ÉTIENNE DELASSUS

Étude de la stabilité de l'équilibre des paramètres principaux et secondaires d'un système dans le cas régulier d'intégration par quadratures

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 36 (1919), p. 1-36

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1919_3_36__1_0>

ANNALES
SCIENTIFIQUES
DE
L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

ÉTUDE

DE

LA STABILITÉ DE L'ÉQUILIBRE

DES

PARAMÈTRES PRINCIPAUX ET SECONDAIRES D'UN SYSTÈME

DANS LE CAS RÉGULIER D'INTÉGRATION PAR QUADRATURES

PAR M. ÉTIENNE DELASSUS.

Introduction.

Un système dans le cas régulier d'intégration par quadratures fait partie des systèmes à intégrale de force vive pour lesquels le théorème de Lagrange sur la stabilité se généralise facilement (¹). Mais les paramètres secondaires ne figurant pas dans la portion G_0 de la fonction génératrice, les équilibres trouvés forment toujours des suites continues; ils ne sont jamais isolés et le célèbre théorème en question ne s'y applique jamais.

Depuis longtemps les mathématiciens se sont efforcés de montrer, dans des cas de plus en plus généraux, que la réciproque du théorème de Lagrange est exacte, c'est-à-dire que si ce théorème ne montre pas la stabilité, il y a effectivement instabilité. Les résultats qui ont été obtenus dans cette voie sont relatifs à l'équilibre absolu, mais le théorème s'étendant aux équilibres relatifs, on est conduit à penser que,

---

(¹) DELASSUS, *Leçons sur la dynamique des systèmes matériels*, Chap. III, Sect. III.

tout au moins dans le cas des fonctions de nature élémentaire qui ne présentent pas de singularités de nature exceptionnelle, l'équilibre paramétrique d'un système à intégrale des forces vives, qui est stable quand les conditions de Lagrange sont satisfaites, doit être instable quand ces conditions ne sont pas toutes vérifiées.

Si cette idée était exacte, tout équilibre paramétrique d'un système dans le cas régulier d'intégration devrait être instable. Le résultat principal de ce Mémoire est que cette idée est fausse.

Pour montrer que les équilibres ne sont pas toujours instables, on pourrait se borner à donner un exemple de cas où les équilibres sont stables. Il existe de tels exemples très simples, on en trouvera un à la fin du Mémoire, mais, pour les trouver, il faut y être conduit en quelque sorte par le hasard ou bien comme application d'une étude générale, et cette dernière marche, la seule possible d'ailleurs quand on ne soupçonne pas le résultat final, a l'avantage de montrer les cas où il y a stabilité et ceux où il y a instabilité.

Pour faire l'étude générale de la stabilité paramétrique d'un système dans le cas régulier, il est commode d'étudier séparément celle du paramètre principal et celle des paramètres secondaires. La différence essentielle de nature de ces deux sortes de paramètres conduit à deux études absolument distinctes.

L'étude de la stabilité du paramètre principal est, avec quelques modifications résultant de constantes arbitraires supplémentaires, identique à celle de la stabilité pour un système à un seul paramètre et dans le cas régulier ; on trouve des conditions de stabilité du genre de celles de Lagrange et la réciproque existe.

Le problème de la stabilité d'un paramètre secondaire est tout autre. Il est d'abord plus compliqué, parce qu'il y a plusieurs genres distincts d'équilibre, et ensuite beaucoup plus délicat à étudier à cause de l'accroissement périodique d'un tel paramètre. On est amené à chercher les conditions pour qu'une certaine intégrale définie dépendant de onstantes arbitraires soit nulle quelles que soient ces constantes au voisinage d'un système initial de valeurs. C'est une équation fonctionnelle, sous forme intégrale, qu'il s'agit de résoudre ; l'étude d'un cas particulier permet de la transformer en une équation fonctionnelle sous forme finie dont on trouve assez facilement la solution générale.

On arrive de cette façon à des conditions nécessaires de stabilité et l'on constate aisément qu'elles sont suffisantes, ce qui donne le résultat suivant :

Les systèmes dans le cas régulier se partagent en deux groupes.

Le premier groupe, très restreint, est composé des systèmes à deux paramètres a et b

$$2G = Aa'^2 + 2Ca'b' + Bb'^2 + 2B_1b' + C_1$$

pour lesquels les coefficients A, C, B, B_1, C_1, *qui sont des fonctions de a seulement, satisfont aux conditions :*

C_1 *est une constante ;*

B_1 *n'est pas une constante ;*

$B = \alpha B_1^2 + 2\beta B_1 + \gamma \qquad (\alpha, \beta, \gamma$ *constantes*) ;

$\dfrac{\frac{dB_1}{da}}{\sqrt{AB - C^2}}$ *est une constante.*

Pour un tel système, tous les équilibres paramétriques sont stables et il en est de même des équilibres correspondants du système matériel.

Le second groupe est constitué par tous les autres systèmes dans le cas régulier. Pour ces systèmes, tous les équilibres paramétriques sont instables et il en est de même des équilibres correspondants du système matériel, sauf peut-être ceux qui correspondent à des indéterminations paramétriques.

Les systèmes à liaisons indépendantes du temps définis par des paramètres absolus appartiennent toujours à la seconde catégorie.

Équilibre du paramètre principal.

1. a étant le paramètre principal, $b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}$ les paramètres secondaires, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$ les constantes introduites par les $n-1$ intégrales immédiates, on a l'équation principale

$$f(a)\,a'^2 = \varphi(a, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}) + h = \Phi(a, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, h)$$

et nous savons, en nous limitant au cas élémentaire des fonctions n'ayant que des racines d'ordre entier, que la condition pour que a soit en équilibre sur la valeur a_0 est que a_0 soit racine multiple de Φ pour des valeurs convenables $\alpha_1^0, \ldots, \alpha_{n-1}^0, h^0$ des constantes.

Si, considérant a comme une abscisse, nous construisons la courbe

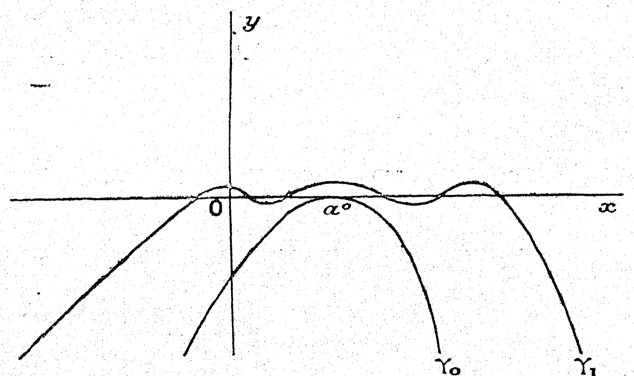
$$(\gamma_0) \qquad y = \Phi(a, \alpha_1^0, \ldots, \alpha_{n-1}^0, h^0),$$

elle sera tangente à l'axe des a au point a^0 et pourra présenter, en ce point, un maximum, un minimum ou une inflexion.

2. Supposons que la courbe (γ_0) présente un maximum. Considérons des conditions initiales infiniment voisines de celles qui donnent l'équilibre de a, c'est-à-dire des constantes $\alpha_1^1, \ldots, \alpha_{n-1}^1, h^1$ infiniment voisines de $\alpha_1^0, \ldots, \alpha_{n-1}^0, h^0$. Elles donneront une courbe

$$(\gamma_1) \qquad y = \Phi(a, \alpha_1^1, \ldots, \alpha_{n-1}^1, h^1)$$

infiniment voisine de (γ_0) et, pour la valeur a^1 infiniment voisine de a^0, la fonction Φ sera positive. La fonction $\Phi(a, \alpha_1^0, \ldots, \alpha_{n-1}^0, h_0)$ admettait la racine multiple a^0 d'ordre pair, donc $\Phi(a, \alpha_1^1, \ldots, \alpha_{n-1}^1, h^1)$ admettra un nombre pair de racines infiniment voisines de a^0 et parmi lesquelles il y en aura un nombre pair qui seront réelles. Au voisinage de a^0 la courbe (γ_1) aura donc la forme ci-dessous, mettant en évidence



des *arcs situés au-dessus de* Oa *et chacun de ces arcs étant limité par deux racines tendant vers* a^0 ; la courbe (γ_1) pourrait avoir d'autres arcs au-dessus de Oa, mais ceux-ci seraient, par rapport à a^0, au delà de certaines racines ne tendant pas vers a^0. Le mouvement considéré, partant d'une valeur a^1 infiniment voisine de a^0, ne peut donc donner qu'une variation de a sur la corde d'un des arcs supérieurs considérés, c'est-à-dire entre deux valeurs tendant vers a^0. Cela suffit pour montrer que l'équilibre de a est alors *stable*.

3. Dans le cas du minimum ou de l'inflexion, nous allons montrer que l'équilibre de a est *instable*. Il n'est plus nécessaire ici de considérer *tous* les mouvements fournis par des conditions initiales infiniment voisines de celles donnant l'équilibre, il suffit de montrer l'existence d'*un seul* de ces mouvements donnant à a une variation dans un intervalle ne tendant pas vers zéro.

Considérons un mouvement obtenu en conservant les valeurs $\alpha_1^0, \ldots, \alpha_{n-1}^0$ qui correspondent à l'équilibre et en changeant seulement la valeur de h. La courbe (γ_1) ne sera que la courbe (γ_0) ayant subi la translation $h^1 - h^0$ parallèle à Oy et l'on aura, suivant les cas, 0, 2 ou 1 racines réelles tendant vers a^0; mais les arcs au-dessus de Oa ne seront jamais limités que d'un côté au plus par une telle racine; aucun arc supérieur ne correspondra à un intervalle tendant vers zéro. L'équilibre est donc bien instable.

4. Nous remarquons que si l'on a

$$\Psi(a) = \psi(a)\Phi(a),$$

$\psi(a)$ étant essentiellement positive, les conditions

$$\Phi(a^0) = 0, \quad \Phi'(a^0) = 0$$

entraînent

$$\Psi(a^0) = 0, \quad \Psi'(a^0) = 0,$$
$$\Psi''(a^0)\Phi''(a^0) > 0,$$

de sorte que, en résumé : *l'équation principale étant mise d'une façon quelconque sous la forme*

$$f(a)a'^2 = \Psi(a, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, h),$$

$f(a)$ étant essentiellement positive, un équilibre de a fourni par les condi-

tions initiales $a^0, \alpha_1^0, \ldots, \alpha_{n-1}^0, h^0$, *telles que* a^0 *soit racine multiple de*

$$\Psi(a, \alpha_1^0, \ldots, \alpha_{n-1}^0, h_0)$$

sera stable si cette fonction Ψ *est maxima pour* a^0 *et instable s'il n'en est pas ainsi.*

Pour qu'il y ait équilibre de a en a^0, il faut et il suffit que, a'^0 étant supposée nulle, a^0 satisfasse à la condition

$$\varphi'(a^0, \alpha_1^0, \ldots, \alpha_{n-1}^0) = 0;$$

a^0 étant donné, on a ainsi une relation entre les $n-1$ constantes $\alpha_1^0, \ldots, \alpha_{n-1}^0$, c'est-à-dire, en définitive, entre les $n-1$ valeurs initiales des b'. S'il n'y a qu'un seul paramètre secondaire, il y a donc un et un seul mouvement du système dans lequel a est en équilibre sur a^0; mais s'il y a plus d'un paramètre secondaire, il y a une infinité de mouvements du système dans lesquels a est en équilibre sur a^0 et l'équilibre de a pourra être stable pour les uns et instable pour les autres. Cela tient à ce que, dans ce cas, il correspond à la valeur d'équilibre a^0 une infinité de fonctions Φ dépendant de $n-2$ paramètres arbitraires, qui admettent toutes a^0 pour racine au moins double, mais pour lesquelles $\Phi''(a^0)$ peut avoir un signe variable avec ces constantes.

Équilibre d'un paramètre secondaire.

5. Commençons par établir les conditions d'équilibre d'un quelconque, b, des paramètres secondaires. L'intégrale première immédiate relative à b donne

$$b' = \lambda(a)a' + \mu(a, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$$

et il y aura équilibre si b' est constamment nulle. Le mouvement pour lequel ce fait se produit correspond à des constantes $a^0, \alpha_1^0, \ldots, \alpha_{n-1}^0, h^0$ et peut fournir soit l'équilibre de a, soit un mouvement effectif de a.

Dans le premier cas, l'équation principale étant prise sous la forme

$$a'^2 = F(a, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, h),$$

c'est que a^0 est racine double de

$$F(a, \alpha_1^0, \ldots, \alpha_{n-1}^0, h^0);$$

et, comme on a alors

$$b' = \mu(a^0, \alpha_1^0, \ldots, \alpha_{n-1}^0),$$

on voit que a^0 doit être racine de la fonction

$$\mu_0(a) = \mu(a, \alpha_1^0, \ldots, \alpha_{n-1}^0).$$

Cette condition est d'ailleurs forcément réalisée si les conditions initiales comprennent la condition

$$b'^0 = 0,$$

car le paramètre principal étant en équilibre, tous les paramètres secondaires ont des mouvements uniformes et le paramètre b, en particulier, ayant une vitesse initiale nulle, est forcément en équilibre.

Dans la seconde hypothèse, a est essentiellement variable. Supposons d'abord que, pour le paramètre b considéré, la fonction $\lambda(a)$ soit identiquement nulle. On devra avoir, pendant tout le mouvement,

$$\mu(a, \alpha_1^0, \ldots, \alpha_{n-1}^0) = 0$$

et comme a est variable, cela exige que la fonction précédente, c'est-à-dire $\mu_0(a)$, soit identiquement nulle.

Supposons enfin que, a étant variable, la fonction $\lambda(a)$ ne soit pas nulle ; on devra avoir pendant tout le mouvement

$$\lambda(a)a' + \mu_0(a) = 0,$$

mais on a, pour ce mouvement,

$$a'^2 = F(a, \alpha_1^0, \ldots, \alpha_{n-1}^0, h^0) = F_0(a);$$

donc on devra avoir, en éliminant a',

$$\lambda^2(a) F_0(a) - \mu_0^2(a) = 0$$

et, a étant variable, cette égalité devra être une identité.

L'équation principale du mouvement considéré se décompose alors en deux :

$$a' - \frac{\mu_0(a)}{\lambda(a)} = 0,$$

$$a' + \frac{\mu_0(a)}{\lambda(a)} = 0,$$

et le mouvement de a aura lieu en suivant celle des deux qui sera vérifiée à l'instant initial. Comme, par hypothèse, la valeur initiale de b' est nulle, c'est la seconde qui vérifie cette condition et il en résulte que b' sera nulle pendant tout le mouvement; il y aura donc bien équilibre de b. Le raisonnement serait en défaut si les deux équations étaient toutes deux vérifiées au début, c'est-à-dire si l'on avait simultanément

$$a'^0 = 0, \qquad \mu_0(a^0) = 0,$$

mais alors a^0 serait racine double de F_0, donc a serait en équilibre sur a^0, ce qui serait contraire à l'hypothèse.

Le raisonnement serait encore en défaut si l'on avait

$$\lambda(a^0) = 0.$$

Comme a'^0 a une valeur finie et non nulle, $\mu_0(a)$ devrait admettre a^0 comme racine du même ordre, de façon que le rapport

$$\frac{\mu_0(a)}{\lambda(a)}$$

eût une valeur finie et non nulle pour a^0, et de ce que la quantité

$$\lambda(a)a' + \mu_0(a) = \lambda(a)\left[a' + \frac{\mu_0(a)}{\lambda(a)}\right]$$

est nulle à l'instant initial, on ne peut conclure que le second facteur est nul à ce moment, puisque le premier facteur l'est déjà. On est assuré que l'une des deux quantités

$$a'^0 + \frac{\mu_0(a_0)}{\lambda(a^0)}, \qquad a'^0 - \frac{\mu_0(a^0)}{\lambda(a^0)}$$

est nulle, mais on ne sait pas laquelle, cela dépend de la comparaison des signes des deux quantités

$$a'^0, \quad \frac{\mu_0(a^0)}{\lambda(a^0)}.$$

Si elles sont de même signe, c'est la première des deux équations différentielles qui est vérifiée et b' n'est pas nulle; donc il n'y a pas équilibre de b; si elles sont de signes contraires, c'est la seconde équation différentielle qui est vérifiée et il y a équilibre de b.

En résumé, *il y a équilibre du paramètre b dans les cas suivants :*

1° *a^0 est racine double de F_0 et racine de μ_0* (équilibre simultané du paramètre b et du paramètre principal);

2° *On a*

$$\lambda(a^0) \neq 0, \qquad \lambda^2(a)F_0(a) - \mu_0^2(a) \equiv 0;$$

3° *La fonction $\lambda(a)$ est nulle pour a^0, mais n'est pas identiquement nulle; on a l'identité*

$$\lambda^2(a)F_0(a) - \mu_0^2(a) \equiv 0$$

et la quantité

$$\frac{\mu_0(a^0)}{\lambda(a^0)}$$

est de signe contraire à a'^0;

4° *La fonction $\lambda(a)$ est identiquement nulle, ainsi que la fonction $\mu_0(a)$.*

6. L'étude de la stabilité de l'équilibre d'un paramètre secondaire est un problème d'une nature tout à fait différente de celle de l'équilibre du paramètre principal. Nous avions alors à étudier un intervalle limité par deux racines d'une équation, c'était relativement simple. Au contraire, un paramètre secondaire n'a pas de variation périodique; que le mouvement du paramètre principal soit révolutif périodique ou oscillatoire périodique, le paramètre secondaire a toujours un accroissement périodique.

Si, pour des conditions initiales infiniment voisines de celles qui fournissent l'équilibre du paramètre considéré, l'accroissement périodique de ce paramètre n'est pas identiquement nul, il finira, au bout d'un nombre suffisamment grand de périodes, par s'éloigner autant qu'on voudra de sa position initiale, de sorte que l'équilibre sera instable.

Une condition nécessaire de la stabilité est donc que, *pour des conditions initiales arbitraires mais infiniment voisines de celles fournissant l'équilibre du paramètre secondaire, l'accroissement périodique de ce paramètre soit toujours nul.* On est ainsi amené à l'étude d'une intégrale définie dépendant de paramètres et, pour ne pas interrompre trop longuement la suite des idées, nous commencerons par établir quelques propriétés analytiques.

7. Considérons l'intégrale définie

$$\mathrm{I} = \int_{-\lambda}^{+\lambda} \frac{\Phi(z)\,dz}{\sqrt{\lambda^2 - z^2}}$$

et cherchons à quelles conditions elle est nulle quelle que soit la valeur de λ. On suppose $\Phi(z)$ régulière pour $z = 0$

$$\Phi(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots,$$

développement valable pour

$$|z| < \rho$$

et nous allons étudier l'intégrale en supposant

$$\lambda < \rho.$$

On pourra alors écrire

$$\mathrm{I} = a_0 \mathrm{J}_0 + a_1 \mathrm{J}_1 + a_2 \mathrm{J}_2 + \ldots$$

avec

$$\mathrm{J}_n = \int_{-\lambda}^{+\lambda} \frac{z^n\,dz}{\sqrt{\lambda^2 - z^2}} = \lambda^n \int_{-1}^{+1} \frac{u^n\,du}{\sqrt{1 - u^2}} = \lambda^n k_n.$$

On a ainsi le développement de I suivant les puissances entières et positives de λ, développement valable de $-\rho$ à $+\rho$. On voit immédiatement que toutes les intégrales k_n pour n impair sont nulles, tandis que celles qui correspondent à n pair sont des nombres dont aucun n'est nul. Le développement

$$\mathrm{I} = a_0 k_0 + a_2 k_2 \lambda^2 + a_4 k_4 \lambda^4 + \ldots$$

doit être nul quel que soit λ ; donc

$$a_0 k_0 = a_2 k_2 = a_4 k_4 = \ldots = 0,$$

ce qui, d'après la remarque faite sur k_0, k_2, ..., se réduit à

$$a_0 = a_2 = a_4 = \ldots = 0$$

et exprime que $\Phi(z)$ est une fonction impaire, c'est-à-dire satisfait à l'identité

$$\Phi(-z) = -\Phi(z).$$

Supposons qu'il en soit ainsi, la fonction $\Phi(z)$ s'annule et change de signe pour $z = 0$. Si λ est suffisamment petit pour qu'il n'y ait pas d'autre racine entre $-\lambda$ et $+\lambda$, l'intégrale I se compose de deux parties

$$\int_{-\lambda}^{0} \frac{\Phi(z)\,dz}{\sqrt{\lambda^2 - z^2}}, \qquad \int_{0}^{+\lambda} \frac{\Phi(z)\,dz}{\sqrt{\lambda^2 - z^2}}$$

égales et de signes contraires et non nulles. Développons la seconde au moyen du développement de Φ. Nous aurons

$$a_1 \int_0^{\lambda} \frac{z\,dz}{\sqrt{\lambda^2 - z^2}} + a_3 \int_0^{\lambda} \frac{z^3\,dz}{\sqrt{\lambda^2 - z^2}} + \ldots,$$

ce qui peut s'écrire

$$\lambda a_1 \int_0^1 \frac{u\,du}{\sqrt{1 - u^2}} + \lambda^3 a_3 \int_0^1 \frac{u^3\,du}{\sqrt{1 - u^2}} + \ldots$$

et montre que l'intégrale tend vers zéro avec λ.

En résumé : *Pour que l'intégrale* I *soit nulle quelle que soit* λ, *il faut et il suffit que la fonction* Φ *soit impaire. L'intégrale* I *se compose alors de deux parties égales et de signes contraires qui tendent vers zéro avec* λ.

8. Considérons l'intégrale

$$I = \int_{z_1}^{z_2} \frac{\Phi(z)(z - \alpha)\,dz}{\sqrt{\lambda^2 \varphi^2(z) - (z - \alpha)^2}}$$

qui dépend de deux constantes, λ, α. On suppose $\Phi(z)$ et $\varphi(z)$ régulières pour $z = 0$. Pour λ nulle, la fonction

$$\lambda^2\varphi^2(z) - (z-\alpha)^2$$

admet la racine double α; pour λ non nulle, mais suffisamment petite, elle admet deux racines situées de part et d'autre de α et très voisines de α; ce sont ces deux racines z_1 et z_2 que nous prenons pour limites de l'intégrale I.

$\varphi(z)$ n'admet que des racines fixes. Nous prendrons α situé entre zéro et une racine consécutive à zéro, c'est-à-dire de façon que α ne soit pas racine de $\varphi(z)$ et que cette fonction n'ait pas de racine entre zéro et α. La fonction

$$\Psi(z) = \varphi(z) - (z-\alpha)\varphi'(z)$$

n'admet pas α comme racine. En prenant λ suffisamment petite l'intervalle $z_1 z_2$ sera aussi resserré que l'on voudra de part et d'autre de α et sera tel que $\varphi(z)$ et $\Psi(z)$ n'y aient aucune racine.

La fonction

$$\frac{z-\alpha}{\varphi(z)}$$

sera donc finie dans tout l'intervalle d'intégration et y variera toujours dans le même sens, de sorte que nous pourrons faire le changement de variable d'intégration

$$\frac{z-\alpha}{\varphi(z)} = u$$

donnant

$$z = \theta(u, \alpha)$$

et

$$\mathrm{I} = \int_{-\lambda}^{+\lambda} \frac{\Phi[\theta(u,\alpha)]\,\dfrac{\partial\theta}{\partial u}\,u\,du}{\sqrt{\lambda^2 - u^2}}.$$

Nous sommes ramenés à une intégrale de la forme étudiée dans le paragraphe précédent. Elle doit être nulle quelles que soient les deux constantes λ et α; laissant α fixe; on voit que le numérateur de l'élément doit être une fonction impaire de u, donc, à cause du facteur u, que

$$\Phi[\theta(u, \alpha)]\frac{\partial\theta}{\partial u}$$

doit être une fonction paire et, cela, quelle que soit la valeur de α. On doit donc avoir, quelles que soient les valeurs de u et de α,

$$\Phi[\theta(-u, \alpha)]\frac{\partial\theta}{\partial u}(-u, \alpha) = \Phi[\theta(u, \alpha)]\frac{\partial\theta}{\partial u}(u, \alpha).$$

Pour faciliter le raisonnement, introduisons la fonction primitive Ψ de la fonction Φ. L'égalité précédente peut s'écrire

$$-\frac{\partial}{\partial u}\Psi[\theta(-u, \alpha)] = \frac{\partial}{\partial u}\Psi[\theta(u, \alpha)],$$

ou, en intégrant,

$$\Psi[\theta(u, \alpha)] + \Psi[\theta(-u, \alpha)] = \text{const.}$$

La constante est d'ailleurs facile à déterminer, car, pour $u = 0$, l'équation de transformation donne $z = \alpha$, de sorte qu'on a

$$\theta(0, \alpha) = \alpha$$

et, en faisant $u = 0$ dans l'identité, on obtient pour la constante la valeur

$$2\Psi(\alpha);$$

la fonction Ψ doit donc vérifier une équation fonctionnelle à deux variables indépendantes u et α. Posons

$$x = \theta(u, \alpha), \qquad y = \theta(-u, \alpha);$$

x et y seront les racines de

$$x - \alpha = u\varphi(x),$$
$$y - \alpha = -u\varphi(y),$$

ce qui permet d'exprimer α et u au moyen de x, y. En particulier, on en tire la valeur de α et finalement l'équation fonctionnelle prend la forme

$$\Psi(x) + \Psi(y) = 2\Psi(\alpha),$$

α devenant ici une abréviation pour représenter la quantité

$$\frac{y\varphi(x)+x\varphi(y)}{\varphi(x)+\varphi(y)}.$$

On déduit immédiatement de là que l'on doit avoir

$$\frac{\partial^2\Psi(\alpha)}{\partial x\,\partial y}=0$$

ou, en développant,

$$\Psi'(\alpha)\frac{\partial^2\alpha}{\partial x\,\partial y}+\Psi''(\alpha)\frac{\partial\alpha}{\partial x}\,\frac{\partial\alpha}{\partial y}=0,$$

ou encore

$$\Phi(\alpha)\frac{\partial^2\alpha}{\partial x\,\partial y}+\Phi'(\alpha)\frac{\partial\alpha}{\partial x}\,\frac{\partial\alpha}{\partial y}=0.$$

Cette identité doit avoir lieu en particulier si l'on fait

$$y=x.$$

On a alors, par un calcul facile,

$$\alpha=x,\qquad \frac{\partial\alpha}{\partial x}=\frac{\partial\alpha}{\partial y}=\frac{1}{2},\qquad \frac{\partial^2\alpha}{\partial x\,\partial y}=\frac{1}{2}\,\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)},$$

d'où l'équation

$$2\Phi(x)\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}+\Phi'(x)=0,$$

qui, par intégration immédiate, donne

$$\Phi(z)=\frac{k}{\varphi^2(z)}.$$

Adoptons donc cette expression de Φ et repartons de l'équation fonctionnelle en Ψ en la dérivant par rapport à x et par rapport à y. Nous aurons les deux nouvelles équations fonctionnelles

$$\Psi'(x)=2\,\Psi'(\alpha)\frac{\partial\alpha}{\partial x},$$

$$\Psi'(y)=2\,\Psi'(\alpha)\frac{\partial\alpha}{\partial y},$$

qui, par intégration, redonnent l'équation fondamentale en tenant compte de ce que, pour $y = x$, α se réduit à x.

Des deux équations précédentes qui s'écrivent

$$\frac{1}{\varphi^2(x)} = \frac{2}{\varphi^2(\alpha)}\frac{\partial\alpha}{\partial x},$$

$$\frac{1}{\varphi^2(y)} = \frac{2}{\varphi^2(\alpha)}\frac{\partial\alpha}{\partial y},$$

on tire

$$\varphi^2(x)\frac{\partial\alpha}{\partial x} = \varphi^2(y)\frac{\partial\alpha}{\partial y}$$

qui, développée et réduite après suppression du facteur non nul

$$\frac{\varphi(x)\varphi(y)}{[\varphi(x)+\varphi(y)]^2},$$

devient

$$\varphi(x)[(y-x)\varphi'(x)+\varphi(x)] = \varphi(y)[(x-y)\varphi'(y)+\varphi(y)].$$

Si l'on pose

$$\varphi^2(z) = \omega(z),$$

elle devient

$$(y-x)\omega'(x) + 2\omega(x) = (x-y)\omega'(y) + 2\omega(y).$$

Si l'on considère y comme une constante, on a ainsi une équation linéaire de premier ordre déterminant $\omega(x)$ et admettant une intégrale générale qui est un certain polynome du second degré. On doit donc avoir

$$\varphi^2(z) = \omega(z) = \mathrm{A}z^2 + \mathrm{B}z + \mathrm{C},$$

et réciproquement si l'on prend une telle fonction φ on vérifie par un calcul sans intérêt que les deux identités dérivées sont bien vérifiées.

Le résultat auquel nous arrivons ainsi peut se présenter sous la forme simple suivante qui constitue, en définitive, un simple changement de notation :

Pour que l'intégrale

$$\mathrm{I} = \int_{z_1}^{z_2} \frac{\Phi(z)(z-\alpha)\,dz}{\varphi(z)\sqrt{\lambda^2\varphi(z)-(z-\alpha)^2}}$$

soit nulle quelles que soient les deux constantes λ *et* α, *il faut et il suffit que* Φ *soit une constante et que* φ *soit un polynome entier au plus du second degré*, et nous remarquerons encore, puisque I se réduit à l'intégrale du paragraphe précédent, que cette intégrale se compose de deux parties de signes contraires et dont la grandeur commune tend vers zéro avec λ et α.

9. Considérons enfin l'intégrale

$$I = \int_{z_1}^{z_2} \frac{\Phi(z)[\psi(z) - \alpha - \Sigma\beta\omega(z)]\,dz}{\varphi(z)\sqrt{\lambda^2\varphi(z) - [\psi(z) - \alpha - \Sigma\beta\omega(z)]^2}},$$

α et les β étant des constantes arbitraires très petites, $\psi(z)$ ne se réduisant pas à une constante et admettant la racine z_0 et z_1, z_2 étant les deux racines de la quantité sous le radical qui se réduisent à z_0 quand α, λ et les β sont nuls.

Considérons les β comme fixes et faisons le changement

$$\psi(z) - \Sigma\beta\omega(z) = u,$$

d'où

$$z = \theta(u).$$

On sera ramené au cas précédent

$$I = \int_{u_1}^{u_2} \frac{\Phi[\theta(u)]\theta'(u)(u - \alpha)\,du}{\varphi[\theta(u)]\sqrt{\lambda^2\varphi[\theta(u)] - (u - \alpha)^2}},$$

l'intégrale devant être indépendante de α et λ, on aura donc

$$\varphi[\theta(u)] = Au^2 + Bu + C, \qquad \Phi[\theta(u)]\theta'(u) = K.$$

Revenons à la variable z, en remarquant que

$$\theta'(u) = \frac{dz}{du} = \frac{1}{\dfrac{du}{dz}} = \frac{1}{\psi' - \Sigma\beta\omega'}$$

on aura

$$\varphi(z) = A(\psi - \Sigma\beta\omega)^2 + B(\psi - \Sigma\beta\omega) + C,$$
$$\Phi(z) = K(\psi' - \Sigma\beta\omega'),$$

et ces identités devront avoir lieu quels que soient les β. Les coefficients A, B, C, K peuvent d'ailleurs dépendre des β.

Annulons tous les β. Nous aurons

$$\varphi(z) = A_0\psi^2 + B_0\psi + C_0,$$
$$\Phi(z) = K_0\psi',$$

et les fonctions ψ et ω devront satisfaire, quels que soient les β, à

$$A(\psi - \Sigma\beta\omega)^2 + B(\psi - \Sigma\beta\omega) + C = A_0\psi^2 + B_0\psi + C_0,$$
$$K(\psi' - \Sigma\beta\omega') = K_0\psi'.$$

La seconde montre que

$$\Sigma\beta\frac{\omega'}{\psi'}$$

est indépendante de z quels que soient les β, de sorte que les $\frac{\omega'}{\psi'}$ sont des constantes ou encore que chaque ω est une fonction linéaire de ψ.

La quantité

$$\sigma = \psi - \Sigma\beta\omega$$

est aussi une fonction linéaire de ψ se réduisant à ψ pour les β tous nuls,

$$\sigma = E\psi + F;$$

on aura donc

$$A_0\left(\frac{\sigma - F}{E}\right)^2 + B_0\frac{\sigma - F}{E} + C_0 = A\sigma^2 + B\sigma + C$$

ou

$$\frac{A_0}{E}\sigma^2 + \left(\frac{B_0}{E} - \frac{2A_0F}{E^2}\right)\sigma + \frac{A_0F^2}{E^2} - \frac{B_0F}{E} + C_0 = A\sigma^2 + B\sigma + C,$$

ce qui donne les expressions de ABC telles que la première identité soit vérifiée par ψ et les ω quels que soient les β.

En résumé, *pour que l'intégrale soit nulle quels que soient* α, λ *et les* β *supposés suffisamment petits, il faut et il suffit :*

1° *Que chaque* ω *soit une fonction linéaire de* ψ ;
2° *Que* φ *soit un polynome entier en* ψ *au plus du second degré;*
3° *Que* Φ *soit proportionnelle à* ψ'.

Et là encore, nous remarquerons, comme conséquence de la réduction possible à l'intégrale du paragraphe 7, que si λ, α et les β sont suffisamment petits, l'intégrale se compose d'une partie positive et d'une partie négative dont la grandeur commune tend vers zéro.

10. Ces préliminaires analytiques étant exposés, revenons à notre problème de Dynamique. La discussion dans le cas d'un nombre quelconque de paramètres secondaires conduit à des fonctions formées d'une façon assez compliquée au moyen des coefficients de la fonction génératrice. Nous commencerons par les former au moyen du calcul préliminaire suivant :

Soient b le paramètre secondaire dont nous nous occupons, et b_1, b_2, ..., b_{n-2} les autres. Nous avons les $n-2$ intégrales immédiates

$$\frac{\partial G}{\partial b'_1}=\beta_1, \quad \ldots, \quad \frac{\partial G}{\partial b'_{n-2}}=\beta_{n-2}$$

et, en ajoutant au besoin des constantes convenables aux coefficients de b'_1, b'_2, ..., b'_{n-2} dans la fonction génératrice, ce qui revient à modifier par équivalence cette fonction génératrice, on peut supposer que les conditions initiales du mouvement $\mathfrak{M}_0$ fournissant l'équilibre de b donnent pour les β des valeurs toutes nulles.

Au moyen de ces $n-2$ intégrales immédiates, formons le système réduit aux deux paramètres a et b en portant les valeurs de b'_1, ..., b'_{n-2} qu'on en tire dans

$$G-\sum_{i=1}^{i=n-2} b'_i\frac{\partial G}{\partial b'_i}.$$

Nous obtiendrons une nouvelle fonction génératrice où b figurera encore comme paramètre secondaire et qui sera

$$2G_{a,b}=A\,a'^2+2C\,a'b'+B\,b'^2+2B_1b'+C_1$$

en n'écrivant pas le terme en a' qui est une dérivée exacte.

Les coefficients A, B, C seront des fonctions de a indépendantes des constantes arbitraires β; B_1 sera une fonction linéaire de ces constantes,

$$B_1=\psi(a)+\Sigma\beta\omega(a).$$

Enfin, C_1 sera une forme quadratique non homogène des β,

$$C_1 = \zeta(a) + \Sigma\beta\xi(a) + \Sigma\beta_i\beta_j\eta_{ij}(\alpha).$$

De plus, la forme

$$A a'^2 + 2 C a' b' + B b'^2$$

sera essentiellement positive et à déterminant non nul, de sorte que B et

$$\Delta = AB - C^2$$

seront des fonctions essentiellement positives.

Cette fonction G_{ab} donnera a et b au moyen de son intégrale de forces vives

$$A a'^2 + 2 C a' b' + B b'^2 + - C_1 = h$$

et de son intégrale immédiate

$$C a' + B b' + B_1 = \alpha.$$

On aura ainsi a et b et ensuite $b_1, \ldots, b_{n-2}$ au moyen des $n-2$ intégrales immédiates dont on est parti. La solution générale dépend donc des constantes h, α, $\beta_1, \ldots, \beta_{n-2}$. Les conditions initiales du mouvement $\mathfrak{M}_0$ donnent déjà pour les β des valeurs nulles; en ajoutant une constante convenable à C_1 ainsi qu'à B_1, ce qui ne fait que modifier $G_{a,b}$ par équivalence, on pourra supposer qu'elles donnent aussi pour h et α des valeurs nulles.

Au moyen de $G_{a,b}$, les deux paramètres a et b sont déterminés par

$$a'^2 = F(a) = \frac{1}{\Delta}[(h + C_1)B - (B_1 - \alpha)^2], \qquad b' = \lambda(a)a' + \mu(a),$$
$$\lambda(a) = -\frac{C}{B}, \qquad \mu(a) = \frac{\alpha - B_1}{B} = \frac{\alpha - \psi - \Sigma\beta\omega}{B},$$

et nous allons, par ces formules, examiner successivement les différents cas d'équilibre de b.

11. Supposons qu'il y ait équilibre de b dans un mouvement $\mathfrak{M}_0$ et que, dans ce mouvement, le paramètre principal a ait un mouvement révolutif. En changeant au besoin de paramètre principal, on peut

toujours supposer que l'on est dans le cas de la révolution périodique d'un angle et b a un accroissement périodique

$$\mathcal{B} = \int_0^{2\pi} \left(\lambda + \frac{\mu}{\sqrt{F}}\right) da$$

en supposant, pour fixer les idées, que la révolution de a se fasse dans le sens de a croissant.

Si $\lambda(a) = 0$, c'est-à-dire si la fonction C est nulle, la condition d'équilibre est

$$\mu_0(\alpha) = 0,$$

c'est-à-dire

$$\psi(a) \equiv 0.$$

Prenons alors un mouvement $\mathfrak{M}$ fourni par des conditions initiales

$$\left\{ \begin{array}{l} h = \beta_1 = \ldots = \beta_{n-1} = 0, \\ \alpha \text{ infiniment petit,} \end{array} \right.$$

infiniment voisines de celles qui donnent $\mathfrak{M}_0$. Pour ce mouvement, on aura encore variation révolutive de a et

$$\mu = \frac{\alpha}{B};$$

donc

$$\mathcal{B} = \int_0^{2\pi} \frac{\alpha}{B\sqrt{F}} da,$$

et cette intégrale n'est pas nulle, ayant tous ses éléments de même signe. Le fait que cet accroissement périodique de b n'est pas nul pour des conditions initiales infiniment voisines de celles donnant l'équilibre de ce paramètre suffit pour prouver que cet équilibre est instable.

Si $\lambda(a)$, c'est-à-dire C, n'est pas identiquement nulle, la condition d'équilibre est

$$\lambda^2(a) F_0 - \mu_0^2(a) = 0,$$

devant donner b' identiquement nulle ; donc

$$\lambda(a) = -\frac{\mu_0(a)}{\sqrt{F_0}}.$$

Il en résulte

$$\mathcal{B} = \int_0^{2\pi} \left(\frac{\mu}{\sqrt{F}} - \frac{\beta_0}{\sqrt{F_0}} \right) da.$$

Considérons encore le mouvement $\mathfrak{M}$ défini par les conditions initiales employées dans le cas précédent. Le fait que $\mathcal{B}$ serait nul exprimerait que l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mu}{\sqrt{F}} da = \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{\Delta}}{B} \frac{\alpha - \psi}{\sqrt{\zeta - (\alpha - \psi)^2}} da$$

resterait égale à sa valeur pour $\alpha = 0$, donc serait indépendante de α. Si on la dérive par rapport à α, on trouve

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{\Delta}}{B} \frac{\zeta}{[\zeta - (\alpha - \psi)^2]^{\frac{3}{2}}} da,$$

intégrale non nulle, car tous ses éléments sont positifs; donc $\mathcal{B}$ n'est pas nul quelle que soit la valeur de α, et l'on pourra trouver α aussi petit qu'on voudra et donnant un accroissement périodique non nul, ce qui démontre encore l'instabilité de l'équilibre.

12. Supposons que, dans le mouvement $\mathfrak{M}_0$, le paramètre a ait une variation oscillatoire périodique. Ce fait ne peut pas se produire avec la fonction $\lambda(a)$ non nulle, car l'équation d'équilibre

$$F_0 = \left(\frac{\mu_0}{\lambda} \right)^2$$

montre que F_0 ne peut avoir que des racines d'ordre pair, donc ne fournit jamais de valeur d'arrêt.

On est donc dans le cas de $\lambda(a)$ identiquement nulle et l'équilibre exige qu'il en soit de même de μ_0, c'est-à-dire de ψ. Reprenons encore le mouvement $\mathfrak{M}$ toujours défini par les mêmes conditions initiales que précédemment, il donnera encore une variation oscillatoire de a, et, pour b, un accroissement périodique

$$\mathcal{B} = 2 \int_{a_1}^{a_2} \frac{\mu}{\sqrt{F}} da = 2 \int_{a_1}^{a_2} \frac{\alpha}{B\sqrt{F}} da,$$

qui n'est pas nul, comme ayant tous ses éléments de même signe. Il y a donc encore instabilité de l'équilibre.

13. Supposons que, dans le mouvement $\mathfrak{M}_0$, le paramètre a ait une variation asymptotique.

Admettons d'abord que $\lambda(a)$ soit nulle, ce qui entraîne ψ nulle à cause de l'équilibre. Pour un mouvement quelconque donné par des conditions initiales donnant

$$\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_{n-2} = 0,$$

on aura soit une variation révolutive périodique de a, donc un accroissement périodique

$$\int_0^{2\pi} \frac{\alpha}{\sqrt{F}} da,$$

puisque λ est nulle, ou une variation oscillatoire donnant un accroissement périodique

$$2\int_{a_1}^{a_2} \frac{\mu}{\sqrt{F}} da,$$

mais, comme μ se réduit ici à $\frac{\alpha}{B}$, on a dans les deux cas une intégrale à éléments tous de même signe, donc un accroissement périodique non nul indiquant l'instabilité de l'équilibre.

Si $\lambda(a)$ n'est pas nulle, nous emploierons un mode de raisonnement qui nous servira également dans le cas suivant.

Par hypothèse, on a

$$F_0 = \frac{\mu_0^2}{\lambda^2},$$

et a tend asymptotiquement vers une racine a_1 de $\frac{\mu_0}{\lambda}$ telle qu'il n'existe pas d'autre racine de $\frac{\mu_0}{\lambda}$ entre a_1 et a_0.

Partons des mêmes conditions initiales que précédemment. La fonction

$$F = \frac{1}{\Delta}[(h + \zeta) B - (\alpha - \psi)^2]$$

admet une racine double pour

$$\alpha = h = 0.$$

Si nous cherchons à exprimer qu'elle a une racine double, nous trouverons une relation

$$R(\alpha, h) = 0$$

vérifiée quand α et h seront nuls. Si nous prenons des conditions initiales α, h infiniment petites et satisfaisant à cette équation, nous aurons encore une racine double a_2 infiniment voisine de a_1, donc encore mouvement asymptotique. Si cette racine double a_2 n'annule pas $\alpha - \psi$, elle donne pour b un mouvement asymptotique vers l'infini, de sorte que l'équilibre est instable.

Si cette racine a_2 était racine de $\psi - \alpha$, elle serait, par ce fait même, essentiellement variable avec α et racine double de

$$(h + \zeta)B;$$

elle ne pourrait être racine de B qui ne dépend pas de α, donc devrait être racine double de $h + \zeta$ et, par conséquent, racine de sa dérivée ζ', ce qui est absurde puisque ζ' ne dépend pas de α. Le raisonnement ne s'appliquerait plus si ζ' était identiquement nulle; ζ serait alors une constante et la constante $h + \zeta$ devrait être nulle, quelles que fussent α et h satisfaisant à la condition R, et en particulier pour α et h nuls, donc ζ serait nulle. La condition d'équilibre de b serait alors

$$-\frac{\psi^2}{\Delta} = \frac{\psi^2}{C^2}$$

ou

$$AB\psi^2 = 0;$$

comme A et B ne peuvent, ni l'un ni l'autre, être identiquement nuls, il en résulterait

$$\psi \equiv 0.$$

On aurait alors

$$F = \frac{1}{\Delta}(hB - \alpha^2)$$

et déterminant h et α aussi petits qu'on voudra, mais avec un rapport $\frac{\alpha^2}{h}$

tel que l'équation

$$B - \frac{\alpha^2}{h} = 0$$

ait des racines, on aura un mouvement oscillatoire de a fournissant pour b un accroissement périodique qui ne serait certainement pas nul par suite de ce que ψ n'existe pas; c'est le raisonnement déjà employé au paragraphe précédent, l'équilibre est donc encore instable.

14. Abordons maintenant le dernier cas, celui où, dans le mouvement $\mathfrak{M}_0$, le paramètre a est en équilibre. a_0 est alors racine double de F_0 et racine de μ_0.

Si nous reprenons le calcul du paragraphe précédent, des valeurs infiniment petites de α et h satisfaisant à

$$R(\alpha, h) = 0$$

fourniront pour F une racine double a_1 infiniment voisine de a_0 et que l'on pourra prendre comme valeur initiale de a. Dans ce mouvement, a sera en équilibre sur a_1 et b aura un mouvement uniforme dont la vitesse sera

$$\mu(a_1) = \frac{\alpha - \psi(a_1)}{B(a_1)}.$$

En général, on n'aura pas

$$\alpha - \psi(a_1) = 0,$$

donc b aura un mouvement uniforme de vitesse non nulle et s'éloignera indéfiniment de sa valeur initiale. L'équilibre sera instable.

Supposons que a_1 soit racine de $\alpha - \psi$. Nous en tirerons les mêmes conséquences que dans le paragraphe précédent, en ce sens que l'on devra avoir encore

$$\zeta \equiv 0;$$

mais la condition d'équilibre n'étant plus la même, on ne peut en conclure que ψ est identiquement nulle; tout ce que l'on sait, c'est que ψ admet la racine a_0.

Mais reprenons le même raisonnement en donnant aux β non plus les valeurs nulles qui correspondent à l'équilibre, mais des valeurs très petites quelconques. Laissant fixes ces β une fois choisis et laissant h et α variables liés par la relation

$$R(h, \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = 0,$$

nous en conclurons encore que l'équilibre est instable tant que la fonction C_1 ne sera pas une constante. Le seul cas d'exception, ou plus exactement de doute, sera donc celui où C_1 est une constante, quelles que soient les constantes β, ce qui exige que la fonction $\zeta(a)$, les fonctions $\xi(a)$ et les fonctions $\eta(a)$ soient toutes des constantes.

On a alors

$$F = \frac{1}{\Delta}[\lambda^2 B - (\alpha - \psi - \Sigma\beta\omega)^2],$$

λ^2 étant une constante qui, pour des conditions initiales réelles, est certainement positive, car B étant essentiellement positive, s'il n'en était pas ainsi, la fonction F serait négative pour toute valeur de a.

Pour h, α et les β nuls, la fonction F admet la racine double a_0, qui est racine de ψ; pour h, α et les β infiniment petits, elle admettra deux racines a_1, a_2 infiniment voisines de a_0 et F sera positive entre a_1, a_2 et négative au dehors; a aura donc mouvement oscillatoire entre a_1 et a_2 et b aura un accroissement périodique

$$\mathfrak{B} = 2\int_{a_1}^{a_2} \frac{\dfrac{\alpha - \psi - \Sigma\beta\omega}{B}}{\sqrt{\dfrac{1}{\Delta}[\lambda^2 B - (\alpha - \psi - \Sigma\beta\omega)^2]}}\,da.$$

C'est précisément l'intégrale étudiée au paragraphe 9 avec

$$\varphi = B,$$
$$\Phi = \sqrt{\Delta}.$$

Une *condition nécessaire de la stabilité* est que l'on ait

$$\mathfrak{B} = 0,$$

quelles que soient les h, α et les β; donc, d'après l'étude faite, que :

1° *Chaque* ω *soit une fonction linéaire de* ψ;

2° B *soit un polynome entier, du second degré au plus, de* ψ;

3° *Le rapport*

$$\frac{\psi'}{\sqrt{\Delta}}$$

soit une constante.

Cette condition est d'ailleurs suffisante. $\mathcal{B}$ étant nulle, le mouvement de b est périodique et l'on a

$$\begin{aligned} b &= \int \left(\lambda(a) \pm \frac{\mu(a)}{\sqrt{F(a)}}\right) da \\ &= \int \lambda(a)\, da \pm \int \frac{\mu(a)}{\sqrt{F(a)}}\, da. \end{aligned}$$

Soit M le module maxima de $\lambda(a)$ dans un intervalle fini contenant a_0 et à l'intérieur duquel nous pourrons supposer compris a_1 et a_2 pour les constantes h, α et β suffisamment petites. D'autre part, nous savons que, pour ces constantes infiniment petites, l'intervalle a_1, a_2 se partage en deux morceaux a_1, a_3, a_3, a_2 tels que, dans le premier, μ soit toujours positif et que, dans le second, il soit toujours négatif et que les intégrales

$$\int \frac{\mu}{\sqrt{F}}\, da$$

étendues à ces deux morceaux aient une valeur absolue M′ tendant vers zéro avec h, α et les β.

Pour avoir la grandeur de l'oscillation de b, il nous suffit d'étudier la variation de b quand a effectue une oscillation complète. Partons de a_1 dans le mouvement croissant de a, on aura

$$b = b_1 + \int_{a_1}^{a} \lambda\, da + \int_{a_1}^{a} \frac{\mu}{\sqrt{F}}\, da.$$

La première intégrale est, en valeur absolue, moindre que

$$M(a_2 - a_1);$$

quant à la seconde, elle croît de o à M′ quand a va de a_1 à a_2, puis, de a_3 à a_2, décroît de M′ à o; elle est positive et inférieure à M′. Dans cette demi-oscillation de a, les valeurs prises par b sont donc comprises entre

$$b_1 - \mathrm{M}(a_2 - a_1)$$

et

$$b_1 + \mathrm{M}(a_2 - a_1) + \mathrm{M}',$$

et, en particulier, il en est ainsi de la valeur b_2 obtenue au bout de cette demi-oscillation. A partir de ce moment, on a

$$\begin{aligned} b &= b_2 + \int_{a_2}^{a} \lambda\, da - \int_{a_2}^{a} \frac{\mu}{\sqrt{\mathrm{F}}}\, da \\ &= b_2 - \int_{a}^{a_2} \lambda\, da + \int_{a}^{a_2} \frac{\mu}{\sqrt{\mathrm{F}}}\, da, \end{aligned}$$

de sorte que, pendant cette seconde demi-oscillation de a, le paramètre b reste compris entre

$$b_2 - \mathrm{M}(a_3 - a_1)$$

et

$$b_2 + \mathrm{M}(a_2 - a_1) + \mathrm{M}'.$$

Si, dans la limite inférieure ainsi trouvée, nous remplaçons b_2 par sa limite inférieure

$$b_1 - \mathrm{M}(a_2 - a_1),$$

et si, dans la limite supérieure, nous remplaçons b_2 par sa limite supérieure

$$b_1 + \mathrm{M}(a_2 - a_1) + \mathrm{M}',$$

nous obtiendrons un intervalle

$$b_1 - 2\mathrm{M}(a_2 - a_1), \qquad b_1 + 2\mathrm{M}(a_2 - a_1) + 2\mathrm{M}',$$

dans lequel sera compris b dans la seconde demi-oscillation, et qui contient à son intérieur l'intervalle où est situé b pendant la première demi-oscillation.

La grandeur de l'oscillation de b est donc moindre que

$$4\mathrm{M}(a_2 - a_1) + 2\mathrm{M}',$$

et comme $a_2 - a_1$ et M' tendent vers zéro quand les conditions initiales tendent vers celles de l'équilibre, on voit que l'oscillation de b s'effectue dans un intervalle tendant vers zéro et ce fait suffit pour prouver que l'équilibre est effectivement stable.

15. Les résultats de cette discussion un peu longue peuvent se présenter de la façon suivante :

Les conditions nécessaires et suffisantes de la stabilité de l'équilibre du paramètre secondaire b peuvent se répartir en deux groupes :

Premier groupe. — Ces conditions sont relatives à la nature du paramètre secondaire considéré.

Partant de la fonction génératrice G, on cherche la fonction génératrice $G_{a,b}$ relative aux deux paramètres a, b en portant dans

$$G - \beta_1 b'_1 - \ldots - \beta_{n-2} b'_{n-2},$$

les valeurs de $b'_1, \ldots, b'_{n-2}$ tirées des intégrales

$$\frac{\partial G}{\partial b'_1} = \beta_1, \quad \ldots, \quad \frac{\partial G}{\partial b'_{n-2}} = \beta_{n-2}.$$

On obtient ainsi, en négligeant le terme en a', qui est dérivée exacte,

$$G_{ab} = A a'^2 + 2 C a^2 b' + B b'^2 + 2 B_1 b' + C_1,$$

B_1 étant une fonction linéaire des β

$$B_1 = \omega + \sum_i \beta_i \omega_i,$$

et C_1 une fonction du second degré des β.

1° Les fonctions $\omega, \omega_1, \ldots, \omega_{n-2}$ sont liées par $n-2$ relations linéaires distinctes à coefficients constants, de façon qu'elles s'expriment toutes linéairement au moyen de l'une d'entre elles ou, plus généralement, au moyen d'une certaine fonction $\theta(a)$ qui n'est pas une constante. On a alors

$$B_1 = \theta(a) P(\beta) + Q(\beta),$$

$P(\beta)$ et $Q(\beta)$ étant des fonctions linéaires et à coefficients constants des constantes arbitraires $\beta_1, \ldots, \beta_{n-2}$.

2° La fonction C_1 doit être une constante quels que soient les β, ou, ce qui revient au même, si on la considère comme polynome aux variables β, tous ses coefficients doivent être des constantes.

3° La fonction B doit être un polynome entier en $\theta(a)$, polynome au plus du second degré.

4° Le rapport

$$\frac{\theta'(a)}{\sqrt{AB - C^2}}$$

doit être une constante.

Deuxième groupe. — Les conditions du premier groupe étant supposées réalisées, les nouvelles conditions sont relatives au genre du mouvement $\mathfrak{M}_0$ qui fournit l'équilibre de b, c'est-à-dire aux conditions initiales déterminant le mouvement. Elles se réduisent à deux :

1° Les valeurs des β qui correspondent à l'équilibre de b ne doivent pas annuler l'expression

$$P(\beta),$$

de façon à fournir pour B_1 une fonction ne se réduisant pas à une constante.

2° Dans le mouvement $\mathfrak{M}_0$, il doit y avoir équilibre du paramètre principal.

Nous remarquerons qu'il résulte des calculs faits ou, si l'on veut, de ce que la fonction F_0 se réduit alors à un carré parfait précédé du signe — que, dans les conditions précédemment énumérées, ce n'est pas seulement l'équilibre du paramètre secondaire qui est stable, mais aussi celui du paramètre principal.

16. Considérons le cas où les liaisons sont indépendantes du temps. La portion G_1 de la fonction génératrice n'existe pas.

Supposons que le système soit en équilibre et considérons un quelconque b des paramètres secondaires pour étudier sa stabilité.

Nous devons tirer $b'_1, \ldots, b'_{n-2}$ des intégrales premières

$$\frac{\partial G}{\partial b'_1} = \beta_1, \quad \ldots, \quad \frac{\partial G}{\partial b'_{n-2}} = \beta_{n-2},$$

qui donnent des expressions homogènes en a', b', $\beta_1, \ldots, \beta_{n-2}$ et former la fonction $G_{a,b}$ qui sera quadratique homogène en a', b', $\beta_1, \ldots, \beta_{n-2}$. Le coefficient de b' sera donc linéaire et homogène aux β, et comme les valeurs des β qui correspondent à l'équilibre sont toutes nulles, nous voyons que, pour les β de l'équilibre considéré, le coefficient de b' sera identiquement nul.

Une des conditions nécessaires de la stabilité de l'équilibre de b n'est donc certainement pas réalisée; cet équilibre est instable.

Donc : *Quand un système holonome à liaisons indépendantes du temps et dans le cas régulier d'intégration se trouve en équilibre, l'équilibre de chacun des paramètres secondaires est toujours instable.*

17. Considérons un système ayant plusieurs paramètres secondaires et supposons qu'il y en ait deux b et c qui soient en équilibre stable. Comme les conséquences tirées de la stabilité de l'équilibre d'un paramètre secondaire sont indépendantes de ce qui se passe pour les autres paramètres secondaires, on est assuré que a est aussi en équilibre.

Désignons par $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{n-3}$ les autres paramètres secondaires et éliminons-les au moyen des intégrales premières immédiates

$$\frac{\partial G}{\partial \rho_1} = \sigma_1 \quad \ldots, \quad \frac{\partial G}{\partial \rho_{n-3}} = \sigma_{n-3},$$

les constantes σ étant nulles pour le mouvement $\mathfrak{M}_0$ dans lequel a, b, c sont en équilibre. On obtiendra ainsi une fonction génératrice réduite en a, b, c qui, pour $\sigma_1, \ldots$ nuls, donnera l'équilibre de a, b, c, quand on prendra les conditions initiales

$$a' = 0, \quad b' = 0, \quad c' = 0.$$

Cet équilibre, par hypothèse, est stable; donc, *a fortiori*, il restera stable si l'on assujettit les constantes σ à ne pas varier, c'est-à-dire à rester nulles. Nous arrivons ainsi à une fonction génératrice

$$2G_{abc} = Aa'^2 + Bb'^2 + Cc'^2 + 2Db'c' + 2Ec'a' + 2Fa'b' + 2A_1a' + 2B_1b' + 2C_1c' + F_1$$

donnant des mouvements parmi lesquels il y en a un dans lequel b et c sont tous deux en équilibre stable.

Tirons c' de l'intégrale immédiate

$$Cc' + Db' + Ea' + C_1 = \gamma,$$

et portons dans

$$2G - 2\gamma c'.$$

Nous aurons une fonction génératrice réduite $2G_{ab}$ fournissant des mouvements dont l'un donnera l'équilibre stable de b ; donc le terme indépendant de a' et b' devra être une constante, quelle que soit la valeur de γ. Ce terme est

$$\frac{(\gamma - C_1)^2}{C} + 2C_1\frac{\gamma - C_1}{C} + F_1 - 2\gamma\frac{\gamma - C_1}{C},$$

ou

$$F_1 - \frac{(\gamma - C_1)^2}{C},$$

et, en développant

$$F_1 - \frac{C_1^2}{C} + 2\gamma\frac{C_1}{C} - \gamma^2\frac{1}{C},$$

il en résulte que C, C_1 et F_1 doivent être des constantes. Supposons qu'il en soit ainsi et reprenons le même calcul, en éliminant cette fois le paramètre b, au moyen de l'intégrale première

$$Bb' + Dc' + Fa' + B_1 = \beta.$$

Nous en conclurons de même que B, B_1 et F_1 doivent être des constantes. En modifiant $G_{a,b,c}$ par équivalence, cette fonction se réduit alors à sa portion G_2. Cette fonction génératrice, qui est dans le cas du paragraphe 16, admettrait un équilibre général de ses trois paramètres, avec stabilité pour les deux paramètres secondaires ; nous avons vu que cela n'était pas possible ; donc :

Lorsqu'il y a équilibre simultané de plusieurs paramètres secondaires, il ne peut jamais y avoir plusieurs de ces équilibres qui soient stables.

18. Ce qui précède conduit à une conséquence intéressante relativement à l'équilibre d'un système matériel qui est dans le cas régulier d'intégration.

Considérons une position d'équilibre ne correspondant pas à une indétermination paramétrique, l'équilibre stable du système se traduit rigoureusement par la stabilité de son équilibre paramétrique; s'il y a indétermination paramétrique, la stabilité de l'équilibre paramétrique entraîne forcément la stabilité de l'équilibre du système, mais la réciproque n'est plus vraie, l'équilibre du système peut être stable sans qu'il y ait stabilité pour tous les paramètres; il suffit qu'elle existe pour les paramètres non indéterminés pour la position considérée, et cela tient à ce qu'une variation finie quelconque des paramètres indéterminés n'entraîne qu'une variation infiniment petite de la position du système.

Considérons alors un système matériel dans le cas régulier d'intégration et cherchons s'il peut être en équilibre paramétrique stable. D'après ce qui a été démontré au paragraphe 17, il ne peut y avoir plusieurs paramètres secondaires puisque deux tels paramètres ne peuvent être simultanément en équilibre stable.

Il y a donc forcément un paramètre principal et un seul paramètre secondaire, et comme on est dans le cas de l'équilibre simultané de ces deux paramètres, les conditions relatives à ce cas et indiquées au paragraphe 15 doivent être réalisées. Nous remarquerons immédiatement que les constantes arbitraires, désignées par $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-2}$ dans ce paragraphe, n'existent pas ici, de sorte que, de même que les conditions du premier groupe, celles du second groupe sont indépendantes de l'équilibre considéré.

Nous arrivons ainsi à ce résultat.

1° Systèmes dans le cas régulier satisfaisant aux conditions :

$$n = 2;$$

$$2G = A a'^2 + 2C a' b' + B b'^2 + 2B_1 b' + C_1,$$

A, B, C, B_1, C_1, fonctions de a seulement;

B_1 n'est pas une constante;

C_1 est une constante;

$$B = \alpha B_1^2 + 2\beta B_1 + \gamma \qquad (\alpha, \beta, \gamma \text{ constantes});$$

$\dfrac{\dfrac{dB_1}{da}}{\text{[illegible]}}$ est une constante.

Pour ces systèmes, tous les équilibres paramétriques sont stables; toute position d'équilibre du système est position d'équilibre stable.

2° Systèmes dans le cas régulier et ne satisfaisant pas à toutes les conditions précédentes :

Pour ces systèmes, tous les équilibres paramétriques sont instables; toutes les positions d'équilibre du système sont des positions d'équilibre instable, sauf peut-être celles qui correspondent à des indéterminations paramétriques et qui peuvent être des positions d'équilibre stable.

19. Pour donner un exemple simple et concret des résultats que nous venons d'obtenir, il nous suffit de considérer le mouvement plan d'une molécule soumise à une *attraction* par un centre fixe, l'intensité de cette attraction étant fonction de la distance et s'annulant avec elle.

On a ici, en prenant les coordonnées polaires,

$$n = 2,$$
$$2G = \rho'^2 + \rho^2\theta'^2 + 2U(\rho);$$

donc

$$A = 1, \qquad B = \rho^2, \qquad C = 0, \qquad B_1 = 0, \qquad C_1 = 2U(\rho),$$

et le fait que le coefficient B_1 est nul montre que, quelle que soit l'intensité de l'attraction, le système est toujours de ceux dont tous les équilibres paramétriques sont instables.

Soient

$$0, \quad \rho_1, \quad \rho_2, \quad \ldots$$

les valeurs positives de ρ, pour lesquelles la force $\frac{dU}{d\rho}$ s'annule. Les positions ρ_1, ρ_2, ... seront des positions d'équilibre, et ces équilibres devront être instables puisqu'il n'y a pas alors indétermination paramétrique; effectivement, en donnant, à partir d'une telle position, une vitesse initiale quelconque aussi petite qu'on voudra et perpendiculaire au rayon vecteur, ce rayon, d'après l'intégrale des aires, se mettra à tourner indéfiniment dans le même sens; il n'aura pas un mouvement oscillatoire infiniment petit et l'équilibre sera bien instable.

La théorie ne s'applique pas à l'équilibre fourni par

$$\rho = 0$$

parce qu'il y a alors indétermination paramétrique. Cet équilibre est stable ou instable suivant la loi de l'attraction.

Au lieu de considérer le mouvement absolu de la molécule, considérons maintenant son mouvement relatif par rapport à des axes issus du centre d'attraction et tournant avec la vitesse constante ω. Désignant alors par ρ et θ les coordonnées polaires relatives, les coordonnées polaires absolues sont

$$\rho, \quad \theta + \omega t;$$

donc, on a

$$\begin{aligned} 2G &= \rho'^2 + \rho^2(\theta' + \omega)^2 + 2U(\rho) \\ &= \rho'^2 + \rho^2\theta'^2 + 2\omega\rho^2\theta' + [\omega^2\rho^2 + 2U(\rho)]; \end{aligned}$$

c'est encore le cas régulier, mais avec

$$A = 1, \qquad B = \rho^2, \qquad C = 0, \qquad B_1 = \omega\rho^2, \qquad C_1 = \omega^2\rho^2 + 2U(\rho).$$

Si ω n'est pas nulle, B_1 n'est pas une constante; B est une fonction linéaire de B_1 et la dérivée $\dfrac{dB_1}{d\rho}$ qui est égale à $2\omega\rho$ est bien dans un rapport constant avec $\sqrt{AB - C^2}$ qui se réduit à ρ. Toutes les conditions pour avoir un système à équilibres paramétriques stables sont donc vérifiées, sauf celle relative à C_1. Cette dernière condition se réduit à

$$\omega^2\rho^2 + 2U(\rho) = \text{const.}$$

ou

$$\frac{dU}{d\rho} = -\omega^2\rho,$$

et exprime que l'attraction est proportionnelle à la distance, son intensité étant précisément celle de la force centrifuge due à la rotation ω.

Considérons une loi d'attraction proportionnelle à la distance

$$F = -\omega^2\rho;$$

elle donnera lieu à des mouvements circulaires présentant cette particularité qu'ils auront tous lieu avec la même vitesse angulaire ω, de sorte que si nous prenons des axes tournant précisément avec cette vitesse, ces mouvements constitueront des équilibres relatifs, et ceux-ci seront tous stables.

Par contre, considérons une loi d'attraction quelconque, mais autre que la précédente; elle donnera lieu à des mouvements circulaires uniformes, mais qui n'auront pas lieu avec la même vitesse angulaire, celle-ci étant

$$\sqrt{\frac{-F}{\rho}}$$

variable avec le rayon ρ du cercle décrit, puisque F n'est pas proportionnel à ρ; prenons un de ces mouvements circulaires, soit ω sa vitesse angulaire; il fournira, pour des axes animés de cette rotation, un équilibre relatif qui sera certainement instable puisque la condition relative à C_1 ne sera pas réalisée.

En revenant au mouvement absolu, nous arrivons donc à ce résultat :

Pour l'attraction proportionnelle à la distance, tous les mouvements circulaires sont des mouvements stables.

Pour toute autre loi d'attraction, tous les mouvements circulaires sont des mouvements instables.

Il est utile de faire toutefois remarquer que la propriété relative à l'attraction proportionnelle à la distance exige qu'il y ait attraction effective, c'est-à-dire que ω ne soit pas nulle; s'il en était ainsi, la condition relative à C_1 serait encore vérifiée, mais celle relative à B_1 ne le serait plus puisque B_1 deviendrait une constante nulle.

Les propriétés précédentes de l'attraction proportionnelles à la distance peuvent facilement se vérifier par l'intégration effective,

Partons des coordonnées cartésiennes relatives

$$a = \rho\cos\theta, \qquad b = \rho\sin\theta.$$

On a

$$a'^2 + b'^2 = \rho'^2 + \rho^2\theta'^2,$$
$$ab' - ba' = \rho^2\theta';$$

donc

$$2G = a'^2 + b'^2 + 2\omega(ab' - ba'),$$

ou, en ajoutant la dérivée exacte,

$$2\omega(ab' + ba'),$$
$$2G = a'^2 + b'^2 + 4\omega ab'.$$

On intégrera immédiatement en partant de l'intégrale immédiate

$$b' + 2\omega a = \lambda$$

et de l'équation de Lagrange relative à a,

$$a'' - 2\omega b' = 0;$$

on arrive ainsi à l'équation linéaire du second ordre

$$a'' + 4\omega^2 a - 2\omega\lambda = 0,$$

qui s'intègre différemment suivant que ω n'est pas nulle ou est nulle.

$\omega \neq 0$. — On a

$$a = \frac{\lambda}{2\omega} + K\cos(2\omega t + \mu),$$
$$b = \gamma - K\sin(2\omega t + \mu).$$

Pour que les vitesses initiales soient très petites, il faut et il suffit que K soit très petit, et les deux paramètres a et b oscillent tous deux dans des intervalles très petits. Il y a bien stabilité.

$\omega = 0$. — Les deux équations se réduisent à

$$b' = \lambda,$$
$$a'' = 0;$$

donc, donnent deux mouvements uniformes et, partant de la position d'équilibre avec une vitesse non nulle mais très petite, les valeurs initiales de a' et b' ne peuvent être toutes deux nulles, de sorte que l'un au moins des deux paramètres aura un mouvement uniforme effectif. Il y a bien instabilité.