéristiques signalé par M. Liapounoff (p. 241). Il prend dans le cas des suites déterminées par des équations linéaires de récurrence la forme que voici : Étant donné un système de telles équations

$$(14)\qquad \left\{\begin{aligned} y_{i+1} &= \alpha_i y_i+\beta_i z_i\\ z_{i+1} &= \gamma_i y_i+\delta_i z_i\end{aligned}\right.\qquad (i=0,1,2\ldots),$$

si l'on effectue sur les termes successifs des suites solutions (y), (z)

(¹) M. Liapounoff suppose continus les coefficients des équations différentielles linéaires qu'il étudie; ses résultats restent néanmoins valables si ces coefficients sont discontinus pour des valeurs isolées de la variable t, comme c'est ici le cas avec les valeurs adoptées pour a, b, c.

des substitutions linéaires

$$(15)\qquad \begin{cases} y_i = p_i Y_i + q_i Z_i, \\ z_i = r_i Y_i + s_i Z_i. \end{cases}$$

où les coefficients p_i, q_i, r_i, s_i, ... sont tous inférieurs en module à un nombre fixe K, et où les déterminants $p_i s_i - q_i r_i$ sont tous supérieurs en module à un nombre positif k, les nouvelles suites

$$\begin{array}{ll} (\mathrm{Y}) & Y_0, \quad Y_1, \quad \ldots, \quad Y_i, \quad \ldots, \\ (\mathrm{Z}) & Z_0, \quad Z_1, \quad \ldots, \quad Z_i, \quad \ldots \end{array}$$

satisfont à un système de même forme que (14), soit

$$(16)\qquad \begin{cases} Y_{i+1} = A_i Y_i + B_i Z_i, \\ Z_{i+1} = C_i Y_i + D_i Z_i, \end{cases}$$

et ont même nombre caractéristique que les premières.

En effet, on voit d'abord que le nombre caractéristique des suites (Y), (Z) ne peut être inférieur à celui des suites primitives (y), (z), et, comme d'autre part, Y_i, Z_i s'expriment en fonction de y_i, z_i par les formules d'une substitution linéaire à coefficients également bornés, le nombre caractéristique des suites (y), (z) ne peut davantage être supérieur à celui des suites (Y), (Z); ces nombres sont donc égaux.

Les substitutions (15) appliquées à des solutions constituant un système normal le transforment en un système normal de solutions des équations (16).

On appelle réductibles les systèmes linéaires (14) d'équations de récurrence qu'une transformation (15) ramène à des équations (16) à coefficients A_i, B_i, C_i, D_i constants (c'est-à-dire indépendants de l'indice i).

Un système d'équations de récurrence à coefficients constants

$$(17)\qquad \begin{cases} y_{i+1} = \alpha y_i + \beta z_i, \\ z_{i+1} = \gamma y_i + \delta z_i \end{cases}$$

peut toujours, comme on sait, se ramener par une même substitution linéaire effectuée sur tous les groupes d'inconnues à l'une des formes réduites

$$(18) \qquad y_{i+1} = \lambda y_i, \qquad z_{i+1} = \mu z_i,$$
$$(19) \qquad y_{i+1} = \lambda y_i, \qquad z_{i+1} = \lambda z_i + y_i,$$

λ et μ pouvant, de plus, être pris réels et positifs.

Pour les équations (18) la solution générale est

$$y_i = y_0 \lambda^i, \qquad z_i = z_0 \mu^i$$

et les séries de Taylor associées ont pour rayons de convergence $\frac{1}{|\lambda|}$ et $\frac{1}{|\mu|}$; elles représentent des fonctions admettant pour pôles simples les points $\frac{1}{\lambda}$ et $\frac{1}{\mu}$. Dans le cas des équations (19), on a pour solution générale

$$y_i = y_0 \lambda^i, \qquad z_i = z_0 \lambda^i + i y_0 \lambda^{i-1};$$

les séries de Taylor associées ont pour rayon de convergence $\frac{1}{|\lambda|}$; elles représentent des fonctions ayant pour pôle le point $\frac{1}{\lambda}$, l'ordre de multiplicité étant au plus égal à 2.

Les valeurs de λ et μ sont du reste données par l'équation caractéristique

$$(\alpha - \lambda)(\delta - \lambda) - \beta\gamma = 0.$$

21. Équations de récurrence non linéaires. Solutions asymptotiques a une solution donnée. — Imaginons un système non linéaire d'équations de récurrence

$$(20) \qquad \left\{ \begin{aligned} Y_{i+1} &= F_i(Y_i, Z_i) \\ Z_{i+1} &= G_i(Y_i, Z_i) \end{aligned} \right. \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots),$$

il permet de déterminer de proche en proche les termes successifs de deux suites

$$(21) \qquad \left\{ \begin{array}{lllll} (Y) & Y_0, & Y_1, & Y_2, & \ldots, \\ (Z) & Z_0, & Z_1, & Z_2, & \ldots \end{array} \right.$$

en partant des deux premiers qui restent arbitraires; l'indice i dont sont affectées les lettres F et G dans les équations (20) indique que les opérations à faire pour passer de deux termes de même rang i des suites (21) aux termes suivants peuvent varier avec i.

Étant donnée une solution particulière

$$(\mathrm{Y}^0) \qquad \mathrm{Y}_0^0, \quad \mathrm{Y}_1^0, \quad \mathrm{Y}_2^0, \quad \ldots,$$
$$(\mathrm{Z}^0) \qquad \mathrm{Z}_0^0, \quad \mathrm{Z}_1^0, \quad \mathrm{Z}_2^0, \quad \ldots,$$

pour étudier les solutions de (20) voisines de celle-là, nous ferons le changement de variables

$$\mathrm{Y}_i = \mathrm{Y}_i^0 + y_i,$$
$$\mathrm{Z}_i = \mathrm{Z}_i^0 + z_i;$$

les nouvelles inconnues y_i, z_i seront déterminées par les équations

$$(22)\qquad \begin{cases} y_{i+1} = \mathrm{F}_i(\mathrm{Y}_i^0 + y_i, \mathrm{Z}_i^0 + z_i) - \mathrm{F}_i(\mathrm{Y}_i^0, \mathrm{Z}_i^0), \\ z_{i+1} = \mathrm{G}_i(\mathrm{Y}_i^0 + y_i, \mathrm{Z}_i^0 + z_i) - \mathrm{G}_i(\mathrm{Y}_i^0, \mathrm{Z}_i^0), \end{cases}$$

dont les seconds membres s'annulent pour $y_i = z_i = 0$.

Quand $|y_i|$, $|z_i|$ sont infiniment petits, on est amené naturellement à substituer aux équations (22) celles qu'on obtient en réduisant les seconds membres à leur partie linéaire :

$$(23)\qquad \begin{cases} y_{i+1} = \alpha_i y_i + \beta_i z_i, \\ z_{i+1} = \gamma_i y_i + \delta_i z_i, \end{cases}$$

$$\alpha_i = \left[\frac{\partial \mathrm{F}_i(\mathrm{Y}_i, \mathrm{Z}_i)}{\partial \mathrm{Y}_i}\right]_0, \qquad \beta_i = \left[\frac{\partial \mathrm{F}_i(\mathrm{Y}_i, \mathrm{Z}_i)}{\partial \mathrm{Z}_i}\right]_0,$$
$$\gamma_i = \left[\frac{\partial \mathrm{G}_i(\mathrm{Y}_i, \mathrm{Z}_i)}{\partial \mathrm{Y}_i}\right]_0, \qquad \delta_i = \left[\frac{\partial \mathrm{G}_i(\mathrm{Y}_i, \mathrm{Z}_i)}{\partial \mathrm{Z}_i}\right]_0,$$

l'indice zéro indiquant qu'après le calcul des dérivées, on remplace Y_i et Z_i respectivement par Y_i^0 et Z_i^0.

Nous montrerons comment on peut utiliser ces équations (23) [qu'on peut appeler les équations aux variations du système (20) correspondant à la solution connue (Y^0), (Z^0) ou équations de première approximation] pour la recherche des solutions de (20) asymptotiques à la solution connue, c'est-à-dire telles que les valeurs correspondantes x_i, y_i tendent vers zéro avec $\frac{1}{i}$. Nous nous limiterons au cas où le système (23) est à coefficients constants; l'étude du cas des coefficients variables, sans être au fond plus difficile, serait bien plus compliquée comme notations.

On peut admettre qu'on a ramené le système à la forme canonique; supposons qu'il s'agisse de la forme (18) et que les nombres λ, μ soient distincts. Tout revient à étudier un système (20) de la forme

$$(24)\qquad \begin{cases} y_{i+1} = \lambda y_i + \varphi_i(y_i, z_i), \\ z_{i+1} = \mu z_i + \psi_i(y_i, z_i), \end{cases}$$

où *toutes les fonctions* $\varphi_i(y, z)$, $\psi_i(y, z)$ *s'annulent ainsi que leurs dérivées premières pour* $y = z = 0$; *nous supposerons de plus ces dérivées uniformément continues en ce point, c'est-à-dire que nous admettrons qu'à un nombre positif* η *arbitrairement petit on peut faire correspondre un nombre* σ *tel que, pour* $|y| < \sigma$, $|z| < \sigma$, *ces dérivées* $\frac{\partial \varphi_i}{\partial y}, \frac{\partial \varphi_i}{\partial z}, \frac{\partial \psi_i}{\partial y}, \frac{\partial \psi_i}{\partial z}$ *soient en valeur absolue inférieures à* η, *et cela pour toutes les valeurs de* i. Nous pouvons supposer λ et μ réels et positifs.

Le système (24) admet-il des solutions asymptotiques à zéro pour i infini? La réponse est immédiate quand les fonctions φ_i, ψ_i sont identiquement nulles, et l'on est ainsi conduit à penser que *le système* (24) *admet des solutions asymptotiques à zéro quand l'un au moins des nombres* λ *et* μ *est inférieur à l'unité; et ces solutions dépendent d'autant de constantes arbitraires qu'il y a de nombres inférieurs à l'unité parmi les nombres* λ *et* μ.

Nous donnerons de ce théorème une démonstration analogue à celle que nous avons proposée pour la question correspondante concernant les équations différentielles [1], en transformant les équations de récurrence (24) en un système d'équations où les termes des suites inconnues figurent, en nombre fini ou infini, sous des signes d'addi-

---

[1] Voir *Annales de l'École Normale*, 3e série, t. XXVIII, 1911, p. 473. La question posée ici a été étudiée dans le cas des équations de récurrence à coefficients constants par M. Lattès (*Annales de Toulouse*, 3e série, t. III, 1911; *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XXXIX, 1911, et t. XLII, 1914) qui a obtenu des résultats beaucoup plus complets que ceux donnés ci-dessus pour les équations à coefficients variables.

tion, système qui rappelle par conséquent les systèmes d'équations intégrales (du type Volterra).

Pour les former, partons d'une suite de relations de récurrence linéaires, mais non homogènes

$$y_{i+1} = \lambda y_i + \eta_i, \tag{25}$$

où λ et la suite des nombres η_i sont donnés. La solution en est

$$y_i = y_0 \lambda_i + \sum_{i_0}^{i} \lambda^{i-h-1} \eta_h, \tag{26}$$

où le symbole $\sum\limits_{i_0}^{i}$ est une sommation relative à l'indice h, savoir :

1° Si $i_0 < i$,

$$\sum_{i_0}^{i} a_h = a_{i_0} + a_{i_0+1} + \ldots + a_{i-1};$$

2° Si $i_0 > i$,

$$\sum_{i_0}^{i} a_h = -(a_i + a_{i+1} + \ldots + a_{i_0-1}).$$

Dans l'un et l'autre cas, on a (*cf.* n° 6)

$$\sum_{i_0}^{i+1} a_h - \sum_{i_0}^{i} a_h = a_i. \qquad \sum_{\alpha}^{\beta} a_h + \sum_{\beta}^{\gamma} a_h + \sum_{\gamma}^{\alpha} a_h = 0.$$

Changer dans la formule (26) la valeur de i_0 équivaut à modifier la valeur de y_0; la solution générale du système (25) ne dépend bien que d'une constante arbitraire.

Nous pourrons prendre $i_0 = +\infty$ lorsque la série $\sum \frac{\eta_h}{\lambda^h}$ sera convergente.

D'après cela, nous pourrons transformer le système (24) dans le système d'équations

$$\left\{\begin{aligned} y_i &= y_0 \lambda^i + \sum_{i_0}^{i} \varphi_h(y_h, z_h) \lambda^{i-h-1}, \\ z_i &= z_0 \mu^i + \sum_{i'_0}^{i} \psi_h(y_h, z_h) \mu^{i-h-1}, \end{aligned}\right. \tag{27}$$

que nous appellerons *le système d'équations aux sommes* correspondant au système d'équations de récurrence (24), et où les termes des suites inconnues figurent dans les sommes intervenant dans les seconds membres. Le choix de i_0, i'_0 sera indiqué ultérieurement.

22. Sur certains systèmes linéaires d'équations aux sommes. — Étudions d'abord, en vue de l'utiliser pour la démonstration de la convergence de certaines séries, un système linéaire à coefficients constants de la forme

$$(28)\qquad \begin{cases} y_{i+1} = \lambda y_i + \varepsilon(y_i + z_i) - (\lambda - 1)a, \\ z_{i+1} = \mu z_i + \varepsilon'(y_i + z_i) - (\mu - 1)b, \end{cases}$$

a et b étant positifs; transformé par le même procédé, il nous donne

$$(29)\qquad \begin{cases} y_i = y_0\lambda^i + \varepsilon \sum_{i_0}^{i} (y_h + z_h)\lambda^{i-h-1} - (\lambda - 1)a \sum_{i_0}^{i} \lambda^{i-h-1}, \\ z_i = z_0\mu^i + \varepsilon' \sum_{i'_0}^{i} (y_h + z_h)\mu^{i-h-1} - (\mu - 1)b \sum_{i'_0}^{i} \mu^{i-h-1}, \end{cases}$$

équations qu'il est possible d'écrire plus simplement par un choix convenable des limites i_0, i'_0. *Nous prendrons $i_0 = +\infty$ si $1 < \lambda$ et $i_0 = -\infty$ si $0 < \lambda < 1$, et choisirons de la même façon i'_0 selon la grandeur de μ* (¹).

Comme, en supposant $\lambda > 1$,

$$\sum_{+\infty}^{i} \lambda^{i-h-1} = -\left[\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2} + \ldots\right] = -\frac{1}{\lambda - 1},$$

et, que pour $\lambda < 1$,

$$\sum_{-\infty}^{i} \lambda^{i-h-1} = 1 + \lambda + \lambda^2 + \ldots = \frac{1}{1-\lambda} = -\frac{1}{\lambda - 1}$$

(¹) On remarquera que les suites y_i et z_i intervenant ici sont indéfinies dans les deux sens. D'autre part, les développements en série que comportent les équations (29) avec ce choix de i_0 et i'_0 sont pour le moment des développements formels; on se préoccupera plus loin de la convergence.

avec le choix indiqué de i_0 et i'_0, on peut, dans tous les cas, donner aux relations (29) la forme

$$(30)\quad \left\{\begin{aligned} y_i &= a + y_0\lambda^i + \varepsilon \sum_{i_0}^{i} (y_h + z_h)\lambda^{i-h-1},\\ z_i &= b + z_0\mu^i + \varepsilon' \sum_{i'_0}^{i} (y_h + z_h)\mu^{i-h-1}.\end{aligned}\right.$$

D'autre part, en écrivant les équations (28) ainsi :

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i = (\lambda - 1)(y_i - a) + \varepsilon(y_i + z_i),$$
$$\Delta z_i = z_{i+1} - z_i = (\mu - 1)(z_i - b) + \varepsilon'(y_i + z_i),$$

on voit qu'elles admettent des solutions constantes

$$(y_{i+1} = y_i,\ z_{i+1} = z_i)$$

données par

$$\frac{y_i - a}{-\dfrac{\varepsilon}{\lambda - 1}} = \frac{z_i - b}{-\dfrac{\varepsilon'}{\mu - 1}} = y_i + z_i = \frac{a + b}{1 + \dfrac{\varepsilon}{\lambda - 1} + \dfrac{\varepsilon'}{\mu - 1}},$$

ou encore par

$$(31)\quad \left\{\begin{aligned} y_i &= a - \frac{a + b}{1 + \dfrac{\varepsilon}{\lambda - 1} + \dfrac{\varepsilon'}{\mu - 1}}\,\frac{\varepsilon}{\lambda - 1},\\ z_i &= b - \frac{a + b}{1 + \dfrac{\varepsilon}{\lambda - 1} + \dfrac{\varepsilon'}{\mu - 1}}\,\frac{\varepsilon'}{\mu - 1}.\end{aligned}\right.$$

En développant les seconds membres de (31) en séries entières en ε et ε', la question de la convergence étant réservée, et en groupant dans les deux développements les termes dont le degré en ε et ε' ne surpasse pas un nombre p, on obtient des ensembles de termes y_i^p et z_i^p auxquels on peut parvenir d'une autre façon. Faisons dans les équations (30) $y_0 = z_0 = 0$ et appliquons aux équations

$$(32)\quad \left\{\begin{aligned} y_i &= a + \varepsilon \sum_{i_0}^{i} (y_h + z_h)\lambda^{i-h-1},\\ z_i &= b + \varepsilon' \sum_{i'_0}^{i} (y_h + z_h)\mu^{i-h-1}\end{aligned}\right.$$

ainsi obtenues la méthode des approximations successives, la première approximation étant

$$y_i^0 = a, \qquad z_i^0 = b.$$

Les secondes (également indépendantes de l'indice i) seront

$$y_i^1 = a + \varepsilon \sum_{i_0}^{i} (y_h^0 + z_0^h)\lambda^{i-h+1} = a - \varepsilon \frac{(a+b)}{\lambda - 1}, \qquad z_i^1 = b - \varepsilon' \frac{(a+b)}{\mu - 1};$$

les troisièmes

$$y_i^2 = a + \varepsilon \sum_{i_0}^{i} (y_h^1 + z_h^1)\lambda^{i-h-1} = y_i^1 - \varepsilon \frac{(a+b)}{\lambda - 1}[y_i^1 - y_i^0 + z_i^1 - z_i^0],$$

$$z_i^2 = b + \varepsilon' \sum_{i_0}^{i} (y_h^1 + z_h^1)\mu^{i-h-1} = z_i^1 - \varepsilon' \frac{(a+b)}{\mu - 1}[y_i^1 - y_i^0 + z_i^2 - z_i^0],$$

et ainsi de suite; on vérifie facilement que les approximations d'ordre $p+1$ ainsi obtenues coïncident avec les termes y_i^p, z_i^p définis tout à l'heure.

Les séries que nous venons de considérer sont d'ailleurs convergentes dès que

$$\left|\frac{\varepsilon}{\lambda - 1}\right| + \left|\frac{\varepsilon'}{\mu - 1}\right| < 1. \tag{33}$$

Les nombres λ et μ sont réels et positifs, nous les supposons différents de l'unité; *nous prendrons* ε *et* ε' *égaux en valeur absolue et de signes tels que* $\frac{\varepsilon}{\lambda - 1}$ *et* $\frac{\varepsilon'}{\mu - 1}$ *soient tous deux négatifs;* il y aurait donc trois cas à considérer : λ et μ sont tous deux supérieurs à l'unité; λ et μ sont tous deux inférieurs à l'unité; λ et μ comprennent entre eux l'unité, nous supposons l'inégalité (33) vérifiée. Grâce à ces hypothèses, toutes les approximations successives sont formées de nombres positifs et croissants avec l'indice supérieur p.

En résumé, nous avons établi qu'il existait des suites

$$\ldots, \quad y_{-2}, \quad y_{-1}, \quad y_0, \quad y_1, \quad y_2, \quad \ldots,$$
$$\ldots, \quad z_{-2}, \quad z_{-1}, \quad z_0, \quad z_1, \quad z_2, \quad \ldots$$

illimitées dans les deux sens, vérifiant les équations aux sommes (32). Les termes de chacune de ces suites sont égaux entre eux et sont donnés par les formules (31); ils peuvent aussi être obtenus par le procédé d'approximations successives dont nous venons de parler, et qui rappelle celui dont M. Picard a montré l'importance dans la théorie des équations différentielles.

La convergence de ces approximations entraîne la convergence des approximations dont nous allons parler. Nous étudierons le nouveau système

$$(34)\qquad \left\{\begin{aligned} \overline{y_i} &= \overline{a_i} + \varepsilon \sum_{i''_0}^{i} (\overline{y_h} + \overline{z_h})\lambda^{i-h-1}, \\ \overline{z_i} &= \overline{b_i} + \varepsilon' \sum_{i'''_0}^{i} (\overline{y_h} + \overline{z_h})\mu^{i-h-1}, \end{aligned}\right.$$

où λ et μ sont encore positifs et différents de l'unité, ε et ε' sont choisis comme plus haut, $\overline{a_i}$ et $\overline{b_i}$ satisfont aux inégalités

$$0 < \overline{a_i} < a, \qquad 0 < \overline{b_i} < b;$$

enfin i''_0 *désigne* 0 *ou* $+\infty$ *selon que* $\lambda < 1$ *ou que* $\lambda > 1$, *la même détermination étant adoptée pour* i'''_0 *et* μ.

Les suites que fait intervenir le système (34) ne comprennent donc maintenant que des suites à indices positifs ou nuls :

$$\begin{matrix} \overline{y_0}, & \overline{y_1}, & \ldots, & \overline{y_i}, & \ldots \\ \overline{z_0}, & \overline{z_1}, & \ldots, & \overline{z_i}, & \ldots \end{matrix}$$

L'existence de solutions pour le système (34) s'établit alors, non plus directement, mais par le seul procédé d'approximations successives; les premières approximations sont

$$\overline{y_i^0} = \overline{a_i}, \qquad \overline{z_i^0} = \overline{b_i}$$

et d'une façon générale les approximations de rang $p+1$, $\overline{y_i^p}$, $\overline{z_i^p}$ se calculent en substituant dans les seconds membres de (34) $\overline{y_h}$ et $\overline{z_h}$ par $\overline{y_h^{p-1}}$ et $\overline{z_h^{p-1}}$. Ces approximations successives $\overline{y_i^p}$ et $\overline{z_i^p}$ sont encore positives, croissent avec l'indice supérieur p; leur convergence résulte de ce qu'elles restent, ainsi que leurs différences premières $\overline{y_i^p}-\overline{y_i^{p-1}}$, $\overline{z_i^p}-\overline{z_i^{p-1}}$, inférieures aux éléments correspondants y_i^p, z_i^p, $y_i^p-y_i^{p-1}$, $z_i^p-z_i^{p-1}$ construits antérieurement pour le système (32). Les limites $\overline{y_i}$, $\overline{z_i}$ vers lesquelles elles tendent, quand p tend vers $+\infty$, satisfont au système (34) et vérifient les inégalités

$$(35)\quad \begin{cases} 0<\overline{y_i}<a+\dfrac{a+b}{|\lambda-1|}\,\dfrac{|\varepsilon|}{1-|\varepsilon|\left\{\dfrac{1}{|\lambda-1|}+\dfrac{1}{|\mu-1|}\right\}}, \\[2ex] 0<\overline{z_i}<b+\dfrac{a+b}{|\mu-1|}\,\dfrac{|\varepsilon|}{1-|\varepsilon|\left\{\dfrac{1}{|\lambda-1|}+\dfrac{1}{|\mu-1|}\right\}}. \end{cases}$$

Rappelons, en passant, que $|\varepsilon'|=|\varepsilon|$. Voilà faite l'étude du système qui va nous servir de système de comparaison.

23. Solutions asymptotiques a zéro de certains systèmes d'équations de récurrence non linéaires. — Nous pouvons reprendre maintenant l'étude du système

$$(24)\quad \begin{cases} y_{i+1}=\lambda y_i+\varphi_i(y_i, z_i), \\ z_{i+1}=\mu z_i+\psi_i(y_i, z_i), \end{cases}$$

déjà signalé au n° 21, où nous avons indiqué quelles conditions nous supposons réalisées par les fonctions $\varphi_i(y, z)$, $\psi_i(y, z)$ et leurs dérivées premières; nous avons dit également qu'on pouvait transformer ce système dans un système d'équations aux sommes

$$(27)\quad \begin{cases} y_i=y_0\lambda^i+\displaystyle\sum_{i_0}^{i}\varphi_h(y_h, z_h)\lambda^{i-h-1}, \\ z_i=z_0\mu^i+\displaystyle\sum_{i_0}^{i}\psi_h(y_h, z_h)\mu^{i-h-1}, \end{cases}$$

dont nous allons rechercher les solutions asymptotiques à zéro (pour i tendant vers $+\infty$).

Supposons $\lambda < \mu$, nous avons trois cas à distinguer :

1° $$0 < \lambda < 1 < \mu,$$
2° $$0 < \lambda < \mu < 1,$$
3° $$0 < 1 < \lambda < \mu;$$

nous écarterons tout de suite le dernier $y_0\lambda^i$ et $z_0\mu^i$, ne pouvant tendre vers zéro.

Plaçons-nous dans l'hypothèse 1°; nous prendrons dans les équations (27) $z_0 = 0$, $i_0 = 0$, $i'_0 = +\infty$; le système à étudier est donc

$$(36)\quad \left\{ \begin{aligned} y_i &= y_0\lambda^i + \sum_0^i \varphi_h(y_h, z_h)\lambda^{i-h-1}, \\ z_i &= \sum_{+\infty}^i \psi_h(y_h, z_h)\mu^{i-h-1}. \end{aligned} \right.$$

Nous prendrons le nombre η du n° 21 assez petit pour que

$$(37)\quad \eta\left\{\frac{1}{1-\lambda} + \frac{1}{\mu-1}\right\} < 1;$$

η étant choisi, le nombre σ, considéré au même endroit, peut être déterminé; cela fait, nous prendrons $|y_0|$ assez petit pour qu'on ait à la fois

$$|y_0|\left[1 + \frac{\eta}{1-\lambda}\,\frac{1}{1-\eta\left\{\dfrac{1}{1-\lambda}+\dfrac{1}{\mu-1}\right\}}\right] < \sigma,$$

$$|y_0|\frac{\eta}{\mu-1}\,\frac{1}{1-\eta\left\{\dfrac{1}{1-\lambda}+\dfrac{1}{\mu-1}\right\}} < \sigma.$$

Choisissons comme premières approximations du système (36)

$$y_i^0 = y_0\lambda^i, \qquad z_i^0 = 0,$$

et construisons de proche en proche les approximations de rang $p+1$, c'est-à-dire y_i^p, z_i^p par substitution de celles de rang p, y_h^{p-1} et z_h^{p-1} à y_h et à z_h dans les seconds membres des équations (36). Pour établir que ces approximations successives ont un sens et qu'elles convergent uniformément (par rapport à i) vers des limites y_i, z_i, il suffit de les comparer aux approximations de même rang du système

$$(38)\quad \begin{cases} \overline{y_i} = |y_0|\lambda^i + \eta \sum\limits_{0}^{i} (\overline{y_h} + \overline{z_h})\lambda^{i-h-1}, \\ \overline{z_i} = \qquad\qquad -\eta \sum\limits_{+\infty}^{i} (\overline{y_h} + \overline{z_h})\mu^{i-h-1}, \end{cases}$$

qui appartient au type (34) étudié au n° 22; on a ici

$$\overline{a_i} = |y_0|\lambda^i, \qquad \overline{b_i} = 0, \qquad \varepsilon = \eta, \qquad \varepsilon' = -\eta.$$

De cette comparaison, il résulte que y_i^p, z_i^p tendent uniformément vers leurs limites y_i, z_i; $\varphi_i(y_h^p, z_h^p)$ $\psi_i(y_h^p, z_h^p)$ tendent uniformément vers $\varphi_i(y_h, z_h)$, $\psi_i(y_h, z_h)$; par conséquent les deux suites y_i, z_i ainsi trouvées vérifient bien les équations aux sommes (36) et aussi les équations de récurrence (24).

Un seul point reste à établir, c'est que y_i, z_i tendent vers zéro en même temps que $\frac{1}{i}$. Il suffira de montrer qu'il en est ainsi pour les solutions $\overline{y_i}$, $\overline{z_i}$ du système (38) qui dominent y_i et z_i.

Or, ce système d'équations aux sommes correspond au système d'équations de récurrence

$$(39)\quad \begin{cases} \overline{y_{i+1}} = \lambda\overline{y_i} + \eta(\overline{y_i} + \overline{z_i}), \\ \overline{z_{i+1}} = \mu\overline{z_i} + \eta(\overline{y_i} + \overline{z_i}), \end{cases}$$

à coefficients constants. L'équation caractéristique correspondante (*voir* n° 20)

$$(40)\quad \begin{vmatrix} \lambda + \eta - \rho & \eta \\ -\eta & \mu - \eta - \rho \end{vmatrix} = 0$$

a ses racines λ', μ' infiniment voisines de λ et de μ lorsque η est infiniment petit; on peut admettre que η a été pris assez voisin de zéro pour que

$$\lambda' < 1 < \mu'.$$

La solution générale de (39) est une combinaison linéaire des expressions λ'^i, μ'^i; la première tend vers zéro, la seconde devient infinie quand i croît indéfiniment. La solution qui domine y_i, z_i reste finie, et ne peut contenir que des termes en λ'^i; donc y_i et z_i tendent bien vers zéro. Elle dépend du reste d'une constante arbitraire y_0. Ainsi se trouve établie, pour le cas $0 < \lambda < 1 < \mu$, la proposition énoncée au n° 21 (p. 176).

Le lecteur n'aura pas de difficulté à établir, par une marche analogue, l'exactitude de cette proposition dans le cas où λ et μ sont tous deux inférieurs à l'unité.

Il est à peine besoin d'ajouter qu'une proposition de même nature s'applique quand on a un système S d'équations de récurrence à n suites inconnues du type (20) (p. 174) vérifiées lorsque tous les termes des suites inconnues sont nuls, les équations aux variations V correspondantes étant à coefficients constants. Si l'on admet que l'équation caractéristique correspondant à ces équations aux variations a ses racines distinctes, p étant de modules inférieurs à l'unité, les $n-p$ autres de modules supérieurs à l'unité, le système S admet une famille de solutions asymptotiques à zéro dépendant de p constantes arbitraires. Les cas laissés de côté (racines multiples, racines de module égal à l'unité) pourraient être étudiés par une méthode analogue à celle qui réussit dans les cas correspondants concernant les équations différentielles (¹).

Le cas où les équations aux variations V seraient à coefficients variables paraît aussi abordable par des méthodes de même nature (²); si le système V est régulier, les nombres caractéristiques de ses solutions détermineraient alors, par leurs signes, le nombre minimum de solutions distinctes de S asymptotiques à zéro.

(¹) Voir *Annales de l'École Normale*, 3ᵉ série, t. XXVIII, 1911, p. 489 à 495.
(²) *Ibid.*, p. 502 et suiv.