

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

HENRI VILLAT

Sur un calcul de résistance dans un courant fluide limité par un mur

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 35 (1918), p. 251-312

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1918_3_35__251_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1918, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR
UN CALCUL DE RÉSISTANCE

DANS
UN COURANT FLUIDE LIMITÉ PAR UN MUR,

PAR M. HENRI VILLAT.



A la mémoire de Jean BRANCA, dont le jeune talent, plein d'incomparables promesses, nous fut enlevé dans le moment même où l'École Normale s'appretait à le recevoir avec éclat au concours de 1918, ce travail est pieusement dédié.

Dans ma Thèse, parue aux *Annales scientifiques de l'École Normale* (1911, p. 203-311), j'ai déterminé tous les mouvements à deux dimensions d'un fluide incompressible limité par un mur rectiligne, et contenant un solide derrière lequel le courant laisse un sillage. Tous les éléments d'un mouvement, aussi bien géométriques que cinématiques, se laissent complètement étudier par la méthode exposée dans ce Mémoire. Dans un travail ultérieur ⁽¹⁾, j'ai montré comment on pouvait disposer des arbitraires dont dépend le problème, de façon à mettre en évidence la forme de l'obstacle solide supposé donné.

A la théorie ainsi constituée on peut apporter, sur un point essentiel, un perfectionnement notable que je vais exposer dans le présent travail, avec quelques-unes de ses conséquences. A cet effet j'utiliserai les notations déjà introduites dans les deux Mémoires cités, auxquels je prie le lecteur de bien vouloir se reporter. (Je désignerai cependant par ω_1, ω_3 , au lieu de ω, ω' les demi-périodes des fonctions elliptiques qui interviennent dans la question, ceci pour la commodité des notations.)

⁽¹⁾ *Sur le mouvement d'un solide donné dans un fluide limité par une paroi fixe* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1911, p. 353-408).

Le point de départ de la méthode consistait dans la représentation conforme de l'aire occupée par le fluide en mouvement, sur la moitié de l'aire comprise, dans un plan $\zeta = \xi + i\eta$, entre deux circonférences de rayons respectifs q et un , avec la condition $q < 1$. En désignant par $\Omega(\zeta)$ la fonction arbitraire introduite dans ma Thèse (arbitraire sous certaines réserves énoncées page 233), les deux composantes P_x et P_y de la résistance éprouvée par le solide immergé sont fournies par l'égalité suivante déduite de l'application d'un ingénieux procédé dû à M. T. Levi-Civita :

$$(1) \quad P = P_x + iP_y = \frac{1}{2i} \int_{|\zeta|=1} e^{i\Omega} d\zeta.$$

Ces composantes restent nécessairement comprises entre certaines limites, dépendant de la forme du solide et que j'avais déterminées (1).

Or on peut démontrer, et c'est le but de la première Partie de ce travail, que la composante P_x , celle qui est directement opposée au mouvement, peut recevoir une forme explicite extrêmement simple, débarrassée de tout signe de quadrature. Du résultat obtenu se déduisent diverses applications intéressantes, que j'exposerai ensuite, et qui résulte notamment de l'étude du cas où le solide est constitué par une lame rectiligne normale ou oblique au courant, et par suite au mur. Ces applications font l'objet des deux derniers Chapitres de ce Mémoire, dont les principaux résultats ont été communiqués à l'Académie des Sciences dans sa séance du 5 février 1917 (2).

I.

Rappelons tout d'abord les propriétés qui définissent la fonction $\Omega(\zeta)$, dont nous désignerons par Θ et T la partie réelle et le coefficient de i dans la partie imaginaire :

(1) *Thèse*, p. 230.

(2) *Comptes rendus*, t. 164, 1917, p. 275.

Cette fonction $\Omega(\zeta)$ est réelle sur l'axe réel;

Elle prend des valeurs conjuguées en deux points ζ conjugués, c'est-à-dire symétriques par rapport à l'axe réel;

Elle est régulière, finie et continue dans toute la couronne comprise entre les circonférences de rayons 1 et q , limites comprises, exception faite pour les points $\zeta = e^{\pm i\sigma_0}$;

Si l'on place ζ en un point de la demi-circonférence supérieure $|\zeta| = 1$, Θ devient égale à l'inclinaison du courant sur Ox dans le plan z , au point de la paroi solide correspondant;

Enfin la fonction Θ doit être nulle pour $|\zeta| = q$.

D'autre part, si l'on pose pour abrégé

$$p\left(\frac{\omega_1}{\pi}\sigma_0 - \omega_3\right) = a_1,$$

la formule (27) de ma Thèse (p. 221), peut s'écrire

$$df = \frac{A\omega_1}{i\pi} \frac{p\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log\zeta - \omega_3\right) - a_1}{p\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log\zeta - \omega_3\right) - e_1} p'\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log\zeta - \omega_3\right) \frac{d\zeta}{\zeta},$$

ou bien encore

$$(2) \quad df = \frac{A\omega_1}{i\pi} (e_1 - e_3)(e_2 - e_3)^2 \times \frac{\left[p\left(\frac{\omega_1}{\pi}\sigma_0\right) - p\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log\zeta\right) \right] p'\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log\zeta\right)}{\left[p\left(\frac{\omega_1}{\pi}\sigma_0\right) - e_3 \right] \left[p\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log\zeta\right) - e_2 \right] \left[p\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log\zeta\right) - e_3 \right]^2} \frac{d\zeta}{\zeta}.$$

Comme le nombre a_1 est évidemment réel, et comme d'autre part, en se rappelant que

$$(3) \quad q = e^{-\frac{\pi\omega_3}{i\omega_1}},$$

on constate sans peine que la différentielle df est réelle pour $|\zeta| = q$, on pourrait espérer tirer un résultat utile, relativement à P, en appli-

quant le théorème de Cauchy à la fonction $e^{i\Omega} \frac{df}{d\zeta}$, considérée dans le domaine compris entre les deux circonférences de rayons r et q . Mais la nature des singularités aux frontières interdit cette application, comme il est loisible de s'en assurer.

Voyons quelles sont ces singularités, dont le rôle sera du reste important un peu plus loin.

La fonction $e^{i\Omega} \frac{df}{d\zeta}$ est régulière dans toute la couronne circulaire en question; on voit de suite que les points singuliers possibles de cette fonction sont :

$$\zeta = e^{\pm i\sigma_0}, \quad \zeta = q, \quad \zeta = -q.$$

Prenons d'abord le point $\zeta = e^{i\sigma_0}$; en ce point, $e^{-\Gamma}$ devient infini, $\frac{df}{d\zeta}$ devient nul. Mais $e^{i\Omega}$ se comporte comme $e^{i\Omega_0}$, en désignant par Ω_0 la fonction particulière introduite dans ma Thèse (p. 239). Et j'ai d'autre part démontré (1) qu'en désignant par 2α l'angle que font entre elles les deux directions du courant au point de la paroi où le courant se divise, on pouvait écrire

$$(4) \quad \Omega_0 = \frac{2\alpha i}{\pi} \log \frac{\sigma\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log \zeta - \frac{\omega_1}{\pi} \sigma_0\right)}{\sigma\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log \zeta + \frac{\omega_1}{\pi} \sigma_0\right)} + \frac{4\alpha\gamma_1\omega_1\sigma_0}{\pi^2} \log \zeta + \frac{2\alpha\sigma_0}{\pi}.$$

Il en résulte qu'en posant

$$\zeta = e^{i\sigma_0(1+h)}$$

ou encore

$$\log \zeta = i\sigma_0 + k,$$

avec h et par suite k petits, $e^{i\Omega}$ se comporte comme

$$\left[\frac{\sigma\left(\frac{\omega_1}{i\pi} k\right)}{\sigma\left(\frac{2\omega_1}{\pi} \sigma_0 + \frac{\omega_1}{i\pi} k\right)} \right]^{-\frac{2\alpha}{\pi}} \times e^{\frac{2i\alpha\sigma_0}{\pi} + 4i\frac{\alpha\gamma_1\omega_1\sigma_0}{\pi^2} (i\sigma_0 + k)}$$

(1) *Journal de Mathématiques*, 1911, p. 362.

Or cette expression devient infinie comme $k^{-\frac{2\alpha}{\pi}}$. Mais on voit aisément que $\frac{df}{d\zeta}$ s'annule comme k ; par suite, à un facteur près qui reste fini, $e^{i\Omega} \frac{df}{d\zeta}$ se comporte comme $k^{1-\frac{2\alpha}{\pi}}$. Si donc l'obstacle solide présente un bec devant le courant au point de subdivision de ce dernier, c'est-à-dire si

$$\alpha < \frac{\pi}{2},$$

$e^{i\Omega} \frac{df}{d\zeta}$ tend vers zéro, et le point $e^{i\sigma_0}$ n'est pas singulier. Si au contraire l'obstacle présente un creux, ou bien si

$$\pi > \alpha > \frac{\pi}{2},$$

$e^{i\Omega} \frac{df}{d\zeta}$ devient infini; le point est bien singulier, mais l'intégrale de la fonction le long d'un petit chemin situé dans la couronne et entourant ce point tend vers zéro quand ce chemin tend à se confondre avec le point en question. Si enfin on a $\alpha = \frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire si le point de séparation est un point ordinaire de la paroi solide (ce qui est en somme le cas général), la fonction considérée reste finie, et par suite son intégrale le long d'un chemin infiniment petit entourant le point $e^{i\sigma_0}$ tend encore vers zéro dans les mêmes conditions que ci-dessus.

Par une voie analogue, on constatera qu'au voisinage du point $e^{-i\sigma_0}$, en posant

$$\log \zeta = -i\sigma_0 + k,$$

$e^{i\Omega}$ se comporte, à un facteur fini près, comme

$$\left[\frac{\sigma\left(-\frac{2\omega_1}{\pi}\sigma_0 + \frac{\omega_1}{i\pi}k\right)}{\sigma\left(\frac{\omega_1}{i\pi}k\right)} \right]^{-\frac{2\alpha}{\pi}},$$

expression qui s'annule avec k ; le point $e^{-i\sigma_0}$ n'est donc pas singulier.

Passons au point $\zeta = q$. Si l'on pose

$$\zeta = q + h$$

on aura, au voisinage de ce point,

$$\log \zeta = -\frac{\pi \omega_3}{i \omega_1} + \frac{h}{q} - \frac{h^2}{2q^2} + \frac{h^3}{3q^3} - \dots,$$

en se rappelant la valeur q fournie par (3). Transportant dans

$$p\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log \zeta - \omega_3\right),$$

d'après le développement bien connu de $p u$, il viendra

$$\begin{aligned} p\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log \zeta - \omega_3\right) &= p\left[\frac{\omega_1}{i\pi} \left(\frac{h}{q} - \frac{h^2}{2q^2} + \frac{h^3}{3q^3} - \dots\right)\right] \\ &= -\frac{\pi^2}{\omega_1^2} \frac{q^2}{h^2} \left(1 + \frac{h}{q} + \frac{1}{12} \frac{h^2}{q^2} + \dots\right), \end{aligned}$$

les termes non écrits dans la parenthèse s'annulant au moins comme h^3 . On trouvera de même

$$p'\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log \zeta - \omega_3\right) = \frac{2i\pi^3 q^3}{\omega_1^3 h^3} \left(1 + \frac{3h}{2q} + \frac{1}{2} \frac{h^2}{q^2} + \dots\right),$$

les termes non écrits s'annulant au moins comme h^4 . De sorte qu'on a la formule suivante :

$$\begin{aligned} \frac{df}{d\zeta} &= \frac{2\pi^2 q^2}{\omega_1^2} \frac{1}{h^3} \frac{1 + \frac{h}{q} + \frac{1}{12} \frac{h^2}{q^2} + \frac{a_1 \omega_1^2}{\pi^2 q^2} h^2 + \theta h^3}{1 + \frac{h}{q} + \frac{1}{12} \frac{h^2}{q^2} + \frac{e_1 \omega_1^2}{\pi^2 q^2} h^2 + \theta' h^3} \\ &\quad \times \left(1 + \frac{3h}{2q} + \frac{1}{2} \frac{h^2}{q^2} + \theta' h^4\right) \left(\frac{1}{1 + \frac{h}{q}}\right), \end{aligned}$$

où θ et θ' désignent deux quantités qui restent finies. θ'' désignant encore une quantité de même sorte, un calcul élémentaire permet

d'écrire

$$\frac{df}{d\zeta} = \frac{2A\pi^2 q^2}{\omega_1^2} \frac{1}{h^3} \left[1 + \frac{1}{2} \frac{h}{q} + \frac{a_1 - e_1}{\pi^2 q^2} \omega_1^2 h^2 + \theta'' h^3 \right].$$

Mais d'autre part, la fonction $\Omega(\zeta)$ s'annulant au point q , on a aussi, au voisinage du même point,

$$e^{i\Omega(\zeta)} = 1 + ih\Omega'(q) + \frac{h^2}{2} [i\Omega''(q) - \Omega'^2(q)] + \dots \quad (1);$$

d'où en définitive

$$(5) \quad e^{i\Omega(\zeta)} \frac{df}{d\zeta} = \frac{2A\pi^2 q^2}{\omega_1^2} \frac{1}{h^3} \left\{ 1 + \left[i\Omega'(q) + \frac{1}{2q} \right] h + \left[\frac{a_1 - e_1}{\pi^2 q^2} \omega_1^2 + \frac{i}{2q} \Omega'(q) + \frac{i\Omega''(q) - \Omega'^2(q)}{2} \right] h^2 + \dots \right\}.$$

Le point q est donc un pôle triple avec un résidu égal à

$$(6) \quad \frac{2A\pi^2 q^2}{\omega_1^2} \left[\frac{a_1 - e_1}{\pi^2 q^2} \omega_1^2 + \frac{i}{2q} \Omega'(q) + \frac{i\Omega''(q) - \Omega'^2(q)}{2} \right].$$

Pour le point $\zeta = -q$, nous poserons $\zeta = -q + h$,

$$\log \zeta = i\pi - \frac{\pi\omega_3}{i\omega_1} - \left(\frac{h}{q} + \frac{h^2}{2q^2} + \frac{h^3}{3q^3} + \dots \right) = i\pi - \frac{\pi\omega_3}{i\omega_1} - \frac{i\pi}{\omega_1} u.$$

Par suite,

$$p \left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log \zeta - \omega_3 \right) = p(\omega_1 - u) = e_1 + \frac{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}{p u - e_1},$$

d'après une formule classique ⁽²⁾; d'où encore

$$\frac{p \left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log \zeta - \omega_3 \right) - \alpha_1}{p \left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log \zeta - \omega_3 \right) - e_1} = 1 - \frac{e_1(e_1 - \alpha_1)}{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)} - \frac{e_1 - \alpha_1}{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)} p u,$$

(1) L'existence des dérivées de Ω , en un point de la frontière $|\zeta| = q$, résultera indirectement d'un paragraphe ultérieur.

(2) TANNERY et MOLK, *Fonctions elliptiques*, form. VIII, 9.

et, d'après un calcul comme ci-dessus,

$$\frac{p\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log \zeta - \omega_3\right) - a_1}{p\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log \zeta - \omega_3\right) - e_1} = 1 - \frac{e_1(e_1 - a_1)}{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)} + \frac{\pi^2 q^2}{\omega_1^2} \frac{e_1 - a_1}{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)} \frac{1}{h^2} \left(1 - \frac{h}{q} + \frac{1}{12} \frac{h^2}{q^2} + \theta h^3\right).$$

On a aussi

$$p'\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log \zeta - \omega_3\right) = p'(\omega_1 - u) = - \frac{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}{(pu - e_1)^2} p'u,$$

ou encore

$$p'\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log \zeta - \omega_3\right) = - \frac{2i\omega_1}{\pi q} (e_1 - e_2)(e_1 - e_3) \times h \left[1 - \frac{3}{2} \frac{h}{q} + \frac{1}{2} \frac{h^2}{q^2} + \theta h^3\right] \left[1 + \frac{2h}{q} + \frac{19}{6} \frac{h^2}{q^2} + \theta' h^3\right],$$

ou enfin

$$p'\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log \zeta - \omega_3\right) = - \frac{2i\omega_1}{\pi q} (e_1 - e_2)(e_1 - e_3) h \left(1 + \frac{1}{2} \frac{h}{q} + \frac{2}{3} \frac{h^2}{q^2} + \theta'' h^3\right),$$

les θ désignant toujours des quantités restant finies pour h petit. Transportant dans df , on trouve

$$\begin{aligned} \frac{df}{d\zeta} &= \frac{2\Lambda \omega_1^2 (e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}{\pi^2 q^2} \\ &\times \left[\frac{(e_1 - a_1) \pi^2 q^2}{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3) \omega_1^2 h} - \frac{1}{2} \frac{(e_1 - a_1) \pi^2 q}{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3) \omega_1^2} + \theta'' h \right] \\ &\times \left(1 + \frac{h}{q} + \frac{h^2}{q^2} + \theta'' h^3\right), \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\frac{df}{d\zeta} = 2\Lambda \left[(e_1 - a_1) \frac{1}{h} + \frac{1}{2q} + \theta'' h \right].$$

Le développement de $e^{i\Omega\zeta}$ s'obtient du reste aisément; on a, puisque

$$\Omega(-q) = 0,$$

$$e^{i\Omega(\zeta)} = 1 + i\Omega'(-q)h + \frac{h^2}{2}[i\Omega''(-q) - \Omega'^2(-q)] + \dots$$

Par conséquent, il vient

$$(7) \quad e^{i\Omega(\zeta)} \frac{df}{d\zeta} = 2\Lambda \left[\frac{e_1 - a_1}{h} + \frac{1}{2q} + i(e_1 - a_1)\Omega'(-q) + \mathcal{O}(h) \right].$$

Par suite, enfin, le point $\zeta = -q$ est un pôle simple pour notre fonction, avec le résidu

$$(8) \quad 2\Lambda(e_1 - a_1).$$

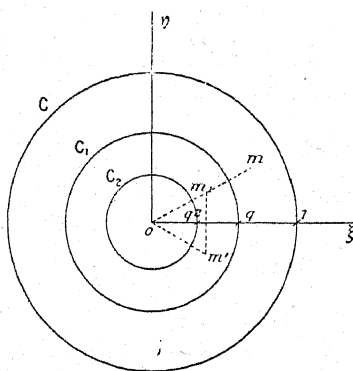
La présence d'un pôle triple, sur une des frontières du domaine d'existence de la fonction $e^{i\Omega} \frac{df}{d\zeta}$, empêche visiblement l'application du procédé dont on a parlé plus haut. Mais il est possible d'étendre le domaine d'existence de la façon suivante :

La fonction $\Omega(\zeta)$ doit, nous l'avons vu, être imaginaire pure pour $|\zeta| = q$. Il en résulte que la fonction $i\Omega(\zeta)$, réelle sur cette circonférence, est susceptible d'être prolongée analytiquement dans toute l'aire comprise entre les circonférences $|\zeta| = q$ et $|\zeta| = q^2$, en assujettissant la fonction à prendre des valeurs conjuguées aux points inverses géométriquement par rapport à l'origine avec le module q^2 . En deux points tels que m et m_1 , les valeurs de Θ sont donc opposées, et les valeurs de T , égales.

La fonction $e^{i\Omega(\zeta)}$ est elle-même prolongée dans le nouveau domaine, par ce qui précède.

Quant à la fonction $\frac{df}{d\zeta}$, définie par la formule (2), on voit qu'elle est déjà, de par son expression analytique, définie dans ce même domaine; elle y possède la même propriété que la fonction $i\Omega$. En effet, si l'on change m en m' , c'est-à-dire ζ en $\frac{q^2}{\zeta}$ et $\frac{d\zeta}{\zeta}$ en $-\frac{d\zeta}{\zeta}$, $\frac{\omega_1}{i\pi} \log \zeta$ se change en $2\omega_3 - \frac{\omega_1}{i\pi} \log \zeta$, et l'on s'assure aisément que $\frac{df}{d\zeta}$ garde sa

valeur initiale. Comme $\frac{df}{dz}$ est réel sur l'axe réel, il en résulte tout de suite qu'aux points inverses m et m' , les valeurs de $\frac{df}{dz}$ sont conjuguées.



Ceci posé, désignons par C , C_1 , C_2 , les trois circonférences de rayons r , q , q^2 , et considérons l'intégrale suivante :

$$(9) \quad I = \int_C e^{i\Omega} \frac{df}{dz} dz - \int_{C_2} e^{i\Omega} \frac{df}{dz} dz.$$

Comme, en posant

$$f = \varphi + i\psi,$$

on sait que ψ est constant sur C , et par suite sur C_2 , il résulte de ce qui précède qu'on a

$$I = \int_C e^{i\Theta - \tau} d\varphi - \int_C e^{-i\Theta - \tau} d\varphi,$$

c'est-à-dire

$$(10) \quad I = 2i \int_C e^{-\tau} \sin \Theta d\varphi.$$

Or la formule (1) peut s'écrire

$$2i(P_x + iP_y) = \int_C e^{-\tau} (\cos \Theta + \sin \Theta) d\varphi,$$

et elle fournit par conséquent l'égalité

$$(11) \quad {}_2P_x = \int_C e^{-T} \sin \Theta \, d\varphi.$$

La comparaison des formules (10) et (11) nous donne donc le résultat suivant :

$$(12) \quad I = 4iP_x.$$

Mais d'autre part, la fonction $e^{i\Omega} \frac{df}{d\zeta}$ est uniforme entre C et C₂, et n'y possède comme points singuliers que des pôles. En outre, l'intégrale de cette fonction, effectuée sur C et C₂ en évitant par de petits arcs de cercle les points singuliers $e^{i\sigma_0}$ et $q^2 e^{i\sigma_0}$, devient précisément l'intégrale I quand les rayons des petits arcs en question tendent vers zéro. Par conséquent, I est égale, d'après le théorème de Cauchy, à la somme des résidus correspondant aux pôles compris entre C et C₂, multipliée par $2i\pi$. Par suite enfin, nous pouvons écrire

$${}_2P_x = \pi \times \text{somme des résidus.}$$

D'après les valeurs ci-dessus calculées pour les résidus, cela nous donne

$$(13) \quad P_x = \frac{A\pi^3 q^2}{\omega_1^2} \left[\frac{i}{2q} \Omega'(q) + \frac{i\Omega''(q) - \Omega'^2(q)}{2} \right].$$

Cette expression semble embarrassée d'imaginaires, alors qu'il faut s'attendre à trouver pour P_x une valeur réelle. Je vais faire voir qu'elle est en effet réelle, et qu'on a nécessairement

$$(14) \quad \frac{1}{q} \Omega'(q) + \Omega''(q) = 0.$$

J'ai démontré antérieurement ⁽¹⁾ que la valeur la plus générale pour

(1) *Journal de Mathématiques*, 1911, p. 377.

la fonction $\Omega(\zeta)$ pouvait recevoir la forme suivante :

$$(15) \quad \Omega(\zeta) = \frac{i\omega_1}{\pi^2} \int_0^\pi \Phi(s) \frac{p'\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log \zeta\right)}{p\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log \zeta\right) - p\left(\frac{\omega_1}{i\pi} s\right)} ds,$$

dans laquelle on désigne par $\Phi(s)$ une fonction arbitraire, dont la forme est liée intimement à la nature géométrique de la paroi de l'obstacle. Cette forme, susceptible d'être remplacée par une autre plus avantageuse au voisinage de C , est applicable sans difficulté sur C_1 , et le prolongement au delà de C_1 y est manifeste. Utilisant une transformation bien connue (TANNERY et MOLK, VII, 3), on peut écrire

$$(16) \quad \Omega(\zeta) = \frac{i\omega_1}{\pi^2} \int_0^\pi \Phi(s) \left[\zeta \left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log \zeta + \frac{\omega_1}{\pi} s \right) + \zeta \left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log \zeta - \frac{\omega_1}{\pi} s \right) - 2\zeta \left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log \zeta \right) \right] ds.$$

Une première dérivation donne

$$(17) \quad \Omega'(\zeta) = -\frac{\omega_1^2}{\pi^3 \zeta} \int_0^\pi \Phi(s) \left[p\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log \zeta + \frac{\omega_1}{\pi} s\right) + p\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log \zeta - \frac{\omega_1}{\pi} s\right) - 2p\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log \zeta\right) \right] ds,$$

et de même

$$(18) \quad \Omega''(\zeta) = \frac{\omega_1^2}{\pi^3 \zeta^2} \int_0^\pi \Phi(s) \left[p\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log \zeta + \frac{\omega_1}{\pi} s\right) + p\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log \zeta - \frac{\omega_1}{\pi} s\right) - 2p\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log \zeta\right) \right] ds \\ - \frac{\omega_1^3}{i\pi^4 \zeta^2} \int_0^\pi \Phi(s) \left[p'\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log \zeta + \frac{\omega_1}{\pi} s\right) + p'\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log \zeta - \frac{\omega_1}{\pi} s\right) - 2p'\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log \zeta\right) \right] ds;$$

d'où l'on conclut immédiatement

$$(19) \quad \Omega''(\zeta) + \frac{1}{\zeta} \Omega'(\zeta) = -\frac{\omega_1^3}{i\pi^3 \zeta^2} \int_0^\pi \Phi(s) \left[p' \left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log \zeta + \frac{\omega_1}{\pi} s \right) + p' \left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log \zeta - \frac{\omega_1}{\pi} s \right) - 2p' \left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log \zeta \right) \right] ds.$$

Par conséquent, on a

$$\Omega''(q) + \frac{1}{q} \Omega'(q) = -\frac{\omega_1^3}{i\pi^3 q^2} \int_0^\pi \Phi(s) \left[p' \left(\omega_3 + \frac{\omega_1}{\pi} s \right) + p' \left(\omega_3 - \frac{\omega_1}{\pi} s \right) - 2p' \omega_3 \right] ds.$$

Or on sait que $p' \omega_3 = 0$, et d'après la périodicité il vient

$$p' \left(\omega_3 - \frac{\omega_1}{\pi} s \right) = -p' \left(\frac{\omega_1}{\pi} s - \omega_3 \right) = -p' \left(\frac{\omega_1}{\pi} s + \omega_3 \right).$$

On en conclut donc bien

$$\Omega''(q) + \frac{1}{q} \Omega'(q) = 0.$$

De sorte qu'en définitive il nous reste la formule suivante :

$$(20) \quad P_x = -\frac{A \pi^3 q^2}{2 \omega_1^2} \Omega'^2(q)$$

qui donne bien pour P_x une valeur réelle et du reste positive, puisque la constante A est négative, d'après les conventions posées au début (cf. *Thèse*, p. 213).

D'autre part, si l'on revient à l'expression (17) de la dérivée $\Omega'(\zeta)$, on en conclut immédiatement

$$(21) \quad \Omega'(q) = -\frac{\omega_1^2}{\pi^3 q} \int_0^\pi \Phi(s) \left[p \left(\frac{\omega_1}{\pi} s + \omega_3 \right) + p \left(\frac{\omega_1}{\pi} s - \omega_3 \right) - 2e_3 \right] ds.$$

Mais on a, comme je l'ai démontré (*Thèse*, p. 302),

$$(22) \quad \int_0^\pi \Phi(s) ds = 0,$$

de sorte qu'il reste simplement

$$(23) \quad \Omega'(q) = -\frac{\omega_1^2}{\pi^3 q} \int_0^\pi \Phi(s) \left[p \left(\frac{\omega_1}{\pi} s + \omega_3 \right) + p \left(\frac{\omega_1}{\pi} s - \omega_3 \right) \right] ds.$$

Utilisant la formule connue

$$p(u \pm \omega_3) = e_3 + \frac{(e_1 - e_3)(e_2 - e_3)}{p u - e_3},$$

et profitant encore de la même remarque, il vient enfin

$$(24) \quad \Omega'(q) = -\frac{2\omega_1^2(e_1 - e_3)(e_2 - e_3)}{\pi^3 q} \int_0^\pi \frac{\Phi(s) ds}{p \frac{\omega_1}{\pi} s - e_3}.$$

Au moyen de cette formule, nous allons établir le théorème suivant :

Pour tout obstacle de forme régulière (ou, plus précisément, dont le contour n'est pas ondulé) présentant au courant soit sa convexité, soit sa concavité, la résistance calculée par le procédé précédent n'est pas nulle.

Autrement dit, la quantité $\Omega'(q)$ n'est pas nulle dans les conditions ci-dessus.

Occupons-nous, par exemple, d'un contour convexe devant le courant. La fonction $\Phi(s)$ sera alors constamment décroissante dans l'intervalle $0, \frac{\pi}{2}$; elle sera d'abord négative, puis positive, avec un saut brusque pour $s = s_0$, au point où le courant se sépare devant l'obstacle.

Ceci posé, on sait que dans l'intervalle en question la fonction

$$\frac{1}{p \frac{\omega_1}{\pi} s - e_3}$$

va en croissant de 0 à $\frac{1}{e_1 - e_3}$. D'ailleurs (*Thèse*, p. 215), on a

$$e_1 - e_3 = b + 1 > 1,$$

de sorte que le facteur croissant $\frac{1}{p \frac{\omega_1}{\pi} s - e_3}$ reste positif et plus petit

que 1. On est donc en droit d'écrire les deux inégalités suivantes, qui ne sauraient se réduire à des égalités :

$$\int_0^{s_0} \frac{\Phi(s) ds}{p \frac{\omega_1}{\pi} s - e_3} > \frac{1}{p \frac{\omega_1}{\pi} s_0 - e_3} \int_0^{s_0} \Phi(s) ds$$

et

$$\int_{s_0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\Phi(s) ds}{p \frac{\omega_1}{\pi} s - e_3} > \frac{1}{p \frac{\omega_1}{\pi} s_0 - e_3} \int_{s_0}^{\frac{\pi}{2}} \Phi(s) ds.$$

Une simple addition nous donne

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\Phi(s) ds}{p \frac{\omega_1}{\pi} s - e_3} > \frac{1}{p \frac{\omega_1}{\pi} s_0 - e_3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Phi(s) ds$$

et par suite

$$\Omega'(q) < 0,$$

à cause de l'égalité (22).

Un raisonnement identique montre que pour les obstacles concaves, c'est-à-dire ceux pour lesquels la fonction $\Phi(s)$ est constamment croissante dans l'intervalle $0, \frac{\pi}{2}$, la même inégalité a lieu : ce qui démontre le théorème annoncé.

II.

Nous allons appliquer les résultats précédents à un cas particulier extrêmement important, qui nous permettra de déduire diverses con-

séquences intéressantes. Supposons que l'obstacle placé dans le courant soit une lame rectiligne; si nous désignons par $\delta + \alpha$ et $\delta - \alpha$ les inclinaisons sur Ox des deux portions de la lame (le point de séparation étant le point où le courant se divise), j'ai montré ailleurs (1) que la fonction Ω correspondante avait pour expression

$$(25) \quad \Omega(\zeta) = \frac{2\alpha i}{\pi} \log \frac{\sigma\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log \zeta - \frac{\omega_1}{\pi} s_0\right)}{\sigma\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log \zeta + \frac{\omega_1}{\pi} s_0\right)} + \frac{4\alpha \eta_1 \omega_1 s_0}{\pi^3} \log \zeta + \frac{2\alpha s_0}{\pi},$$

les constantes α , δ , s_0 satisfaisant à la condition

$$(26) \quad \frac{2\alpha s_0}{\pi} = \delta + \alpha \quad (2).$$

Dans le cas actuel, nous devons faire

$$\alpha = \frac{\pi}{2}$$

et, par conséquent,

$$(27) \quad s_0 = \frac{\pi}{2} + \delta.$$

Plus particulièrement encore, supposons que la plaque rectiligne soit normale au courant, c'est-à-dire faisons $\delta = 0$, et par suite

$$(28) \quad s_0 = \frac{\pi}{2}.$$

Notre fonction $\Omega(\zeta)$ deviendra

$$(29) \quad \Omega(\zeta) = i \log \frac{\sigma\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log \zeta - \frac{\omega_1}{2}\right)}{\sigma\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log \zeta + \frac{\omega_1}{2}\right)} + \frac{\eta_1 \omega_1}{\pi} \log \zeta + \frac{\pi}{2}.$$

(1) *Journal de Mathématiques*, 1911, p. 362.

(2) *Ibid.*, p. 363.

Nous en tirons immédiatement

$$(30) \quad \Omega'(\zeta) = \frac{\omega_1}{\pi\zeta} \left[\zeta \left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log \zeta - \frac{\omega_1}{2} \right) - \zeta \left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log \zeta + \frac{\omega_1}{2} \right) + \eta_1 \right]$$

et, par suite,

$$\Omega'(q) = \frac{\omega_1}{\pi q} \left[\zeta \left(\omega_3 - \frac{\omega_1}{2} \right) - \zeta \left(\omega_3 + \frac{\omega_1}{2} \right) + \eta_1 \right].$$

Mais on a (T. et M., XII, 5)

$$\zeta \left(\omega_3 + \frac{\omega_1}{2} \right) = \zeta_3 \frac{\omega_1}{2} + \eta_3 \quad \text{et} \quad \zeta \left(\omega_3 - \frac{\omega_1}{2} \right) = -\zeta_3 \frac{\omega_1}{2} + \eta_3,$$

d'où

$$(31) \quad \Omega'(q) = \frac{\omega_1}{\pi q} \left(\eta_1 - 2\zeta_3 \frac{\omega_1}{2} \right).$$

La composante P_x de la résistance est donc égale, d'après la formule (20), à

$$P_x = -\frac{A\pi}{2} \left(\eta_1 - 2\zeta_3 \frac{\omega_1}{2} \right)^2;$$

c'est d'ailleurs là l'expression de la résistance totale, puisque dans le cas présent la pression exercée par le fluide sur l'obstacle n'a nulle part de composante parallèle à Oy .

Pour déduire de ce résultat une conséquence pratique, il est nécessaire de pouvoir rapporter cette résistance à l'unité de longueur de la plaque, c'est-à-dire qu'il faut connaître la longueur de celle-ci.

Or, d'après des résultats que j'ai obtenus antérieurement (*Thèse*, p. 225), la longueur de l'obstacle est donnée par l'intégrale suivante :

$$(32) \quad l = \frac{A\omega_1}{\pi} (e_1 - e_3) (e_2 - e_3)^2 \\ \times \int_0^\pi \frac{e^{-T} \left| p \frac{\omega_1}{\pi} s_0 - p \frac{\omega_1}{\pi} s \right| p' \frac{\omega_1}{\pi} s}{\left(p \frac{\omega_1}{\pi} s_0 - e_3 \right) \left(p \frac{\omega_1}{\pi} s - e_2 \right) \left(p \frac{\omega_1}{\pi} s - e_3 \right)^2} ds,$$

où tout est positif, à cause de $A \times p' \frac{\omega_1}{\pi} s > 0$. T désigne le coefficient de i dans $\Omega(\zeta)$, pour $\zeta = e^{is}$. Or on trouve sans difficulté, en se plaçant plus généralement dans le cas où la lame fait avec Ox un angle quelconque,

$$(33) \quad \Omega(e^{is}) = i \log \frac{\sigma\left(\frac{\omega_1}{\pi} s - \frac{\omega_1}{\pi} s_0\right)}{\sigma\left(\frac{\omega_1}{\pi} s + \frac{\omega_1}{\pi} s_0\right)} + 2i \frac{\eta_1 \omega_1 s_0}{\pi^2} s + s_0,$$

et par suite nous pouvons écrire

$$(34) \quad T = \log \left| \frac{\sigma\left(\frac{\omega_1}{\pi} s - \frac{\omega_1}{\pi} s_0\right)}{\sigma\left(\frac{\omega_1}{\pi} s + \frac{\omega_1}{\pi} s_0\right)} \right| + \frac{2\eta_1 \omega_1 s_0}{\pi^2} s,$$

et il vient pour l

$$l = \frac{A \omega_1 (e_1 - e_3) (e_2 - e_3)^2}{\pi \left(p \frac{\omega_1}{\pi} s_0 - e_3\right)} \times \int_0^\pi e^{-\frac{2\eta_1 \omega_1 s_0}{\pi^2} s} \frac{\sigma\left(\frac{\omega_1}{\pi} s + \frac{\omega_1}{\pi} s_0\right)}{\left|\sigma\left(\frac{\omega_1}{\pi} s - \frac{\omega_1}{\pi} s_0\right)\right|} \frac{\left|p\left(\frac{\omega_1}{\pi} s_0\right) - p\left(\frac{\omega_1}{\pi} s\right)\right| p' \frac{\omega_1}{\pi} s}{\left(p \frac{\omega_1}{\pi} s - e_2\right) \left(p \frac{\omega_1}{\pi} s - e_3\right)^2} ds.$$

Du reste, comme le quotient $\frac{p \frac{\omega_1}{\pi} s_0 - p \frac{\omega_1}{\pi} s}{\sigma\left(\frac{\omega_1}{\pi} s - \frac{\omega_1}{\pi} s_0\right)}$ reste positif dans tout l'intervalle considéré, on peut supprimer le signe module et écrire simplement

$$(35) \quad l = \frac{A \omega_1 (e_1 - e_3) (e_2 - e_3)^2}{\pi \left(p \frac{\omega_1}{\pi} s_0 - e_3\right)} \times \int_0^\pi e^{-\frac{2\eta_1 \omega_1 s_0}{\pi^2} s} \frac{\sigma\left(\frac{\omega_1}{\pi} s + \frac{\omega_1}{\pi} s_0\right) \left(p \frac{\omega_1}{\pi} s_0 - p \frac{\omega_1}{\pi} s\right) p' \frac{\omega_1}{\pi} s}{\sigma\left(\frac{\omega_1}{\pi} s - \frac{\omega_1}{\pi} s_0\right) \left(p \frac{\omega_1}{\pi} s - e_2\right) \left(p \frac{\omega_1}{\pi} s - e_3\right)^2} ds.$$

Nous poserons, pour abrégier l'écriture,

$$(36) \quad \frac{\omega_1}{\pi} s = u$$

et

$$(37) \quad \frac{\omega_1}{\pi} s_0 = u_0.$$

Puis nous remarquerons qu'on a, en introduisant les fonctions σ_α ,

$$p u - e_2 = \frac{\sigma_2^2 u}{\sigma^2 u},$$

$$p u - e_3 = \frac{\sigma_3^2 u}{\sigma^2 u},$$

$$p' u = -2 \frac{\sigma_1 u \sigma_2 u \sigma_3 u}{\sigma^3 u},$$

et aussi (T. et M., VII, 1)

$$p u_0 - p u = \frac{\sigma(u + u_0) \sigma(u - u_0)}{\sigma^2 u \sigma^2 u_0}.$$

Par conséquent il vient en remplaçant

$$(38) \quad l = - \frac{2A(e_1 - e_3)(e_2 - e_3)^2}{\sigma^2 u_0 (p u_0 - e_3)} \int_0^{\omega_1} e^{-\frac{2\eta_1 u_0}{\omega_1} u} \sigma^2(u + u_0) \frac{\sigma u \sigma_1 u}{\sigma_2 u \sigma_3^3 u} du.$$

Examinons d'un peu près la fonction

$$(39) \quad \mathfrak{Q}(u) = e^{-\frac{2\eta_1 u_0}{\omega_1} u} \sigma^2(u + u_0) \frac{\sigma u \sigma_1 u}{\sigma_2 u \sigma_3^3 u}$$

écrite sous le signe intégral. On sait qu'on a

$$\begin{aligned} \sigma(u + 2\omega_\alpha) &= -e^{2\eta_\alpha(u+\omega_\alpha)} \sigma u, \\ \sigma_\alpha(u + 2\omega_\alpha) &= -e^{2\eta_\alpha(u+\omega_\alpha)} \sigma_\alpha u, \\ \sigma_\beta(u + 2\omega_\alpha) &= e^{2\eta_\alpha(u+\omega_\alpha)} \sigma_\beta u \quad (\beta \neq \alpha). \end{aligned}$$

On en conclut, par un calcul facile, l'égalité

$$(40) \quad \mathfrak{Q}(u + 2\omega_1) = \mathfrak{Q}(u).$$

Formons ensuite

$$\mathfrak{Q}(u + 2\omega_3);$$

d'une manière analogue nous obtiendrons, après réductions,

$$\mathfrak{Q}(u + 2\omega_3) = e^{-\frac{i\eta_1\omega_3}{\omega_1}u_0 + 4\eta_3u_0} \mathfrak{Q}(u).$$

Mais on sait qu'on a la formule (T. et M., XIII, 3)

$$\eta_1\omega_3 - \eta_3\omega_1 = \frac{i\pi}{2}.$$

Par conséquent, il vient simplement

$$(41) \quad \mathfrak{Q}(u + 2\omega_3) = e^{-2i\pi\frac{u_0}{\omega_1}} \mathfrak{Q}(u).$$

La fonction $\mathfrak{Q}(u)$ est donc une fonction à multiplicateurs constants, ou encore une fonction doublement périodique de seconde espèce. Or on sait décomposer une telle fonction en éléments simples, et par suite ramener l'intégration d'une telle fonction à celle de l'élément simple choisi⁽¹⁾; mais, en général, cette dernière intégration ne peut s'effectuer commodément. Cependant, dans le cas qui nous intéresse, l'hypothèse $s_0 = \frac{\pi}{2}$ donne $u_0 = \frac{\omega_1}{2}$, et il en résulte

$$(42) \quad \mathfrak{Q}(u + 2\omega_3) = -\mathfrak{Q}(u).$$

Nous verrons dans ce qui va suivre que, dans ces conditions, l'intégration en termes finis est alors possible d'une façon très élégante. Nous commencerons par l'étude de ce cas, réservant au Chapitre III l'étude du cas général.

A cet effet, introduisons un élément simple de la forme

$$(43) \quad F(u) = \frac{H(u-a)}{H(u)} e^{\lambda u},$$

où H est la fonction d'Hermite. Les multiplicateurs μ et μ' de cette

(1) Cf. par exemple, APPELL et LACOUR, *Fonctions elliptiques*, p. 232.

expression sont fournis par les deux égalités

$$\lambda = \frac{1}{2\omega_1} \log \mu,$$

$$a = \frac{1}{i\pi} (\omega_1 \log \mu' - \omega_3 \log \mu).$$

Nous choisirons les constantes λ et a de façon que ces multipliateurs soient ceux de la fonction $\mathfrak{Q}(u)$:

$$\mu = 1, \quad \mu' = e^{-2i\pi \frac{u_0}{\omega_1}}.$$

Il vient

$$\lambda = 0, \quad a = -2u_0,$$

et par suite

$$F(u) = \mathfrak{A} \frac{H(u + 2u_0)}{H(u)}.$$

Enfin, déterminons \mathfrak{A} de telle manière que le résidu de $F(u)$ au pôle $u = 0$ soit égal à un. On trouve de suite

$$(44) \quad F(u) = \frac{H'(0) H(u + 2u_0)}{H(2u_0) H(u)}.$$

D'ailleurs on a

$$H(u) = H'(0) \sigma u e^{-\frac{\eta_1 u}{2\omega_1}},$$

et, par conséquent, en remplaçant

$$(45) \quad F(u) = e^{-\frac{2\eta_1 u_0}{\omega_1} u} \frac{\sigma(u + 2u_0)}{\sigma(2u_0) \sigma u}.$$

Pour $u_0 = \frac{\omega_1}{2}$, ceci donne

$$F(u) = e^{-\eta_1 u} \frac{\sigma(u + \omega_1)}{\sigma \omega_1 \sigma u},$$

et ensuite (T. et M., XI, 1, et LIV, 1)

$$(46) \quad F(u) = \frac{\sigma_1 u}{\sigma u} = \xi_{10} u.$$

Du reste, comme on a

$$p \frac{\omega_1}{2} - e_3 = e_1 - e_3 + \sqrt{e_1 - e_2} \sqrt{e_1 - e_3} = \sqrt{e_1 - e_3} [\sqrt{e_1 - e_2} + \sqrt{e_1 - e_3}],$$

l'intégrale à calculer prend, en définitive, la forme

$$(47) \quad l = - \frac{2A \sqrt{e_1 - e_3} (e_2 - e_3)^2}{(\sqrt{e_1 - e_2} + \sqrt{e_1 - e_3}) \sigma^2 \frac{\omega_1}{2}} \int_0^{\omega_1} e^{-\eta_1 u} \frac{\sigma u \sigma_1 u \sigma^2 \left(u + \frac{\omega_1}{2}\right)}{\sigma_2 u \sigma_3^3 u} du.$$

Ceci posé, effectuons la décomposition de notre fonction $\mathfrak{Q}(u)$ en éléments simples. Nous apercevons les deux pôles $u = \omega_2$ et $u = \omega_3$, le premier simple et le second triple. Le résidu au pôle simple est évidemment

$$B_0 = e^{-\eta_1 \omega_2} \frac{\sigma \omega_2 \sigma_1 \omega_2 \sigma^2 \left(\omega_2 + \frac{\omega_1}{2}\right)}{\sigma_2 \omega_2 \sigma_3^3 \omega_2}.$$

Il convient de simplifier cette expression en vue des calculs ultérieurs. Tout d'abord on sait que

$$\sigma_2 u = \frac{e^{\eta_2 u} \sigma(\omega_2 - u)}{\sigma \omega_2},$$

donc il vient

$$\sigma_2' u = - \frac{e^{\eta_2 u} \sigma'(\omega_2 - u)}{\sigma \omega_2} + \eta_2 \sigma_2 u;$$

donc encore

$$\sigma_2' \omega_2 = - \frac{e^{\eta_2 \omega_2}}{\sigma \omega_2}.$$

Puis l'égalité $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0$ donne

$$\sigma \left(\omega_2 + \frac{\omega_1}{2}\right) = - \sigma \left(\omega_3 + \frac{\omega_1}{2}\right),$$

et, par suite,

$$\sigma \left(\omega_2 + \frac{\omega_1}{2}\right) = - e^{\eta_3 \frac{\omega_1}{2}} \sigma \omega_3 \sigma_3 \frac{\omega_1}{2};$$

d'où

$$B_0 = - \frac{e^{-\eta_1 \omega_2 + \eta_1 \omega_1 - \eta_2 \omega_2} \sigma^2 \omega_2 \sigma_1 \omega_2 \sigma^2 \omega_3 \sigma_3^2 \frac{\omega_1}{2}}{\sigma_3^3 \omega_2}.$$

L'exposant de e est $\omega_2 \eta_3 + \eta_3 \omega_1 = -\eta_3 \omega_3$; de plus on a

$$\frac{\sigma^2 \omega_2 \sigma_1 \omega_2}{\sigma_3^3 \omega_2} = \frac{\frac{\sigma_1 \omega_2}{\sigma \omega_2}}{\left(\frac{\sigma_3 \omega_2}{\sigma \omega_2}\right)^3} = \frac{\sqrt{p \omega_2 - e_1}}{(\sqrt{p \omega_2 - e_3})^3},$$

c'est-à-dire (T. et M., XIII, 4)

$$\frac{\sigma^2 \omega_2 \sigma_1 \omega_2}{\sigma_3^3 \omega_2} = \frac{i \sqrt{e_1 - e_2}}{(e_2 - e_3) \sqrt{e_2 - e_3}}.$$

(On se rappellera que $\sqrt{e_2 - e_3}$ est négatif dans ce système de notations.) En remplaçant, il vient pour B_0 l'expression suivante

$$(48) \quad B_0 = - e^{-\eta_3 \omega_3} \frac{i \sqrt{e_1 - e_2}}{(e_2 - e_3) \sqrt{e_2 - e_3}} \sigma^2 \omega_3 \sigma_3^2 \frac{\omega_1}{2},$$

dont la valeur est évidemment imaginaire pure, et qu'on peut encore du reste simplifier.

On a, en effet, les formules

$$e^{-\eta_3 \omega_1} = - \frac{\sigma \omega_1 \sigma \omega_3}{\sigma \omega_2} \sqrt{e_1 - e_3},$$

$$e^{-\eta_3 \omega_2} = - \frac{\sigma \omega_2 \sigma \omega_3}{\sigma \omega_1} \sqrt{e_2 - e_3},$$

en les multipliant membre à membre, nous obtenons

$$e^{\eta_3 \omega_3} = \sigma^2 \omega_3 \sqrt{e_1 - e_3} \sqrt{e_2 - e_3},$$

et, par conséquent, nous pouvons écrire

$$(49) \quad B_0 = - \frac{i \sqrt{e_1 - e_2}}{\sqrt{e_1 - e_3} (e_2 - e_3)^2} \sigma_3^2 \frac{\omega_1}{2}.$$

Étudions maintenant $\mathfrak{Q}(u)$ au voisinage du point $u = \omega_3$. En posant

$$u = \omega_3 + h,$$

il vient

$$\mathfrak{Q}(\omega_3 + h) = e^{-\eta_1(\omega_3 + h)} \frac{\sigma(\omega_3 + h) \sigma_1(\omega_3 + h) \sigma^2\left(\omega_3 + \frac{\omega_1}{2} + h\right)}{\sigma_2(\omega_3 + h) \sigma_3^2(\omega_3 + h)}.$$

Mais on a

$$\begin{aligned} \sigma(\omega_3 + h) &= e^{\eta_3 h} \sigma \omega_3 \sigma_3 h, \\ \sigma_1(\omega_3 + h) &= e^{\eta_3 h} \sigma_1 \omega_3 \sigma_2 h, \\ \sigma_2(\omega_3 + h) &= e^{\eta_2 h} \sigma_2 \omega_3 \sigma_1 h, \\ \sigma_3(\omega_3 + h) &= -e^{\eta_2 h} \frac{\sigma_1 \omega_3 \sigma_2 \omega_3}{\sigma \omega_3} \sigma h. \end{aligned}$$

Transportons dans $\mathfrak{Q}(u + h)$ et profitons de la relation

$$\eta_1 \omega_3 - \eta_3 \omega_1 = \frac{i\pi}{2},$$

il vient

$$\mathfrak{Q}(\omega_3 + h) = i \frac{\sigma^6 \omega_3}{\sigma_1^2 \omega_3 \sigma_2^4 \omega_3} e^{-\eta_1 h} \frac{\sigma_2 h \sigma_3 h \sigma_3^2 \left(\frac{\omega_1}{2} + h\right)}{\sigma_1 h \sigma^3 h}.$$

Mais on sait que

$$\frac{\sigma_1^2 \omega_3 \sigma_2^4 \omega_3}{\sigma^6 \omega_3} = (p \omega_3 - e_1) (p \omega_3 - e_2)^2 = - (e_1 - e_3) (e_2 - e_3)^2.$$

et, par suite,

$$(50) \quad \mathfrak{Q}(\omega_3 + h) = \frac{-i}{(e_1 - e_3) (e_2 - e_3)^2} e^{-\eta_1 h} \frac{\sigma_2 h \sigma_3 h \sigma_3^2 \left(\frac{\omega_1}{2} + h\right)}{\sigma_1 h \sigma^3 h}.$$

Développons suivant les puissances de h ; on a, en désignant par θ ,

θ', \dots des séries entières en h ,

$$e^{-\eta_1 h} = 1 - \eta_1 h + \frac{\eta_1^2}{2} h^2 + \theta h^3,$$

$$\sigma_1 h = 1 - \frac{e_1}{2} h^2 + \theta_1 h^3,$$

$$\sigma_2 h = 1 - \frac{e_2}{2} h^2 + \theta_2 h^3,$$

$$\sigma_3 h = 1 - \frac{e_3}{2} h^2 + \theta_3 h^3,$$

$$\sigma h = h + \theta' h^5,$$

$$\sigma_3^2 \left(\frac{\omega_1}{2} + h \right) = \sigma_3^2 \frac{\omega_1}{2} + 2h \sigma_3 \frac{\omega_1}{2} \sigma_3' \frac{\omega_1}{2} + h^2 \left(\sigma_3'^2 \frac{\omega_1}{2} + \sigma_3 \frac{\omega_1}{2} \sigma_3'' \frac{\omega_1}{2} \right) + \theta'' h^3;$$

d'où par un calcul facile

$$(51) \quad \mathfrak{Q}(\omega_3 + h) = \frac{-i}{(e_1 - e_3)(e_2 - e_3)^2} \frac{1}{h^3} \\ \times \left\{ \sigma_3^2 \frac{\omega_1}{2} + \left(2\sigma_3 \frac{\omega_1}{2} \sigma_3' \frac{\omega_1}{2} - \eta_1 \sigma_3^2 \frac{\omega_1}{2} \right) h \right. \\ \left. + \left[\left(e_1 + \frac{\eta_1^2}{2} \right) \sigma_3^2 \frac{\omega_1}{2} \right. \right. \\ \left. \left. - 2\eta_1 \sigma_3 \frac{\omega_1}{2} \sigma_3' \frac{\omega_1}{2} + \sigma_3'^2 \frac{\omega_1}{2} + \sigma_3 \frac{\omega_1}{2} \sigma_3'' \frac{\omega_1}{2} \right] h^2 + \theta_0 h^3 \right\}.$$

De sorte que, si l'on écrit le développement de $\mathfrak{Q}(\omega_3 + h)$ sous la forme

$$\mathfrak{Q}(\omega_3 + h) = \frac{A_2}{h^3} + \frac{A_1}{h^2} + \frac{A_0}{h} + \text{série entière},$$

on aura pour les coefficients les valeurs

$$(52) \quad A_2 = -i \frac{\sigma_3^2 \frac{\omega_1}{2}}{(e_1 - e_3)(e_2 - e_3)^2},$$

$$(53) \quad A_1 = \frac{-i}{(e_1 - e_3)(e_2 - e_3)^2} \left(2\sigma_3 \frac{\omega_1}{2} \sigma_3' \frac{\omega_1}{2} - \eta_1 \sigma_3^2 \frac{\omega_1}{2} \right),$$

$$(54) \quad A_0 = \frac{-i}{(e_1 - e_3)(e_2 - e_3)^2} \left[\left(e_1 + \frac{\eta_1^2}{2} \right) \sigma_3^2 \frac{\omega_1}{2} \right. \\ \left. - 2\eta_1 \sigma_3 \frac{\omega_1}{2} \sigma_3' \frac{\omega_1}{2} + \sigma_3'^2 \frac{\omega_1}{2} + \sigma_3 \frac{\omega_1}{2} \sigma_3'' \frac{\omega_1}{2} \right].$$

En vue des calculs à suivre, il convient de simplifier l'expression de ces coefficients.

On a d'abord

$$\sigma_3^2 \frac{\omega_1}{2} = \sigma^2 \frac{\omega_1}{2} \left(p \frac{\omega_1}{2} - e_3 \right)$$

et (T. et M., XVI, 2)

$$p \frac{\omega_1}{2} = e_1 + \sqrt{e_1 - e_2} \sqrt{e_1 - e_3};$$

d'où, sans difficulté,

$$(55) \quad A_2 = -i \frac{\sqrt{e_1 - e_2} + \sqrt{e_1 - e_3}}{\sqrt{e_1 - e_2} (e_2 - e_3)^2} \sigma^2 \frac{\omega_1}{2}.$$

Puis, en introduisant la fonction ζ_3 , on a

$$\frac{\sigma_3' u}{\sigma_3 u} = \zeta_3 u,$$

ce qui permet d'écrire

$$(56) \quad A_1 = - \frac{i \sigma_3^2 \frac{\omega_1}{2}}{(e_1 - e_3)(e_2 - e_3)^2} \left(2 \zeta_3 \frac{\omega_1}{2} - \eta_1 \right) = 2 A_2 \left(\zeta_3 \frac{\omega_1}{2} - \frac{\eta_1}{2} \right).$$

En dérivant l'avant-dernière équation, il nous vient maintenant

$$\frac{\sigma_3 u \sigma_3'' u - \sigma_3'^2 u}{\sigma_3^2 u} = -p(u + \omega_3),$$

d'où, en remplaçant encore $\sigma_3' \frac{\omega_1}{2}$ par $\zeta_3 \frac{\omega_1}{2} \times \sigma \frac{\omega_1}{2}$,

$$\sigma_3'' \frac{\omega_1}{2} = \sigma_3 \frac{\omega_1}{2} \left[\zeta_3^2 \frac{\omega_1}{2} - p \left(\omega_3 + \frac{\omega_1}{2} \right) \right].$$

Mais on a

$$p \left(\omega_3 + \frac{\omega_1}{2} \right) = e_3 + \frac{(e_1 - e_3)(e_2 - e_3)}{p \frac{\omega_1}{2} - e_3}$$

et

$$p \frac{\omega_1}{2} = e_1 + \sqrt{e_1 - e_2} \sqrt{e_1 - e_3}$$

et par suite, après réductions,

$$p\left(\omega_3 + \frac{\omega_1}{2}\right) = e_1 - \sqrt{e_1 - e_2} \sqrt{e_1 - e_3}.$$

Donc

$$(57) \quad \sigma_3'' \frac{\omega_1}{2} = \sigma_3 \frac{\omega_1}{2} \left(\zeta_3^2 \frac{\omega_1}{2} - e_1 + \sqrt{e_1 - e_2} \sqrt{e_1 - e_3} \right).$$

Remplaçons maintenant $\sigma_3' \frac{\omega_1}{2}$ et $\sigma_3'' \frac{\omega_1}{2}$ par leurs valeurs dans le coefficient A_0 ; on voit de suite que A_2 s'y trouve en facteur et qu'on peut écrire

$$(58) \quad A_0 = A_2 \left[2 \left(\zeta_3 \frac{\omega_1}{2} - \frac{\eta_1}{2} \right)^2 + \sqrt{e_1 - e_2} \sqrt{e_1 - e_3} \right].$$

Nous remarquerons que, d'après les formules qui précèdent, les coefficients A_0 , A_1 , A_2 sont tous trois des imaginaires pures.

Ceci posé, si nous revenons à l'élément simple $\xi_{10} u$ qui a été déterminé plus haut, et si nous formons la différence

$$\mathcal{Q}(u) - B_0 \xi_{10}(u - \omega_2) - A_0 \xi_{10}(u - \omega_3) + A_1 \xi'_{10}(u - \omega_3) - \frac{A_2}{2} \xi''_{10}(u - \omega_3),$$

nous constaterons immédiatement que cette différence constitue une fonction aux mêmes multiplicateurs que $\mathcal{Q}(u)$, mais dépourvue de pôles; cette expression est donc identiquement nulle, et nous avons

$$(59) \quad \mathcal{Q}(u) \equiv B_0 \xi_{10}(u - \omega_2) + A_0 \xi_{10}(u - \omega_3) - A_1 \xi'_{10}(u - \omega_3) + \frac{A_2}{2} \xi''_{10}(u - \omega_3).$$

Il nous faut maintenant, pour parvenir à la longueur l de la lame, calculer les quatre intégrales suivantes :

$$(60) \quad U = \int_0^{\omega_1} \xi_{10}(u - \omega_2) du,$$

$$(61) \quad V = \int_0^{\omega_1} \xi_{10}(u - \omega_3) du$$

et

$$(62) \quad W = \int_0^{\omega_1} \xi'_{10} (u - \omega_3) du,$$

$$(63) \quad X = \int_0^{\omega_1} \xi''_{10} (u - \omega_3) du.$$

Les deux premières se ramènent l'une à l'autre. On peut en effet immédiatement écrire, en prenant $u - \omega_2$ ou $u - \omega_3$ comme variables,

$$U = \int_{-\omega_2}^{\omega_1 - \omega_2} \xi_{10} u du,$$

$$V = \int_{-\omega_3}^{\omega_1 - \omega_3} \xi_{10} u du.$$

Dans la première intégrale, faisons le changement de variable

$$u + 2\omega_2 = -v,$$

elle devient, à cause de l'imparité de $\xi_{10} u$, et à cause de la relation

$$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0,$$

$$U = \int_{-\omega_2}^{\omega_3} \xi_{10} (v + 2\omega_2) dv.$$

Mais

$$\xi_{10} (v + 2\omega_2) = -\xi_{10} v,$$

donc

$$U = \int_{\omega_3}^{-\omega_2} \xi_{10} u du.$$

Dans la deuxième intégrale, faisons de même le changement de variable

$$u + 2\omega_3 = v,$$

nous obtenons

$$V = \int_{\omega_3}^{\omega_2 + \omega_1} \xi_{10} (v - 2\omega_3) dv,$$

c'est-à-dire, puisque

$$\begin{aligned} \xi_{10}(v - 2\omega_3) &= \xi_{10}(v + 2\omega_3) = -\xi_{10}v, \\ V &= -\int_{\omega_3}^{-\omega_2} \xi_{10}u \, du. \end{aligned}$$

On a donc

$$(64) \quad U + V = 0.$$

Pour avoir la valeur commune de U et de $-V$, sans être gêné par aucune ambiguïté de signe, revenons à l'expression primitive de U , et observons que

$$\xi_{10}(u - \omega_2) = -\xi_{10}(u + \omega_2) = -\sqrt{e_2 - e_1} \xi_{32}u.$$

On peut donc évidemment écrire

$$U = -\sqrt{e_2 - e_1} \int_0^{\omega_1} \xi_{32}u \, du = -\sqrt{e_2 - e_1} \int_0^{\omega_1} \frac{(e_1 - e_2) \xi_{32}u \xi_{02}u \, du}{-(e_1 - e_2) \xi_{02}u}.$$

Mais on a d'une part

$$\sqrt{e_2 - e_1} = i\sqrt{e_1 - e_2},$$

et, d'autre part (T. et M., LXI, 3),

$$\xi'_{12}u = -(e_1 - e_2) \xi_{02}u \xi_{32}u.$$

De sorte que

$$U = \frac{i}{\sqrt{e_1 - e_2}} \int_0^{\omega_1} \frac{\xi'_{12}u}{\xi_{02}u} \, du.$$

Mais on a maintenant

$$\xi_{02}u = \frac{\sqrt{1 - \xi_{12}^2 u}}{\sqrt{e_1 - e_2}};$$

les déterminations des radicaux étant positives dans l'intervalle d'intégration. Il vient donc

$$(65) \quad U = i \int_0^{\omega_1} \frac{\xi'_{12}u}{\sqrt{1 - \xi_{12}^2 u}} \, du = i (\arcsin \xi_{12}u)_0^{\omega_1}.$$

Or, si u varie de zéro à ω_1 , $\xi_{1,2}u$ varie, en restant réel, de un à zéro. Nous obtenons donc finalement

$$(66) \quad U = -i \frac{\pi}{2}.$$

Du reste, à titre de vérification, on aurait de même

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\omega_1} -\xi_{10}(u + \omega_3) du = -\sqrt{e_3 - e_1} \int_0^{\omega_1} \xi_{23} u du \\ &= i \sqrt{e_1 - e_3} \int_0^{\omega_1} \frac{-\xi_{23} u (e_1 - e_3) \xi_{03} u du}{-(e_1 - e_3) \xi_{03} u}. \end{aligned}$$

Mais on a

$$\xi'_{13} u = -(e_1 - e_3) \xi_{03} u \xi_{23} u$$

et

$$\xi_{03} u = \frac{\sqrt{1 - \xi_{13}^2 u}}{\sqrt{e_1 - e_3}}.$$

Par suite,

$$(67) \quad V = -i \int_0^{\omega_1} \frac{\xi'_{13} u du}{\sqrt{1 - \xi_{13}^2 u}} = -i (\arcsin \xi_{13} u)_0^{\omega_1}$$

et, $\xi_{1,3}u$ variant de un à zéro,

$$(68) \quad V = i \frac{\pi}{2}.$$

Quant à W et à X , leur valeur se calcule sans difficulté. On a de suite

$$W = \xi_{10}(\omega_1 - \omega_3) - \xi_{10}(-\omega_3) = -\xi_{10}(\omega_1 + \omega_3) - \xi_{10}(-\omega_3),$$

et, comme $\xi_{1,0}u$ est impaire,

$$W = \xi_{10}\omega_2 + \xi_{10}\omega_3$$

et, par suite (T. et M., LX, 1),

$$W = \sqrt{e_2 - e_1} + \sqrt{e_3 - e_1}$$

ou encore

$$(69) \quad W = i(\sqrt{e_1 - e_2} - \sqrt{e_1 - e_3}).$$

Enfin on a

$$X = \zeta'_{10}(\omega_1 - \omega_3) - \zeta'_{10}(-\omega_3).$$

Mais on sait que

$$\zeta'_{10} u = -\zeta_{20} u \zeta_{30} u;$$

donc il vient

$$X = -\zeta_{20}(\omega_1 - \omega_3) \zeta_{30}(\omega_1 - \omega_3) + \zeta_{20}(-\omega_3) \zeta_{30}(-\omega_3).$$

Mais

$$\zeta_{20}(\omega_1 - \omega_3) = -\zeta_{20}(\omega_1 + \omega_3) = \zeta_{20}\omega_2,$$

$$\zeta_{30}(\omega_1 - \omega_3) = \zeta_{30}(\omega_1 + \omega_3) = -\zeta_{30}\omega_2,$$

donc

$$X = \zeta_{20}\omega_2 \zeta_{30}\omega_2 + \zeta_{20}\omega_3 \zeta_{30}\omega_3.$$

Or $\zeta_{20}\omega_2$ et $\zeta_{30}\omega_3$ sont tous les deux nuls, de sorte qu'il nous reste

$$(70) \quad X = 0.$$

Nous pouvons maintenant écrire l'intégrale de la fonction $\mathcal{Q}(u)$.

On a

$$(71) \quad \int_0^{\omega_1} \mathcal{Q}(u) du = B_0 U + A_0 V - A_1 W + \frac{A_2}{2} X;$$

donc en remplaçant,

$$(72) \quad \int_0^{\omega_1} \mathcal{Q}(u) du = -\frac{i\pi}{2} B_0 + \frac{i\pi}{2} A_0 - iA_1(\sqrt{e_1 - e_2} - \sqrt{e_1 - e_3}).$$

Remplaçons A_0 et A_1 au moyen de A_2 en utilisant les formules (56) et (58); il nous vient

$$(73) \quad \int_0^{\omega_1} \mathcal{Q}(u) du = -\frac{i\pi}{2} B_0 + iA_2 \left\{ \pi \left[\left(\zeta_3 \frac{\omega_1}{2} - \frac{\eta_1}{2} \right)^2 + \frac{\sqrt{e_1 - e_2} \sqrt{e_1 - e_3}}{2} \right] - 2(\sqrt{e_1 - e_2} - \sqrt{e_1 - e_3}) \left(\zeta_3 \frac{\omega_1}{2} - \frac{\eta_1}{2} \right) \right\}.$$

Enfin remplaçons B_0 et A_2 par leurs valeurs, et pour avoir la longueur l , multiplions par le coefficient

$$-2A \frac{\sqrt{e_1 - e_3} (e_2 - e_3)^2}{(\sqrt{e_1 - e_2} + \sqrt{e_1 - e_3}) \sigma^2 \frac{\omega_1}{2}}$$

de la formule (47). Après quelques réductions, nous parviendrons finalement au résultat suivant :

La longueur l de la lame est donnée par l'équation

$$(74) \quad l = -2A \left[\pi \left(\zeta_3 \frac{\omega_1}{2} - \frac{\eta_1}{2} \right)^2 + 2(\sqrt{e_1 - e_3} - \sqrt{e_1 - e_2}) \left(\zeta_3 \frac{\omega_1}{2} - \frac{\eta_1}{2} \right) \right].$$

Comme on avait pour la résistance à l'avancement

$$(75) \quad P_x = -2A \pi \left(\zeta_3 \frac{\omega_1}{2} - \frac{\eta_1}{2} \right)^2,$$

il en résulte la formule fondamentale suivante

$$(76) \quad \frac{P_x}{l} = \frac{\pi \left(\zeta_3 \frac{\omega_1}{2} - \frac{\eta_1}{2} \right)}{\pi \left(\zeta_3 \frac{\omega_1}{2} - \frac{\eta_1}{2} \right)^2 + 2(\sqrt{e_1 - e_3} - \sqrt{e_1 - e_2}) \left(\zeta_3 \frac{\omega_1}{2} - \frac{\eta_1}{2} \right)}.$$

On voit que, comme cela devait être *a priori*, ce rapport est inférieur à l'unité.

On sait que lorsqu'on place une lame de longueur l dans un courant fluide dont la vitesse à l'infini est normale à la lame, les unités étant les mêmes que dans le problème actuel, le rapport $\frac{P}{l}$ de la pression totale (ou de la résistance de la lame) à la longueur de celle-ci est égal à la quantité

$$\frac{\pi}{4 + \pi}.$$

[Cf. par exemple, T. LEVI-CIVITA, *Scie e leggi di resistenza (Circolo di Palermo, 1907.)*]

En quoi ce résultat est-il modifié par la présence d'un mur limitant le fluide parallèlement au mouvement? Telle est l'importante question qui se pose ici d'elle-même. Avant d'énoncer le résultat remarquable auquel nous allons parvenir, montrons comment on y est tout naturellement conduit.

Considérons tout d'abord le cas où le nombre q est petit. Cela correspond, comme nous le vérifierons un peu plus loin, au cas où la plaque solide est très éloignée du mur, auquel cas l'influence du mur est *a priori* peu sensible; nous devons donc trouver, pour $\frac{P_x}{l}$, une valeur voisine de $\frac{\pi}{4 + \pi}$. Il convient de remplacer si possible les deux termes du rapport considéré par des développements suivant les puissances de q .

On sait qu'on a (T. et M., XXXIII, 8)

$$\zeta_3 u - \eta_1 \frac{u}{\omega_1} = \frac{1}{2\omega_1} \frac{\mathfrak{S}_3'(v)}{\mathfrak{S}_4'(v)}$$

avec

$$v = \frac{u}{2\omega_1},$$

et, par suite, en tenant compte de T. et M. (XXXII, 8),

$$\zeta_3 \frac{\omega_1}{2} - \frac{\eta_1}{2} = \frac{1}{2\omega_1} \frac{\mathfrak{S}_3'\left(\frac{1}{4}\right)}{\mathfrak{S}_4'\left(\frac{1}{4}\right)} = \frac{1}{2\omega_1} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{4\pi q^{2n-1}}{1 + q^{4n-2}}.$$

On en déduit, en ne conservant que les puissances de q jusqu'à q^{17} inclus,

$$\zeta_3 \frac{\omega_1}{2} - \frac{\eta_1}{2} = \frac{2\pi}{\omega_1} (q + 2q^5 + q^9 + 2q^{13} + 2q^{17} + \dots).$$

On a ensuite les formules

$$\begin{aligned} \sqrt{e_1 - e_3} &= \frac{\pi}{2\omega_1} \mathfrak{S}_3^2(0), \\ \sqrt{e_1 - e_2} &= \frac{\pi}{2\omega_1} \mathfrak{S}_4^2(0) \end{aligned}$$

et (T. et M., XXXVI, 1)

$$\mathfrak{S}_3(0) = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + 2q^{16} + \dots,$$

$$\mathfrak{S}_4(0) = 1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + 2q^{16} + \dots,$$

d'où nous tirons comme ci-dessus

$$\sqrt{e_1 - e_3} - \sqrt{e_1 - e_2} = 4 \frac{\pi}{\omega_1} (q + 2q^5 + q^9 + 2q^{13} + 2q^{17} + \dots).$$

En transportant dans la formule (76), nous en concluons immédiatement que $\frac{P_x}{l}$ se réduit, pour q petit, à la valeur $\frac{\pi}{4 + \pi}$, avec une erreur au plus de l'ordre de q^{17} .

Envisageons encore le cas-limite opposé, à savoir celui où q est voisin de un, ce qui correspond au contraire à une plaque voisine du mur.

Écrivons tout d'abord la formule (76) en y mettant en évidence la quantité $\tau \left(= \frac{\omega_3}{\omega_1} \right)$, puis changeons dans nos formules τ en $-\frac{1}{\tau}$, ce qui revient à faire intervenir, au lieu de $q (= e^{\tau\pi i})$, une quantité analogue $q' = e^{-\frac{i\pi}{\tau}}$ qui sera très petite si q est voisin de un. On a alors

$$(77) \quad \frac{P_x}{l} = \frac{\frac{\mathfrak{S}'_4\left(\frac{1}{4} \middle| \tau\right)}{\mathfrak{S}_4\left(\frac{1}{4} \middle| \tau\right)}}{\frac{\mathfrak{S}'_4\left(\frac{1}{4} \middle| \tau\right)}{\mathfrak{S}_4\left(\frac{1}{4} \middle| \tau\right)} + 2[\mathfrak{S}'_3(0 | \tau) - \mathfrak{S}'_4(0 | \tau)]},$$

puis (T. et M., XLIII, 7, 8)

$$\mathfrak{S}_3(0 | \tau) = \frac{\sqrt{i}}{\sqrt{\tau}} \mathfrak{S}_3\left(0 \middle| -\frac{1}{\tau}\right),$$

$$\mathfrak{S}_4(0 | \tau) = \frac{\sqrt{i}}{\sqrt{\tau}} \mathfrak{S}_2\left(0 \middle| -\frac{1}{\tau}\right),$$

$$\mathfrak{S}_4(\rho | \tau) = \frac{\sqrt{i}}{\sqrt{\tau}} e^{-\frac{\pi i \rho^2}{\tau}} \mathfrak{S}_2\left(\frac{\rho}{\tau} \middle| -\frac{1}{\tau}\right),$$

donc

$$\frac{\mathfrak{S}'_1(v|\tau)}{\mathfrak{S}_1(v|\tau)} = -\frac{2i\pi v}{\tau} + \frac{1}{\tau} \frac{\mathfrak{S}'_2\left(\frac{v}{\tau} \middle| -\frac{1}{\tau}\right)}{\mathfrak{S}_2\left(\frac{v}{\tau} \middle| -\frac{1}{\tau}\right)}$$

et

$$(78) \quad \frac{P_x}{l} = \frac{-\frac{i\pi}{2} + \frac{\mathfrak{S}'_2\left(\frac{1}{4\tau} \middle| -\frac{1}{\tau}\right)}{\mathfrak{S}_2\left(\frac{1}{4\tau} \middle| -\frac{1}{\tau}\right)}}{-\frac{i\pi}{2} + \frac{\mathfrak{S}'_2\left(\frac{1}{4\tau} \middle| -\frac{1}{\tau}\right)}{\mathfrak{S}_2\left(\frac{1}{4\tau} \middle| -\frac{1}{\tau}\right)} + 2i \left[\mathfrak{S}'_3\left(0 \middle| -\frac{1}{\tau}\right) - \mathfrak{S}'_2\left(0 \middle| -\frac{1}{\tau}\right) \right]}$$

Les formules (XXXVI, 1) donnent

$$\mathfrak{S}_2\left(0 \middle| -\frac{1}{\tau}\right) = 2q'^{\frac{1}{2}}(1 + q'^2 + q'^6 + q'^{18} + \dots),$$

$$\mathfrak{S}_3\left(0 \middle| -\frac{1}{\tau}\right) = 1 + 2q' + 2q'^4 + 2q'^9 + \dots$$

et

$$\mathfrak{S}'_3\left(0 \middle| -\frac{1}{\tau}\right) - \mathfrak{S}'_2\left(0 \middle| -\frac{1}{\tau}\right) = 1 - 4q'^{\frac{1}{2}} + 4q' + 4q'^2 - 8q'^{\frac{5}{2}} + 4q'^4 + \dots$$

On a ensuite, si $q'_0 = \prod_1^{\infty} (1 - q'^{2n})$,

$$\mathfrak{S}_2\left(v \middle| -\frac{1}{\tau}\right) = 2q'_0 q'^{\frac{1}{2}v} \cos v\pi \prod_1^{\infty} (1 + 2q'^{2n} \cos 2v\pi + q'^{4n}),$$

et, par conséquent,

$$\frac{\mathfrak{S}'_2\left(v \middle| -\frac{1}{\tau}\right)}{\mathfrak{S}_2\left(v \middle| -\frac{1}{\tau}\right)} = -\pi \operatorname{tang} v\pi + \sum_1^{\infty} \frac{-4\pi q'^{2n} \sin 2v\pi}{1 + 2q'^{2n} \cos 2v\pi + q'^{4n}}.$$

Or, pour $\nu = \frac{1}{4\tau}$, on a

$$\operatorname{tang} \nu \pi = \operatorname{tang} \frac{\pi}{4\tau} = -i \frac{1 - q'^{\frac{1}{2}}}{1 + q'^{\frac{1}{2}}},$$

$$\sin 2\nu \pi = \sin \frac{\pi}{2\tau} = \frac{1 - q'}{2iq'^{\frac{1}{2}}},$$

$$\cos 2\nu \pi = \cos \frac{\pi}{2\tau} = \frac{1 + q'}{2q'^{\frac{1}{2}}},$$

de sorte que

$$\frac{\zeta_2 \left(\frac{1}{4\tau} \middle| -\frac{1}{\tau} \right)}{\zeta_2 \left(\frac{1}{4\tau} \middle| -\frac{1}{\tau} \right)} = i\pi \frac{1 - q'^{\frac{1}{2}}}{1 + q'^{\frac{1}{2}}} - 4\pi \left(\frac{q'^2 \frac{1 - q'}{2iq'^{\frac{1}{2}}}}{1 + 2q'^2 \frac{1 + q'}{2q'^{\frac{1}{2}}} + q'^4} + \frac{q'^2 \frac{1 - q'}{2iq'^{\frac{1}{2}}}}{1 + 2q'^4 \frac{1 + q'}{2q'^{\frac{1}{2}}} + q'^8} + \dots \right).$$

De là on déduit, après un calcul facile, en arrêtant le développement, par exemple, au terme en q^4 ,

$$(79) \quad \frac{\zeta_2 \left(\frac{1}{4\tau} \middle| -\frac{1}{\tau} \right)}{\zeta_2 \left(\frac{1}{4\tau} \middle| -\frac{1}{\tau} \right)} = i\pi \left(1 - 2q'^{\frac{1}{2}} + 2q' + 2q'^2 - 4q'^{\frac{3}{2}} + 2q'^4 + \dots \right).$$

Remplaçant dans la formule (77), on voit qu'on en tire pour le rapport $\frac{P_x}{l}$ une valeur extrêmement voisine de $\frac{\pi}{4 + \pi}$, et qui se réduit d'ailleurs à ce nombre quand q' tend vers zéro.

Ainsi, dans les deux cas extrêmes où l'on peut se placer, la valeur limite du rapport $\frac{P_x}{l}$ est égale à $\frac{\pi}{4 + \pi}$. Cela s'explique tout naturellement pour le premier cas puisqu'on se trouve alors ramené au cas du fluide illimité; dans le second cas, la chose s'explique aussi sans difficulté: en effet, ce cas correspond à une plaque très rapprochée du mur, en sorte que la presque totalité du fluide s'écoule du côté opposé au mur; à la limite, la plaque est accotée contre le mur, et si l'on envisage le mouvement symétrique du mouvement considéré

par rapport au mur, on voit qu'on peut alors faire abstraction du mur, par l'adjonction d'un deuxième fluide et d'une deuxième plaque symétriques des premiers; on est ramené encore au cas du fluide illimité dans tous les sens et d'une plaque normale au courant, ce qui légitime notre assertion.

Ceci posé, je vais démontrer le théorème suivant :

Quelle que soit la distance de la plaque au mur, on a toujours

$$\frac{P_x}{l} = \frac{4 + \pi}{\pi},$$

comme si le mur était rejeté à l'infini.

En effet, reprenons le rapport en question, sous la forme

$$(80) \quad \frac{P_x}{l} = \frac{\frac{\mathfrak{S}'_4\left(\frac{1}{4} \middle| \tau\right)}{\mathfrak{S}_4\left(\frac{1}{4} \middle| \tau\right)}}{\frac{\mathfrak{S}'_4\left(\frac{1}{4} \middle| \tau\right)}{\mathfrak{S}_4\left(\frac{1}{4} \middle| \tau\right)} + 2[\mathfrak{S}'_3(0 | \tau) - \mathfrak{S}'_4(0 | \tau)]}$$

sous laquelle nous l'avons mis un peu plus haut. Et sur les fonctions elliptiques qui interviennent dans cette formule, effectuons une transformation de Landen, qui revient comme on sait à changer ω_1 en $\frac{1}{2}\omega_1$, sans changer ω_3 . Posons

$$(81) \quad Q = q^2.$$

On a tout d'abord (T. et M., XXXVI, 2)

$$\mathfrak{S}'_3(0 | \tau) - \mathfrak{S}'_4(0 | \tau) = q_0^2(q_2^4 - q_3^4),$$

puis (T. et M., XLVII, 2)

$$q_0^2(q_2^4 - q_3^4) = 8Q^{\frac{1}{2}}Q_0^2Q_1^4,$$

done

$$2[\mathfrak{S}_3^2(o|\tau) - \mathfrak{S}_4^2(o|\tau)] = 16Q^{\frac{1}{2}}Q_0^2Q_1^4,$$

les grandes lettres ayant la même signification que les petites, mais pour les fonctions construites au moyen du module 2τ au lieu de τ .

Une combinaison simple des formules (XLVII, 3) nous donne

$$\mathfrak{S}_4^2(\nu|\tau) = \mathfrak{S}_3(o|2\tau)\mathfrak{S}_3(2\nu|2\tau) - \mathfrak{S}_2(o|2\tau)\mathfrak{S}_2(2\nu|2\tau),$$

de sorte que

$$\frac{\mathfrak{S}'_4(\nu|\tau)}{\mathfrak{S}_4(\nu|\tau)} = \frac{\mathfrak{S}_3(o|2\tau)\mathfrak{S}'_3(2\nu|2\tau) - \mathfrak{S}_2(o|2\tau)\mathfrak{S}'_2(2\nu|2\tau)}{\mathfrak{S}_3(o|2\tau)\mathfrak{S}_3(2\nu|2\tau) - \mathfrak{S}_2(o|2\tau)\mathfrak{S}_2(2\nu|2\tau)}$$

et

$$\frac{\mathfrak{S}'_4\left(\frac{1}{4}|\tau\right)}{\mathfrak{S}_4\left(\frac{1}{4}|\tau\right)} = \frac{\mathfrak{S}_3(o|2\tau)\mathfrak{S}'_3\left(\frac{1}{2}|2\tau\right) - \mathfrak{S}_2(o|2\tau)\mathfrak{S}'_2\left(\frac{1}{2}|2\tau\right)}{\mathfrak{S}_3(o|2\tau)\mathfrak{S}_3\left(\frac{1}{2}|2\tau\right) - \mathfrak{S}_2(o|2\tau)\mathfrak{S}_2\left(\frac{1}{2}|2\tau\right)}.$$

Mais on a (XXXV, 2)

$$\mathfrak{S}'_2\left(\frac{1}{2}|2\tau\right) = -\mathfrak{S}'_1(o|2\tau),$$

$$\mathfrak{S}'_3\left(\frac{1}{2}|2\tau\right) = 0,$$

puis (XXXIV, 1 et 4)

$$\mathfrak{S}_2\left(\frac{1}{2}|2\tau\right) = 0,$$

$$\mathfrak{S}_3\left(\frac{1}{2}|2\tau\right) = \mathfrak{S}_4(o|2\tau),$$

et, d'après (XXXVI, 2),

$$\mathfrak{S}_2(o|2\tau) = 2Q_0Q_1^2Q^{\frac{1}{4}},$$

$$\mathfrak{S}_3(o|2\tau) = Q_0Q_2^2,$$

$$\mathfrak{S}'_1(o|2\tau) = 2\pi Q_0^3Q^{\frac{1}{4}},$$

$$\mathfrak{S}_4(o|2\tau) = Q_0Q_3^2.$$

Par conséquent, il vient

$$\frac{\mathfrak{S}_1\left(\frac{1}{4} \middle| \tau\right)}{\mathfrak{S}_4\left(\frac{1}{4} \middle| \tau\right)} = 4\pi Q^{\frac{1}{2}} \frac{Q_0^2 Q_1^2}{Q_2^2 Q_3^2},$$

ou encore, puisque $Q_1 Q_2 Q_3 = 1$,

$$\frac{\mathfrak{S}_1\left(\frac{1}{4} \middle| \tau\right)}{\mathfrak{S}_4\left(\frac{1}{4} \middle| \tau\right)} = 4\pi Q^{\frac{1}{2}} Q_0^2 Q_1^4.$$

En transportant dans la formule (80), on voit qu'il vient

$$\frac{P_x}{l} = \frac{\pi}{4 + \pi}.$$

Ainsi la présence d'un mur limitant le fluide parallèlement au courant, n'influence pas la composante de la résistance qui s'oppose directement au mouvement, au moins pour un obstacle constitué par une plaque normale au courant.

Ce résultat, spécial du reste à ce cas particulier, comme nous le montrerons plus loin, est d'autant plus inattendu que la présence d'une paroi fixe limitant le fluide a généralement pour effet de modifier sensiblement cette résistance. Prenons par exemple le cas d'un obstacle symétrique placé dans un canal rectiligne dont l'axe de symétrie coïncide avec celui du solide, et désignons toujours par P_x la composante de la résistance, égale ici à la résistance totale, parallèle au canal. Il résulte alors des travaux de M. U. Cisotti (*Rendiconti di Palermo*, 1909, 2^e semestre) que le rapport $\frac{P_x}{l}$ est donné par la formule suivante

$$\frac{P_x}{l} = \frac{1}{2} \frac{1 - \frac{\pi}{2\Omega}}{1 - \left(\frac{2}{\pi} + \frac{1}{\Omega}\right) \text{arc tang } \frac{\pi}{2\Omega}}.$$

2Ω représente la largeur du canal, les deux jets fluides à l'arrière ayant

pour largeur asymptotique $\frac{1}{2}\pi$. Tous les cas possibles sont obtenus quand le rapport $\frac{\pi}{2\Omega}$ prend toutes les valeurs entre zéro et un, ce dernier cas correspondant à un canal infiniment large. Or on trouve facilement que les valeurs extrêmes correspondantes pour $\frac{P_x}{l}$ sont $\frac{1}{2}$ et $\frac{\pi}{4+\pi}$, et il est aisé de démontrer que le rapport $\frac{P_x}{l}$ est une fonction de $\frac{\pi}{2\Omega}$ décroissante entre ces deux valeurs.

Nous verrons un peu plus loin que le théorème démontré ci-dessus ne se reproduit pas pour d'autres formes d'obstacles que celui considéré dans le paragraphe antérieur. Auparavant, il est bon de noter que, dans le cas d'une plaque normale au courant, les conditions générales du mouvement sont cependant profondément modifiées par la présence du mur. Le point mort, ou point de bipartition du fluide à l'avant de l'obstacle, prend toutes les positions possibles (suivant la distance du mur à la plaque) sur la moitié de la plaque qui avoisine le mur. Calculons en effet la distance ϖ_2 du point mort au bord le plus éloigné du mur.

D'après les calculs développés antérieurement, il est clair que ϖ_2 s'obtiendra par la même formule que la longueur l , mais les intégrales doivent être prises dans l'intervalle $0, \frac{\omega_1}{2}$, au lieu de $0, \omega_1$. Tout revient donc au calcul des quatre intégrales suivantes :

$$(82) \quad U_1 = \int_0^{\frac{\omega_1}{2}} \xi_{10} (u - \omega_2) du,$$

$$(83) \quad V_1 = \int_0^{\frac{\omega_1}{2}} \xi_{10} (u - \omega_3) du,$$

$$(84) \quad W_1 = \int_0^{\frac{\omega_1}{2}} \xi'_{10} (u - \omega_3) du,$$

$$(85) \quad X_1 = \int_0^{\frac{\omega_1}{2}} \xi''_{10} (u - \omega_3) du.$$

Les explications déjà données dans les paragraphes ci-dessus y conduisent tout naturellement. On trouve d'abord

$$U_1 = i \int_0^{\frac{\omega_1}{2}} \frac{\xi'_{12} u du}{\sqrt{1 - \xi_{12}^2 u}} = i \left[\text{arc sin} \left(\xi_{12} \frac{\omega_1}{2} \right) - \frac{\pi}{2} \right],$$

$$V_1 = -i \left[\text{arc sin} \left(\xi_{13} \frac{\omega_1}{2} \right) - \frac{\pi}{2} \right].$$

Les nombres $\xi_{12} \frac{\omega_1}{2}$ et $\xi_{13} \frac{\omega_1}{2}$ sont compris entre 0 et 1, valeurs extrêmes des fonctions $\xi_{12} u$ et $\xi_{13} u$ lorsque u varie entre 0 et ω_1 ; or on a

$$\xi_{12}^2 \frac{\omega_1}{2} = \frac{p \frac{\omega_1}{2} - e_1}{p \frac{\omega_1}{2} - e_2} = \frac{\sqrt{e_1 - e_3}}{\sqrt{e_1 - e_2} + \sqrt{e_1 - e_3}}$$

et de même

$$\xi_{13}^2 \frac{\omega_1}{2} = \frac{\sqrt{e_1 - e_2}}{\sqrt{e_1 - e_2} + \sqrt{e_1 - e_3}}.$$

Ceci peut s'écrire (T. et M., XXXI, 2)

$$\xi_{12}^2 \frac{\omega_1}{2} = \frac{q_2^4}{q_2^4 + q_3^4},$$

$$\xi_{13}^2 \frac{\omega_1}{2} = \frac{q_3^4}{q_2^4 + q_3^4}.$$

Mais la transformation de Landen déjà employée ci-dessus nous donne (XLVII, 2)

$$q_0^2 (q_2^4 + q_3^4) = 2 Q_0^2 Q_2^4,$$

d'où nous tirons, en ne prenant que la racine positive, à cause de la remarque ci-dessus,

$$\xi_{12} \frac{\omega_1}{2} = \frac{q_0 q_2^2}{\sqrt{2} Q_0 Q_2^2},$$

$$\xi_{13} \frac{\omega_1}{2} = \frac{q_0 q_3^2}{\sqrt{2} Q_0 Q_2^2}.$$

et, par suite,

$$(86) \quad U_1 = -i \frac{\pi}{2} + i \operatorname{arc} \sin \frac{q_0 q_2^2}{\sqrt{2} Q_0 Q_2^2},$$

$$(87) \quad V_1 = i \frac{\pi}{2} - i \operatorname{arc} \sin \frac{q_0 q_3^2}{\sqrt{2} Q_0 Q_3^2}.$$

On a ensuite

$$W_1 = \xi_{10} \left(\frac{\omega_1}{2} - \omega_3 \right) + \xi_{10} \omega_3 = \xi_{10} \omega_3 - \xi_{10} \left(\omega_3 - \frac{\omega_1}{2} \right),$$

c'est-à-dire

$$W_1 = \xi_{10} \omega_3 + i \sqrt{e_1 - e_3} \xi_{23} \frac{\omega_1}{2},$$

mais

$$\xi_{23} \frac{\omega_1}{2} = \frac{\xi_{13} \frac{\omega_1}{2}}{\xi_{12} \frac{\omega_1}{2}}$$

et, par suite,

$$\xi_{23} \frac{\omega_1}{2} = \frac{q_3^2}{q_2^2},$$

d'où

$$i \sqrt{e_1 - e_3} \xi_{23} \frac{\omega_1}{2} = \frac{i \pi}{2 \omega_1} q_0^2 q_2^2 q_3^2.$$

En outre, on a

$$\xi_{10} \omega_3 = \sqrt{e_3 - e_1} = - \frac{i \pi}{2 \omega_1} q_0^2 q_2^2,$$

de sorte qu'il vient

$$(88) \quad W_1 = \frac{i \pi}{2 \omega_1} q_0^2 q_2^2 (q_3^2 - q_2^2).$$

Enfin on a successivement

$$X_1 = \xi'_{10} \left(\frac{\omega_1}{2} - \omega_3 \right) - \xi'_{10} (-\omega_3) = -\xi_{20} \left(\frac{\omega_1}{2} - \omega_3 \right) \xi_{30} \left(\frac{\omega_1}{2} - \omega_3 \right),$$

$$\xi_{20} \left(\frac{\omega_1}{2} - \omega_3 \right) = -\xi_{20} \left(\frac{\omega_1}{2} + \omega_3 \right) = -i \sqrt{e_2 - e_3} \xi_{13} \frac{\omega_1}{2},$$

$$\xi_{30} \left(\frac{\omega_1}{2} - \omega_3 \right) = \xi_{30} \left(\frac{\omega_1}{2} + \omega_3 \right) = -\sqrt{e_1 - e_3} \sqrt{e_2 - e_3} \xi_{03} \frac{\omega_1}{2},$$

d'où

$$X_1 = -i\sqrt{e_1 - e_3} (e_2 - e_3) \frac{\xi_{13} \frac{\omega_1}{2}}{\xi_{30} \frac{\omega_1}{2}}.$$

En remarquant que $\xi_{30} \frac{\omega_1}{2}$ est positif, on a successivement

$$\xi_{30} \frac{\omega_1}{2} = p \frac{\omega_1}{2} - e_3 = \sqrt{e_1 - e_3} (\sqrt{e_1 - e_2} + \sqrt{e_1 - e_3}),$$

$$\xi_{30} \frac{\omega_1}{2} = \frac{\pi^2}{4\omega_1^2} q_0^4 q_2^4 (q_2^4 + q_3^4) = \frac{\pi^2}{2\omega_1^2} q_0^2 q_2^4 Q_0^2 Q_2^4,$$

$$\xi_{30} \frac{\omega_1}{2} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2\omega_1} q_0 q_2^2 Q_0 Q_2^2,$$

d'où, après quelques réductions faciles,

$$(89) \quad X_1 = -\frac{2i\pi^2}{\omega_1^2} \frac{q_0^6 q_1^6 q}{Q_0^2 Q_2^4}.$$

Les coefficients B_0 , A_0 , A_1 , A_2 s'expriment du reste aussi facilement en introduisant les constantes q_i et Q_i . On a d'abord

$$(90) \quad A_2 = -i\sigma^2 \frac{\omega_1}{2} \frac{\sqrt{e_1 - e_2} + \sqrt{e_1 - e_3}}{\sqrt{e_1 - e_3} (e_2 - e_3)^2} = -i \frac{\omega_1^2}{2\pi^2} \sigma^2 \frac{\omega_1}{2} \frac{Q_0^2 Q_2^4}{q_0^6 q_1^8 q_2^4 q},$$

puis, en vertu de

$$\sigma_3^2 \frac{\omega_1}{2} = \sigma^2 \frac{\omega_1}{2} \sqrt{e_1 - e_3} (\sqrt{e_1 - e_2} + \sqrt{e_1 - e_3}),$$

il vient

$$\begin{aligned} B_0 &= -i \frac{\sqrt{e_1 - e_2}}{\sqrt{e_1 - e_3} (e_2 - e_3)^2} \sigma_3^2 \frac{\omega_1}{2} \\ &= -i\sigma^2 \frac{\omega_1}{2} \frac{\sqrt{e_1 - e_2} (\sqrt{e_1 - e_2} + \sqrt{e_1 - e_3})}{(e_2 - e_3)^2} = A_2 \sqrt{e_1 - e_2} \sqrt{e_1 - e_3}, \end{aligned}$$

$$(91) \quad B_0 = -\frac{i}{8} \sigma^2 \frac{\omega_1}{2} \frac{Q_0^2 Q_2^4 q_3^4}{q_0^2 q_1^8 q}.$$

On a ensuite

$$(92) \quad A_1 = 2 A_2 \left(\zeta_3 \frac{\omega_1}{2} - \frac{\eta_1}{2} \right) \\ = 2 A_2 \frac{1}{2 \omega_1} \frac{\mathfrak{S}'_4 \left(\frac{1}{4} \right)}{\mathfrak{S}_4 \left(\frac{1}{4} \right)} = \frac{4 \pi}{\omega_1} A_2 Q_0^2 Q_1^4 q = - \frac{2 i \omega_1}{\pi} \sigma^2 \frac{\omega_1}{2} \frac{Q_0^4 Q_1^4 Q_2^4}{q_0^6 q_1^8 q_2^4},$$

puis

$$A_0 = A_2 \left[2 \left(\zeta_3 \frac{\omega_1}{2} - \frac{\eta_1}{2} \right)^2 + \sqrt{e_1 - e_2} \sqrt{e_1 - e_3} \right] = \frac{\pi^2}{\omega_1^2} A_2 \left(8 Q_0^2 Q_1^8 q^2 + \frac{1}{4} q_0^4 q_2^4 q_3^4 \right), \\ (93) \quad A_0 = - \frac{i}{3} \sigma^2 \frac{\omega_1}{2} \frac{Q_0^2 Q_2^4}{q_0^6 q_1^8 q_2^4 q} \left(8 Q_0^2 Q_1^8 q^2 + \frac{1}{4} q_0^4 q_2^4 q_3^4 \right).$$

On aura maintenant la longueur cherchée ϖ_2 , en multipliant l'expression

$$B_0 U_1 + A_0 V_1 - A_1 W_1 + \frac{A_2}{2} X_1$$

par le coefficient

$$- 2 A \frac{\sqrt{e_1 - e_3} (e_2 - e_3)^2}{\sigma^2 \frac{\omega_1}{2} (\sqrt{e_1 - e_2} + \sqrt{e_1 - e_3})},$$

qu'on met facilement sous la forme

$$- \frac{4 \pi^2}{\omega_1^2} A \frac{q_0^6 q_1^8 q_2^4 q}{Q_0^2 Q_2^4 \sigma^2 \frac{\omega_1}{2}}.$$

Effectuons ce calcul en profitant des relations connues

$$Q_0 = q_0 q_1,$$

$$q_1 q_2 q_3 = 1,$$

nous parviendrons finalement, après quelques réductions que le lec-

teur rétablira facilement, au résultat suivant :

$$(94) \quad \varpi_2 = -4A \frac{\pi^2}{\omega_1^2} \left\{ \frac{1}{8} q_0^4 q_2^4 q_3^4 \left(\arcsin \frac{q_2^2}{\sqrt{2} q_1 Q_2^2} - \arcsin \frac{q_3^2}{\sqrt{2} q_1 Q_2^2} \right) \right. \\ \left. - 4 q_0^2 q_1^2 Q_1^8 q^2 \arcsin \frac{q_3^2}{\sqrt{2} q_1 Q_2^2} \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \frac{q_0^4 q_1^4 q}{Q_2^4} + 2\pi q_0^2 q_1^2 Q_1^8 q^2 - Q_1^2 q q_0^4 q_1^2 q_2^2 (q_3^2 - q_2^2) \right\}.$$

Appliquons par exemple cette formule au cas où le mur est très éloigné de la plaque, c'est-à-dire au cas où q est très petit. D'après la formule (75) d'un paragraphe antérieur, nous savons que nous devons trouver pour ϖ_2 une quantité de l'ordre de q^2 , ce multiplicateur se trouvant présent également dans l'expression de la résistance.

Effectuons donc le développement de ϖ_2 suivant les puissances de q , en négligeant les termes en q^4 . Cela revient à remplacer les q_i et Q_i par les nombres suivants :

$$\begin{aligned} q_0 &= 1 - q^2 + \dots, & Q_0 &= 1 + \dots \\ q_1 &= 1 + q^2 + \dots, & Q_1 &= 1 + \dots, \\ q_2 &= 1 + q + q^3 + \dots, & Q_2 &= 1 + q^2 + \dots, \\ q_3 &= 1 - q - q^3 + \dots, & Q_3 &= 1 - q^2 + \dots \end{aligned}$$

Il vient, par suite, sans difficulté

$$\arcsin \left(\frac{q_2^2}{\sqrt{2} q_1 Q_2^2} \right) = \frac{\pi}{4} + 2q - \frac{8}{3} q^3 + \dots,$$

$$\arcsin \left(\frac{q_3^2}{\sqrt{2} q_1 Q_2^2} \right) = \frac{\pi}{4} - 2q + \frac{8}{3} q^3 + \dots$$

Remplaçant et réduisant, nous obtenons ainsi

$$(95) \quad \varpi_2 = -4A \frac{\pi^2}{\omega_1^2} \left[(\pi + 4) q^2 + \frac{40}{3} q^3 + \dots \right].$$

Le terme en q^2 nous fournit la partie principale de ϖ_2 , qui coïncide du reste, comme il fallait s'y attendre, avec la demi-longueur de la

lame entière; le coefficient de q^3 étant positif ($A < 0$) nous voyons que ϖ_2 est plus grand que la demi-longueur de la lame. C'est bien ce à quoi nous devons nous attendre.

III.

La supposition faite dans le précédent Chapitre, qu'il s'agissait d'une lame normale au courant, a été pour le calcul un très grand élément de simplification: elle nous a permis en effet de prendre, pour l'élément simple $F(u)$, la fonction $\xi_{1,0}u$, dont les propriétés ont donné naissance à des développements de calcul élégants. Nous allons maintenant, dans le but d'en tirer de nouvelles conséquences pratiques, nous placer dans le cas général où la lame est oblique au courant; certaines parties du calcul deviennent notablement plus compliquées, mais les développements des paragraphes antérieurs nous permettront d'abrèger l'exposition.

Supposons donc la normale à la lame faisant avec Ox l'angle δ ; nous aurons facilement la valeur de la résistance; la difficulté consiste à trouver la longueur de la lame. De la formule (38) nous tirons

$$(96) \quad l = - \frac{2A(e_1 - e_3)(e_2 - e_3)^2}{\sigma_3^2 u_0} \int_0^{\omega_1} e^{-\frac{2\eta_1 u_0}{\omega_1} u} \frac{\sigma u \sigma_1 u \sigma^2(u + u_0)}{\sigma_2 u \sigma_3^3 u} du,$$

u_0 étant lié à δ par la relation

$$(97) \quad \frac{\pi}{\omega_1} u_0 = s_0 = \frac{\pi}{2} + \delta.$$

Il nous faut tout d'abord décomposer la fonction $\varrho(u)$ écrite sous le signe intégral, en ses éléments simples.

Au point $u = \omega_2$, le résidu de $\varrho(u)$ est

$$b_0 = - \frac{e^{-\frac{2\eta_1 u_0}{\omega_1} \omega_2} \sigma^2 \omega_2 \sigma_1 \omega_2 \sigma^2(\omega_2 + u_0)}{\sigma_3^3 \omega_2 e^{\eta_2 \omega_2}}$$

ou encore

$$b_0 = -i e^{(\eta_1 + \eta_3 - \frac{2\eta_1 u_0}{\omega_1}) \omega_2} \sigma^2 (\omega_2 + u_0) \frac{\sqrt{e_1 - e_2}}{(e_2 - e_3) \sqrt{e_2 - e_3}}.$$

Mais on a

$$\sigma(\omega_2 + u_0) = e^{\eta_2 u_0} \sigma \omega_2 \sigma_2 u_0.$$

En remplaçant et tenant compte de l'équation

$$\eta_2 \omega_1 - \eta_1 \omega_2 = \frac{i\pi}{2},$$

on voit que l'exposant de e dans b_0 est

$$-\eta_2 \omega_2 + \frac{i\pi u_0}{\omega_1} = -\eta_2 \omega_2 + i\pi \left(\frac{1}{2} + \frac{\partial}{\pi} \right).$$

En sorte qu'il vient

$$b_0 = e^{-\eta_2 \omega_2 + i\partial} \sigma^2 \omega_2 \sigma_2^2 u_0 \frac{\sqrt{e_1 - e_2}}{(e_2 - e_3) \sqrt{e_2 - e_3}}.$$

Mais on a encore

$$e^{-\eta_2 \omega_2} = \frac{1}{\sigma_1 \omega_2 \sigma_3 \omega_2}$$

et, par suite,

$$e^{-\eta_2 \omega_2} \sigma^2 \omega_2 = \frac{\sigma^2 \omega_2}{\sigma_1 \omega_2 \sigma_3 \omega_2} = \frac{1}{\sqrt{e_2 - e_1} \sqrt{e_2 - e_3}} = \frac{-i}{\sqrt{e_1 - e_2} \sqrt{e_2 - e_3}}.$$

Enfin on a finalement pour b_0 la valeur simple

$$(98) \quad b_0 = -i e^{i\partial} \frac{\sigma_2^2 u_0}{(e_2 - e_3)^2}.$$

Au voisinage du point $u = \omega_3$ une transformation, déjà employée dans un précédent paragraphe, permet de mettre facilement $\varrho(\omega_3 + h)$ sous la forme suivante

$$\varrho(\omega_3 + h) = -e^{-\frac{2\eta_1 u_0}{\omega_1} h} e^{2u_0(\eta_3 - \frac{\eta_1 \omega_3}{\omega_1})} \frac{\sigma_2 h \sigma_3 h \sigma_3^2 (u_0 + h)}{\sigma_1 h \sigma^3 h} \frac{\sigma^2 \omega_3}{\sigma_1^2 \omega_3 \sigma_2^2 \omega_3}.$$

Or on peut écrire

$$2u_0 \left(\eta_3 - \frac{\eta_1 \omega_3}{\omega_1} \right) = - \frac{2u_0}{\omega_1} \frac{i\pi}{2} = - \frac{i\pi}{2} - i\delta,$$

$$e^{2u_0 \left(\eta_3 - \frac{\eta_1 \omega_3}{\omega_1} \right)} = - i e^{-i\delta}$$

et

$$\frac{\sigma^6 \omega_3}{\sigma_1^2 \omega_3 \sigma_2^2 \omega_3} = - \frac{1}{(e_1 - e_3)(e_2 - e_3)^2},$$

en sorte que

$$(99) \quad \mathfrak{Q}(\omega_3 + h) = - \frac{i e^{-i\delta}}{(e_1 - e_3)(e_2 - e_3)^2} e^{-\frac{2\eta_1 u_0}{\omega_1} h} \frac{\sigma_2 h \sigma_3 h \sigma_3^2 (u_0 + h)}{\sigma_1 h \sigma^3 h}.$$

Nous voyons que cette expression est de la forme

$$\frac{a_0}{h} + \frac{a_1}{h^2} + \frac{a_2}{h^3} + \text{série entière en } h,$$

et il nous faut calculer les coefficients a_0, a_1, a_2 .

Un calcul simple nous donne, en nous limitant aux seuls termes utiles,

$$e^{-\frac{2\eta_1 u_0}{\omega_1} h} \frac{\sigma_2 h \sigma_3 h \sigma_3^2 (u_0 + h)}{\sigma_1 h \sigma^3 h}$$

$$= \frac{1}{h^3} \left\{ \sigma_3^2 u_0 + h \left[- \frac{2\eta_1 u_0}{\omega_1} \sigma_3^2 u_0 + 2\sigma_3 u_0 \sigma_3' u_0 \right] \right.$$

$$+ h^2 \left[\left(e_1 + \frac{2\eta_1^2 u_0^2}{\omega_1^2} \right) \sigma_3^2 u_0 - \frac{4\eta_1 u_0}{\omega_1} \sigma_3 u_0 \sigma_3' u_0 + \sigma_3'^2 u_0 + \sigma_3 u_0 \sigma_3'' u_0 \right]$$

$$\left. + \dots \dots \dots \right\}.$$

De sorte que si l'on observe les formules

$$\sigma_3' u_0 = \zeta_3 u_0 \sigma_3 u_0,$$

$$\sigma_3'' u_0 = \sigma_3 u_0 [\zeta_3^2 u_0 - p(\omega_3 + u_0)],$$

il vient pour nos trois coefficients cherchés les valeurs suivantes :

$$(100) \quad a_2 = - \frac{i e^{-i\delta}}{(e_1 - e_3)(e_2 - e_3)^2} \sigma_3^2 u_0,$$

$$(101) \quad a_1 = - \frac{i e^{-i\delta}}{(e_1 - e_3)(e_2 - e_3)^2} \sigma_3^2 u_0 \left[2 \zeta_3 u_0 - \frac{2 \eta_1 u_0}{\omega_1} \right],$$

$$(102) \quad a_0 = - \frac{i e^{-i\delta}}{(e_1 - e_3)(e_2 - e_3)^2} \sigma_3^2 u_0 \left[e_1 - p(\omega_3 + u_0) + 2 \left(\zeta_3 u_0 - \frac{\eta_1 u_0}{\omega_1} \right)^2 \right].$$

Nous en concluons, par un raisonnement déjà fait ci-dessus, qu'on a identiquement

$$(103) \quad \mathcal{Q}(u) = b_0 F(u - \omega_2) + a_0 F(u - \omega_3) - a_1 F'(u - \omega_3) + \frac{a_2}{2} F''(u - \omega_3),$$

et, par suite, en utilisant toujours le même élément simple,

$$F(u) = e^{-\frac{2 \eta_1 u_0}{\omega_1} u} \frac{\sigma(u + 2 u_0)}{\sigma(2 u_0) \sigma u},$$

si l'on pose

$$(104) \quad U_2 = \int_0^{\omega_1} F(u - \omega_2) du,$$

$$(105) \quad V_2 = \int_0^{\omega_1} F(u - \omega_3) du,$$

$$(106) \quad W_2 = \int_0^{\omega_1} F'(u - \omega_3) du,$$

$$(107) \quad X_2 = \int_0^{\omega_1} F''(u - \omega_3) du,$$

il viendra, après quelques réductions faciles,

$$(108) \quad \frac{l}{2A} = i(e_1 - e_3) e^{i\delta} \frac{\sigma_3^2 u_0}{\sigma_3^2 u_0} U_2 + i e^{-i\delta} \left\{ \frac{1}{2} X_2 - 2 \left(\zeta_3 u_0 - \frac{\eta_1 u_0}{\omega_1} \right) W_2 + \left[e_1 - p(\omega_3 + u_0) + 2 \left(\zeta_3 u_0 - \frac{\eta_1 u_0}{\omega_1} \right)^2 \right] V_2 \right\}.$$

Il reste à calculer les quatre intégrales ci-dessus. Les deux dernières sont évidentes. On a

$$W_2 = F(\omega_1 - \omega_3) - F(-\omega_3) = \frac{e^{\frac{2\eta_1 u_0}{\omega_1} \omega_3}}{\sigma(2u_0)} \left[\frac{\sigma(2u_0 - \omega_3)}{\sigma \omega_3} + e^{-2\eta_1 u_0} \frac{\sigma(\omega_1 - \omega_3 + 2u_0)}{\sigma(\omega_1 - \omega_3)} \right].$$

L'emploi des relations

$$\begin{aligned} \sigma(2u_0 - \omega_3) &= -e^{-2\eta_1 u_0} \sigma \omega_3 \sigma_3(2u_0), \\ \sigma(2u_0 + \omega_1 - \omega_3) &= -e^{-\eta_1(2u_0 + \omega_1)} \sigma \omega_3 \sigma_3(2u_0 + \omega_1), \\ \sigma_3(2u_0 + \omega_1) &= e^{2\eta_1 u_0} \sigma_3 \omega_1 \sigma_2(2u_0) \end{aligned}$$

permet sans difficulté de mettre cette expression sous la forme

$$W_2 = \left[\frac{\sigma_2(2u_0)}{\sigma(2u_0)} - \frac{\sigma_3(2u_0)}{\sigma(2u_0)} \right] e^{i\pi \frac{u_0}{\omega_1}}$$

ou enfin, à cause de (97),

$$(109) \quad W_2 = i e^{i\delta} [\zeta_{20}(2u_0) - \zeta_{30}(2u_0)].$$

On a d'ailleurs, d'après les mêmes calculs,

$$\begin{aligned} F(\omega_1 - \omega_3) &= i \zeta_{20}(2u_0) e^{i\delta}, \\ F(-\omega_3) &= i \zeta_{30}(2u_0) e^{i\delta}. \end{aligned}$$

Passons à l'intégrale X_2 . Il est manifeste qu'on a

$$X_2 = F'(\omega_1 - \omega_3) - F'(-\omega_3).$$

D'ailleurs

$$\frac{F'(u)}{F(u)} = -\frac{2\eta_1 u_0}{\omega_1} + \zeta(u + 2u_0) - \zeta u,$$

et, par suite,

$$\frac{F'(\omega_1 - \omega_3)}{F(\omega_1 - \omega_3)} = -\frac{2\eta_1 u_0}{\omega_1} + \zeta(\omega_1 - \omega_3 + 2u_0) - \zeta(\omega_1 - \omega_3) = -\frac{2\eta_1 u_0}{\omega_1} + \zeta_2(2u_0),$$

$$F'(\omega_1 - \omega_3) = i \zeta_{20}(2u_0) e^{i\delta} \left[-\frac{2\eta_1 u_0}{\omega_1} + \zeta_2(2u_0) \right]$$

et encore

$$\frac{F'(-\omega_3)}{F(-\omega_3)} = -\frac{2\eta_1 u_0}{\omega_1} + \zeta_3(2u_0),$$

$$F'(-\omega_3) = i\zeta_{30}(2u_0) e^{i\delta} \left[-\frac{2\eta_1 u_0}{\omega_1} + \zeta_3(2u_0) \right].$$

D'où nous tirons

$$(110) \quad X_2 = i e^{i\delta} \left\{ \zeta_{20}(2u_0) \left[\zeta_2(2u_0) - \frac{2\eta_1 u_0}{\omega_1} \right] - \zeta_{30}(2u_0) \left[\zeta_3(2u_0) - \frac{2\eta_1 u_0}{\omega_1} \right] \right\}.$$

Le calcul de U_2 et de V_2 est sensiblement moins simple, et exige l'emploi de développements plus cachés. Nous commencerons par remarquer qu'il résulte d'un raisonnement qu'on trouvera dans Tannery et Molk (*Fonct. ellipt.*, t. III, p. 138) que la fonction $F(u)$ peut être représentée par le développement suivant

$$(111) \quad F(u) = \frac{\pi}{2\omega_1} \left[\cot \frac{\pi u}{2\omega_1} + \cot \frac{\pi u_0}{\omega_1} \right] + \frac{2\pi}{\omega_1} \sum_{n,m} q^{2nm} \sin \frac{\pi}{\omega_1} (nu + 2mu_0),$$

dans lequel m et n sont deux entiers *positifs* quelconques. Ce développement est valable pourvu que les parties réelles de $\frac{u}{i\omega_1}$ et de $\frac{2u_0}{i\omega_1}$ soient toutes deux comprises entre la partie réelle de $\frac{2\omega_3}{i\omega_1}$ et celle de $-\frac{2\omega_3}{i\omega_1}$.

Or, u_0 est réel, et, pour l'application de la formule au calcul de U_2 et de V_2 , il nous faut remplacer u par $u - \omega_2$ ou par $u - \omega_3$. On se rend aisément compte que, dans les deux cas, les conditions exigées sont satisfaites. En outre, il est manifeste qu'on peut intégrer terme à terme la série écrite ci-dessus, car si l'on remplace par exemple u par $u - \omega_3$, le module du terme $\sin \frac{\pi}{\omega_1} (nu + 2mu_0)$ est (en posant $\frac{n\pi}{\omega_1} u + \frac{2m\pi}{\omega_1} u_0 = a, \frac{n\pi\omega_3}{i\omega_1} = b$)

$$\sqrt{\sin^2 a \operatorname{ch}^2 b + \cos^2 a \operatorname{sh}^2 b} = \sqrt{\operatorname{ch}^2 b - \cos^2 a} < \operatorname{ch} b < q^{-n};$$

la conclusion est alors évidente.

Ceci posé, il nous faut intégrer $F(u - \omega_2)$ et $F(u - \omega_3)$. Commen-

cons par déterminer sans ambiguïté la valeur des deux intégrales

$$u_2 = \frac{\pi}{2\omega_1} \int_0^{\omega_1} \cot \frac{\pi(u - \omega_2)}{2\omega_1} du,$$

$$v_2 = \frac{\pi}{2\omega_1} \int_0^{\omega_1} \cot \frac{\pi(u - \omega_3)}{2\omega_1} du.$$

On a successivement

$$u_2 = \log \frac{\sin \frac{\pi(\omega_1 - \omega_2)}{2\omega_1}}{\sin \frac{-\pi\omega_2}{2\omega_1}} = \log \left(-\operatorname{tang} \frac{\pi\omega_3}{2\omega_1} \right) = \log \left(-i \frac{1-q}{1+q} \right)$$

et

$$v_2 = \log \frac{\sin \frac{\pi(\omega_1 - \omega_3)}{2\omega_1}}{\sin \frac{-\pi\omega_3}{2\omega_1}} = \log \left(-\operatorname{cot} \frac{\pi\omega_3}{2\omega_1} \right) = \log \left(i \frac{1+q}{1-q} \right),$$

et par suite, K et K' désignant deux nombres entiers convenables,

$$(112) \quad u_2 = -\frac{i\pi}{2} + 2iK\pi - 2 \left(q + \frac{q^3}{3} + \frac{q^5}{5} + \dots \right),$$

$$(113) \quad v_2 = \frac{i\pi}{2} + 2iK'\pi + 2 \left(q + \frac{q^3}{3} + \frac{q^5}{5} + \dots \right).$$

Les entiers K et K' sont nuls; cela peut se voir de bien des manières; voyons-le rapidement pour K par exemple. On peut écrire

$$\begin{aligned} & \cot \frac{\pi(u - \omega_2)}{2\omega_1} \\ &= -\operatorname{tang} \frac{\pi(u + \omega_3)}{2\omega_1} \\ &= -\frac{\operatorname{tang} \frac{\pi u}{2\omega_1} + i \frac{1-q}{1+q}}{1 - i \frac{1-q}{1+q} \operatorname{tang} \frac{\pi u}{2\omega_1}} = -\frac{\left(\operatorname{tang} \frac{\pi u}{2\omega_1} + i \frac{1-q}{1+q} \right) \left(1 + i \frac{1-q}{1+q} \operatorname{tang} \frac{\pi u}{2\omega_1} \right)}{1 + \left(\frac{1-q}{1+q} \right)^2 \operatorname{tang}^2 \frac{\pi u}{2\omega_1}}. \end{aligned}$$

Par suite, dans l'intégrale u_2 , le coefficient de i est

$$\begin{aligned} & -\frac{\pi}{2\omega_1} \times 2 \int_0^{\omega_1} \frac{\frac{1-q}{1+q} \operatorname{tang} \frac{\pi u}{2\omega_1}}{1 + \left(\frac{1-q}{1+q}\right)^2 \operatorname{tang}^2 \frac{\pi u}{2\omega_1}} du \\ & = -\frac{\pi}{2\omega_1} (1-q^2) \int_0^{\omega_1} \frac{\sin \frac{\pi u}{\omega_1} du}{1 + 2q \cos \frac{\pi u}{\omega_1} + q^2}, \end{aligned}$$

ce même coefficient est du reste égal, d'après la formule ci-dessus, à $2K\pi - \frac{\pi}{2}$; d'où la relation

$$1 - 4K = \frac{1}{\omega_1} (1-q^2) \int_0^{\omega_1} \frac{\sin \frac{\pi u}{\omega_1} du}{1 + 2q \cos \frac{\pi u}{\omega_1} + q^2}.$$

Le second membre étant évidemment positif, nous en tirons de suite l'inégalité

$$0 < 1 - 4K < (1-q^2) \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{1+q}{1-q}.$$

Donc K est nul, d'après cela, puisque ce résultat découle évidemment de l'inégalité précédente lorsque au moins q est petit, et que, d'autre part, le choix de l'entier K est nécessairement indépendant de la grandeur de q .

Un raisonnement analogue montrera que K' est aussi nul.

On a maintenant facilement

$$\begin{aligned} & \frac{2\pi}{\omega_1} \int_0^{\omega_1} \sin \frac{\pi}{\omega_1} [n(u - \omega_2) + 2mu_0] du \\ & = -\frac{2}{n} \left\{ \cos \frac{\pi}{\omega_1} [n(\omega_1 - \omega_2) + 2mu_0] - \cos \frac{\pi}{\omega_1} (-n\omega_2 + 2mu_0) \right\} \\ & = 0 \quad (\text{si } n \text{ est pair}); \\ & = \frac{2}{n} \cos \frac{\pi}{\omega_1} (-n\omega_2 + 2mu_0) \\ & = \frac{2}{n} (-1)^n \left[\cos \frac{2m\pi u_0}{\omega_1} (q^n + q^{-n}) + i \sin \frac{2m\pi u_0}{\omega_1} (q^n - q^{-n}) \right] \left. \vphantom{\frac{2}{n}} \right\} \begin{array}{l} \text{(si } n \\ \text{est impair)} \end{array} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & \frac{2\pi}{\omega_1} \int_0^{\omega_1} \sin \frac{\pi}{\omega_1} [n(u - \omega_3) + 2mu_0] du \\ &= -\frac{2}{n} \left\{ \cos \frac{\pi}{\omega_1} [n(\omega_1 - \omega_3) + 2mu_0] - \cos \frac{\pi}{\omega_1} (-n\omega_3 + 2mu_0) \right\} \\ &= 0 \quad (\text{si } n \text{ est pair}); \\ &= \frac{2}{n} \left[\cos \frac{2m\pi u_0}{\omega_1} (q^n + q^{-n}) - i \sin \frac{2m\pi u_0}{\omega_1} (q^n - q^{-n}) \right] \quad (\text{si } n \text{ est impair}). \end{aligned}$$

Nous pouvons donc écrire les valeurs des intégrales U_2 et V_2 sous la forme

$$(114) \quad U_2 = -\frac{i\pi}{2} - 2 \left(q + \frac{q^3}{3} + \frac{q^5}{5} + \dots \right) + \frac{\pi}{2} \cot \frac{\pi u_0}{\omega_1} \\ - 2 \sum_{\substack{n, m \\ (n \text{ impair})}} \frac{q^{2nm}}{n} \left[(q^n + q^{-n}) \cos \frac{2m\pi u_0}{\omega_1} + i(q^n - q^{-n}) \sin \frac{2m\pi u_0}{\omega_1} \right],$$

$$(115) \quad V_2 = \frac{i\pi}{2} + 2 \left(q + \frac{q^3}{3} + \frac{q^5}{5} + \dots \right) + \frac{\pi}{2} \cot \frac{\pi u_0}{\omega_1} \\ + 2 \sum_{\substack{n, m \\ (n \text{ impair})}} \frac{q^{2nm}}{n} \left[(q^n + q^{-n}) \cos \frac{2m\pi u_0}{\omega_1} - i(q^n - q^{-n}) \sin \frac{2m\pi u_0}{\omega_1} \right].$$

Nous sommes maintenant en mesure d'écrire la valeur de la longueur l . Moyennant les valeurs ci-dessus de U_2 , V_2 , W_2 , X_2 , et écri-

vant s_0 à la place de $\frac{\pi u_0}{\omega_1}$, il vient

$$\begin{aligned}
 (116) \quad \frac{l}{2A} = & i(e_1 - e_3) e^{i\delta} \frac{\sigma_3^2 u_0}{\sigma_3^2 u_0} \\
 & \times \left\{ -\frac{i\pi}{2} - 2 \left(q + \frac{q^3}{3} + \frac{q^5}{5} + \dots \right) + \frac{\pi}{2} \cot s_0 \right. \\
 & \quad \left. - 2 \sum_{\substack{n, m \\ (n \text{ impair})}} \frac{q^{2nm}}{n} [(q^n + q^{-n}) \cos 2ms_0 + i(q^n - q^{-n}) \sin 2ms_0] \right\} \\
 & - \frac{1}{2} \left\{ \zeta_{20}(2u_0) \left[\zeta_2(2u_0) - \frac{2\eta_1 u_0}{\omega_1} \right] - \zeta_{30}(2u_0) \left[\zeta_3(2u_0) - \frac{2\eta_1 u_0}{\omega_1} \right] \right\} \\
 & + 2 \left(\zeta_3 u_0 - \frac{\eta_1 u_0}{\omega_1} \right) [\zeta_{20}(2u_0) - \zeta_{30}(2u_0)] \\
 & + i e^{-i\delta} \left[e_1 - p(\omega_3 + u_0) + 2 \left(\zeta_3 u_0 - \frac{\eta_1 u_0}{\omega_1} \right)^2 \right] \\
 & \times \left\{ \frac{i\pi}{2} + 2 \left(q + \frac{q^3}{3} + \frac{q^5}{5} + \dots \right) + \frac{\pi}{2} \cot s_0 \right. \\
 & \quad \left. + 2 \sum_{\substack{n, m \\ (n \text{ impair})}} \frac{q^{2nm}}{n} [(q^n + q^{-n}) \cos 2ms_0 - i(q^n - q^{-n}) \sin 2ms_0] \right\}.
 \end{aligned}$$

Bien entendu, on n'oubliera pas que

$$s_0 = \frac{\pi}{2} + \delta.$$

Cette formule permettra le calcul de l avec une approximation aussi élevée qu'on le voudra.

Quant à la résistance de la lame correspondante, elle se déduit aisément de l'expression générale de $\Omega(\zeta)$ dans laquelle on fera $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

On en tire

$$\Omega'(\zeta) = \frac{\omega_1}{\pi \zeta} \left[\zeta \left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log \zeta - \frac{\omega_1}{\pi} s_0 \right) - \zeta \left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log \zeta + \frac{\omega_1}{\pi} s_0 \right) \right] + \frac{2\eta_1 \omega_1 s_0}{\pi^2} \frac{1}{\zeta};$$

c'est-à-dire

$$\Omega'(q) = \frac{\omega_1}{\pi q} [\zeta(\omega_3 - u_0) - \zeta(\omega_3 + u_0)] + \frac{2\eta_1 u_0}{\pi q} = -\frac{2\omega_1}{\pi q} \left(\zeta_3 u_0 - \frac{\eta_1 u_0}{\omega_1} \right),$$

et la formule (20) nous donne ensuite pour la résistance directe

$$(117) \quad P_x = -2A\pi \left(\zeta_3 u_0 - \frac{\eta_1 u_0}{\omega_1} \right)^2.$$

Nous allons appliquer ces résultats au cas plus particulier où la lame est située à une grande distance du mur, c'est-à-dire où q est petit. A cet effet nous allons, dans les expressions de l et de P_x , rechercher les termes de moindre degré en q . Comme les calculs développés à la fin du Chapitre précédent font prévoir que la valeur de P_x contient q^2 en facteur, nous allons développer l jusqu'aux termes en q^3 inclusivement, et nous ferons de même pour P_x .

Tout d'abord il est manifeste que les sommes qui figurent dans U_2 et V_2 ne contiennent que des puissances positives de q ; on trouve aisément

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{n, m \\ (n \text{ impair})}} \frac{q^{2nm}}{n} [(q^n + q^{-n}) \cos 2ms_0 + i(q^n - q^{-n}) \sin 2ms_0] \\ &= q(\cos 2s_0 - i \sin 2s_0) + q^3 \left[\frac{4}{3} \cos 2s_0 + \cos 4s_0 + i \left(\frac{2}{3} \sin 2s_0 - \sin 4s_0 \right) \right] + \dots, \\ & \sum_{\substack{n, m \\ (n \text{ impair})}} \frac{q^{2nm}}{n} [(q^n + q^{-n}) \cos 2ms_0 - i(q^n - q^{-n}) \sin 2ms_0] \\ &= q(\cos 2s_0 + i \sin 2s_0) + q^3 \left[\frac{4}{3} \cos 2s_0 - \cos 4s_0 - i \left(\frac{2}{3} \sin 2s_0 - \sin 4s_0 \right) \right] + \dots \end{aligned}$$

On a ensuite (T. et M., CVI, 2)

$$\begin{aligned} \zeta_2(2u_0) - \frac{2\eta_1 u_0}{\omega_1} &= \frac{2\pi}{\omega_1} \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^r q^r}{1 - q^{2r}} \sin 2rs_0 \\ &= \frac{2\pi}{\omega_1} [-q \sin 2s_0 + q^2 \sin 4s_0 - q^3 (\sin 2s_0 + \sin 6s_0) + \dots], \end{aligned}$$

et de même

$$\begin{aligned} \zeta_3 u_0 - \frac{\eta_1 u_0}{\omega_1} &= \frac{2\pi}{\omega_1} \sum_1^{\infty} \frac{q^r}{1-q^{2r}} \sin r s_0 \\ &= \frac{2\pi}{\omega_1} [q \sin s_0 + q^2 \sin 2s_0 + q^3(\sin s_0 + \sin 3s_0) + \dots], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \zeta_3(2u_0) - \frac{2\eta_1 u_0}{\omega_1} &= \frac{2\pi}{\omega_1} \sum_1^{\infty} \frac{q^r}{1-q^{2r}} \sin 2rs_0 \\ &= \frac{2\pi}{\omega_1} [q \sin 2s_0 + q^2 \sin 4s_0 + q^3(\sin 2s_0 + \sin 6s_0) + \dots]. \end{aligned}$$

D'après les formules (CVI, 3, et CX, 2), nous avons

$$\begin{aligned} e_1 - p(\omega_3 + u_0) &= -\frac{\eta_1}{\omega_1} + \frac{\pi^2}{4\omega_1^2} - \frac{2\pi^2}{\omega_1^2} \sum_1^{\infty} (-1)^r \frac{r q^{2r}}{1-q^{2r}} \\ &\quad + \frac{\eta_1}{\omega_1} + \frac{2\pi^2}{\omega_1^2} \sum_1^{\infty} \frac{r q^r}{1-q^{2r}} \cos r s_0, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$e_1 - p(\omega_3 + u_0) = \frac{\pi^2}{4\omega_1^2} + \frac{2\pi^2}{\omega_1^2} [q \cos s_0 + q^2(1 + 2 \cos 2s_0) + q^3(\cos s_0 + 3 \cos 3s_0) + \dots].$$

Remplaçant u_0 par zéro dans cette dernière formule, il nous vient

$$e_1 - e_3 = \frac{\pi^2}{4\omega_1^2} (1 + 8q + 24q^2 + 32q^3 + \dots).$$

Il reste maintenant à développer par rapport à q les nombres $\zeta_{23}^2 u_0$, $\zeta_{20}(2u_0)$, $\zeta_{30}(2u_0)$.

Les formules (XXX, 9-12), nous fournissent l'égalité

$$\frac{\sqrt[4]{e_1 - e_3} \sigma_2 u}{\sqrt[4]{e_1 - e_2} \sigma_3 u} = \frac{\mathfrak{S}_3(\nu)}{\mathfrak{S}_4(\nu)} \quad \left(\nu = \frac{u}{2\omega_1} \right),$$

d'où (XXXI, 2, et XXXII, 3, 4)

$$\frac{q^4}{q_3^4} \zeta_{23}^2 u_0 = \frac{(1 + 2q \cos s_0 + 2q^2 \cos 2s_0 + \dots)^2}{(1 - 2q \cos s_0 + 2q^2 \cos 2s_0 + \dots)^2} = \frac{1 + 4q \cos s_0 + 4q^2 \cos^2 s_0 + \dots}{1 - 4q \cos s_0 + 4q^2 \cos^2 s_0 + \dots}.$$

Mais (XXXVI, 2)

$$\frac{q_3^{\frac{1}{2}}}{q_2^{\frac{1}{2}}} = \frac{\mathfrak{S}_4^2(0)}{\mathfrak{S}_3^2(0)} = \frac{(1 - 2q + 2q^4 + \dots)^2}{(1 + 2q + 2q^4 + \dots)^2} = \frac{1 - 4q + 4q^2 + 4q^4 + \dots}{1 + 4q + 4q^2 + 4q^4 + \dots},$$

en sorte que nous avons

$$\xi_{23}^2 u_0 = \left(\frac{1 - 4q + 4q^2 + \dots}{1 + 4q + 4q^2 + \dots} \right)^2 \left(\frac{1 + 4q \cos s_0 + 4q^2 \cos^2 s_0 + \dots}{1 - 4q \cos s_0 + 4q^2 \cos^2 s_0 + \dots} \right),$$

$$\begin{aligned} \xi_{23}^2 u_0 &= 1 - 8q(1 - \cos s_0) + 32q^2(1 - \cos s_0)^2 \\ &\quad - 32q^3(3 - 8 \cos s_0 + 8 \cos^2 s_0 - 3 \cos^3 s_0) + \dots \end{aligned}$$

On obtient de même

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt[4]{e_1 - e_3}}{\sqrt[8]{\mathfrak{G}}} \xi_{20} u &= -i \frac{\mathfrak{S}_3(v)}{\mathfrak{S}_1(v)} = -i \frac{1 + 2q \cos 2\pi v + 2q^4 \cos 4\pi v + \dots}{2q^{\frac{1}{4}} \sin \pi v - 2q^{\frac{9}{4}} \sin 3\pi v + 2q^{\frac{25}{4}} \sin 5\pi v + \dots} \\ &= \frac{q_0 q_2^2}{i \frac{\pi}{2\omega_1} \times 2q_0^3 q^{\frac{1}{4}}} \xi_{20} u, \end{aligned}$$

en désignant, comme d'habitude, par \mathfrak{G} le nombre $\frac{1}{16} \frac{\pi^{12}}{\omega_1^{12}} q_0^2 q^2$; d'où

$$\xi_{20}(2u_0) = \frac{\pi}{2\omega_1} \frac{q_0^2}{q_2^2} \frac{1 + 2q \cos 2s_0 + 2q^4 \cos 4s_0 + \dots}{q^2 \sin s_0 - q^2 \sin 3s_0 + q^6 \sin 5s_0 + \dots}.$$

D'ailleurs on a

$$\frac{q_0^2 q^{\frac{1}{4}}}{q_2^2} = \frac{1}{\pi} \frac{\mathfrak{S}'_1(0)}{\mathfrak{S}_3(0)} = \frac{q^{\frac{1}{4}} - 3q^{\frac{9}{4}} + 5q^{\frac{25}{4}} + \dots}{1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \dots} = q^{\frac{1}{4}}(1 - 2q + q^2 - 2q^3 + \dots).$$

d'où, après quelques simplifications,

$$\xi_{20}(2u_0) = \frac{\pi}{2\omega_1} \left(\frac{1}{\sin s_0} - 4q \sin s_0 + 4q^2 \sin s_0 - 8q^3 \sin 2s_0 \cos s_0 + \dots \right).$$

Pour obtenir enfin $\xi_{30}(2u_0)$, on a (T. et M., XXXIII, 12)

$$\frac{\sqrt[4]{e_1 - e_2}}{\sqrt[8]{\mathfrak{G}}} \xi_{30} u = -i \frac{\mathfrak{S}_4(v)}{\mathfrak{S}_1(v)} = -i \frac{1 - 2q \cos 2\pi v + 2q^4 \cos 4\pi v + \dots}{2q^{\frac{1}{4}} (\sin \pi v - q^2 \sin 3\pi v + q^6 \sin 5\pi v + \dots)},$$

et, par un calcul analogue au précédent,

$$\xi_{30}(2u_0) = \frac{\pi}{2\omega_1} \left(\frac{1}{\sin s_0} + 4q \sin s_0 + 4q^2 \sin s_0 + 8q^3 \sin 2s_0 \cos s_0 + \dots \right).$$

Remplaçant dans la formule (116), nous obtenons finalement l'expression de la longueur l sous la forme

$$\begin{aligned} (118) \quad \frac{\omega_1^2}{2\pi^2 A} l = & \left\{ \frac{i e^{i\delta}}{4} (1 + 8q + 24q^2 + 32q^3 + \dots) \right. \\ & \times [1 - 8q(1 - \cos s_0) + 32q^2(1 - \cos s_0)^2 \\ & \quad \left. - 32q^3(3 - 8 \cos s_0 + 8 \cos^2 s_0 - 3 \cos^3 s_0)] + \dots \right\} \\ & \times \left\{ -\frac{i\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \cot s_0 - 2 \left(q + \frac{q^3}{3} + \dots \right) \right. \\ & \quad \left. - 2 \left\{ q(\cos 2s_0 - i \sin 2s_0) \right. \right. \\ & \quad \quad \left. \left. + q^3 \left[\frac{4}{3} \cos 2s_0 + \cos 4s_0 + i \left(\frac{2}{3} \sin 2s_0 - \sin 4s_0 \right) \right] + \dots \right\} \right\} \\ & - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sin s_0} - 4q \sin s_0 + 4q^2 \sin s_0 - 8q^3 \sin 2s_0 \cos s_0 + \dots \right) \\ & \quad \times [-q \sin 2s_0 + q^2 \sin 4s_0 - q^3(\sin 2s_0 + \sin 6s_0) + \dots] \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sin s_0} + 4q \sin s_0 + 4q^2 \sin s_0 + 8q^3 \sin 2s_0 \cos s_0 + \dots \right) \\ & \quad \times [q \sin 2s_0 + q^2 \sin 4s_0 + q^3(\sin 2s_0 + \sin 6s_0) + \dots] \\ & - 2[q \sin s_0 + q^2 \sin 2s_0 + q^3(\sin s_0 + \sin 3s_0) + \dots] \\ & \quad \times (8q \sin s_0 + 16q^3 \sin 2s_0 \cos s_0 + \dots) \\ & + i e^{-i\delta} \left\{ \frac{1}{4} + 2[q \cos s_0 + q^2(1 + 2 \cos 2s_0) + q^3(\cos s_0 + 3 \cos 3s_0) + \dots] \right. \\ & \quad \left. + 8(q^2 \sin^2 s_0 + 2q^3 \sin s_0 \sin 2s_0 + \dots) \right\} \\ & \times \left\{ \frac{i\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \cot s_0 + 2 \left(q + \frac{q^3}{3} + \dots \right) \right. \\ & \quad \left. + 2 \left\{ q(\cos 2s_0 + i \sin 2s_0) \right. \right. \\ & \quad \quad \left. \left. + q^3 \left[\frac{4}{3} \cos 2s_0 + \cos 4s_0 - i \left(\frac{2}{3} \sin 2s_0 - \sin 4s_0 \right) \right] + \dots \right\} \right\}. \end{aligned}$$

A cause de la relation déjà rappelée .

$$s_0 = \frac{\pi}{2} + \delta,$$

on s'aperçoit, par des calculs élémentaires que je ne reproduis pas, que le terme constant par rapport à q , et le terme en q sont tous les deux nuls. Le coefficient du terme en q^2 est

$$\begin{aligned} \frac{i e^{i\delta}}{4} \left\{ [24 - 64(1 - \cos s_0) + 32(1 - \cos s_0)^2] \right. \\ \left. \times \left(-\frac{i\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \cot s_0 \right) - 16 \cos s_0 (1 + \cos 2s_0 - i \sin 2s_0) \right\} \\ - 16 \sin^2 s_0 + i e^{-i\delta} \left[6 \left(\frac{i\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \cot s_0 \right) + 4 \cos s_0 (1 + \cos 2s_0 + i \sin 2s_0) \right]. \end{aligned}$$

Après quelques transformations ce coefficient se laisse mettre sous la forme

$$-4 \cos \delta (\pi + 4 \cos \delta).$$

Le coefficient de q^3 est

$$\begin{aligned} \frac{i e^{i\delta}}{4} \left\{ 32(-2 \cos s_0 + 3 \cos^3 s_0) \left(-\frac{i\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \cot s_0 \right) \right. \\ \left. + 16(1 - 4 \cos^2 s_0) (1 + \cos 2s_0 - i \sin 2s_0) \right. \\ \left. - \frac{2}{3} - 2 \left[\frac{4}{3} \cos 2s_0 + \cos 4s_0 + i \left(\frac{2}{3} \sin 2s_0 - \sin 4s_0 \right) \right] \right\} \\ + 8 \cos s_0 (-4 + 5 \cos^2 s_0) \\ + i e^{-i\delta} \left\{ (-8 \cos^3 s_0 + 16 \cos s_0) \left(\frac{i\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \cot s_0 \right) \right. \\ \left. + 12(1 + \cos 2s_0 + i \sin 2s_0) \right. \\ \left. + \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \left[\frac{4}{3} \cos 2s_0 + \cos 4s_0 - i \left(\frac{2}{3} \sin 2s_0 - \sin 4s_0 \right) \right] \right\}, \end{aligned}$$

ce qui, moyennant quelques transformations que le lecteur rétablira par des calculs assez élémentaires, se met finalement sous la forme

$$(119) \quad 16\pi \sin \delta \cos \delta + \left(42 + \frac{2}{3} \right) \sin \delta = \gamma.$$

D'autre part, on a pour la résistance, d'après la formule (117), la valeur

$$\begin{aligned} P_x &= - \frac{8A\pi^3}{\omega_1^2} [q \sin s_0 + q^2 \sin 2s_0 + q^3(\sin s_0 + \sin 3s_0) + \dots]^2 \\ &= - \frac{8A\pi^3}{\omega_1^2} q^2 \cos \delta (\cos \delta - 2q \sin 2\delta + \dots), \end{aligned}$$

et, par conséquent, nous pouvons écrire, pour le rapport $\frac{P_x}{l}$,

$$\frac{P_x}{l} = \frac{4\pi \cos \delta (\cos \delta - 2q \sin 2\delta + \dots)}{4 \cos \delta (\pi + \cos \delta) - \gamma q + \dots},$$

ou encore

$$(120) \quad \frac{P_x}{l} = \frac{\pi \cos \delta}{\pi + 4 \cos \delta} + \pi q \left[\frac{\gamma - 8 \sin 2\delta (\pi + 4 \cos \delta)}{4(\pi + \cos \delta)^2} \right] + \dots$$

Le coefficient de πq se met facilement sous la forme

$$\frac{16 \sin \delta \left(\sin^2 \delta - \frac{1}{3} \right)}{(\pi + 4 \cos \delta)^2},$$

de sorte qu'on a

$$(121) \quad \frac{P_x}{l} = \frac{\pi \cos \delta}{\pi + 4 \cos \delta} + \varepsilon \pi q,$$

et que, pour q petit, ε est du signe de

$$\sin \delta \left(\sin^2 \delta - \frac{1}{3} \right).$$

Pour $q = 0$ (fluide indéfini) on retrouve bien la valeur connue du rapport $\frac{P_x}{l}$. En général, en posant

$$\delta_0 = \arcsin \frac{1}{\sqrt{3}},$$

et prenant la détermination de l'arc sinus comprise entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, on a

dans l'intervalle $-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}$ de valeurs de δ ,

$$(122) \quad \varepsilon = \operatorname{sgn} \delta(\delta^2 - \delta_0^2).$$

Dans les intervalles $-\delta_0, 0$ et $+\delta_0, \frac{\pi}{2}$, la valeur du rapport $\frac{P_x}{\gamma}$ est donc *supérieure* à la valeur de ce même rapport en cas d'absence de mur; pour $\delta = 0$, bien entendu, la valeur de $\frac{P_x}{\gamma}$ n'est pas modifiée par la présence du mur, c'est ce qu'on avait déjà vérifié à la fin du Chapitre II.

Des considérations qui précèdent retenons que, dans le cas d'un fluide limité par un mur et contenant un obstacle déterminé, la présence de ce mur peut modifier la résistance éprouvée par l'obstacle, aussi bien en l'augmentant qu'en la diminuant: cela dépend de l'orientation de cet obstacle sur la direction du courant (ou du mur, ce qui revient au même). Le fait que cette résistance puisse être augmentée, même dans le cas où la paroi du mur est éloignée, expliquerait peut-être, en partie, les valeurs un peu trop faibles trouvées pour cette même résistance quand on applique la théorie des mouvements glissants en fluide indéfini. (*Cf.*, par exemple, N. JOUKOWSKI, *Aérodynamique*, traduit par S. Drzewiecki; 1 vol., Gauthier-Villars, 1916; Préface, p. XI.)