

# ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

RENÉ GARNIER

**Étude de l'intégrale générale de l'équation VI de M. Painlevé dans le voisinage de ses singularités transcendantes**

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 3<sup>e</sup> série*, tome 34 (1917), p. 239-353

[http://www.numdam.org/item?id=ASENS\\_1917\\_3\\_34\\_\\_239\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1917_3_34__239_0)

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1917, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# ÉTUDE DE L'INTÉGRALE GÉNÉRALE

DE

## L'ÉQUATION VI DE M. PAINLEVÉ

DANS LE VOISINAGE DE SES SINGULARITÉS TRANSCENDANTES,

PAR M. RENÉ GARNIER.



### INTRODUCTION.

1. Dans un Mémoire des *Acta mathematica* <sup>(1)</sup>, M. Painlevé s'était proposé d'énumérer toutes les équations différentielles du second ordre, de la forme

$$(\alpha) \quad \lambda'' = R(\lambda', \lambda, t)$$

(R rationnel en  $\lambda'$ , algébrique en  $\lambda$ , analytique en  $t$ ), dont l'intégrale générale a ses points critiques fixes. La profonde méthode qu'il découvrit pour résoudre ce problème, et qu'il développa dans le *Bulletin de la Société mathématique* <sup>(2)</sup>, permettait de former explicitement toutes les équations  $(\alpha)$ . Mais, par suite d'une omission accidentelle dans l'application de cette méthode, il arriva que les tableaux d'équations  $(\alpha)$  publiés dans les *Acta* présentèrent des lacunes; et ce fut M. Gambier <sup>(3)</sup> qui compléta ces tableaux après de nouveaux calculs fondés sur la méthode même de M. Painlevé. En définitive, toutes ces recherches aboutirent à la conclusion suivante : ou bien  $(\alpha)$  s'intègre

---

<sup>(1)</sup> *Acta math.*, t. XXV, 1902, p. 1-86.

<sup>(2)</sup> *Bull. Soc. math.*, t. XXVIII, 1900, p. 201-261.

<sup>(3)</sup> *Acta math.*, t. XXXIII, 1910, p. 1-55. — C'est précisément au cours de ces recherches que M. Gambier découvrit l'équation (VI) (*C. R.*, t. 143, 1906, p. 741); bientôt après, M. Painlevé démontra que son intégrale générale est méromorphe et lui assignait le rang qu'elle occupe dans le tableau (T) dont il est question plus loin. Coïncidence curieuse, peu de temps avant, M. Richard Fuchs l'avait rencontrée en cherchant à expliciter les conditions pour que le groupe  $E_{VI}$  soit constant (*voir* ci-dessous).

par une combinaison de fonctions classiques, ou bien son intégrale est irréductible à ces fonctions; et, dans ce dernier cas,  $(\alpha)$  peut être ramenée algébriquement à l'une des six équations d'un tableau (T). La première est l'équation

$$(I) \quad \lambda'' = 6\lambda^2 + t,$$

étudiée par M. Painlevé <sup>(1)</sup> et par M. P. Boutroux dans son Mémoire couronné <sup>(2)</sup>; la dernière est l'équation

$$(VI) \quad \lambda'' = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda-1} + \frac{1}{\lambda-t} \right) \lambda'^2 - \left( \frac{1}{t} + \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t-\lambda} \right) \lambda' \\ + 2 \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}{t^2(t-1)^2} \left[ a+b+c+d+1 - \left( a + \frac{1}{4} \right) \frac{t}{\lambda^2} + \left( b + \frac{1}{4} \right) \frac{t-1}{(\lambda-1)^2} - \frac{ct(t-1)}{(\lambda-t)^2} \right]$$

( $a, b, c, d$  constantes), qui fait l'objet du présent Mémoire.

Or l'équation (VI) possède deux propriétés remarquables qui lui assignent une place prépondérante parmi les équations de (T). D'une part, M. Painlevé a montré <sup>(3)</sup> que, par des transformations linéaires et des passages à la limite, on peut *la faire dégénérer en l'une quelconque des cinq autres équations de (T)*; il est donc clair que tout progrès apporté à la théorie de l'équation (VI) aura une répercussion sur les cinq autres équations.

Et, d'autre part, l'équation (VI) joue aussi un rôle important dans la théorie des équations linéaires. En effet, proposons-nous de choisir les coefficients de l'équation

$$(E_{VI}) \quad \frac{1}{y} \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{(x-t)^2} + \frac{d}{x(x-1)} \\ + \frac{3}{4(x-\lambda)^2} + \frac{\alpha}{x(x-1)(x-t)} + \frac{\beta}{x(x-1)(x-\lambda)},$$

de telle sorte que son groupe de monodromie soit un groupe donné :

<sup>(1)</sup> *Bull. Soc. math.*, t. XXVIII, 1900, p. 227-252.

<sup>(2)</sup> *Ann. sc. Éc. Norm. sup.*, 3<sup>e</sup> série, t. XXX, 1913, p. 255-375, et t. XXXI, 1914, p. 99-159.

<sup>(3)</sup> *C. R. Acad. Sc.*, t. 143, 1906, p. 1111. — C'est en s'appuyant sur cette propriété que M. Painlevé a montré que, pour  $a, b, c, d$  choisis arbitrairement, (VI) est irréductible au sens le plus rigoureux du terme, celui de M. J. Drach.

c'est ce qu'on appelle le *problème de Riemann* pour  $(E_{VI})$ . Pour le résoudre, il faut d'abord exprimer que le groupe de  $(E_{VI})$  est indépendant de  $t$ ; or cette condition exige précisément que  $\lambda$  vérifie par rapport à  $t$  une équation (VI) [où  $a, b, c, d$  ont les mêmes valeurs que dans  $(E_{VI})$ ]; quant à  $\alpha$  et  $\beta$  ce seront des polynômes en  $\lambda'$ , à coefficients rationnels en  $\lambda$  et  $t$ .

Or, que sait-on sur l'intégrale générale de (VI)? M. Painlevé a montré qu'elle est méromorphe dans tout le plan  $t$ , sauf aux trois points  $t = 0, 1, \infty$ , qui sont des singularités non algébriques. Que devient l'intégrale au voisinage de ces trois points? D'après ce qui précède, on conçoit l'intérêt qui s'attache à une telle étude, qui simplifiera sûrement l'étude analogue des autres transcendentes nouvelles de M. Painlevé, et constituera notamment une voie nouvelle pour retrouver les beaux résultats de M. P. Boutroux; et, d'autre part, on peut établir que la solution du problème de Riemann pour  $(E_{VI})$  est liée intimement à l'étude précédente (1).

Mais l'irréductibilité de (VI) et l'exemple des équations du premier ordre laissent entrevoir toute la difficulté du problème qui consiste à étudier l'intégrale *générale* de (VI) dans le voisinage de ses singularités transcendentes. En fait, cette question n'avait reçu jusqu'ici aucune réponse valable; à vrai dire, M. Richard Fuchs l'a bien abordée dans un Mémoire des *Mathematische Annalen* (2); mais, comme je le montrerai à la fin de ce travail, sa méthode est sans valeur, et ses conclusions, complètement inexactes. Or, c'est précisément ce problème qui constitue l'objet du Mémoire actuel.

2. Je vais indiquer brièvement la disposition générale et les résultats principaux de ce Mémoire. Tout d'abord, les points  $0, 1, \infty$  jouant un rôle équivalent, on peut se borner à étudier le premier. Soient donc  $t_0$  une quantité de module  $< 1$  et  $\eta$  un nombre positif arbitrairement petit. Posons  $t = t_0 e^T$  et envisageons la région indéfinie ( $\mathfrak{A}$ ) du plan  $T$  dont les points ont leurs arguments  $\gamma$  compris entre  $\frac{\pi}{2} + \eta$  et  $\frac{3\pi}{2} - \eta$ ; modifiant légèrement une dénomination de M. P. Boutroux, j'appelle

(1) *Comptes rendus*, t. 163, 1916, p. 198.

(2) *Math. Ann.*, t. LXXV, 1914.

*caractéristique* de (VI) toute branche d'intégrale suivie le long d'un rayon rectiligne de  $(\mathfrak{R})$ . Ceci posé, le présent travail est divisé en quatre Parties, dont les trois premières correspondent respectivement aux trois étapes successives suivantes de notre problème :

- 1° Construction de caractéristiques vérifiant (VI);
- 2° Démonstration du fait que les caractéristiques obtenues sont les seules possibles;
- 3° Représentation d'une intégrale dans  $(\mathfrak{R})$  (1) au moyen de caractéristiques convenablement associées.

Enfin, une quatrième Partie est consacrée à l'étude de deux cas particuliers remarquables, ainsi qu'à l'examen du travail de M. Richard Fuchs.

Résumons maintenant les résultats de ces différentes Parties.

3. Les caractéristiques obtenues dans la première Partie ont été construites au moyen d'une méthode dont on aperçoit une fois de plus la généralité et la puissance : celle des *approximations successives* de M. Émile Picard. Ces caractéristiques sont de deux espèces ; les théories des deux espèces étant identiques, j'insisterai surtout sur celles de la première espèce. Pour les définir, je remplace (VI) par le système

$$(1) \begin{cases} \frac{t^2(t-1)^2\lambda'^2}{\lambda^2(\lambda-1)^2(\lambda-t)^2} = \frac{4a+1}{\lambda^2} + \frac{4b+1}{(\lambda-1)^2} + \frac{4c}{(\lambda-t)^2} + \frac{4d+2}{\lambda(\lambda-1)} + \frac{4\alpha}{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}, \\ (\lambda-t)^2\alpha' = -(\lambda-t)\alpha - 2c\lambda(\lambda-1), \end{cases}$$

dont toutes les intégrales  $\lambda(t)$  (non constantes) appartiennent à (VI). Soit alors  $\omega$  un nombre réel, non négatif et inférieur à 1; proposons-nous de choisir dans  $(\mathfrak{R})$ , un rayon  $O\Delta$ , tel que, pour la caractéristique  $\lambda(t)$ , prolongée indéfiniment sur  $O\Delta$ ,  $|t^\omega\lambda^{-1}|$  reste borné (2) et  $\alpha$  tende vers la valeur bornée  $\alpha_0$ , tandis qu'en  $t_0$ ,  $\lambda$  prenne la valeur  $\lambda_0 (\neq 0)$ ; une telle caractéristique sera dite de *première espèce*. Pour la construire, je

(1) D'ailleurs, on peut montrer les caractéristiques définies dans ce travail convergent (pour  $|t_0|$  assez petit) dans tout le demi-plan  $\Re(T) < 0$ .

(2) Supérieurement, et (pour  $\omega \neq 0$ ) inférieurement.

pose

$$s^2 = 4a + 4c + 1 - 4\alpha_0$$

et

$$P(\lambda) = 4(a + b + c + d + 1)\lambda(\lambda - 1) + (4b + 1)\lambda - s^2(\lambda - 1).$$

Le trinôme  $P(\lambda)$  que l'on vient d'introduire constitue le pivot de toute la discussion; supposons d'abord qu'il ne possède aucune racine double (coïncidant avec  $\lambda_0$ ) et qu'il ne soit pas identiquement nul; nous pourrons faire alors la transformation

$$\mu = \int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{d\lambda}{\lambda \sqrt{P(\lambda)}},$$

qui donne à (1) la forme

$$(2) \quad \begin{cases} t\mu' = 1 + F(\mu, \alpha - \alpha_0, t), \\ \alpha' = \alpha\varphi(\mu, t) + \psi(\mu, t), \end{cases}$$

où  $F$ ,  $\varphi$  et  $\psi$  sont holomorphes en  $\mu$ ,  $\alpha - \alpha_0$  et  $t$  lorsque ces variables satisfont à diverses conditions; de plus,  $|F|$  est très petit avec  $|t|$  et  $|\alpha - \alpha_0|$ . Dès lors, il est tout indiqué d'essayer les approximations successives que voici :

$$\mu_0 = \log \frac{t}{t_0}$$

et

$$(3) \quad \begin{cases} \alpha_{n+1} = \alpha_0 + \int_0^t [\alpha_n \varphi(\mu_n, t) + \psi(\mu_n, t)] dt, \\ \mu_{n+1} = \int_{t_0}^t [1 + F(\mu_n, \alpha_{n+1} - \alpha_0, t)] \frac{dt}{t} \end{cases}$$

où  $n = 0, 1, \dots$ , et où les intégrales sont prises le long de la spirale du plan ( $t$ ) qui correspond au rayon  $O\Delta$  de (T). Effectivement, ces approximations convergent uniformément vers un couple d'intégrales de (2), lorsque,  $|t_0|$  étant suffisamment petit, T appartient à un secteur S de (R); il faut pourtant exclure de S une infinité de petits cercles  $(\bar{\gamma}_k)$ , égaux, équidistants et s'éloignant dans une direction bien déterminée; à l'intérieur des  $(\bar{\gamma}_k)$ ,  $|P(\lambda)|$  est très petit, et l'on doit étudier l'intégrale par une méthode différente.

Ce qui précède suffit à faire prévoir que la démonstration de la convergence des approximations précédentes exige une discussion préli-

minaire assez longue et dont la complexité provient d'ailleurs essentiellement de la nature même des choses, et non du choix de la méthode employée. Aussi bien, lorsqu'on fait varier les conditions initiales de telle sorte que le discriminant de  $P(\lambda)$  tende vers zéro,  $s$  tend vers une des valeurs

$$\sigma = \pm \sqrt{4(a+b+c+d+1)} \pm \sqrt{4b+1};$$

les cercles  $(\bar{\gamma}_k)$  commencent alors par *se souder* et par former une *bande indéfinie*  $\mathfrak{B}$ , de largeur sans cesse croissante, à l'intérieur de laquelle les approximations (3) ne sont plus valables. A la limite, on a  $s = \sigma$ ;  $P(\lambda)$  possède une racine double  $h$  et  $\mathfrak{B}$  s'est transformée en un *secteur*  $\Sigma$  où la représentation de l'intégrale  $\lambda(t)$  exige des développements bien différents des premiers, et où  $\lambda(t)$  a une tout autre allure que dans  $S$ .

Les caractéristiques qui représentent alors  $\lambda(t)$  sont dites *de la première espèce, du type exceptionnel et de la première sorte*; elles se définissent de la façon suivante. Posons  $\lambda = h + \nu$ ;  $\nu$  vérifiera une équation de la forme

$$(4) \quad t^2 \nu'' + t \nu' - \sigma^2 \nu = \alpha_1 \nu^3 + \alpha_2 t \nu + \alpha_3 t^2 \nu'^2 + \alpha_4 t^2 \nu' + \alpha_5 t,$$

où les coefficients du second membre sont des fonctions de  $t$  et  $\nu$  holomorphes pour  $|t|$  et  $|\nu|$  assez petits. Ceci posé, en s'appuyant sur la formule qui donne l'intégrale d'une équation linéaire, non homogène, du second ordre, on peut encore intégrer (4) par approximations successives.

Les caractéristiques ainsi obtenues dépendent d'une constante arbitraire, et, si  $|\sigma|$  n'est pas entier, l'une d'entre elles est holomorphe pour  $t = 0$ ;  $|\sigma|$  pouvant prendre deux valeurs, on en déduit que l'équation (VI) possède, en général, *deux intégrales*  $\Lambda_1(t)$ ,  $\Lambda_2(t)$ , *holomorphes pour*  $t = 0$ . Lorsqu'une des valeurs de  $|\sigma|$  est entière (ce qui entraîne une relation entre  $a, b, c, d$ ), (VI) possède une infinité continue d'intégrales holomorphes en  $t$  et  $t \log t$ ; et même, si  $a, b, c, d$  satisfont à une seconde relation, les intégrales de cette famille sont toutes holomorphes pour  $t = 0$ .

Enfin, dans le cas où  $P(\lambda)$  est identiquement nul <sup>(1)</sup>, les caractéris-

---

(1) Ce qui ne peut avoir lieu que pour des équations (VI) de forme spéciale.

tiques qui représentent l'intégrale s'obtiennent par des développements analogues à ceux du cas précédent ( $s = \sigma$ ); elles sont dites *de la première espèce, du type exceptionnel, et de la deuxième sorte*; on démontre d'ailleurs qu'elles sont *holomorphes à l'origine*, où elles prennent une valeur arbitraire (1).

Une théorie exactement pareille permet de construire pour (VI) des caractéristiques de deuxième espèce (du type général ou du type exceptionnel); donnons seulement leur définition. Posons

$$\lambda^* = \frac{\lambda}{t} \quad \text{et} \quad \alpha^* = \alpha - \frac{t(t-1)}{2(\lambda-t)}\lambda' - \frac{2\lambda-1}{2};$$

à toute caractéristique de deuxième espèce correspond un nombre  $\omega^*$  ( $0 \leq \omega^* < 1$ ) tel que,  $t$  tendant vers zéro,  $|t^{\omega^*}\lambda^*|$  reste borné (2), et  $\alpha^*$  tende vers une limite finie  $\alpha_0^*$ ; enfin, pour  $t = t_0$ , on doit avoir  $\lambda^* = \lambda_0^* (\neq \infty)$  (3).

4. La seconde Partie de ce Mémoire a pour but d'établir qu'il n'existe pour (VI) aucune autre caractéristique que celles de la première Partie. La démonstration de ce fait essentiel est délicate; je résumerai rapidement la méthode qui y conduit.

Soit  $\lambda(t)$  une intégrale *quelconque* de (VI); j'établis d'abord ce résultat: il existe un chemin analytique  $\mathcal{L}$ , tendant vers zéro, et de longueur finie, tel que, sur  $\mathcal{L}$ , on puisse toujours trouver des points  $t_i$ , arbitrairement voisins de zéro, et pour lesquels  $|\alpha|$  et  $|t^{\omega}\lambda^{-1}|$  (ou  $|\alpha^*|$

(1) La théorie des caractéristiques exceptionnelles aurait pu être établie aussi au moyen des méthodes de Briot et Bouquet; mais, pour plusieurs raisons, notamment pour préparer la voie aux développements de la deuxième Partie, il est préférable d'employer les méthodes précédentes.

(2) Supérieurement, et (pour  $\omega^* \neq 0$ ), inférieurement.

(3) L'analogie qui existe entre les théories des caractéristiques de première et de deuxième espèce est à ce point profonde qu'à tout résultat obtenu dans une des théories correspond un résultat corrélatif dans l'autre théorie; il y a là *une loi de dualité* remarquable, et tout à fait analogue à celle que l'on rencontre à propos des coordonnées ponctuelles et tangentielles. On en verra un exemple dans l'exposé du n° 51, et l'on saisira toute la signification de cet exemple quand j'aurai dit que tous les résultats de ce Mémoire sont susceptibles d'être énoncés dans la forme dualistique adoptée au n° 51

et  $|t^{\sigma} \lambda|$ ) prennent des valeurs bornées. Supposons alors que  $\alpha$  (ou  $\alpha^*$ ) ne tende pas vers une valeur exceptionnelle, correspondant à  $s = \sigma$  (ou à  $s^* = \sigma^*$ ); en calculant  $\frac{\partial \alpha}{\partial \alpha_0}$  (ou  $\frac{\partial \alpha^*}{\partial \alpha_0^*}$ ) par approximations successives et en observant que, quel que soit  $\lambda(t_i)$ , cette dérivée est arbitrairement voisine de 1 pour  $|t_i|$  assez petit, je démontre qu'il est possible de construire une caractéristique de première (ou deuxième) espèce, prenant en  $t_i$  les valeurs  $\lambda_i, \alpha_i$  (ou  $\lambda_i^*, \alpha_i^*$ ), et, par suite, coïncidant avec la proposée.

Jusqu'ici, et comme il était aisé à prévoir, la méthode reproduit dans ses grandes lignes (quoique avec certaines complications) la méthode employée par M. Painlevé pour étudier toutes les intégrales de (VI) dans le voisinage d'un point  $t_0$  ( $\neq 0, 1, \infty$ ). Par contre, si l'intégrale  $\lambda(t)$  est telle que  $\alpha$  (ou  $\alpha^*$ ) tende vers une valeur exceptionnelle, *la méthode de M. Painlevé* (même transformée) *devient complètement inapplicable*. Les méthodes qui doivent lui être substituées sont bien différentes, suivant que  $\alpha$  tend vers une valeur exceptionnelle de la première sorte ou de la deuxième sorte. Dans le premier cas, par exemple, toute la difficulté revient à prouver que  $t^{-\sigma}(\lambda - \Lambda_1)$  et  $t^{1-\sigma}(\lambda' - \Lambda'_1)$  restent bornés sur  $\mathcal{L}$  dans le voisinage de l'origine. On y parvient en s'appuyant sur *un système d'équations intégrales vérifiées par  $\lambda$  et  $\lambda'$* , et sur un *théorème général relatif à deux fonctions continues* dont l'une est croissante (n° 38); on prouve ainsi qu'il existe dans le voisinage de zéro une infinité de points pour lesquels les expressions précédentes sont bornées (nos 39-41), et l'on démontre ensuite que cette propriété est vérifiée arbitrairement près de zéro.

5. Ainsi donc, en vertu des résultats de la deuxième Partie, les caractéristiques obtenues dans la première Partie doivent nous permettre de faire l'étude de l'intégrale  $\lambda(t)$  dans toute la région ( $\mathfrak{A}$ ); c'est précisément cette étude qui constitue l'objet de la troisième Partie.

Je commence d'abord par faire la description de  $\lambda(t)$  à l'intérieur du secteur S du n° 3. On pourrait la résumer d'un mot en disant que,

dans S,  $\lambda(t)$  est *asymptote* (au sens de M. Pierre Boutroux) à une intégrale de l'équation  $t^2 \lambda'^2 = \lambda^2 P(\lambda)$ . L'assertion précédente se trouve d'ailleurs parfaitement précisée par le théorème suivant : à l'intérieur de S, l'équation  $t^\omega \lambda^{-1} - k = 0$  ( $0 \leq \omega < 1$ ) *admet pour toute valeur de k, finie et non nulle, une double infinité de solutions*; chacune des deux suites s'éloigne dans une direction bien déterminée de S, les intervalles des racines tendant vers une quantité indépendante de k. Ainsi, dans S, le point  $T = \infty$  est une *singularité essentielle* de l'intégrale.

L'étude de  $\lambda(t)$  une fois achevée dans S, il faut la prolonger à travers toute la région ( $\mathfrak{R}$ ); or le prolongement analytique de  $\lambda(t)$  résulte aussitôt de la remarque que voici : *toute intégrale qui, sur un rayon O $\Delta$  de ( $\mathfrak{R}$ ) peut être représentée par une caractéristique de première espèce (et du type général),  $C_1$ , peut aussi être représentée sur O $\Delta$  par une caractéristique de deuxième espèce,  $C_2$*  (du moins quand le nombre  $\omega$  correspondant à C n'est pas nul); mais les secteurs où convergent les développements qui représentent  $C_1$  et  $C_2$  ne sont pas identiques; ils présentent un secteur commun et *débordent l'un et l'autre des deux côtés de ce secteur*. Pour représenter  $\lambda(t)$  dans ( $\mathfrak{R}$ ), on est ainsi conduit à subdiviser ( $\mathfrak{R}$ ) en un certain nombre de secteurs adjacents,  $S_{2n}^{(1)}$ , renfermant des caractéristiques de première espèce, et reliés mutuellement par d'autres secteurs  $S_{2n+1}$ , dits *adhérents* aux premiers, et renfermant des caractéristiques de deuxième espèce. L'exposé détaillé des résultats obtenus à ce sujet forme l'objet du n° 51; bornons-nous ici à l'énoncé suivant :

Appelons  $s(t)$  l'une des deux expressions  $(4a + 4c + 1 - 4a)^{\frac{1}{2}}$ ; lorsqu'on s'éloigne indéfiniment sur un rayon O $\Delta$  de ( $\mathfrak{R}$ ) non parallèle à la frontière de deux secteurs de première espèce adjacents,  $s(t)$  tend vers une limite, variable avec le secteur qui contient O $\Delta$ ; *cette limite, constante dans tout un secteur, varie brusquement de deux unités quand on passe de ce secteur à l'un des deux secteurs* (de première espèce) *qui lui sont adjacents*. Il y a là une *propriété-limite exacte* qui,

---

(1) Le secteur  $S_0$ , obtenu pour  $n = 0$ , coïncide d'ailleurs avec le secteur S primitivement envisagé.

je le montrerai ailleurs, tire sa véritable signification du problème de Riemann.

Les résultats précédents subissent différentes modifications lorsqu'on attribue certaines valeurs particulières aux conditions initiales; ainsi, lorsque  $s$  est réel ou égal à l'une des valeurs exceptionnelles  $\sigma$ , l'intégrale  $\lambda(t)$  admettra dans toute la région  $(\mathfrak{R})$ , ou seulement dans un secteur (exceptionnel) de  $(\mathfrak{R})$ , le point  $T = \infty$  comme singularité transcendante (et non plus essentielle); une représentation géométrique simplifie l'examen de ces modifications. J'ajouterai d'ailleurs qu'une discussion fondée sur l'étude des approximations successives qui fournissent les caractéristiques, met à l'abri de toute objection tous les résultats concernant la variation continue de  $\lambda(t)$  par rapport aux conditions initiales (*voir* notamment le n° 54).

Enfin, la troisième Partie se termine par la démonstration d'un théorème qui trouvera son application dans la résolution du problème de Riemann; dans l'énoncé de ce théorème, j'introduis la notion de *paramètre d'une branche d'intégrale de (VI) dans le voisinage d'un point singulier*: j'appelle ainsi un nombre  $\xi$  tel que les diverses déterminations de  $\frac{\log \xi}{2\pi i}$  reproduisent l'ensemble des valeurs limites de  $s(t)$  [et  $s^*(t)$ ] énoncées plus haut. Je montrerai dans un autre travail que la notion précédente joue un rôle essentiel dans l'étude de l'intégrale générale de (VI) à travers tout le plan  $(t)$ .

6. Parmi les résultats de la quatrième Partie, je citerai deux vérifications de la théorie précédente, l'une relative à un cas de réductibilité connu, où (VI) est vérifiée par toutes les solutions d'une équation de Riccati (du type hypergéométrique); l'autre se rattache à la théorie des fonctions elliptiques. Appelons  $\varphi(u, t)$  la fonction doublement périodique de  $u$  qui satisfait à l'équation  $\varphi_u'^2 = 4\varphi(\varphi - 1)(\varphi - t)$ , et soit  $\omega_1(t), \omega_2(t)$  un couple de périodes primitives  $\varphi$ ; l'équation (VI) obtenue (1) en prenant  $a = b = c = d = -\frac{1}{4}$  admet précisément pour

---

(1) Cette équation ne diffère pas essentiellement de celle que M. Émile Picard a indiquée dans son Mémoire couronné (*Journal de Liouville*, 4<sup>e</sup> série, t. V, 1889, p. 298-300).

intégrale  $\lambda = \varphi(A_1 \omega_1 + A_2 \omega_2, t)$  où  $A_1$  et  $A_2$  sont deux constantes arbitraires. La théorie des fonctions elliptiques fournit alors, sur cet exemple, une vérification directe et complète de notre étude.

Dans un travail ultérieur, j'indiquerai comment les résultats de ce Mémoire (1) permettent de résoudre le problème de Riemann pour l'équation (E<sub>v</sub>). Afin de traiter le problème analogue pour une équation (régulière) quelconque du second ordre, il faudrait étendre aux systèmes différentiels d'ordre  $2n$ , qui généralisent (VI), et que j'ai introduits dans ma Thèse, les méthodes et les résultats du présent travail. Une telle généralisation présentera sans doute plus d'une difficulté, comme il advient souvent lorsqu'on passe du cas des fonctions d'une variable à celui des fonctions de plusieurs variables; mais sa possibilité me paraît hors de doute : ainsi, j'ai déjà obtenu pour ces systèmes les solutions qu'il faudra adopter au début des approximations successives.

## PREMIÈRE PARTIE.

7. Considérons l'équation différentielle (2)

$$(VI) \quad \lambda'' = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda-1} + \frac{1}{\lambda-t} \right) \lambda'^2 - \left( \frac{1}{t} + \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t-\lambda} \right) \lambda' \\ + \frac{2\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}{t^2(t-1)^2} \\ \times \left[ a + b + c + d + 1 - \left( a + \frac{1}{4} \right) \frac{t}{\lambda^2} + \left( b + \frac{1}{4} \right) \frac{t-1}{(\lambda-1)^2} - \frac{ct(t-1)}{(\lambda-t)^2} \right];$$

ses intégrales sont méromorphes pour toute valeur de  $t$ , sauf pour  $t = 0, 1, \infty$ ; nous allons étudier les intégrales de (VI) au voisinage de l'une de ces trois singularités. Remarquons d'abord que nous pouvons nous borner à l'étude d'un seul point singulier, soit  $t = 0$ ; en effet, la

(1) Les principaux résultats de ce Mémoire ont été publiés aux *Comptes rendus*, t. 162, 1916, p. 939; t. 163, 1916, p. 8 et 118.

(2) Dans tout ce Mémoire, les accents indiquent des différentiations par rapport à la variable indépendante  $t$ .

transformation

$$t|1-t, \quad \lambda|1-\lambda, \quad a|b, \quad b|a,$$

qui permute les points 0 et 1, change (VI) en elle-même; d'une façon analogue, la transformation

$$t|t^{-1}, \quad \lambda|\lambda t^{-1}, \quad b|c, \quad c|b,$$

qui permute 0 et  $\infty$ , conserve la forme de (VI). Il nous suffira donc d'étudier l'intégrale générale de (VI) dans le domaine de l'origine.

A cet effet, nous commencerons par former des développements en séries qui représenteront les intégrales de (VI) le long de chemins bien déterminés,  $\ominus$ . Ces développements sont de deux espèces : pour ceux de première espèce, il existe un nombre réel  $\omega$ , satisfaisant aux inégalités  $0 \leq \omega < 1$ , et tel que  $|t^\omega \lambda^{-1}|$  reste borné sur  $\ominus$ ; pour les développements de deuxième espèce, la même assertion s'applique au rapport  $|t^{-\omega} \lambda|$  (avec  $0 < \omega \leq 1$ ).

#### Caractéristiques de première espèce.

##### TYPE GÉNÉRAL.

8. Commençons par rappeler une transformation connue; posons

$$\begin{aligned} g(\lambda, t) &\equiv \lambda(\lambda-1)(\lambda-t) \left[ \frac{a + \frac{1}{4}}{\lambda^2} + \frac{b + \frac{1}{4}}{(\lambda-1)^2} + \frac{c}{(\lambda-t)^2} + \frac{d + \frac{1}{2}}{\lambda(\lambda-1)} \right] \\ &= (a+b+c+d+1)\lambda + \left(a + \frac{1}{4}\right) \frac{t}{\lambda} + \left(b + \frac{1}{4}\right) \frac{1-t}{\lambda-1} \\ &\quad + c \frac{t(t-1)}{\lambda-t} - (a+b-c+d+1)t - a + b - c; \end{aligned}$$

en vertu d'une proposition plus générale que j'ai établie dans ma Thèse (1), toutes les intégrales de (VI) satisfont au système

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{t^2(t-1)^2}{4\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)} \lambda'^2 = g(\lambda, t) + \alpha, \\ \alpha' + \frac{\alpha}{\lambda-t} + 2c \frac{\lambda(\lambda-1)}{(\lambda-t)^2} = 0. \end{cases}$$

(1) *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, 3<sup>e</sup> série, t. XXIX, 1912, p. 83-84 [équations (23) et (25)].

Il est aisé de retrouver ce résultat; en effet, différencions la première équation (1); il viendra

$$(2) \quad \frac{t^2(t-1)^2\lambda'^2}{4\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)} \left[ \frac{2\lambda''}{\lambda} - \left( \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda-1} + \frac{1}{\lambda-t} \right) \lambda' + \frac{2}{t} + \frac{2}{t-1} - \frac{1}{t-\lambda} \right] \\ = \frac{\partial g}{\partial \lambda} \lambda' + \frac{\partial g}{\partial t} + \alpha'.$$

Mais d'après la première expression de  $g$ , on a

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{g}{t-\lambda} + 2c \frac{\lambda(\lambda-1)}{(\lambda-t)^2} = \frac{-t^2(t-1)^2}{4\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)^2} \lambda'^2 + \frac{\alpha}{\lambda-t} + 2c \frac{\lambda(\lambda-1)}{(\lambda-t)^2},$$

et, en vertu de la seconde équation (1), (2) s'écrira

$$\frac{t^2(t-1)^2\lambda'}{2\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)} \left[ \lambda'' - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda-1} + \frac{1}{\lambda-t} \right) \lambda'^2 \right. \\ \left. + \left( \frac{1}{t} + \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t-\lambda} \right) \lambda' - \frac{2\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}{t^2(t-1)^2} \frac{\partial g}{\partial \lambda} \right] = 0.$$

Ainsi, la résultante du système (1) se décompose (1) en deux équations : 1° l'équation du premier ordre,  $\lambda' = 0$ , dont les intégrales ne satisferont pas à (VI) en général (2); 2° une équation du second ordre, que l'on reconnaît identique à (VI) au moyen de la seconde expression de  $g(\lambda, t)$ .

En conséquence, si nous obtenons une solution du système (1), nous ne pourrions affirmer qu'elle appartient à (VI) qu'après avoir vérifié qu'elle ne se réduit pas identiquement à une constante.

Cela étant, soient  $\alpha_0$  et  $\lambda_0$  deux quantités quelconques, la première finie (3), la seconde non nulle (4); je vais montrer que, pour  $|t_0|$  suffi-

(1) Dans ma Thèse, j'ai indiqué sous une forme plus générale cette circonstance qui rappelle une particularité des équations de la Dynamique (notes des pages 45 et 81).

(2) Voir la note 2 de la page 286 (n° 27).

(3) D'une façon plus précise, on imposera à  $\alpha_0$  une borne supérieure ne dépendant que du nombre  $\eta$  dont il sera question au n° 9. De plus  $\alpha_0$  devra satisfaire à diverses restrictions provenant de celles qui seront imposées plus loin à  $s$ .

(4) On pourra même prendre  $\lambda_0 = \infty$ , sauf toutefois pour

$$a - b + c - \alpha_0 = 0 = a + b + c + d + 1,$$

ce qui est le cas d'exception signalé à la note de la page 276.

samment petit, il existe une intégrale  $[\lambda(t), \alpha(t)]$  de (1) répondant aux conditions suivantes : pour  $t = t_0$ , on a  $\lambda = \lambda_0$ ; de plus,  $t$  tendant vers 0, le long d'un chemin  $\sigma$  qu'on définira tout à l'heure,  $\alpha$  tend vers  $\alpha_0$  : enfin, il existe un nombre réel  $\omega$  tel que  $0 \leq \omega < 1$  et que  $t^\omega \lambda^{-1}$  reste borné quand  $t$  tend vers 0. Nous obtiendrons cette intégrale par la méthode des approximations successives; mais, auparavant, il nous faudra effectuer un changement de variables sur le système (1).

9. A cet effet, je remarquerai tout d'abord qu'on peut écrire la première équation (1) sous la forme suivante :

$$(3) \quad t^2(t-1)^2\lambda'^2 = 4\lambda^2(\lambda-1)[g(\lambda, 0) + \alpha_0] - 4t\lambda(\lambda-1)[g(\lambda, 0) + \alpha_0] \\ + 4\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)[g(\lambda, t) - g(\lambda, 0) + \alpha - \alpha_0],$$

les trois termes du second membre étant des *polynomes* du quatrième ou du troisième degré en  $\lambda$ . Dans cette équation, remplaçons  $\lambda$  et  $\alpha$  par un système d'intégrales de (1) satisfaisant aux conditions du n° 8 et faisons tendre  $t$  vers 0; les deux termes de la seconde ligne tendront alors vers 0, de sorte que le deuxième membre se réduira sensiblement à son premier terme qui va jouer dans la suite un rôle capital. Ce terme est égal au produit de  $\lambda^2$  par le polynome

$$P(\lambda) = 4(\lambda-1)[g(\lambda, 0) + \alpha_0] \\ = (4a + 4c + 1)(\lambda-1)^2 + (4b + 1)\lambda^2 + (4d + 2)\lambda(\lambda-1) + 4\alpha_0(\lambda-1).$$

Posons

$$(4) \quad s^2 = 4a + 4c + 1 - 4\alpha_0;$$

le polynome  $P(\lambda)$  prendra la forme

$$(5) \quad P(\lambda) = 4(a + b + c + d + 1)\lambda(\lambda-1) + (4b + 1)\lambda - s^2(\lambda-1).$$

En général,  $P(\lambda)$  sera du second degré et possédera deux racines  $h_1$  et  $h_2$ ; pour  $a + b + c + d + 1 = 0$ ,  $P(\lambda)$  sera du premier degré seulement. Il se réduira à la constante  $4b + 1$  pour

$$a + b + c + d + 1 = 0 = 4b + 1 - s^2;$$

enfin il ne pourra s'annuler identiquement que pour

$$a + b + c + d + 1 = 0, \quad 4b + 1 = 0, \quad s = 0.$$

Nous excluons pour le moment ce cas singulier que nous étudierons au n° 30; nous avons donc le droit de diviser par  $\lambda^2 P(\lambda)$  les deux membres de (3) qui deviendra

$$(6) \quad \frac{t^2(t-1)^2}{\lambda^2 P(\lambda)} \lambda'^2 = 1 + F_1(\lambda, \alpha - \alpha_0, t),$$

avec

$$\begin{aligned} F_1(\lambda, \alpha - \alpha_0, t) = & -\frac{t}{\lambda} + 4 \left(1 - \frac{t}{\lambda}\right) (\lambda - 1) \frac{\alpha - \alpha_0}{P(\lambda)} \\ & + \frac{4}{P(\lambda)} \left[ \left(a + \frac{1}{4}\right) \left(1 - \frac{t}{\lambda}\right) (\lambda - 1) - \left(b + \frac{1}{4}\right) \left(1 - \frac{t}{\lambda}\right) \lambda \right. \\ & \left. + c(t-1)(\lambda-1) - (a+b-c+d+1)(\lambda-1)(\lambda-t) \right] \frac{t}{\lambda}. \end{aligned}$$

Or, soit  $\eta$  un nombre positif arbitrairement petit, choisi une fois pour toutes;  $F_1$ , considérée comme fonction des trois variables indépendantes  $\lambda$ ,  $\alpha - \alpha_0$  et  $t$ , sera certainement holomorphe par rapport à ces variables quand on aura simultanément

$$(7) \quad \left| \frac{t}{\lambda} \right| < \eta,$$

$$(8) \quad \left| (\lambda - 1) \frac{\alpha - \alpha_0}{P(\lambda)} \right| < \eta$$

et

$$(9) \quad \left| \frac{t\lambda^j}{P(\lambda)} \right| < \eta \quad (j = -1, 0, 1);$$

de plus, dans les mêmes conditions, le module de  $F_1$  sera arbitrairement petit. Mais alors il est loisible d'écrire (6) sous la forme (1)

$$(10) \quad \frac{t\lambda'}{\lambda\sqrt{P(\lambda)}} = (1-t)^{-\frac{1}{2}} [1 + F_2(\lambda, \alpha - \alpha_0, t)],$$

---

(1) La détermination du radical étant choisie arbitrairement pour le premier membre; pour le second, on adoptera celle qui est voisine de 1.

$F_2$  désignant une fonction de  $\lambda$ ,  $\alpha - \alpha_0$  et  $t$  qui est holomorphe (et de module arbitrairement petit) lorsque (7), (8) et (9) seront vérifiées; de plus, en vertu des mêmes conditions (vérifiées par les couples  $\lambda$ ,  $\alpha$  et  $\bar{\lambda}$ ,  $\bar{\alpha}$ ),  $F_2$  satisfera aux inégalités

$$(11) \quad |F_2(\lambda, \alpha - \alpha_0, t)| < f_1 \left\{ A_1 |\alpha - \alpha_0| + B_1 \left| \frac{t}{\lambda} \right| \right\},$$

$$(12) \quad |F_2(\bar{\lambda}, \bar{\alpha} - \alpha_0, t) - F_2(\lambda, \alpha - \alpha_0, t)| \\ < f_2 \left\{ C_1 |\alpha - \alpha_0| + D_1 |t| \left| \frac{1}{\bar{\lambda}} - \frac{1}{\lambda} \right| + f_1 E_1 |\bar{\alpha} - \alpha| \right\},$$

où  $A_1, \dots, E_1$  représentent des nombres positifs bornés, *indépendants* de  $\eta$ ; enfin,  $f_1$  et  $f_2$  désignent respectivement des nombres supérieurs aux modules des diverses expressions  $\frac{\lambda^{j+1}}{P(\lambda)}$  ( $j = -1, 0, 1$ ) et  $\frac{\lambda^{j'+1}}{P^2(\lambda)}$  ( $j' = -1, 0, 1, 2, 3$ ).

10. Donnons-nous alors une quantité  $t_0$ , de module inférieur à 1 et assez petit pour que  $\lambda_0$  vérifie en même temps avec  $t_0$  les conditions (7), (8) et (9) où  $\eta$  est remplacé par  $\frac{\eta}{2}$ , et faisons le changement de fonction

$$(13) \quad \mu = \int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{d\lambda}{\lambda \sqrt{P(\lambda)}},$$

qui aura certainement un sens, si la quantité (non nulle)  $\lambda_0$ , ne coïncide pas avec une racine double (éventuelle) de  $P(\lambda)$ ; (13) définira une fonction uniforme élémentaire  $\lambda(\mu)$ . Appliquons alors à (10) et à la seconde équation (1) la transformation (13); ces équations [et par suite le système (1)] s'écriront en définitive

$$(14) \quad \begin{cases} t \frac{d\mu}{dt} = 1 + F(\mu, \alpha - \alpha_0, t), \\ \frac{d\alpha}{dt} = \alpha \varphi(\mu, t) + \psi(\mu, t), \end{cases}$$

avec

$$(15) \quad \varphi(\mu, t) \equiv -\frac{1}{\lambda(\mu)} \frac{1}{1 - \frac{t}{\lambda(\mu)}}, \quad \psi(\mu, t) \equiv -\frac{2c}{\lambda(\mu)} \frac{\lambda(\mu) - 1}{\left[1 - \frac{t}{\lambda(\mu)}\right]^2};$$

quant à  $F$ , ce sera une fonction des trois variables  $\mu$ ,  $\alpha - \alpha_0$  et  $t$  qui sera sûrement holomorphe relativement à ces variables, si ces dernières vérifient les conditions qui correspondent à (7), (8) et (9) en vertu de (13). De plus  $F$  satisfera aux inégalités transformées de (11) et (12); ces inégalités joueront un rôle essentiel dans notre démonstration.

Or le système (14) peut être résolu par approximations successives de la façon suivante : Posons tout d'abord (les chemins d'intégration seront bientôt fixés)

$$\alpha_0(t) = \alpha_0, \quad \mu_0(t) = \int_{t_0}^t \frac{dt}{t} = \log \frac{t}{t_0};$$

puis

$$\alpha_1 = \alpha_0 + \int_0^t [\alpha_0 \varphi(\mu_0, t) + \psi(\mu_0, t)] dt,$$

$$\mu_1 = \int_{t_0}^t \frac{1 + F(\mu_0, \alpha_1 - \alpha_0, t)}{t} dt;$$

d'une façon générale, ayant calculé  $\alpha_n$  et  $\mu_n$ , on définira  $\alpha_{n+1}$  et  $\mu_{n+1}$  par les formules

$$(16) \quad \begin{cases} \alpha_{n+1} = \alpha_0 + \int_0^t [\alpha_n \varphi(\mu_n, t) + \psi(\mu_n, t)] dt, \\ \mu_{n+1} = \int_{t_0}^t \frac{1 + F(\mu_n, \alpha_{n+1} - \alpha_0, t)}{t} dt. \end{cases}$$

Pour établir la convergence de ces approximations, nous ferons en sorte que les transformées de (7), (8), (9), (11) et (12) par (13) soient vérifiées quand on y remplacera  $(\mu, \alpha)$  par l'un quelconque des couples  $(\mu_n, \alpha_{n+1})$ ; en particulier, cela devra avoir lieu pour  $n = 0$ , et, dans ce cas, nous procéderons de telle sorte que (7), (8) et (9) soient encore vérifiées quand on y remplacera  $\eta$  par  $\frac{\eta}{2}$ . De plus, les intégrales qui donnent  $\alpha_{n+1}$  doivent avoir un sens; or, pour  $n = 0$ , ceci exige qu'il existe un nombre réel  $\omega$ , inférieur à 1, et tel que sur le chemin d'intégration l'expression

$$(17) \quad t^\omega : \lambda[\mu_0(t)]$$

soit bornée supérieurement en module. Il faudra donc, avant tout, examiner les diverses conditions précédentes.

11. Commençons par la dernière qui nous fournira une première indication générale sur la forme de nos chemins d'intégration  $\ominus$ . Si  $s$  n'est pas nul, il en est de même des racines  $h_1$  et  $h_2$  de  $P(\lambda) = 0$ , et l'on tire de (13)

$$(18) \quad \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} \right) \\ = \left[ \frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} \right) \right] \operatorname{ch} s\mu + \sqrt{\left( \frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{h_1} \right) \left( \frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{h_2} \right)} \operatorname{sh} s\mu.$$

Pour que (17) soit bornée en module, il suffira donc qu'il en soit de même des expressions

$$\frac{t_0^\omega}{\lambda_0} \left( \frac{t}{t_0} \right)^\omega \operatorname{ch} s\mu_0,$$

$$\frac{1}{2} \left( \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} \right) t^\omega (\operatorname{ch} s\mu_0 - 1) = 4(a + b + c + d + 1)(h_1 + h_2) t_0^\omega \left[ \left( \frac{t}{t_0} \right)^{\frac{\omega}{2}} \frac{\operatorname{sh} \frac{s\mu_0}{2}}{s} \right]^2$$

et

$$\frac{\sqrt{(\lambda_0 - h_1)(\lambda_0 - h_2)}}{\lambda_0} \frac{t^\omega \operatorname{sh} s\mu_0}{\sqrt{h_1 h_2}} \\ = \sqrt{4(a + b + c + d + 1)(\lambda_0 - h_1)(\lambda_0 - h_2)} \frac{t_0^\omega}{\lambda_0} \left( \frac{t}{t_0} \right)^\omega \frac{\operatorname{sh} s\mu_0}{s}.$$

Posons

$$t = r e^{i\theta} \quad (r \text{ et } \theta \text{ réels}),$$

puisque  $|t_0^\omega \lambda_0^{-1}|$  doit être borné (n° 10), il nous suffira d'écrire

$$\left( \frac{r}{r_0} \right)^\omega \chi(\mu_0) < J,$$

où  $J$  est borné et où  $\chi(\mu)$  désigne le plus grand des modules des trois nombres

$$\operatorname{ch} s\mu, \quad \left( \frac{1}{s} \operatorname{sh} \frac{s\mu}{2} \right)^2, \quad \frac{1}{s} \operatorname{sh} s\mu;$$

(17) sera alors certainement de module borné. Pour simplifier la dis-

cussion, nous ferons encore le changement de variable

$$(19) \quad T = \log \frac{t}{t_0}$$

(qui donne  $\mu_0 = T$ ), et nous poserons enfin

$$T = u e^{i\gamma}, \quad s = v e^{i\delta},$$

où tous les nouveaux symboles sont réels. On trouve alors aisément

$$(20) \quad \left| \frac{\text{sh } s \mu_0}{s} \right| = \frac{\sqrt{\text{sh}^2 [uv \cos(\gamma + \delta)] + \sin^2 [uv \sin(\gamma + \delta)]}}{v} \\ < \frac{\text{sh} |uv \cos(\gamma + \delta)|}{v} + u,$$

$$(21) \quad \left| \frac{\text{sh}^2 \frac{s \mu_0}{2}}{s^2} \right| = \frac{1}{v^2} \left\{ \text{sh}^2 \left[ \frac{uv}{2} \cos(\gamma + \delta) \right] + \sin^2 \left[ \frac{uv}{2} \sin(\gamma + \delta) \right] \right\} \\ < \frac{1}{v^2} \text{sh}^2 \left[ \frac{uv}{2} \cos(\gamma + \delta) \right] + \frac{u^2}{4},$$

$$(22) \quad |\text{chs } \mu_0| = \frac{\sqrt{\text{sh}^2 [uv \cos(\gamma + \delta)] + \cos^2 [uv \sin(\gamma + \delta)]}}{v} \\ < \text{sh} |uv \cos(\gamma + \delta)| + 1.$$

Dès lors, pour que  $\left(\frac{r}{r_0}\right)^\omega \chi(\mu_0)$  reste borné, nous imposerons d'abord la même condition à  $u^2 e^{\omega u \cos \gamma}$ ; il faudra donc que, dans le plan ( $t$ ), notre chemin d'intégration  $\ni$  tende vers 0 au moins aussi vite que la spirale

$$(23) \quad r = A \theta^{-\frac{2}{\omega}}$$

où A est borné. De plus, il faudra encore que, lorsque  $u$  croît indéfiniment ( $\cos \gamma$  étant négatif), l'expression

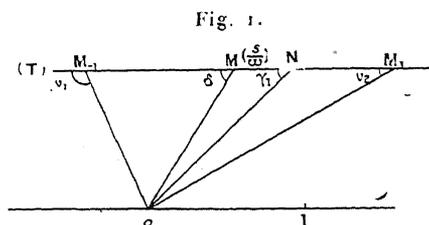
$$(24) \quad y = e^{\omega u \cos \gamma} \frac{\text{sh} |uv \cos(\gamma + \delta)|}{v}$$

reste bornée. Or, ceci exige tout d'abord qu'on ait

$$(25) \quad \omega \cos \gamma \pm v \cos(\gamma + \delta) \leq 0.$$

Figurons en M, M<sub>1</sub>, et M<sub>2</sub> (*fig. 1*) les points qui ont respectivement

pour affixes  $s\omega^{-1}$ ,  $s\omega^{-1} - 1$  et  $s\omega^{-2} + 1$ ;  $s$  n'étant donné que par son carré, nous avons le droit de supposer  $\Re\left(\frac{s}{i\omega}\right) \geq 0$ . En conséquence, les arguments des trois nombres précédents (qui sont respectivement  $\delta$ ,  $\nu_1$



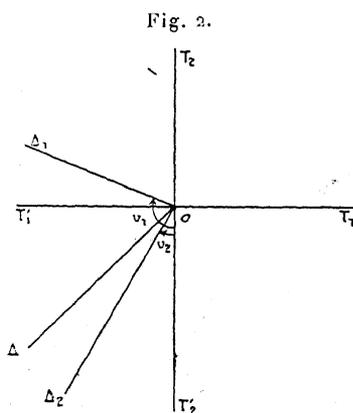
et  $\nu_2$ ) seront compris entre 0 et  $\pi$ . Posons en outre  $\gamma_1 = \frac{3\pi}{2} - \gamma$ ;  $\gamma_1$  sera encore compris entre 0 et  $\pi$ . Cela étant (25) se décomposera dans les deux conditions

$$\cos(\gamma + \nu_2) \leq 0 \leq \cos(\gamma + \nu_1),$$

d'où

$$(26) \quad \nu_2 \leq \gamma_1 \leq \nu_1.$$

Il existe ainsi sur le segment  $M_{-1}M_1$  un point  $N$  tel que  $ON$  fasse



avec la direction positive  $(o, 1)$  un angle  $\gamma_1$ ; et l'on a, de plus,

$$(27) \quad \left| \frac{\cos(\gamma + \delta)}{\cos \gamma} \right| = \frac{MN}{OM} = \frac{\omega}{\rho} MN.$$

Et maintenant, nous pouvons indiquer l'allure générale du chemin  $\bar{\varepsilon}$ , et fixer le nombre  $\omega$  qui lui correspond. En effet, figurons dans le plan (T) (*fig.* 2), les droites  $O\Delta_1$  et  $O\Delta_2$ , d'arguments  $\frac{3\pi}{2} - \nu_1$  et  $\frac{3\pi}{2} - \nu_2$ ; la condition (26) signifie que le rayon vecteur  $O\Delta$  mené de  $O$  à un point quelconque du chemin  $\bar{\varepsilon}$ , transformé de  $\varepsilon$  par (19), finit par rester intérieur (au sens large) au secteur  $\Delta_1 O \Delta_2$ . Mais l'amplitude de ce secteur croît avec  $\omega$  qui, d'autre part, est assujéti à la seule restriction  $\omega < 1$ . Appelons alors  $S$  le secteur  $\Delta_1 O \Delta_2$  obtenu en remplaçant  $\omega$  par  $1 - \eta$  dans les constructions précédentes; il nous sera loisible de prendre pour  $\bar{\varepsilon}$  un rayon quelconque de  $S$  (sauf à le modifier si c'est nécessaire; *cf.* n° 18). Observons d'ailleurs que  $S$  existera toujours si  $s$  est complexe; et si  $s$  tend vers une valeur réelle,  $S$  s'évanouira ou comprendra tout le demi-plan  $T_2 T_1' T_2'$  défini par  $R(T) < 0$ , suivant que  $s^2$  tendra vers une valeur  $\geq 1$  ou  $< 1$ ; ainsi donc, lorsque  $s$  est réel, il ne saurait exister de secteur  $S$  (et, par suite, de chemin  $\varepsilon$ ) que si l'on a  $s^2 < 1$ .

Reste à fixer  $\omega$ . Pour cela, supposons d'abord  $|s|$  borné inférieurement, soit  $|s| = \nu > \eta$ ; dans cette hypothèse, nous prendrons

$$(28) \quad \omega = \nu \left| \frac{\cos(\gamma + \delta)}{\cos \gamma} \right|,$$

quantité au plus égale à  $1 - \eta$ , d'après (27);  $\omega$  étant ainsi fixé sur  $O\Delta$  (1), on aura évidemment

$$y < \frac{1}{2\nu} < \frac{1}{2\eta},$$

et  $y$  tendra vers  $1 : 2\nu$  par valeurs croissantes. D'ailleurs, on aboutirait à des conclusions analogues pour les expressions (21) et (22), en sorte que  $T$  décrivant  $O\Delta$ , (17) restera bornée supérieurement (2) (et inférieurement, sauf pour  $\omega = 0$ ).

(1) L'étude de cette correspondance sera reprise et développée dans la troisième Partie.

(2) On constaterait aisément que la borne supérieure de (17) a pour expression  $\frac{r_0^\omega}{\eta} \left( \frac{B_1'}{|\lambda_0|} + B_2' \right)$ , où  $B_1'$  et  $B_2'$  sont indépendants de  $|\lambda_0|$  et  $\eta$ .

Considérons maintenant le cas où l'on a  $|s| < \eta$ . Observons tout d'abord que, pour  $s = 0$ , (18) n'est plus valable;  $\lambda^{-1}$  est alors un polynôme du second degré (au plus) en  $\mu$ ;  $|\lambda^{-1}|$  devient donc infini de l'ordre de  $(\log r_0 r^{-1})^2$  (au plus). La substitution de cette expression à  $(r_0 r^{-1})^\omega$  n'apporterait d'ailleurs aucune modification essentielle aux calculs qui vont suivre. Supposons enfin  $0 < s \leq \eta$ ; dans ce cas, on remplacerait le facteur  $\left(\frac{r_0}{r}\right)^\omega$  par

$$(29) \quad \left(\frac{r_0}{r}\right)^\omega \frac{1 - \left(\frac{r}{r_0}\right)^{2\omega}}{2\omega},$$

ce qui n'introduirait dans la discussion que des complications d'écriture, complications d'ailleurs inévitables si l'on veut être assuré que le domaine de convergence de nos approximations (délimité par le nombre  $R_0$  du n° 19) ne tend pas vers zéro avec  $|s|$ .

12. Revenons maintenant aux inégalités (7), (8), (9); nous allons exprimer d'abord qu'elles sont satisfaites quand on y remplace  $\lambda$  par  $\lambda[\mu_0(t)] \equiv \lambda^0(t)$ ,  $\alpha - \alpha_0$  par une expression de l'ordre de  $t^{1-\omega}$  et  $\eta$  par  $\frac{\eta}{2}$ . En effet, pour  $|t|$  suffisamment petit, (7) sera sûrement vérifiée puisque (17) est bornée. Passons à (9); nous l'écrivons sous la forme

$$(30) \quad \left| \frac{t}{\lambda} \frac{\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{1-j}}{s^2 \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{h_1}\right) \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{h_2}\right)} \right| < \frac{\eta}{2} \quad (j = -1, 0, 1)$$

(qui suppose  $s \neq 0$ ). D'après les résultats du n° 11, cette inégalité sera vérifiée pour  $|t|$  suffisamment petit, à condition que

$$(31) \quad \left| \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{h_1}\right) \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{h_2}\right) \right|$$

soit borné inférieurement. Prenons cette borne égale à  $\eta$ ; il faudra d'abord que  $\lambda_0$  vérifie cette condition. Puis supposons toujours  $s$  (ou  $h_1$ )  $\neq 0$  avec  $h_1 \neq h_2$ ; on peut alors remplacer la limite infé-

riure de (13) par  $h_1$ ; soit  $\bar{h}_1$  l'une quelconque des valeurs (à partie réelle négative) prises par l'intégrale; on trouve aisément

$$\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{h_1}\right) \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{h_2}\right) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2}\right)^2 \operatorname{sh}^2 s(\mu - \bar{h}_1).$$

Or, pour  $C < 1$ , les régions du plan ( $z$ ) pour lesquelles on a  $|\operatorname{sh} z| < C$  sont intérieures à des cercles, de centres  $z = k\pi i$  ( $k$  entier) et de rayon  $\frac{\pi C}{2}$ . Supposons donc (1)

$$(32) \quad \frac{2\sqrt{\eta}}{\left|\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2}\right|} < 1;$$

dans le plan (T) figurons les cercles ( $\bar{\gamma}_k$ ) dont les centres (*fig. 3*) sont les points

$$\bar{h}_k = \bar{h}_1 \pm \frac{k\pi i}{s} \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

et dont les rayons sont égaux à

$$(33) \quad \frac{\pi\sqrt{\eta}}{\left|s\left(\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2}\right)\right|};$$

en vertu de (32), ces cercles seront tous extérieurs les uns aux autres. Ceci posé, assujettissons le chemin  $\bar{\varepsilon}$  à ne pénétrer dans aucun des cercles ( $\bar{\gamma}_k$ ); en vertu de ce qui précède, l'expression (31), où  $\lambda$  est remplacé par  $\lambda^0(t)$ , sera supérieure à  $\eta$ ; la condition (30) sera donc vérifiée relativement à  $\lambda^0(t)$  pour  $|t|$  suffisamment petit (2).

13. Supposons maintenant que (32) cesse d'être vérifiée et examinons d'abord le cas où  $|s|$  est borné inférieurement; les points  $h_1$  et  $h_2$  seront donc très voisins. Cherchons alors les conditions pour qu'il en soit ainsi. Pour que (5) admette une racine double  $h$ , il faut et il

(1) Au n° 21, nous serons amenés à imposer une nouvelle limitation au premier membre de (32).

(2) Sa borne supérieure ne dépend que de  $\eta$ .

suffit que l'on ait  $s = \sigma$ , en posant

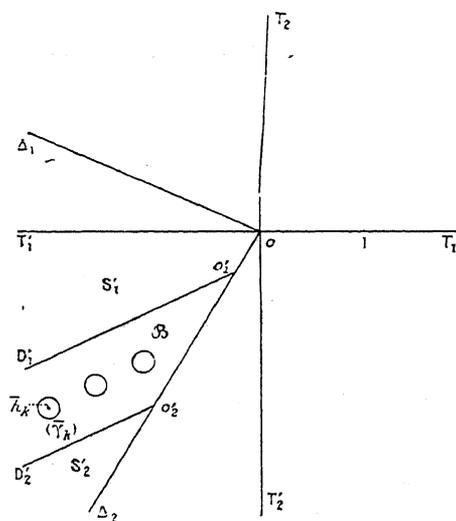
$$(34) \quad \sigma = \pm \sqrt{4(a+b+c+d+1)} \pm \sqrt{4b+1},$$

et  $h$  sera donné par l'équation (1)

$$4(a+b+c+d+1) - \frac{4b+1}{(h-1)^2} = 0;$$

donc, pour que  $h_1$  et  $h_2$  soient très voisins, il faut et il suffit que  $|s - \sigma|$  soit très petit. Or, pour  $C > 1$ , les points du plan ( $z$ ) qui vérifient l'inégalité  $|shz| < C$  sont intérieurs à une bande indéfinie  $\mathfrak{B}'$ , limitée par deux parallèles à l'axe imaginaire, d'abscisses  $\pm \log(C + \sqrt{C^2 + 1})$ . Dans le plan (T), la bande  $\mathfrak{B}$ , analogue à  $\mathfrak{B}'$ , admet comme axe de

Fig. 3.



symétrie la droite lieu des points  $h_k$ ; il existe donc dans le secteur  $S_\omega$  deux régions indéfinies  $S'_1$  (limitée par  $\Delta_1 O$ ,  $OO'_1$ ,  $O'_1 D'_1$ ) et  $S'_2$  (limitée par  $D'_2 O'_2$ ,  $O'_2 \Delta_2$ ), séparées l'une de l'autre par une portion  $D'_1 O'_1$ ,  $O'_2 D'_2$  de la bande  $\mathfrak{B}$ ; et à l'intérieur de  $S'_1$  et  $S'_2$ , (9) sera vérifiée par  $\lambda^0(t)$ .

(1) On précisera plus loin (n° 23) la correspondance entre les racines de cette équation et les valeurs de  $\sigma$ .

Que se passe-t-il lorsque  $h_1 - h_2$  tend vers 0? Pour mieux le voir, appelons  $\zeta$  celle des deux racines de l'équation

$$\zeta^2 + 2\zeta = \frac{\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2}}{\frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{h_1}}$$

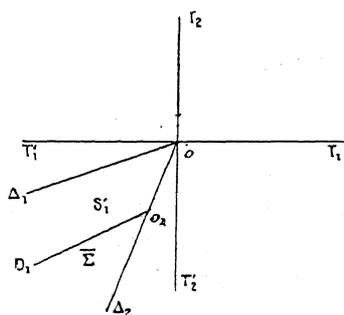
qui tend vers 0 avec  $h_1 - h_2$ ; on trouvera sans peine

$$(35) \quad \frac{1}{P(\lambda)} = \left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^2 \frac{h_1 h_2 (1 + \zeta)^2}{s^2 (\lambda_0 - h_1) (\lambda_0 - h_2) \left[ \left(1 + \frac{\zeta}{2}\right)^2 e^{s\mu} - \frac{\zeta^2}{4} e^{-s\mu} \right]^2};$$

remplaçons  $\mu$  par  $\mu_0$  et nous en déduirons que lorsque  $\zeta$  tend vers 0, l'une des droites frontières  $O_1 D'_1$  de la bande  $\mathfrak{B}$  tend vers une position limite bien déterminée (<sup>1</sup>),  $O_1 D_1$  (le long de laquelle  $e^{2s\mu}$  sera de l'ordre de  $\eta$ ). Au contraire, l'autre droite frontière  $O_2 D'_2$  s'éloigne indéfiniment; à la limite, pour  $s = \sigma$ , la bande  $\mathfrak{B}$  sera devenue un secteur indéfini  $\bar{\Sigma}$ , limité par  $O_1 D_1$  et  $O_1 \Delta_2$ , et à l'intérieur duquel (9) n'est plus nécessairement satisfaite pour  $\lambda = \lambda^0(t)$  et  $|T|$  très grand.

14. Pour le moment, nous pourrions nous suffire d'avoir vérifié l'inégalité (9) dans la région  $S'_1$  (limitée par  $\Delta_1 O$ ,  $OO_1$  et  $O_1 D_1$ ); tou-

Fig. 4.



tefois, en vue d'une application qui se présentera dans la troisième

(<sup>1</sup>) On reviendra sur ce point, avec plus de détails, au n° 54, p. 332 et 333.

Partie, nous allons étendre le domaine dans lequel l'inégalité (9) est applicable (en supposant toujours  $s - \sigma = 0$ ). Soit  $\Sigma$  le secteur (appartenant à  $\bar{\Sigma}$ ) lieu des rayons  $O, \Delta$  tels que les nombres  $\omega$  qui leur correspondent, d'après le n° 11, soient  $< \frac{1}{5}$  (1); on aura, dans  $\Sigma$ ,  $|e^{2\mu_0}| = f(rr_0^{-1})^{2\omega} > r$ , avec  $f \neq 0$ , et l'inégalité étant vérifiée pour  $r$  assez petit; par suite, sous cette condition l'inégalité (30), ou (9), sera encore vérifiée dans  $\Sigma$  (relativement à  $\mu_0$ ) (2).

15. Une discussion exactement analogue s'appliquerait à l'inégalité (8); toutes les fonctions  $\alpha_n(t)$  que nous aurons à substituer dans (8) rempliront la condition

$$(36) \quad |\alpha_n - \alpha_0| < Lr^{1-\omega},$$

où  $L$  est borné (3). Dès lors, les conclusions précédentes subsistent encore; et, pour  $h_1 = h_2$ , l'inégalité  $5\omega < 1$  assure la validité de (8) à l'intérieur de  $\bar{\Sigma}$ .

16. Dans tout ce qui précède, j'ai supposé  $s \neq 0$ ; mais l'hypothèse contraire n'introduit aucune difficulté (4); ainsi, dans le cas où  $h_1 = 0 \neq h_2$  on montrerait (5) sans peine que les inégalités (8) et (9) sont vérifiées, relativement à  $\lambda^0(t)$ , pour  $|T|$  assez grand. De même, on étendrait encore les résultats des nos 12-15 au cas où l'on aurait  $h_1 = 0 = h_2$  (6).

(1) Cette limitation est introduite en vue d'une démonstration ultérieure (n° 20).

(2) On aperçoit immédiatement comment s'opère le passage à la limite: pour  $|h_1 - h_2|$  très petit et  $5\omega < 1$ , les conditions (9) sont vérifiées (relativement à  $\lambda^0$ ) non seulement dans les régions  $S'_1$  et  $S'_2$  (fig. 3), mais dans deux portions de  $\mathcal{U}$  limitées respectivement par deux lignes  $\Gamma_1, \Gamma_2$ ;  $h_1 - h_2$  tendant vers 0, l'extension de  $S'_1$  dans la région  $\Sigma'$  limitée par  $O'D'_1$  et  $\Gamma_1$  finit par gagner tout le secteur  $\Sigma$ .

(3) Sa borne supérieure ne dépendant que de  $\eta$ .

(4) On constatera, par exemple, que  $s$  tendant vers 0, tous les cercles  $(\bar{\gamma}_k)$ , sauf un seul, s'éloignent de plus en plus, et à la limite, s'évanouissent à l'infini. On voit donc disparaître une source de complications.

(5) On peut le voir directement, ou se servir de l'équation (35), en faisant tendre  $s$  vers 0.

(6) Ce cas ne saurait d'ailleurs se présenter que pour les équations (VI), où l'on a  $4(a + b + c + d + 1) = 4b + 1$ .

En résumé, les inégalités (7), (8), (9) seront vérifiées, dans les régions du plan (T) sus-indiquées, par les fonctions  $\lambda^0(t)$  et  $\alpha(t)$  [cette dernière satisfaisant à (36)]. Nous allons montrer qu'il en est de même si l'on remplace  $\lambda$  par l'une quelconque des fonctions  $\lambda_n(t)$  correspondant aux fonctions  $\mu_n(t)$  que nous aurons à envisager au cours de nos approximations.

17. Observons tout d'abord que, pour  $|\varepsilon| < 1$ , on a  $|\varepsilon^{-1} \operatorname{sh} \varepsilon| < 2$  et  $|\operatorname{ch} \varepsilon| < 2$ ; d'où, pour  $\left| \frac{\bar{\mu} - \mu}{2} \right|$  inférieur à la plus petite des quantités (1)  $|s|^{-1} = \nu^{-1}$  et 1,

$$(37) \quad \left| \frac{\operatorname{ch} s\bar{\mu} - \operatorname{ch} s\mu}{s^2} \right| < 2 \left[ \left| \frac{\operatorname{sh} s\mu}{s} \operatorname{ch} \frac{s(\bar{\mu} - \mu)}{2} \right| + \left| \frac{\operatorname{sh} \frac{s(\bar{\mu} - \mu)}{2}}{s} \operatorname{ch} s\mu \right| \right] \\ \times |\bar{\mu} - \mu| < 2\chi(\mu) \left( 2 + \frac{|\bar{\mu} - \mu|}{2} \right) \times |\bar{\mu} - \mu| < 6\chi(\mu) |\bar{\mu} - \mu|,$$

où  $\chi(\mu)$  est défini comme au n° 11; d'ailleurs on voit aisément que les calculs effectués précédemment pour limiter  $\chi(\mu)$  restent encore valables si l'on astreint en outre  $\chi(\mu)$  à être au moins égal à  $|\operatorname{sh} s\mu|$ , ce qui permet d'écrire

$$(38) \quad \left| \frac{\operatorname{sh} s\bar{\mu} - \operatorname{sh} s\mu}{s} \right| < 2 \{ 2 \operatorname{ch} s\mu + |s(\bar{\mu} - \mu)| \operatorname{sh} s\mu \} \times |\bar{\mu} - \mu| \\ < 8\chi(\mu) |\bar{\mu} - \mu|.$$

Remarquons en passant que (37) et (38) entraînent la conséquence suivante : pour  $|\bar{\mu} - \mu|$  inférieur à la plus petite des deux quantités  $\frac{1}{16}$ ,  $\frac{1}{16\nu}$  et  $\frac{1}{12\nu^2}$ , on a

$$(39) \quad \frac{1}{2}\chi(\mu) < \chi(\bar{\mu}) < \frac{3}{2}\chi(\mu),$$

relations que nous utiliserons bientôt. Revenons maintenant à (18);

(1) Rappelons que l'hypothèse faite sur  $\alpha_0$  [n° 8, p. 251, note (3)] entraîne comme conséquence que  $\nu^{-1}$  est borné inférieurement.

nous pouvons écrire (en désignant par  $\bar{\lambda}$  la valeur correspondant à  $\bar{\mu}$ )

$$(40) \quad \left| \frac{1}{\bar{\lambda}} - \frac{1}{\lambda} \right| < \left| \frac{s^2}{\lambda_0} - 2(a+b+c+d+1) + \frac{4b+1-s^2}{2} \right| \times \left| \frac{\text{ch } s\bar{\mu} - \text{ch } s\mu}{s^2} \right| \\ + \left| 2\sqrt{a+b+c+d+1} \frac{\sqrt{(\lambda_0-h_1)(\lambda_0-h_2)}}{\lambda_0} \right| \times \left| \frac{\text{sh } s\bar{\mu} - \text{sh } s\mu}{s} \right| \\ < G \gamma(\mu) |\bar{\mu} - \mu|,$$

en posant

$$G = \frac{G_1 |s^2 \lambda_0| + G_2 |\lambda_0| + G_3 |s^2| + G_4}{|\lambda_0|},$$

où les  $G_i$  sont des nombres positifs bornés (indépendants de  $\eta$  et  $\lambda_0$ ). Or la relation (40) permet de vérifier notre assertion; en effet, on a, par exemple,

$$(41) \quad \left| \frac{t}{\lambda_n} \right| < \left| \frac{t}{\lambda_0(t)} \right| + G r \gamma(\mu_0) |\mu_n - \mu_0| < \frac{\eta}{2} + G J r \left( \frac{r_0}{r} \right)^\omega |\mu_n - \mu_0|,$$

et nous verrons que les  $|\mu_n - \mu_0|$  sont bornés; pour  $r$  assez petit, le second membre de (41) sera donc inférieur à  $\eta$ . On vérifierait de même que (8) et (9) sont encore valables <sup>(1)</sup> pour  $\lambda = \lambda_n$ .

Enfin, les relations (39) et (40) vont nous permettre de transformer les inégalités (11) et (12), de façon à les rendre immédiatement utilisables pour la démonstration de convergence qui va suivre. Supposons tout d'abord que  $T$  n'appartienne pas aux régions  $\Sigma$  ou  $\Sigma'$  <sup>(2)</sup>; les quantités  $f_1$  et  $f_2$  sont alors respectivement de l'ordre de  $\eta^{-1}$  et  $\eta^{-2}$ ; et l'on peut écrire,

$$(42) \quad |F(\mu_0, \alpha_1 - \alpha_0, t)| < A |\alpha_1 - \alpha_0| + B r \left( \frac{r_0}{r} \right)^\omega,$$

avec

$$A = A_1 \eta^{-1}, \quad B = B_1 \eta^{-2} |\lambda_0|^{-1} + B_2 \eta^{-2},$$

$A_1, B_1, B_2$  étant des nombres positifs bornés <sup>(3)</sup> (indépendants de  $\eta$

<sup>(1)</sup> A condition de prendre  $5\omega < 1$  si  $T$  appartient aux régions  $\bar{\Sigma}$  ou  $\bar{\Sigma}'$  (voir la note suivante).

<sup>(2)</sup> La région  $\Sigma'$  est définie à la note <sup>(2)</sup> de la page 264.

<sup>(3)</sup> On ne confondra pas ces coefficients avec ceux des formules (11) et (12); pour déterminer les exposants de  $\eta$  dans les expressions de ces coefficients, on se reportera à la note <sup>(2)</sup> de la page 259 (n° 11).

et  $\lambda_0$ ). On aurait de même

$$(43) \quad |F(\mu_n, \alpha_{n+1} - \alpha_0, t) - F(\mu_{n-1}, \alpha_n - \alpha_0, t)| \\ < \left\{ C |\alpha_n - \alpha_0| \left(\frac{r}{r_0}\right)^\omega + D r \left(\frac{r_0}{r}\right)^\omega \right\} |\mu_n - \mu_{n-1}| + E |\alpha_{n+1} - \alpha_n|,$$

avec

$$C = |\lambda_0|^{-1} \eta^{-3} \{ C_1 |s^2 \lambda_0| + C_2 |\lambda_0| + C_3 |s^2| + C_4 \}, \\ D = |\lambda_0^{-1}| \eta^{-3} \{ D_1 |s^2 \lambda_0| + D_2 |\lambda_0| + D_3 |s^2| + D_4 \}, \\ E = E_1 \eta^{-1},$$

où les derniers coefficients <sup>(1)</sup> C, ..., E, sont encore bornés.

On établirait sans peine que (42) et (43) sont toujours valables pour  $s = 0$  <sup>(2)</sup>; pour  $|s - \sigma|$  très petit, ou nul, (42) et (43) seraient en défaut si T appartenait à  $\Sigma'$ , ou  $\Sigma$ ; mais alors, en se reportant aux nos 14 et 15 et à la définition de  $f_1$  et  $f_2$ , on verrait que les inégalités précédentes peuvent encore être employées, à condition que A, B, E soient multipliés par  $\left(\frac{r_0}{r}\right)^{2\omega}$ , et C, D par  $\left(\frac{r_0}{r}\right)^{\omega}$ .

Arrivons enfin aux formules (15); nous pouvons écrire, dans tous les cas, à l'intérieur de tout le secteur S,

$$(44) \quad |\varphi(\mu, t)| < M \left(\frac{r_0}{r}\right)^\omega, \quad \psi(\mu, t) < N \left(\frac{r_0}{r}\right)^\omega,$$

$$(45) \quad \begin{cases} |\varphi(\mu_n, t) - \varphi(\mu_{n-1}, t)| < P \left(\frac{r_0}{r}\right)^\omega |\mu_n - \mu_{n-1}|, \\ |\psi(\mu_n, t) - \psi(\mu_{n-1}, t)| < Q \left(\frac{r_0}{r}\right)^\omega |\mu_n - \mu_{n-1}|, \end{cases}$$

où M et N d'une part, P et Q d'autre part, sont des nombres positifs de la même structure que  $B\eta$  et  $C\eta^2$  respectivement.

18. Nous pouvons préciser maintenant la forme de nos chemins d'intégration  $\bar{\Sigma}$ . Nous épuiserons certainement l'étude de l'intégrale dans S en prenant successivement comme chemins  $\bar{\Sigma}$  des rayons rectilignes quelconques, issus de O et appartenant à S. Quand ces

<sup>(1)</sup> Voir la note <sup>(3)</sup> de la page précédente.

<sup>(2)</sup> Pour  $|s|$  très petit (ou nul), on remplacerait  $\left(\frac{r_0}{r}\right)^\omega$  par l'expression (29) [ou par

rayons pénétreront dans des cercles  $(\bar{\gamma}_k)$ , nous remplacerons le segment de  $\bar{\varepsilon}$  intérieur à  $(\bar{\gamma}_k)$  par le plus petit des arcs de  $(\bar{\gamma}_k)$  admettant les mêmes extrémités.

A l'exemple de M. Pierre Boutroux <sup>(1)</sup> j'appellerai *caractéristique* de l'équation (VI) toute branche d'intégrale de (VI), poursuivie dans le plan (T) le long d'un segment rectiligne OΔ issu de O et répondant à des conditions initiales déterminées; j'appellerai *caractéristiques de première espèce*, les caractéristiques satisfaisant aux conditions du n° 8 et provenant des approximations du n° 10. Ceci suppose implicitement que l'on conserve la même dénomination à la même intégrale, poursuivie dans le plan (t), le long du chemin correspondant à OΔ; il ne saurait en résulter, évidemment, aucune confusion.

Or, dans le plan (t), les transformés des chemins  $\bar{\varepsilon}$  par la substitution (19) sont des spirales logarithmiques  $\varepsilon$ , déformées au besoin de façon à contourner les domaines  $(\gamma_k)$  correspondant aux cercles  $(\bar{\gamma}_k)$ , domaines qu'il est évidemment loisible de supposer limités par des circonférences. Admettons <sup>(2)</sup> que le rayon indéfini OΔ ne pénètre dans aucun des cercles  $(\bar{\gamma}_k)$ ; nous pourrons le prendre comme chemin  $\bar{\varepsilon}$ , et un arc quelconque  $t_1 t_2$  de la spirale  $\varepsilon$  donnera lieu à l'inégalité

$$\frac{\text{arc } t_1 t_2}{r_1 - r_2} = \frac{1}{\cos \gamma} \quad (r_1 = |t_1|, r_2 = |t_2|);$$

en conséquence, pour tous les rayons appartenant à un même secteur [et ne pénétrant pas dans les  $(\bar{\gamma}_k)$ ], on peut écrire

$$(46) \quad \frac{\text{arc } t_1 t_2}{r_1 - r_2} < l,$$

$l$  étant un nombre positif borné ne dépendant que du secteur.

19. Je vais établir maintenant la convergence des approximations

<sup>(1)</sup> *Leçons sur les fonctions définies par les équations différentielles du premier ordre*, Paris, Gauthier-Villars, 1908, p. 58. — Voir aussi P. BOUTROUX, *Ann. sc. Éc. Norm. sup.*, 3<sup>e</sup> série, t. XXV, 1908, p. 322.

<sup>(2)</sup> Nous étudierons le cas opposé au n° 21.

du n° 10; je supposerai, bien entendu, que  $\bar{\varepsilon}$  ne pénètre ni dans les cercles  $(\bar{\gamma}_k)$ , ni dans les secteurs  $\Sigma'$ , ou  $\Sigma$ , s'ils existent. Nous pourrions donc écrire, en vertu de (44) et (46),

$$|\alpha_1 - \alpha_0| < l(M|\alpha_0| + N) \int_0^{r_0} \left(\frac{r_0}{r}\right)^\omega dr = H\varepsilon,$$

en posant

$$H = \frac{l}{1-\omega}(M|\alpha_0| + N),$$

$$\varepsilon = r_0 \left(\frac{r_0}{r}\right)^\omega;$$

(35) est donc vérifiée pour  $n = 1$ . Et, en vertu de (42), il viendra de même

$$|\mu_1 - \mu_0| < l \int_0^{r_0} \frac{|F(\mu_0, \alpha_1 - \alpha_0, t)|}{r} dr < l \int_0^{r_0} \left[ AH \frac{\varepsilon}{r} + B \left(\frac{r_0}{r}\right)^\omega \right] dr = K\varepsilon',$$

en posant

$$K = \frac{l}{1-\omega}(AH + B),$$

$$\varepsilon' = r_0 - \varepsilon = r_0^\omega (r_0^{1-\omega} - r^{1-\omega}),$$

et, à l'aide de (40), on vérifierait aisément que, pour  $r_0$  suffisamment petit, l'inégalité (7) est encore satisfaite par  $\lambda_1 = \lambda[\mu_1(t)]$ .

En général, supposons que nous ayons obtenu pour les  $n$  premières valeurs de l'indice

$$(47) \quad |\alpha_{j+1} - \alpha_j| < H(lqr_0)^j \varepsilon, \quad |\mu_{j+1} - \mu_j| < K(lqr_0)^j \varepsilon',$$

$q$  ne dépendant ni de  $j$ , ni de  $r_0$  et  $l$ ; nous allons montrer que ces inégalités, évidentes pour  $j = 0$ , subsistent encore pour  $j = n + 1$ , et, du même coup, nous obtiendrons la valeur de  $q$ .

Observons d'abord que pour  $r_0 < (2lq)^{-1}$ , les relations (47) entraînent

$$(48) \quad \begin{cases} |\alpha_{j+1} - \alpha_0| < |\alpha_1 - \alpha_0| \cdot [1 + lqr_0 + \dots + (lqr_0)^j] < 2|\alpha_1 - \alpha_0| < 2H\varepsilon, \\ |\mu_{j+1} - \mu_0| < 2K\varepsilon', \end{cases}$$

de sorte que pour  $r_0 < \frac{\sqrt{\eta}}{2\sqrt{\text{GJK}}}$ , on aura

$$\text{GJ} r \left(\frac{r_0}{r}\right)^\omega |\mu_{j+1} - \mu_j| < 2\text{GJK}\varepsilon\varepsilon' < 2\text{GJK}r_0^2 < \frac{\eta}{2},$$

et, par suite, d'après (41),  $\lambda_n = \lambda[\mu_n(t)]$  satisfera à l'inégalité (7); il en serait de même des inégalités (36), ou (8) et (9). On pourra donc se servir de la relation (43) qui, appliquée à (16), donne

$$\begin{aligned} |\alpha_{n+1} - \alpha_n| &= \left| \int_0^t \{ (\alpha_n - \alpha_{n-1}) \varphi(\mu_n, t) + \alpha_{n-1} [\varphi(\mu_n, t) - \varphi(\mu_{n-1}, t)] \right. \\ &\quad \left. + \psi(\mu_n, t) - \psi(\mu_{n-1}, t) \} dt \right| \\ &< l\text{MH}(lqr_0)^{n-1} \int_0^{r_0} \varepsilon \left(\frac{r_0}{r}\right)^\omega dr + l[\text{P}(|\alpha_0| + 2\text{H}\varepsilon) + \text{Q}] \\ &\quad \times \text{K}(lqr_0)^{n-1} \int_0^{r_0} \varepsilon' \left(\frac{r_0}{r}\right)^\omega dr; \end{aligned}$$

mais on a  $\varepsilon \leq r_0$  et  $\varepsilon' \leq r_0$ ; il viendra donc

$$(49) \quad |\alpha_{n+1} - \alpha_n| < \text{H} \frac{q_1}{q} (lqr_0)^n \varepsilon,$$

en posant

$$(50) \quad q_1 = \frac{\text{M}}{1-\omega} + [\text{P}(|\alpha_0| + 2\text{H}r_0) + \text{Q}] \frac{\text{K}}{\text{H}(1-\omega)}.$$

De même, en se servant de (43), on trouvera

$$\begin{aligned} |\mu_{n+1} - \mu_n| &= \left| \int_{t_0}^t \frac{\text{F}(\mu_n, \alpha_{n+1} - \alpha_0, t) - \text{F}(\mu_{n-1}, \alpha_n - \alpha_0, t)}{t} dt \right| \\ &< l(2\text{CH} + \text{D}) \text{K}(lqr_0)^{n-1} \int_r^{r_0} \varepsilon' \left(\frac{r_0}{r}\right)^\omega dr + l\text{EH} \frac{q_1}{q} (lqr_0)^n \int_r^{r_0} \frac{\varepsilon}{r} dr; \end{aligned}$$

d'où

$$(51) \quad |\mu_{n+1} - \mu_n| < \text{K} \frac{q_2}{q} (lqr_0)^n \varepsilon',$$

en posant

$$(52) \quad q_2 = \frac{2\text{CH} + \text{D}}{1-\omega} + \frac{l\text{EH}q_1}{\text{K}(1-\omega)}.$$

Or, prenons pour  $q$  le plus grand des deux nombres positifs  $q_1$  et  $q_2$  définis par (50) et (52); les relations (49) et (51) montrent aussitôt que les inégalités (47) sont encore vraies pour  $j = n$ ; elles sont donc vérifiées quel que soit  $n$ . En conséquence, sur le chemin  $\sigma$  (limité au point  $t_0$ , de module  $r_0$ ), les deux séries

$$(53) \quad \begin{cases} \alpha(t) = \alpha_0 + (\alpha_1 - \alpha_0) + \dots + (\alpha_{n+1} - \alpha_0) + \dots, \\ \mu(t) = \mu_0 + (\mu_1 - \mu_0) + \dots + (\mu_{n+1} - \mu_0) + \dots \end{cases}$$

sont absolument et uniformément convergentes (par rapport à  $t$ ), lorsque  $r_0$  a été choisi suffisamment petit, de façon que soient vérifiées toutes les conditions énoncées au cours de cette discussion. La borne supérieure  $R_0$ , ainsi imposée à  $r_0$ , est de la forme

$$(54) \quad R_0 = R'_0 \eta^m |\lambda_0|,$$

$R'_0$  étant indépendant de  $\eta$  et  $\lambda_0$ , et  $m$  étant un nombre positif qu'on limiterait aisément <sup>(1)</sup> (et, en outre,  $r_0$  devra être inférieur à un nombre positif fixe plus petit que 1).

La convergence des séries (53) étant uniforme par rapport à  $t$ , un raisonnement classique montre aussitôt que leurs sommes  $\alpha(t)$  et  $\mu(t)$  vérifient les équations (14);  $\alpha(t)$  et  $\lambda[\mu(t)]$  satisfont donc au système (1). Or on peut faire croître indéfiniment l'indice dans les équations (48), ce qui donnera à la limite

$$(55) \quad \begin{cases} |\alpha(t) - \alpha_0| < 2H\varepsilon = 2Hr \left(\frac{r_0}{r}\right)^\omega \\ \text{et} \\ |\mu(t) - \mu_0(t)| = \left| \mu(t) - \log \frac{t}{t_0} \right| < 2K\varepsilon' = 2K \left[ r_0 - r \left(\frac{r_0}{r}\right)^\omega \right]. \end{cases}$$

La première de ces relations montre que,  $t$  tendant vers zéro,  $\alpha$  tend vers  $\alpha_0$ ; la seconde que,  $t$  tendant vers  $t_0$ ,  $\lambda[\mu(t)]$  tend vers  $\lambda_0$ ; de

---

<sup>(1)</sup> La convergence des approximations n'est donc assurée que pour  $|t_0 \lambda_0^{-1}|$  suffisamment petit, ce qui légitime la restriction  $\lambda_0 \neq 0$  que nous nous sommes imposée. Nous verrons d'ailleurs, dans la troisième Partie, comment on peut lever cette restriction et définir des intégrales s'annulant au point  $t_0$ . Observons enfin qu'il résulte de la discussion précédente [et, notamment, de la formule (52)] que  $R_0$  tend vers 0 avec  $1 - \omega$ .

plus, il résulte de cette même relation que  $\mu(t)$ , et par suite  $\lambda[\mu(t)]$ , ne peut se réduire à une constante; enfin, on déduit de cette relation et de (40) que  $t^\omega : \lambda[\mu(t)]$  reste borné en module. En définitive, la fonction  $\lambda(t) \equiv \lambda[\mu(t)]$  est une intégrale de (VI) qui, en même temps que  $\alpha(t)$ , satisfait à toutes les conditions du n° 8; c'est donc bien la caractéristique de première espèce que nous avons en vue. Nous dirons qu'elle est *du type général*, par opposition aux caractéristiques du type exceptionnel que nous définirons bientôt.

20. Nous allons lever maintenant les restrictions que nous nous sommes imposées relativement au chemin d'intégration. Supposons d'abord que  $\bar{\varepsilon}$  pénètre dans  $\Sigma$  ou  $\Sigma'$ ; la seule modification qu'il faut apporter à nos inégalités fondamentales consiste à multiplier, dans ces inégalités, A, B, E par  $\left(\frac{r_0}{r}\right)^{2\omega}$ , C et D par  $\left(\frac{r_0}{r}\right)^{4\omega}$  (n° 17, p. 267). Or, il suffit de reprendre les calculs du n° 19, en tenant compte de la condition  $5\omega < 1$  que doit remplir  $\omega$  (n° 14), pour constater que nos approximations convergent encore dans  $\Sigma$  ou  $\Sigma'$ .

21. Le cas des cercles ( $\bar{\gamma}_k$ ) est plus compliqué; nous étudierons bientôt l'intégrale à l'intérieur de ces cercles. Pour le moment, nous allons étendre la démonstration de convergence au cas, primitivement exclu (n° 18), où  $\varepsilon$  comprend un arc d'une circonférence ( $\gamma_k$ ): dans ce cas, le rapport arc  $t_1 t_2 : r_1 - r_2$  peut devenir infini pour deux points  $t_1$  et  $t_2$  de cet arc, et la démonstration du n° 19 devient inapplicable.

Précisons d'abord la définition des cercles ( $\gamma_k$ ). Soit  $t_k$  le point du plan ( $t$ ) qui correspond à  $\bar{h}_k$  par la transformation (19); on a

$$(56) \quad t - t_k = t_k [e^{r - \bar{h}_k} - 1].$$

Or supposons  $\eta$  choisi assez petit, de façon à vérifier l'inégalité

$$4\pi\sqrt{\eta} < \left| s \left( \frac{1}{h} - \frac{1}{h'} \right) \right|;$$

en vertu de (33) le rayon  $(^1)$   $\zeta$  de  $(\bar{\gamma}_k)$  sera inférieur à  $\frac{1}{4}$ ; cela étant, (56) montre que, lorsque T est situé à l'intérieur ou sur la circonférence de  $(\bar{\gamma}_k)$ ,  $t$  sera intérieur à un cercle de centre  $t_k$ , de rayon  $2|t_k|\zeta = 2r_k\zeta < \frac{r_k}{2}$ ; c'est ce cercle, auquel l'origine est sûrement extérieure (au sens strict), que nous prendrons pour  $(\gamma_k)$ . Ceci posé, appelons  $t_1$  et  $t_2$  les extrémités de l'arc de la spirale  $\bar{\sigma}$  intérieur à  $(\gamma_k)$ , et soit  $s'$  la longueur de cet arc. A cet arc nous substituerons, comme chemin d'intégration de nos approximations, le plus petit des arcs de  $(\gamma_k)$  ayant  $t_1$  et  $t_2$  comme extrémités; soient  $\sigma'$  la longueur de ce dernier arc et  $c$  la longueur de la corde  $t_1 t_2$ . Il vient alors, en intégrant successivement sur la spirale, puis sur le cercle

$$I \equiv \int_{s'} \left(\frac{r_0}{r}\right)^\omega ds' > \frac{c}{(1+2\zeta)^\omega} \left(\frac{r_0}{r_k}\right)^\omega,$$

$$J \equiv \int_{\sigma'} \left(\frac{r_0}{r}\right)^\omega d\sigma' < \frac{\pi}{2} \frac{c}{(1-2\zeta)^\omega} \left(\frac{r_0}{r_k}\right)^\omega,$$

d'où

$$\frac{J}{I} < \frac{\pi}{2} \left(\frac{1+2\zeta}{1-2\zeta}\right)^\omega < \frac{\pi}{2} \times 3^\omega < \frac{3\pi}{2}.$$

Et de cette inégalité on déduit aisément que, sur tout chemin  $\bar{\sigma}$  comprenant un arc des cercles  $(\gamma_k)$ , on a encore le droit de conserver les bornes supérieures obtenues pour les quadratures du n° 19, à condition toutefois de multiplier le facteur  $I$  qui y figure par le rapport  $\frac{3\pi}{2}$ .

Ainsi, pour connaître les valeurs de  $\lambda(t)$  et de  $\alpha(t)$  dans tout le secteur S, il ne nous reste plus qu'à les calculer en un point quelconque, intérieur aux cercles  $(\gamma_k)$ ; c'est ce dernier calcul que nous allons effectuer.

22. Je dis tout d'abord que, pour  $|t_0|$  suffisamment petit,  $\lambda(t)$  est holomorphe  $(^2)$  à l'intérieur de  $(\gamma_k)$ . En effet, supposons que  $\lambda(t)$

(<sup>1</sup>) On ne confondra pas cette notation avec celle qui figure au n° 13.

(<sup>2</sup>) Ceci suppose toutefois  $h_1^{-1} \neq 0$  ou  $a + b + c + d + 1 \neq 0$ . Dans le cas opposé, on ferait une démonstration analogue à celle qui va suivre pour la fonction  $\bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda - 1}$ , par

présente un pôle  $t = \tau$  à l'intérieur de  $(\gamma_k)$ , et soit  $\mathcal{C}$  un chemin de longueur finie joignant  $\tau$  à un point  $t_1$  de  $(\gamma_k)$  où  $\lambda$  prend une valeur  $\lambda_1$  (voisine de  $h_1$ ). Admettons d'abord que, le long de  $\mathcal{C}$ , on ait constamment  $|2\lambda| > |h_1|$ ; pour  $|t|$  assez petit, l'intégration de la seconde équation (1) donnera aussitôt

$$\alpha(\tau) = \alpha(t_1) + f_1 r_k \sqrt{\eta} = \alpha_0 + f_1 r_k \sqrt{\eta} + f_2 \varepsilon,$$

où les  $f_i$  sont, comme dans tout ce numéro, des nombres de module borné, quel que soit  $k$ . Or, on démontrera aisément <sup>(1)</sup> qu'on peut toujours trouver une constante  $\bar{\alpha}_0$  telle que la caractéristique définie par les conditions du n° 8, avec <sup>(2)</sup>  $\bar{\alpha}(0) = \bar{\alpha}_0$ ,  $\bar{\lambda}(\tau) = \infty$ , vérifie la relation  $\bar{\alpha}(\tau) = \alpha(\tau)$ ; cette caractéristique appartiendra donc à la même intégrale que notre caractéristique primitive <sup>(3)</sup>, et elle donnera lieu à une égalité de la forme

$$\int_{\infty}^{\lambda_1} \frac{d\lambda}{\lambda \sqrt{\bar{P}(\lambda)}} = T(t_1) - T(\tau) + \bar{\mu}(t_1) - \bar{\mu}_0(t_1) - [\bar{\mu}(\tau) - \bar{\mu}_0(\tau)] = f_3 \sqrt{\eta} + f_4 \varepsilon'.$$

Or, je dis qu'une telle égalité est impossible pour  $\eta$  et  $r_0$  assez petits; en effet, d'après ce qui précède, et en vertu de (55), on peut écrire

$$\bar{\alpha}_0 = \alpha_0 + f_1 r_k \sqrt{\eta} + (f_2 + f_3) \varepsilon,$$

de sorte que, pour  $\eta$  et  $r_0$  assez petits,  $\lambda_1$  est aussi voisin qu'on veut d'une des racines  $\bar{h}_1, \bar{h}_2$  de  $\bar{P}(\lambda) = 0$ . Le premier membre de notre

exemple. De plus, le raisonnement qui va suivre suppose implicitement  $h_1 \neq 0$  (donc  $s \neq 0$ ); mais la remarque faite au n° 16 [note <sup>(4)</sup> de la page 264] légitime immédiatement cette hypothèse.

<sup>(1)</sup> A cet effet, on procédera comme pour établir les relations (62) du numéro suivant, et l'on aboutira ainsi à la relation  $\left| \frac{\partial \alpha}{\partial \alpha_0} - 1 \right| < 2\mathcal{H}'_1 \varepsilon$ , où  $\mathcal{H}'_1$  est borné; puis, l'on observera que sous les hypothèses actuelles, et grâce à l'inégalité précédente, l'équation  $\bar{\alpha}(\tau, \bar{\alpha}_0) = \alpha(\tau)$  possède certainement une solution et une seule,  $\bar{\alpha}_0$ .

<sup>(2)</sup> On a surmonté d'un trait tous les symboles se rapportant à la nouvelle caractéristique.

<sup>(3)</sup> Cette remarque permettrait de conclure à l'égalité  $\bar{\alpha}_0 = \alpha_0$ ; mais il est plus simple de faire la démonstration sans nous appuyer sur cette relation.

égalité est donc arbitrairement voisin de

$$s^{-1} \log [(\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2})(\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2})^{-1}] \quad (1),$$

tandis que, sous les mêmes conditions, son second membre est arbitrairement petit.

Le raisonnement suppose, il est vrai, qu'on a constamment, sur  $\mathcal{L}$ ,  $|\lambda| > \frac{|h_1|}{2}$ ; mais, s'il n'en était pas ainsi, on appellerait  $t_2$  le premier point situé sur  $\mathcal{L}$ , à partir de  $t_1$ , et pour lequel on aurait  $|\lambda_1| = \frac{|h_1|}{2}$ ; en raisonnant sur  $t_2$  comme tout à l'heure sur  $\tau$ , on montrerait que l'existence du point  $t_2$  est impossible. Ainsi donc, en résumé, pour  $r_0$  et  $\eta$  assez petits,  $\lambda(t)$  est holomorphe à l'intérieur des  $(\gamma_k)$  (2).

C. Q. F. D.

Dès lors, on peut écrire

$$\lambda(t) - h_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{(\gamma_k)} \frac{\lambda(z) - h_1}{z - t} dz,$$

où  $t$  est un point quelconque, intérieur à  $(\gamma_k)$ ; et l'égalité précédente montre en outre que la valeur  $\lambda(t)$ , qu'on se proposait de calculer, est très voisine (3) de  $h_1$  (pour  $r_0$  et  $\eta$  très petits).

23. En résumé, nous venons d'étudier, à l'intérieur de tout un secteur indéfini  $S$ , une caractéristique de première espèce, définie à la façon du n° 8 par deux données initiales : l'une,  $\alpha_0$ , finie; l'autre,  $\lambda_0$ , non nulle et vérifiant l'inégalité

$$\left| \left( \frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{h_1} \right) \left( \frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{h_2} \right) \right| > \eta,$$

ou, si l'on veut (4),

$$(57) \quad |\lambda_0 - h_1| \geq f\eta$$

(1) On suppose les déterminations des radicaux choisis d'une façon convenable.

(2) On pourrait encore faire la démonstration en s'appuyant sur des développements en série analogues à ceux du n° 54.

(3) En précisant la démonstration qui précède, on serait arrivé à la même conclusion, mais sans pouvoir calculer exactement la valeur  $\lambda(t)$ .

(4) Cette transformation ne serait plus valable pour  $h_1 = \infty$ ; mais, dans ce cas, on verrait directement qu'il n'y a rien de changé aux résultats suivants.

(avec  $f$  borné et  $> 1$ ), et une inégalité analogue pour  $h_2$ . En raison des conditions imposées à  $\lambda_0$ , notre démonstration est soumise à une double restriction que nous aurons à faire disparaître; dans cette première Partie, je me limiterai à montrer comment on peut définir des caractéristiques qui, pour  $t = t_0$ , prennent une valeur  $\lambda_0$ , voisine de  $h_1$ , par exemple (1).

Afin de ne pas interrompre la suite du raisonnement, j'établirai d'abord une proposition préliminaire. Je dis que, pour  $|t_0|$  suffisamment petit, les séries (53) peuvent être dérivées terme à terme par rapport à  $t_0$ , les séries des dérivées représentant les dérivées respectives de  $\alpha$  et  $\mu - \mu_0$  par rapport à  $t_0$ .

A cet effet, j'observe d'abord qu'on a, avec les notations du n° 9,

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}_1 &\equiv \frac{\partial F}{\partial(\alpha - \alpha_0)} = \frac{1}{2}(1-t)^{-\frac{1}{2}}(1+F_1)^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial F_1}{\partial(\alpha - \alpha_0)}, \\ \mathfrak{F}_2 &\equiv \frac{\partial F}{\partial \mu} = \frac{1}{2}(1-t)^{-\frac{1}{2}}(1+F_1)^{-\frac{1}{2}} \lambda \sqrt{P(\lambda)} \frac{\partial F_1}{\partial \lambda}.\end{aligned}$$

En s'appuyant sur les inégalités du n° 19, on déduit de là

$$(58) \quad \left\{ \begin{array}{l} |\mathfrak{F}_1(\mu_n, \alpha_{n+1} - \alpha_0, t)| < A', \\ |\mathfrak{F}_2(\mu_n, \alpha_{n+1} - \alpha_0, t)| < B' \varepsilon, \\ |\mathfrak{F}_1(\mu_n, \alpha_{n+1} - \alpha_0, t) - \mathfrak{F}_1(\mu_{n-1}, \alpha_n - \alpha_0, t)| < C'(lqr_0)^n \varepsilon, \\ |\mathfrak{F}_2(\mu_n, \alpha_{n+1} - \alpha_0, t) - \mathfrak{F}_2(\mu_{n-1}, \alpha_n - \alpha_0, t)| < D'(lqr_0)^n \varepsilon, \end{array} \right.$$

et l'on aurait de même

$$(59) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left| \frac{\partial \varphi(\mu_n, t)}{\partial \mu_n} \right| < M' \frac{\varepsilon}{r}, \\ \left| \frac{\partial \psi(\mu_n, t)}{\partial \mu_n} \right| < N' \frac{\varepsilon}{r}, \\ \left| \frac{\partial \varphi(\mu_n, t)}{\partial \mu_n} - \frac{\partial \varphi(\mu_{n-1}, t)}{\partial \mu_{n-1}} \right| < P'(lqr_0)^{n+1} \frac{\varepsilon}{r}, \\ \left| \frac{\partial \psi(\mu_n, t)}{\partial \mu_n} - \frac{\partial \psi(\mu_{n-1}, t)}{\partial \mu_{n-1}} \right| < Q'(lqr_0)^{n+1} \frac{\varepsilon}{r}. \end{array} \right.$$

(1) La méthode employée cesse d'être valable pour  $h_1 = h_2 = h$  et  $\lambda_0 = h$ ; et, plus loin (nos 49 et 53) on se rendra compte pourquoi cette lacune ne peut être comblée à l'aide

et, dans toutes ces inégalités, A', B', ..., Q' désignent des nombres positifs indépendants de n et r<sub>0</sub>. Revenons alors aux équations (16); elles donnent

$$\frac{\partial \alpha_0}{\partial t_0} = 0, \quad \frac{\partial \mu_0}{\partial t_0} = -\frac{1}{t_0},$$

puis

$$\left| \frac{\partial \alpha_1}{\partial t_0} - \frac{\partial \alpha_0}{\partial t_0} \right| < \frac{l}{1-\omega} (M' |\alpha_0| + N') \frac{\varepsilon}{r_0} \equiv \mathfrak{E}_1 \frac{\varepsilon}{r_0}$$

et

$$\left| \frac{\partial \mu_1}{\partial t_0} - \frac{\partial \mu_0}{\partial t_0} \right| < \frac{l}{1-\omega} (A' \mathfrak{E}_1 + B') \frac{\varepsilon'}{r_0} + (AH + B) \varepsilon \equiv \mathfrak{X}_1 \frac{\varepsilon'}{r_0} + \mathfrak{X} \varepsilon.$$

En général, supposons qu'on ait obtenu, pour  $j = 0, 1, \dots, n-1$ ,

$$(60) \quad \left| \frac{\partial \alpha_{j+1}}{\partial t_0} - \frac{\partial \alpha_j}{\partial t_0} \right| < \mathfrak{E}_{j+1} \frac{\varepsilon}{r_0}, \quad \left| \frac{\partial \mu_{j+1}}{\partial t_0} - \frac{\partial \mu_j}{\partial t_0} \right| < \mathfrak{X}_{j+1} \frac{\varepsilon'}{r_0} + \mathfrak{X} (lqr_0)^j \varepsilon;$$

en s'appuyant sur (58) et (59), on prouverait aisément que les relations (60) sont encore vraies pour  $j = n$ , à condition de prendre

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_{n+1} &\geq (a' \mathfrak{E}_n + b' \mathfrak{X}_n) r_0 + f' (lqr_0)^n, \\ \mathfrak{X}_{n+1} &\geq c' \mathfrak{E}_{n+1} + d' r_0 \mathfrak{X}_n + g' (lqr_0)^n, \end{aligned}$$

où a', b', c', d', f', g' sont des constantes indépendantes de n et r<sub>0</sub> (1). Or, on vérifiera ces inégalités en prenant

$$(61) \quad \mathfrak{E}_n = \mathfrak{E}_1 (lq' r_0)^{n-1}, \quad \mathfrak{X}_n = \mathfrak{X}_1 (lq' r_0)^{n-1}.$$

à condition que q' satisfasse aux relations

$$q' > q, \quad lq' > \frac{a' \mathfrak{E}_1 + b' \mathfrak{X}_1}{\mathfrak{E}_1 - f'}, \quad lq' > \frac{c' (a' \mathfrak{E}_1 + b' \mathfrak{X}_1) + d' \mathfrak{X}_1}{\mathfrak{X}_1 - c' f' - g'}.$$

Dès lors, le résultat annoncé est une conséquence immédiate de (60)

des seules ressources de notre théorie des caractéristiques. Le problème à résoudre est un de ceux qui relèvent du *prolongement des caractéristiques* (cf. n° 53).

(1) L'examen du cas  $n = 0$  montre aussitôt que l'on doit prendre  $\mathfrak{E}_1 > f'$ ,  $\mathfrak{X}_1 > c' f' + g'$ .

et (61); et l'on peut affirmer, en outre, que pour  $|t_0|$  assez petit, on a

$$(62) \quad \left| t_0 \frac{\partial \alpha}{\partial t_0} \right| < 2 \mathfrak{K}_1 \varepsilon, \quad \left| t_0 \frac{\partial \mu}{\partial t_0} + 1 \right| < 2 \mathfrak{K}'_1 \varepsilon' + 2 \mathfrak{K} \varepsilon.$$

24. Et maintenant, nous pouvons traiter le cas d'exception signalé plus haut, où (57) n'est pas vérifiée. Soit  $\bar{\lambda}_0$  une valeur satisfaisant aux inégalités (compatibles pour  $\eta$  assez petit)

$$(63) \quad f\eta < \eta^{\frac{2}{3}} \leq |\bar{\lambda}_0 - h_1| < \eta^{\frac{1}{3}};$$

lorsque  $\eta$  est assez petit, la méthode du n° 19 permet de trouver un nombre positif  $R_0$ , tel que pour  $|t_0| \leq R_0$ , on puisse calculer une caractéristique  $\lambda(t)$  prenant en  $t_0$  la valeur  $\bar{\lambda}_0$  <sup>(1)</sup>;  $t_0$  vérifiant cette condition, appelons  $T_0$  une quantité quelconque, mais telle que  $T_0 + \omega$  appartienne à  $S$ ,  $\omega$  étant une quantité quelconque de module égal à 1; nous allons former une caractéristique  $\lambda(t)$  qui, pour  $T = T_0$  <sup>(2)</sup>, prendra la valeur  $\lambda_0$ , satisfaisant à

$$(64) \quad |\lambda_0 - h_1| < f\eta.$$

Soit  $\bar{T}_0$  la quantité (très voisine de  $T_0$  pour  $\eta$  très petit) donnée par

$$\int_{\bar{\lambda}_0}^{h_1} \frac{d\lambda}{\lambda \sqrt{P(\lambda)}} = T_0 - \bar{T}_0;$$

posons encore

$$\tau = \bar{T}_0 + \theta \eta^{\frac{1}{3}} \quad (\text{avec } |\theta| < 1).$$

D'après (63), on aura

$$(65) \quad x\eta^{\frac{1}{3}} < |T_0 - \tau| < x\eta^{\frac{1}{3}} < 1,$$

où  $x$  est borné; en vertu de la condition imposée à  $T_0$ , on peut donc former des caractéristiques prenant en  $\tau$  la valeur  $\bar{\lambda}_0$ . En particulier, si  $\tau = \bar{T}_0$ , le point  $T_0$  jouera pour la caractéristique correspondante le rôle d'un des points  $\bar{h}_k$  du n° 12, soit  $\bar{h}_1$ . Traçons le cercle  $(\bar{\gamma}_1)$  qui

(1) Il est entendu que, dans la suite,  $\alpha_0$  (et par suite  $h_1$ ) conservera une valeur fixe.

(2) C'est-à-dire pour  $t = t_0 e^{T_0}$ .

lui a été associé; nous savons que si  $r_0$  a été pris assez petit  $|\lambda - h_1|$  est, dans  $(\bar{\gamma}_1)$ , de l'ordre de  $\eta$ ; on a donc (1)

$$(66) \quad |\lambda(T_0) - h_1| < f_1 \eta,$$

où  $f_1$  est borné.

Or,  $\mu$  étant toujours défini par la relation

$$\mu = \int_{\bar{\lambda}_0}^{\lambda} \frac{d\lambda}{\lambda \sqrt{P(\lambda)}}$$

(qui est indépendante de  $\bar{T}_0$  ou  $\tau$ ), appelons  $\mu_0$  la valeur correspondant à  $\bar{\lambda}_0$  et  $\mu(T_0)$  celle qui correspond à  $\lambda(T_0)$ ; en vertu de (64) et (66), on a

$$(67) \quad |\mu(T_0) - \mu_0| < f_2 \sqrt{\eta},$$

où  $f_2$  est borné. Cela étant, considérons  $\tau$  comme une variable indépendante, et faisons-le varier dans le cercle  $(\Gamma)$  de centre  $\bar{T}_0$ , de rayon  $\eta^{\frac{1}{3}}$ . Puis, autour de  $T_0$ , décrivons un cercle  $(C)$  de rayon  $\eta^{\frac{1}{4}}$ ; en vertu de (65), ces cercles seront extérieurs; de plus,  $\tau$  variant dans  $(\Gamma)$ ,  $\bar{h}_1(\tau)$  subira des variations de l'ordre de  $\eta^{\frac{1}{3}}$  au plus; par suite, le cercle  $\bar{\gamma}_1(\tau)$ , de rayon proportionnel à  $\eta^{\frac{1}{2}}$ , restera toujours intérieur à  $(C)$ . Nous saurons donc calculer  $\mu$  et  $\frac{\partial \mu}{\partial \tau}$  en un point quelconque de  $(C)$ , pendant la variation de  $\tau$ ; et il résulte de (62) que, sur  $(C)$ ,  $\frac{\partial \mu}{\partial \tau} + 1$  sera de l'ordre de  $r_0$ . Mais, à l'intérieur de  $(C)$ ,  $\frac{\partial \mu}{\partial \tau} + 1$  est une fonction à deux branches; soient  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$  ces branches; on montrerait, comme au n° 22, que  $\Phi_1 + \Phi_2$  et  $\Phi_1 \Phi_2$  ne peuvent avoir d'infinis à l'intérieur de  $(C)$  (2). Par suite, en appliquant l'intégrale de Cauchy à ces deux fonctions, qui sont holomorphes à l'intérieur de  $(C)$  et de l'ordre de  $r_0$  et  $r_0^2$  respectivement sur ce cercle, on peut calculer  $\frac{\partial \mu}{\partial \tau} + 1$  en un point quelconque intérieur à  $(C)$ , et la valeur

(1) Pour abrégier, on a posé  $\lambda(\Gamma) \equiv \lambda(t_0 e^{\Gamma})$ .

(2) Du moins, pour  $r_0$  assez petit.

obtenue sera de l'ordre de  $r_0$ ; pour  $r_0$  assez petit on aura donc

$$\left| \frac{\partial \mu(T_0)}{\partial \tau} + 1 \right| < \frac{1}{2};$$

donc, pour  $|\tau - \bar{T}_0| < \eta^{\frac{1}{3}}$ , on a toujours

$$\left| \frac{\partial \mu(T_0)}{\partial \tau} \right| > \frac{1}{2}.$$

Or cette dernière inégalité, rapprochée de (67), et du fait que, pour  $\eta$  assez petit, on a  $2f_2\eta^{\frac{1}{2}} < \eta^{\frac{1}{3}}$ , montre que l'équation

$$\mu(T_0, \tau) - \mu_0 = 0$$

a une racine  $\tau$  et une seule dans le cercle  $\Gamma$ : c'est cette racine qui nous fournira la caractéristique cherchée.

#### TYPE EXCEPTIONNEL.

##### *Première sorte.*

25. Lorsqu'une équation  $P(\lambda) = 0$  possède une racine double,  $h$ , nous avons défini un secteur  $\Sigma'$  où l'on peut encore former des caractéristiques (nos 14 et 20); mais ce secteur, soumis à la restriction  $5\omega < 1$ , n'est pas assez étendu pour l'étude que nous avons entreprise. Aussi, dans le cas actuel, nous allons former un autre développement par approximations successives qui convergera dans un secteur différent du premier; les deux secteurs auront d'ailleurs une région commune, fait important que nous utiliserons dans la troisième Partie. Les nouvelles caractéristiques que nous obtiendrons ainsi seront toujours de la première espèce; elles seront dites *du type exceptionnel*, et en outre *de la première sorte*, pour les distinguer des caractéristiques de la première espèce, du type exceptionnel et de la deuxième sorte que nous construirons dans le cas, réservé jusqu'ici, où  $P(\lambda)$  est identiquement nul.

Précisons d'abord un résultat énoncé au début du n° 13. Appe-

lons <sup>(1)</sup>  $r_1$  l'une quelconque des racines de l'équation fondamentale déterminante relative au point  $x = 1$  de l'équation linéaire  $(E_{vi})$  (n° 1); et soit de même  $r_\infty$  une racine analogue relative au point  $x = \infty$ ; ceci posé, l'équation  $P(\lambda) = 0$  peut encore s'écrire

$$(2r_\infty + 1)^2 \lambda + (2r_1 - 1)^2 \frac{\lambda}{\lambda - 1} - s^2 = 0;$$

d'où, par dérivation, la racine double

$$(68) \quad h = \frac{2(r_\infty + r_1)}{2r_\infty + 1},$$

le double signe étant inutile dans la résolution de l'équation dérivée, puisque  $r_1$  et  $r_\infty$  désignent des racines arbitrairement choisies; et l'on a

$$(69) \quad s^2 = \sigma^2 = 4(r_\infty + r_1)^2;$$

la correspondance entre  $\sigma^2$  et  $h$ , énoncée au début du n° 13, est ainsi complètement précisée.

Or, je dis d'abord qu'on peut supposer  $\sigma \neq 0$ ; car l'hypothèse  $\sigma = 0$  entraîne <sup>(2)</sup>  $h = 0$ ; et ce cas n'offre aucune difficulté. En effet, en reprenant alors la théorie des caractéristiques du type général, on trouverait

$$P(\lambda) = (4b + 1)\lambda^2 \quad \text{et} \quad \mu \sqrt{4b + 1} = \lambda^{-1} - \lambda_0^{-1}.$$

Or, toutes les expressions  $t\lambda^{-j}$  ( $j = 1, 2, 3$ ) étant de l'ordre de  $t \log^j t$ , on voit directement que les approximations (16) convergent alors pour  $\frac{\pi}{2} + \eta < \theta < \frac{3\pi}{2} - \eta$  (et  $r_0$  assez petit).

Ceci posé, nous supposons d'abord  $h$  différent de 1 et  $\infty$  et nous chercherons les chemins du plan (T) pour lesquels  $|\nu^\sigma|$  tend vers zéro avec  $r, \sigma$  désignant l'une quelconque des racines carrées de (69). Pour cela, posons  $\sigma = \nu e^{i\delta}$ , où, cette fois,  $\delta$  pourra varier de  $-\pi$  à  $+\pi$ ,

(1) On ne confondra pas ce symbole avec la notation  $|t_1|$ .

(2) Sauf pour  $2r_\infty + 1 = 0$ , mais alors  $P(\lambda)$  serait identiquement nul, et ce cas a été réservé (cf. n° 30).

appelons toujours  $\gamma$  l'argument de  $T$  et posons

$$(70) \quad \varpi = r \frac{\cos(\gamma + \delta)}{\cos \gamma};$$

on aura  $|t^\sigma| = r^\sigma$ , et  $\varpi$  devra être  $> 0$ . Donc, si  $\sigma$  est complexe, à chacune des déterminations de  $\sigma$  correspondra un secteur  $\Sigma_1$  <sup>(1)</sup> lieu des points  $T$  dont les arguments  $\gamma$  sont compris entre  $\frac{\pi}{2} - \delta$  et  $\frac{3\pi}{2}$  ou entre  $\frac{\pi}{2}$  et  $\frac{3\pi}{2} - \delta$  (selon qu'on a  $\sin \delta < 0$  ou  $> 0$ ); lorsque  $\sigma^2$  sera positif, il faudra donc rejeter pour  $\sigma$  la racine négative. Le secteur  $\Sigma_1$  sera dit *secteur exceptionnel*; et pour chemin d'intégration  $\mathfrak{C}$  dans nos approximations ultérieures, nous prendrons la spirale du plan  $(t)$  qui correspond à l'un quelconque des rayons  $O\Delta$  de  $\Sigma_1$ .

26. Cela étant, posons  $\lambda = h + \nu$  dans l'équation (VI); elle s'écrira

$$(71) \quad \nu'' + \frac{\nu'}{t} - \sigma^2 \frac{\nu}{t^2} = \alpha_1 \frac{\nu^2}{t^2} + \alpha_2 \frac{\nu}{t} + \alpha_3 \nu'^2 + \alpha_4 \nu' + \frac{\alpha_5}{t},$$

les  $\alpha_i$  étant des fonctions rationnelles de  $\nu$  et  $t$ , holomorphes par rapport à ces variables lorsqu'elles vérifient les conditions <sup>(2)</sup>

$$(72) \quad \begin{cases} |1 - t| > \varepsilon, & |\nu + h| > \varepsilon, & |\nu + h - 1| > \varepsilon, \\ & |\nu + h - t| > \varepsilon, & |\nu^{-1}| > \varepsilon', \end{cases}$$

où  $\varepsilon$  et  $\varepsilon'$  sont deux nombres positifs arbitrairement petits (le premier  $< 1$ ). Nous allons chercher maintenant des intégrales de (71) telles que  $t$  tendant vers zéro sur  $\mathfrak{C}$ ,  $\nu$  et  $t\nu'$  tendent aussi vers zéro. Auparavant, nous ferons deux transformations préliminaires.

Je dis, tout d'abord, que  $\sigma$  n'étant pas un entier (positif), on peut toujours trouver un polynome

$$Q(t) = \sum_{i=1}^{q+1} a_i t^i,$$

(1) On voit aussitôt que le secteur  $\bar{\Sigma}$  défini au n° 13 possède une direction frontière en commun avec  $\Sigma_1$  et constitue un secteur partiel de  $\Sigma_1$ .

(2) En vertu des hypothèses faites plus haut sur  $h$ , ces conditions ont un sens et sont compatibles avec le fait que  $\nu$  doit tendre vers zéro.

où  $q$  est l'entier immédiatement supérieur à  $\varpi - 2$  et tel que la fonction  $\zeta$ , définie par la relation

$$(73) \quad \zeta = \nu + \sum_{i=1}^{q+1} \alpha_i t^i$$

vérifie une équation

$$(74) \quad \zeta'' + \frac{\zeta'}{t} - \sigma^2 \frac{\zeta}{t^2} = \beta_1 \frac{\zeta^2}{t^2} + \beta_2 \frac{\zeta}{t} + \beta_3 \zeta'^2 + \beta_4 \zeta' + \beta_5 t^q \equiv \varphi(\zeta', \zeta, t),$$

dont tous les termes, sauf le dernier, ont la même forme que ceux de (71) <sup>(1)</sup>.

En effet, faisons dans (71) la transformation (73), en laissant indéterminés les coefficients  $\alpha_j$ ; développons les  $\alpha_i$  par rapport aux puissances croissantes de  $t$ , et écrivons que les coefficients de  $t^{-1}$ ,  $t^0$ ,  $t$ , ...,  $t^{q-1}$  sont les mêmes dans les deux membres. Les  $\alpha_j$  devront vérifier un système d'équations linéaires qui se résoudre de proche en proche, le coefficient de  $\alpha_j$  étant  $j^2 - \sigma^2$  (donc  $\neq 0$ ).

Si  $\sigma$  est entier, ce qui exige une relation  $f_1(a, b, c, d) = 0$  entre les coefficients de (VI), on aura  $\sigma = \tau = q + 1$ ; et il sera généralement impossible de former un polynôme  $Q(t)$  répondant à la question. Mais alors on poserait

$$\zeta = \nu + \sum_{j=1}^q \alpha_j t^j + \alpha_{q+1} t^{q+1} \log t;$$

et l'on verrait aisément que  $\sigma = q + 1$  n'étant pas nul, on peut toujours déterminer les  $\alpha_j$  de façon à ramener (71) à la forme (74); seulement cette fois, les  $\beta_j$  ne sont plus holomorphes en  $t$  et  $\nu$ , mais en  $t$ ,  $t \log t$  et  $\nu$ . Exceptionnellement, ils seraient holomorphes en  $t$  si l'on avait  $\alpha_{q+1} = 0$ ; mais ceci exigerait une deuxième relation

$$f_2(a, b, c, d) = 0.$$

(1) Les  $\beta_i$  sont rationnels en  $t$  et  $\zeta$ ; nous préciserons bientôt à quelles conditions ces fonctions sont holomorphes. Remarquons, en outre, que le calcul des  $\alpha_j$  est inutile lorsque  $\sigma$  est complexe : car on peut toujours trouver dans ce cas des rayons  $O\Delta$  pour lesquels  $\varpi < 1$ , de sorte qu'on peut garder l'exposant  $q = -1$  de la formule (71); et, d'autre part, ces rayons nous suffisent pour déceler l'existence de l'intégrale holomorphe  $\zeta(t)$  du n° 27.

D'ailleurs, pour  $\alpha_{q+1} \neq 0$ , rien d'essentiel ne serait changé aux calculs qui vont suivre; pour plus de simplicité, je me bornerai donc au cas où  $\sigma$  n'est pas entier.

27. La seconde transformation que nous avons annoncée repose sur l'existence d'une intégrale holomorphe,  $\zeta(t)$ , qui vérifie (74) et s'annule avec  $t$ . Établissons d'abord ce point.

Je rappellerai tout d'abord que l'équation

$$\zeta'' + \frac{\zeta'}{t} - \sigma^2 \frac{\zeta}{t^2} = f(t)$$

possède l'intégrale

$$\zeta = \frac{t^\sigma}{2\sigma} \int_0^t t^{1-\sigma} f(t) dt - \frac{t^{-\sigma}}{2\sigma} \int_0^t t^{1+\sigma} f(t) dt$$

(en supposant, bien entendu, que les quadratures aient un sens); nous sommes ainsi conduits à faire les approximations suivantes :

$$\zeta_0 = 0$$

et

$$(75) \quad \zeta_{n+1} = \frac{t^\sigma}{2\sigma} \int_0^t t^{1-\sigma} \varphi(\zeta_n, \zeta_n, t) dt - \frac{t^{-\sigma}}{2\sigma} \int_0^t t^{1+\sigma} \varphi(\zeta_n, \zeta_n, t) dt$$

(où  $n = 0, 1, \dots$ , et où les quadratures sont toujours effectuées le long de  $\odot$ ). Étudions la convergence de ces approximations.

Tout d'abord, pour que les  $\beta_i$  soient holomorphes par rapport à  $t$  et  $v$ , il suffit que les transformées par (73) des conditions (72) soient vérifiées; or il en sera certainement ainsi quand on aura

$$(76) \quad |t| < \varepsilon_1, \quad |\zeta| < \varepsilon_2,$$

$\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  étant deux nombres positifs qui ne dépendent que de  $a, b, c, d$ . Ceci posé, désignons par  $t$  un nombre positif que nous définirons comme au n° 18, et observons qu'on a (pour  $r < \varepsilon_1$ )

$$|\varphi(0, 0, t)| < \Lambda r^q,$$

où  $A$  est borné; il vient alors

$$|\zeta_1| < \frac{lA r^{q+2}}{2v} \left( \frac{1}{q+2-\varpi} + \frac{1}{q+2+\varpi} \right) \equiv H_1 r^{q+2},$$

$$|l\zeta_1| < \frac{lA r^{q+2}}{2} \left( \frac{1}{q+2-\varpi} + \frac{1}{q+2+\varpi} \right) \equiv v H_1 r^{q+2},$$

de sorte que, pour  $r$  assez petit,  $\zeta_1$  vérifie (76). En général, supposons qu'on ait obtenu

$$(77) \quad |\zeta_j| < 2 H_1 r^{q+2}, \quad |l\zeta_j| < 2v H_1 r^{q+2} \quad (j=1, 2, \dots, n),$$

et

$$(78) \quad |\zeta_j - \zeta_{j-1}| < H_j r^{q+j+1}, \quad |l(\zeta_j - \zeta_{j-1})| < v H_j r^{q+j+1} \quad (j=1, 2, \dots, n);$$

les  $\zeta_j$  vérifieront bien (76) pour  $r$  assez petit; et, de plus, on trouvera sans peine, en s'appuyant sur les conditions précédentes,

$$|\varphi(\zeta'_n, \zeta_n, l) - \varphi(\zeta'_{n-1}, \zeta_{n-1}, l)| < \frac{M}{r} \{ r |\zeta'_n - \zeta'_{n-1}| + |\zeta_n - \zeta_{n-1}| \}$$

( $M$  étant borné et indépendant de  $n$ ), d'où, en vertu de (78),

$$|\zeta_{n+1} - \zeta_n| < \frac{lM \Pi_n(t+v)}{2v} r^{q+n+2} \left( \frac{1}{q+n+2-\varpi} + \frac{1}{q+n+2+\varpi} \right)$$

$$< \frac{lM(t+v)}{v} \frac{\Pi_n}{n} r^{q+n+2} \equiv k \frac{H_n}{n} r^{q+n+2}$$

et

$$|l(\zeta'_{n+1} - \zeta'_n)| < kv \frac{H_n}{n} r^{q+n+2}.$$

Les inégalités (78) seront donc vraies quel que soit  $j$ , à condition de prendre

$$H_{n+1} = k \frac{H_n}{n},$$

d'où

$$H_{n+1} = H_1 \frac{k^n}{n!}$$

et les modules des termes de la série

$$\zeta = \zeta_1 + (\zeta_2 - \zeta_1) + \dots + (\zeta_{n+1} - \zeta_n) + \dots$$

seront respectivement inférieurs aux termes correspondants de la série

$$Z = H_1 r^{q+2} \left[ 1 + \frac{kr}{1} + \dots + \frac{k^n r^n}{n!} + \dots \right] = H_1 r^{q+2} e^{kr}.$$

Dès lors, les approximations convergeront absolument et uniformément pour  $r < r_0$ ,  $r_0$  étant assez petit [pour que les conditions (76) soient sûrement vérifiées par tous les  $\zeta_n$ ]; leur limite  $\zeta(t)$  sera donc une solution de (74). De plus, chacune des fonctions  $\zeta_1, \dots, \zeta_n$  est holomorphe dans le domaine de l'origine; il en sera donc de même de leur limite  $\zeta(t)$ . Nous avons ainsi démontré que l'équation (VI) possède une intégrale  $\Lambda_1(t)$  holomorphe pour  $t = 0$ .

Et comme  $\sigma^2$  peut prendre deux valeurs, il en résulte que (VI) possède en général (1) deux intégrales  $\Lambda_1(t), \Lambda_2(t)$ , holomorphes pour  $t = 0$ , et se réduisant (2) en ce point à l'une ou l'autre des racines de l'équation

$$4(a + b + c + d + 1) - \frac{4b + 1}{(\lambda - 1)^2} = 0.$$

28. Nous allons utiliser maintenant l'une de ces intégrales, soit  $\Lambda_1(t)$ , pour simplifier la forme de (71); posons

$$(79) \quad \lambda = \Lambda_1(t) + \rho;$$

$\rho$  vérifiera une équation de la forme

$$(80) \quad \rho'' + \frac{\rho'}{t} - \sigma^2 \frac{\rho}{t^2} = \gamma_1 \frac{\rho^2}{t^2} + \gamma_2 \frac{\rho}{t} + \gamma_3 \rho'^2 + \gamma_4 \rho' \equiv \psi(\rho', \rho, t).$$

analogue à (71) (mais où le terme correspondant à  $\alpha_3 : t$  a disparu);

(1) L'une de ces intégrales (ou les deux) pourra être holomorphe dans certains cas en  $t$  et  $t \log t$  (n° 26). Dans ce cas, l'équation (VI) possédera une (ou deux) familles d'intégrales holomorphes en  $t$  et  $t \log t$ ; et même, si la relation  $f_2(a, b, c, d) = 0$ , dont il a été question à la fin du n° 26 est vérifiée, l'équation (VI) possédera une (ou deux) familles d'intégrales holomorphes pour  $t = 0$ . Au fond les intégrales étudiées au n° 30 rentrent dans cette catégorie.

(2) Appelons  $r_0$  l'une des racines de l'équation  $r^2 - r - a = 0$ ; on reconnaîtra aisément que pour  $2(r_0 - r_1 - r_\infty) - 1 = 0 = c$ , l'une des deux intégrales précédentes se réduit à une constante. Abstraction faite des cas envisagés plus loin (note du n° 29, p. 289) où  $(2r_1 - 1)(2r_\infty + 1) = 0$ , le cas précédent est le seul où l'équation (VI) puisse avoir une intégrale de la forme  $\lambda = c$ .

les  $\gamma_i$  sont d'ailleurs holomorphes en  $\rho$  et  $t$  (mais, en général, non rationnels en  $t$ ) pour  $r$  et  $|\rho|$  suffisamment petits. Je dis maintenant que (80) possède une infinité d'intégrales  $\rho(t)$ , dépendant d'une constante arbitraire  $A$ , et s'annulant (ainsi que  $t\rho'$ ) quand  $t$  tend vers 0 suivant  $\mathfrak{E}$ . Pour le prouver, je procède encore par approximations successives, en posant

$$(81) \quad \begin{cases} \rho_0 = A t^\sigma, \\ \rho_{n+1} = \frac{t^\sigma}{2\sigma} \int_0^t t^{1-\sigma} \psi(\rho'_n, \rho_n, t) dt - \frac{t^{-\sigma}}{2\sigma} \int_0^t t^{1+\sigma} \psi(\rho'_n, \rho_n, t) dt + A t^\sigma, \end{cases}$$

où  $n = 0, 1, \dots$  et où les quadratures sont toujours effectuées le long de  $\mathfrak{E}$ . Or la convergence de ces approximations s'établit de la même façon que pour (75); c'est ainsi qu'on démontre qu'il existe deux nombres positifs,  $K_1$  et  $k_1$  (le premier ne dépendant pas de  $\mathfrak{E}$ ), et tels que, pour  $r$  assez petit, on ait

$$|\rho_{n+1} - \rho_n| < \frac{K_1}{k_1} r^{\varpi'} \frac{(k_1 r^{\varpi'})^{n+1}}{n!} \quad \text{et} \quad |t(\rho'_{n+1} - \rho'_n)| < K_1 r^{\varpi'} \frac{(k_1 r^{\varpi'})^{n+1}}{n!}$$

$\varpi'$  désignant le plus petit des nombres  $\varpi$  et 1, d'où

$$|\rho - \rho_0| < K_1 r^{\varpi+\varpi'} e^{k_1 r^{\varpi'}},$$

et, de même,

$$|t(\rho' - \rho'_0)| < K_1 r^{\varpi+\varpi'} e^{k_1 r^{\varpi'}};$$

et l'on montre que la fonction-limite  $\rho$ , dont on a établi l'existence pour  $r$  suffisamment petit, est une intégrale de l'équation (80) telle que les quotients

$$\frac{\rho}{A t^\sigma} \quad \text{et} \quad \frac{t \rho'}{\sigma A t^\sigma}$$

tendent uniformément vers 1 lorsque  $t$  tend vers 0 sur  $\mathfrak{E}$ . Observons d'ailleurs que  $k_1$  contient en facteur  $l$ , c'est-à-dire  $1 : \cos \gamma$  (n° 18); comme les  $\rho_n$  doivent vérifier des conditions de la forme  $|\rho_n| < \varepsilon'_2$ , on voit que la limite supérieure  $r_0$ , imposée à  $r$ , décroît en même temps que  $\gamma - \frac{\pi}{2}$  ou  $\frac{3\pi}{2} - \gamma$  (1).

(1) C'est pour cette raison qu'on a fait la transformation (79); rien n'empêchait d'étudier

Enfin, suivant les deux déterminations que l'on peut prendre pour  $\sigma$ , il existera deux *faisceaux* d'intégrales de (VI), dépendant d'une constante arbitraire  $A$  et tendant vers  $h$ ; les secteurs  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  où sont définis ces faisceaux s'excluent d'ailleurs mutuellement; seule, l'intégrale holomorphe correspondant à  $\sigma^2$ , qui doit être considérée comme commune aux deux faisceaux, converge dans la région  $\Sigma_1 + \Sigma_2$ .

29. Nous allons étudier maintenant les deux cas réservés plus haut, où l'on a  $h = 1$  ou  $\infty$ ; on doit donc avoir  $2r_1 - 1 = 0$  ou  $2r_\infty + 1 = 0$ , c'est-à-dire  $4b + 1 = 0$  ou  $a + b + c + d + 1 = 0$ . Considérons d'abord le premier cas; pour le traiter, nous poserons

$$\lambda = 1 + \mu^2;$$

$\mu$  satisfera à l'équation

$$\begin{aligned} & \mu^\sigma + \frac{\mu'}{t} - (a + b + c + d + 1) \frac{\mu}{t^2} \\ &= \frac{a + b + c + d + 1}{(1-t)^2} \left[ \frac{\mu^3}{t^2} (2 - t + \mu^2) + \frac{\mu}{t} (1-t) \right] \\ &+ \left( \frac{1}{1+\mu^2} + \frac{1}{1-t+\mu^2} \right) \mu \mu'^2 + \frac{\mu^2 \mu'}{(1-t)(1-t+\mu^2)} \\ &- \frac{(1+\mu^2)(1-t+\mu^2)}{(1-t)^3} \left[ \frac{a + \frac{1}{4}}{(1+\mu^2)^2} - c \frac{1-t}{(1-t+\mu^2)^2} \right] \frac{\mu}{t}, \end{aligned}$$

et, dans l'hypothèse où  $a + b + c + d + 1$  est différent de 0, la méthode des nos 26-28 s'appliquera encore. De même, dans le cas où  $a + b + c + d + 1 = 0 \neq 4b + 1$ , on posera  $\lambda = \mu^{-2}$ , et l'équation en  $\mu$  pourra être traitée par les méthodes qui viennent d'être

les intégrales de (74) comme on a fait pour celles de (80); mais les coefficients de (74) dépendent des  $\alpha_j$  dont le nombre croît avec  $i$ :  $\cos \gamma$ , ce qui complique la limitation de  $r_0$  en fonction de  $\gamma$ . On aurait pu aussi étudier (74) ou (80) par la méthode de Briot et Bouquet, fondée sur l'emploi de majorantes tayloriennes; mais une telle méthode n'aurait pas été appropriée au but que nous nous proposons dans la deuxième Partie. — Le procédé de Briot et Bouquet aurait fourni  $\lambda$  sous forme d'un développement procédant suivant les puissances croissantes de  $t$  et  $\mu$ ; mais, avec notre méthode, ce point résulte aussi de ce que chacun des termes de la suite uniformément convergente (81) admet un développement de la forme précédente.

exposées (1). En définitive, le seul cas qu'il nous reste à étudier est celui où l'on a  $4b + 1 = 0 = a + b + c + d + 1$  (ou  $2r_1 = 1 = -2r_2$ ). D'après (69)  $\sigma$  est nul, de sorte que  $P(\lambda)$  s'évanouit identiquement. C'est ce cas que nous allons aborder; les caractéristiques que nous obtiendrons alors seront dites de *première espèce*, du *type général* et de la *deuxième sorte*.

*Deuxième sorte.*

30. Soit  $\lambda_0$  une quantité arbitraire, mais non nulle, et que nous supposerons d'abord différente de 1 et  $\infty$ . L'équation (VI) s'écrit actuellement

$$(82) \quad \lambda'' + \frac{\lambda'}{t} = \frac{\lambda'^2}{2} \left( \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda-1} + \frac{1}{\lambda-t} \right) + \frac{(\lambda-1)\lambda'}{(1-t)(\lambda-t)} - \frac{2\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}{t(t-1)^2} \left[ \frac{\alpha + \frac{1}{4}}{\lambda^2} + \frac{c(t-1)}{(\lambda-t)^2} \right] \equiv \varphi(\lambda', \lambda, t);$$

nous allons chercher des intégrales de (82) telles que  $t$  tendant vers 0,  $\lambda$  tende vers  $\lambda_0$ . A cet effet, je remarque d'abord que l'équation

$$\lambda'' + \frac{\lambda'}{t} = f(t)$$

admet la solution

$$\lambda = \lambda_0 + \int_0^t \frac{dt}{t} \int_0^t t f(t) dt$$

(en supposant, bien entendu, que les quadratures aient un sens). Faisons donc les approximations suivantes :

$$(83) \quad \lambda_{n+1} = \lambda_0 + \int_0^t \frac{dt}{t} \int_0^t t \varphi(\lambda'_n, \lambda_n, t) dt,$$

où  $n = 0, 1, \dots$  et où les quadratures sont effectuées le long de la spirale correspondant à un rayon *quelconque*  $O\Delta$  du plan (T) (l'argu-

(1) On reconnaîtra immédiatement que les deux intégrales holomorphes  $\Lambda_1(t)$  et  $\Lambda_2(t)$  du n° 27 coïncident toutes deux ici avec l'intégrale  $\lambda = 1$  (ou  $\lambda^{-1} = 0$ ); ce sont les deux cas annoncés plus haut [note (2) de la page 286] où l'équation (VI) possède encore des intégrales de la forme  $\lambda = c$ .

ment de  $O\Delta$  étant compris entre  $\frac{\pi}{2} + \eta$  et  $\frac{3\pi}{2} - \eta$ ); il faut démontrer que pour  $r < r_0$  suffisamment petit, les approximations (83) convergent régulièrement vers une fonction-limite qui répond à la question.

Or la démonstration se fait comme au n° 27; on établit que, pour  $r_0$  assez petit (ne dépendant que de  $a, c$  et  $\lambda_0$ ), les fonctions (83) et leurs dérivées satisfont aux inégalités

$$|\lambda_{n+1} - \lambda_n| < H_1 \frac{k^{n+1} r^{n+1}}{(n+1)!}, \quad |\lambda'_{n+1} - \lambda'_n| < H_1 \frac{k^{n+1} r^n}{n!},$$

$H_1$  ne dépendant que de  $a, c$  et  $\lambda_0$ ;  $k$  dépendant en outre de  $\eta$ , à cause du facteur  $l$ ; et la convergence uniforme des approximations pour  $r < r_0$  en résulte aussitôt. Mais, d'après (83), chacune des fonctions  $\lambda_n$  est holomorphe pour  $r < r_0$ ; l'intégrale de (82) que nous venons de définir est donc aussi holomorphe dans le voisinage de l'origine; et l'on montrerait aisément que pour  $t = 0$  cette intégrale se réduit à  $\lambda_0$ .

Nous avons supposé  $\lambda_0$  différent de 1 et  $\infty$ ; dans le cas où il en serait autrement, on ferait l'un des deux changements de variable indiqués au n° 29, et l'on traiterait l'équation en  $\mu$  exactement comme (82) (1). On en déduira une conséquence importante, qui résume la théorie des caractéristiques exceptionnelles de la deuxième sorte : on peut trouver un nombre positif  $r_0$  ne dépendant que de  $a, c$  et  $\eta$ , et tel que pour toute valeur  $t$ , de module inférieur à  $r_0$ , on puisse former des caractéristiques exceptionnelles de la deuxième sorte, satisfaisant à (VI), et dont les inverses sont holomorphes pour  $|t| < r_0$  et prennent pour  $t = 0$  la valeur arbitraire  $\lambda_0^{-1}$  (de module borné, soit  $|\lambda_0^{-1}| < \eta^{-1}$ ).

#### Caractéristiques de deuxième espèce.

31. Je vais montrer maintenant qu'on peut former pour (VI) des caractéristiques  $\lambda(t)$  qui tendent vers 0 lorsque  $t$  tend vers 0 le long de chemins bien déterminés, et cela de telle sorte qu'il existe un nombre  $\omega$  ( $0 < \omega \leq 1$ ) pour lequel  $|\lambda t^{-\omega}|$  reste borné supérieurement.

---

(1) Nous aurons à utiliser plus loin l'équation en  $\mu$  correspondant à  $\lambda_0 = \infty$  [voir formule (104), n° 44].

J'indiquerai les conditions initiales qui définissent ces caractéristiques après avoir fait connaître une forme nouvelle que l'on peut donner à (VI). Posons (1)

$$(84) \quad \begin{cases} \tilde{\lambda} = \frac{\lambda}{t}, \\ \tilde{z} = z - \frac{t(t-1)}{2(\lambda-t)} \lambda' - \frac{2\lambda-1}{2}; \end{cases}$$

nous allons substituer à (1) un système (1\*) qui sera vérifié par  $\tilde{\lambda}$  et  $\tilde{z}$ . En vertu de (VI) et de la seconde équation (1), on a (en gardant pour un instant l'ancienne variable  $\lambda$ ) :

$$(85) \quad \begin{aligned} \tilde{z}' = & -\frac{\tilde{z}}{\lambda-t} - \frac{2c\lambda(\lambda-1)}{(\lambda-t)^2} - \left[ \frac{t(t-1)}{2(\lambda-t)^2} + 1 \right] \lambda' - \frac{2\lambda-1}{2(\lambda-t)} \\ & - \frac{t(t-1)}{2(\lambda-t)} \left[ \frac{\lambda'^2}{2} \left( \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda-1} - \frac{1}{\lambda-t} \right) + \frac{2\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}{t^2(t-1)^2} \frac{\partial g}{\partial \lambda} \right]. \end{aligned}$$

Or la première équation (1) donne

$$(86) \quad \lambda'^2 - 2 \frac{\lambda(\lambda-1)}{t(t-1)} \lambda' - \frac{4\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}{t^2(t-1)^2} \left[ \tilde{z} + \frac{2\lambda-1}{2} + g(\lambda, t) \right] = 0;$$

posons

$$(87) \quad \Delta^2 \equiv \frac{\lambda^2(\lambda-1)^2(\lambda-t)^2}{t^2(t-1)^2} \left[ \frac{4\tilde{z}}{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)} + \frac{4a+1}{\lambda^2} + \frac{4b+1}{(\lambda-1)^2} + \frac{4c+1}{(\lambda-t)^2} + \frac{4d+2}{\lambda(\lambda-1)} + \frac{2}{\lambda-t} \left( \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda-1} \right) \right];$$

nous déduirons de (86)

$$(88) \quad \lambda' = \frac{\lambda(\lambda-1)}{t(t-1)} + \Delta.$$

Substituée dans (85), cette valeur de  $\lambda'$  donne, après des calculs faciles,

$$\begin{aligned} \tilde{z}' = & -\frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}{2t(t-1)} \left[ \frac{2\tilde{z}}{\lambda(\lambda-1)} + \frac{4a+1}{\lambda} + \frac{4b+1}{\lambda-1} + \frac{4c+3}{\lambda-t} \right. \\ & \left. + 2(d+1) \left( \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda-1} \right) \right] - \frac{3}{2} \Delta. \end{aligned}$$

---

(1) La différence  $\tilde{z} - z$  n'est autre que le coefficient  $\beta$  du n° 1 (voir Thèse, p. 51).

Introduisons maintenant notre fonction  $\tilde{\lambda}$  et nous pourrons écrire (1) sous la forme

$$(*) \quad \left\{ \begin{aligned} t\tilde{\lambda}' &= \frac{t\tilde{\lambda}(\tilde{\lambda}-1)}{t-1} + \Delta, \\ \alpha' &= -\frac{\tilde{\lambda}(\tilde{\lambda}-1)(t\tilde{\lambda}-1)}{2(t-1)} \\ &\times \left[ \frac{2\alpha^*}{\tilde{\lambda}(t\tilde{\lambda}-1)} + \frac{4a+1}{\tilde{\lambda}} + \frac{(4b+1)t}{t\tilde{\lambda}-1} \right. \\ &\quad \left. + \frac{4c+3}{\tilde{\lambda}-1} + 2(d+1)\left(\frac{1}{\tilde{\lambda}} + \frac{t}{t\tilde{\lambda}-1}\right) \right] - \frac{3}{2}\Delta, \end{aligned} \right.$$

et l'on a, en vertu de (87),

$$(89) \quad \Delta^2 = \frac{\tilde{\lambda}^2(\tilde{\lambda}-1)^2(t\tilde{\lambda}-1)^2}{(t-1)^2} \\ \times \left[ \frac{4\alpha^*}{\tilde{\lambda}(\tilde{\lambda}-1)(t\tilde{\lambda}-1)} + \frac{4a+1}{\tilde{\lambda}^2} + \frac{(4b+1)t^2}{(t\tilde{\lambda}-1)^2} \right. \\ \left. + \frac{4c+1}{(\tilde{\lambda}-1)^2} + \frac{(4d+2)t}{\tilde{\lambda}(t\tilde{\lambda}-1)} + \frac{2}{\tilde{\lambda}-1} \left( \frac{1}{\tilde{\lambda}} + \frac{t}{t\tilde{\lambda}-1} \right) \right] \equiv \mathfrak{Q}(\tilde{\lambda}, t),$$

$(t-1)^2\mathfrak{Q}(\tilde{\lambda}, t)$  étant un polynôme en  $\tilde{\lambda}$  et  $t$ , du quatrième degré en  $\tilde{\lambda}$ .

32. Nous allons montrer maintenant que,  $\alpha_0$  et  $\tilde{\lambda}_0$  étant des constantes bornées quelconques et  $\tilde{\epsilon}$  un chemin convenablement choisi, on peut trouver une intégrale de (1) répondant aux conditions du n° 31, et telle que,  $t$  tendant vers 0,  $\alpha$  tende vers  $\alpha_0$ , tandis que  $t$  tendant vers  $t_0$  (de module assez petit),  $\tilde{\lambda}$  tende vers  $\tilde{\lambda}_0$ .

A cet effet, appelons  $\Delta_0$  ce que devient  $\Delta$  quand, dans (89), on remplace  $t$  par 0 et  $\alpha$  par  $\alpha_0$ ; nous aurons

$$\Delta_0^2 = \tilde{\lambda}^2(\tilde{\lambda}-1)^2 \left[ \frac{4a+1}{\tilde{\lambda}^2} + \frac{4c+1}{(\tilde{\lambda}-1)^2} - \frac{4\alpha_0-2}{\tilde{\lambda}(\tilde{\lambda}-1)} \right],$$

ou encore, en posant

$$(4^*) \quad s^2 = 4(\alpha + c + 1 - \alpha_0),$$

$$(5^*) \quad \Delta_0^2 = - (4\alpha + 1)(\lambda - 1) + (4c + 1)\lambda + s^2\lambda(\lambda - 1) \equiv \dot{P}(\lambda),$$

et le polynome  $\dot{P}(\lambda)$  jouera maintenant un rôle analogue à celui de  $P(\lambda)$  pour les caractéristiques de première espèce. Ceci posé, nous pourrons écrire la première équation (1) sous la forme

$$(6^*) \quad \frac{t\dot{\lambda}'}{\sqrt{\dot{P}(\lambda)}} = 1 + \frac{t\lambda(\lambda - 1)}{(t - 1)\sqrt{\dot{P}(\lambda)}} + \frac{\mathcal{Q}(\lambda, t) - \dot{P}(\lambda)}{2\dot{P}(\lambda) \left[ 1 + \frac{\Delta - \Delta_0}{2\Delta_0} \right]},$$

mais on pourra assujettir  $\lambda$ ,  $\alpha$  et  $t$  à vérifier des conditions de formes analogues (1) à celles de (7), (8) et (9), et cela de façon que le second membre de (6) diffère arbitrairement peu de 1; dès lors, en posant

$$(13^*) \quad \mu = \int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{d\lambda}{\sqrt{\dot{P}(\lambda)}},$$

il sera loisible d'écrire (1) sous la forme

$$(14^*) \quad \begin{cases} t \frac{d\mu}{dt} = 1 + \dot{F}(\mu, \alpha - \alpha_0, t), \\ \frac{d\alpha}{dt} = \alpha^* \dot{\varphi}(\mu, t) + \dot{\psi}(\mu, t), \end{cases}$$

où les nouvelles fonctions jouissent de propriétés analogues à celles des fonctions correspondantes du n° 10. Il est donc clair que tous les résul-

(1) On aura déjà remarqué que  $\lambda$  joue un rôle analogue à celui de  $\lambda^{-1}$  (et non à celui de  $\lambda$ ); ainsi c'est  $|t^\omega \lambda|$  qui reste borné au lieu de  $|t^\omega \lambda^{-1}|$  (on a posé  $\omega = 1 - \alpha$ , notation plus symétrique, que nous utiliserons plus loin). Et l'on pourrait multiplier les remarques analogues.

tats qui ont été obtenus à propos du système (14) s'appliqueront au système (14<sup>\*</sup>); aussi, je ne m'arrêterai pas sur ce point.

Je montrerai plutôt comment la théorie des caractéristiques du type exceptionnel s'étend au cas actuel; ce fait résulte immédiatement de ce que (VI) peut encore s'écrire

$$\begin{aligned}
 \text{(VI)} \quad \tilde{\lambda}'' &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\tilde{\lambda}} + \frac{1}{\tilde{\lambda}-1} + \frac{t}{t\tilde{\lambda}-1} \right) \tilde{\lambda}'^2 \\
 &\quad - \left( \frac{1}{t} + \frac{1}{t-1} - \frac{\tilde{\lambda}}{t\tilde{\lambda}-1} \right) \tilde{\lambda}' + 2 \frac{\tilde{\lambda}(\tilde{\lambda}-1)(t\tilde{\lambda}-1)}{t^2(t-1)^2} \\
 &\quad \times \left[ (a+b+c+d+1)t - \frac{a+\frac{1}{4}}{\tilde{\lambda}^2} + \frac{bt(t-1)}{(t\tilde{\lambda}-1)^2} - \frac{(c+\frac{1}{4})(t-1)}{(\tilde{\lambda}-1)^2} \right];
 \end{aligned}$$

les résultats des nos 25 à 30 s'étendent alors immédiatement. Ainsi, on aura cette fois (1)

$$\text{(68)} \quad \tilde{h} = \frac{2r_0-1}{2(r_0-r_t)},$$

$r_0$  et  $r_t$  désignant deux quelconques des racines des équations fondamentales déterminantes de (E<sub>VI</sub>) (n° 1), relatives aux points  $x=0$  et  $x=t$  respectivement; et  $\tilde{h}$  est bien la seule racine double que puisse avoir  $\tilde{P}(\tilde{\lambda})=0$ , ce fait arrivant d'ailleurs pour

$$\text{(69)} \quad s^2 = \sigma^2 = 4(r_0-r_t)^2.$$

Enfin, on intégrera (VI) par approximations successives en posant  $\tilde{\lambda} = \tilde{h} + \tilde{v}$  et en procédant comme aux nos 25-27.

En définitive, on voit donc que la théorie des caractéristiques de deuxième espèce sera calquée mot pour mot sur celle des caractéristiques de première espèce.

---

(1) Cf. la note précédente.

## DEUXIÈME PARTIE.

---

33. Dans la première Partie, nous avons appris à construire des développements qui représentent les intégrales de (VI) le long de certains chemins  $\varepsilon$ , de longueurs bornées (en fonction de  $\eta$ ), et convergeant vers zéro. Nous allons maintenant résoudre le problème inverse que voici : étant donnés une intégrale quelconque de (VI) et un chemin  $\varepsilon$  de longueur finie convergeant vers zéro, peut-on trouver une caractéristique qui, en un certain point  $t$  de  $\varepsilon$ , prenne les mêmes valeurs  $\lambda$  et  $\alpha$  (ou  $\lambda^*$  et  $\alpha^*$ ) que l'intégrale proposée? Si la réponse est affirmative, il en résultera évidemment que le long d'une spirale  $\varepsilon$  <sup>(1)</sup> issue de  $t$ , l'intégrale et la caractéristique coïncideront constamment; et l'on aura ainsi démontré qu'il ne saurait exister d'autres caractéristiques que celles de la première Partie. Ce point acquis, nous n'aurons plus qu'à utiliser nos caractéristiques pour faire, en toute sécurité, la description détaillée de notre intégrale dans le voisinage de l'origine, ce qui constituera l'objet de la troisième Partie.

34. Je commencerai par établir un lemme préliminaire important pour notre but actuel, et dont voici l'énoncé :

Soient  $\lambda(t)$  une intégrale quelconque de (VI),  $\varepsilon$  un chemin analytique quelconque de longueur finie, convergeant vers zéro, et  $\omega$  un nombre réel, compris entre 0 et 1 au sens étroit. Ceci posé, *ou bien il existe sur  $\varepsilon$  une infinité de points arbitrairement voisins de zéro pour lesquels  $|\alpha|$  et  $|t^\omega \lambda^{-1}|$ , ou  $|\alpha^*|$  et  $|t^{1-\omega} \lambda^*|$  sont bornés simultanément; ou bien, si aucun des deux faits précédents n'est exact, on peut substituer à  $\varepsilon$  un chemin de longueur finie en tout point duquel l'une des quantités  $|t^{1-\omega} \lambda^*|$  ou  $|t^\omega \lambda^{-1}|$  (choisie à volonté) est constamment bornée.*

---

(1) Déformée au besoin, comme il a été dit au n° 18.

En effet, supposons que la seconde alternative ne soit pas déjà réalisée sur  $\mathcal{L}$ ; on peut donc marquer sur  $\mathcal{L}$  une infinité d'arcs  $\widehat{t_1 t_2}$ ,  $\widehat{t_3 t_4}$ ,  $\widehat{t_5 t_6}$ , ... convergeant vers zéro, et tels que le long de chacun d'eux on ait  $|t^\omega \lambda^{-1}| < 1$ , l'inégalité opposée étant vérifiée sur les arcs  $t_2 t_3$ ,  $t_4 t_5$ , ... Il en résulte que lorsque  $t$  décrit un arc de la première catégorie par exemple, soit  $\widehat{t_1 t_2}$ , le point  $\lambda$  décrira un arc  $\widehat{\lambda_1 \lambda_2}$ , ayant ses extrémités  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sur un cercle  $(\gamma)$ , de centre  $O$ , de rayon  $r^\omega$  et tous ses autres points à l'extérieur de  $(\gamma)$ . Or prenons  $\lambda$  comme variable, et faisons décrire à  $\lambda$  le plus petit des deux arcs limités par  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sur  $(\gamma)$ ; le point  $t$  décrira un chemin  $\widehat{t_1 t_2}$  pour lequel on aura  $|t^\omega \lambda^{-1}| = 1$ . Et, en procédant de même pour  $\widehat{t_3 t_4}$ ,  $\widehat{t_5 t_6}$ , ..., nous aurons substitué à  $\mathcal{L}$  un chemin  $\mathcal{L}'$  le long duquel on aura constamment  $|t^{1-\omega} \lambda| \leq 1$  (1). Mais, pour l'objet que nous avons en vue, il est essentiel d'établir que la longueur de  $\mathcal{L}'$  est finie; et, pour cela, je vais évaluer le rapport des deux longueurs  $s_1$  et  $s_2$  des arcs  $\widehat{t_1 t_2}$  et  $\widehat{t_1' t_2'}$ .

Revenons aux équations (1) et posons

$$\lambda = \frac{1}{x}, \quad \alpha = \frac{1}{y^2};$$

puis prenons  $x$  comme nouvelle variable; le système (1) s'écrira

$$(90) \quad \begin{cases} \frac{dt}{dx} = \frac{t(t-1)r}{\sqrt{X} - y^2 Y}, \\ \frac{dy}{dx} = \frac{y^2 Z}{\sqrt{X} - y^2 Y} \end{cases}$$

avec

$$\begin{aligned} X &\equiv 4x(1-x)(1-tx), \\ -Y &\equiv (4a+1)(1-x)^2(1-tx)^2 + (4b+1)(1-tx)^2 \\ &\quad + 4c(1-x)^2 + (4d+2)(1-x)(1-tx^2), \\ -Z &\equiv \frac{1-t}{2} \left[ \frac{tx}{1-tx} + \frac{2cty^2(1-x)}{(1-tx)^2} \right]. \end{aligned}$$

---

(1) Il est clair qu'un procédé analogue, appliqué aux arcs de la seconde catégorie conduirait à un chemin  $\mathcal{L}'$  en tout point duquel on aurait  $|t^\omega \lambda^{-1}| \leq 1$ .

Or, sur les arcs  $\widehat{t_1 t_2}$ ,  $(\widehat{t_1 t_2})$ , ... on a  $|x t^\omega| \leq 1$  et, de plus,  $|y|$  est très petit : sinon il existerait des points (arbitrairement rapprochés de l'origine) pour lesquels on aurait simultanément  $|t^\omega \lambda^{-1}| < 1$  et  $|\alpha|$  borné et la première hypothèse de notre lemme serait réalisée. Il nous faut donc étudier l'intégrale de (90) qui, pour  $x = x_0$ , prend des valeurs de modules très petits,  $t_0$  et  $y_0$ ; et nous obtiendrons encore une telle intégrale par la méthode des approximations successives. Auparavant, remarquons qu'en vertu des conditions imposées,  $|Z|$  est borné (et même très petit avec  $r$ ); de plus, pour  $|x(1-x)|$  borné inférieurement et supérieurement,  $|X - y^2 Y|$  est supérieur à un nombre positif fixe; et, si  $|x|$  est très grand,  $|tx|$  devant être très petit,  $X$  sera comparable à  $-4x^2$ , tandis que  $-Y$  sera comparable à  $(4a + 4c + 1)x^2$ .  $X - y^2 Y$  ne saurait donc s'annuler que si  $x$  s'approche de 0 ou de 1; mais alors, en entourant, par exemple, le point  $x = (a + b + c + d + 1)y_0^2$  d'un cercle  $(\gamma_0)$ , de rayon proportionnel à  $y_0^2$ , on voit aussitôt, d'après ce qui précède, que  $y(X - y^2 Y)^{-\frac{1}{2}}$  restera borné (supérieurement) si  $x$  n'est pas intérieur à  $(\gamma_0)$ , et si  $|yy_0^{-1} - 1|$  et  $|t|$  sont très petits; et l'on entourerait de même le point  $x = 1 - (b + \frac{1}{4})y_0^2$  d'un cercle analogue  $(\gamma_1)$ . Cela étant, faisons les approximations successives suivantes (1) :

$$t_0(x) = t_0, \quad y_0(x) = y_0$$

et

$$(91) \quad \begin{cases} \log \frac{t_{n+1}}{t_0} = \int_{x_0}^x \frac{y_n(t_n - 1) dx}{\sqrt{X(t_n, x) - y_n^2 Y(t_n, x)}}, \\ y_{n+1} = y_0 + \int_{x_0}^x \frac{Z(t_{n+1}, x) y_n dx}{\sqrt{X(t_{n+1}, x) - y_n^2 Y(t_{n+1}, x)}}, \end{cases}$$

où  $n = 0, 1, \dots$  et où les intégrales sont prises sur un chemin de longueur finie, extérieur à  $(\gamma_0)$  et  $(\gamma_1)$  et vérifiant la condition  $|x(t_0)^\omega| < 1$ . En procédant comme nous avons souvent fait, on démontrerait la convergence régulière des approximations pour  $|t_0|$  et  $|y_0|$  suffisamment petits (2); les fonctions-limites  $t(x)$  et  $y(x)$  véri-

(1) La même méthode permettrait d'établir la relation analogue à (92) que M. Painlevé déduit de « théorèmes bien connus de M. Poincaré ». [Cf. p. 298, note (2)].

(2) De façon que  $|y_n y_0^{-1} - 1|$  et  $|t_n|$  restent toujours très petits.

fieront donc (90); et, en vertu de (91), on pourra les écrire sous la forme suivante :

$$(92) \quad \begin{cases} t(x) = t_0[1 + \varepsilon_1(x; t_0, y_0, x_0)], \\ y(x) = y_0[1 + \varepsilon_2(x; t_0, y_0, x_0)], \end{cases}$$

$\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  étant des fonctions de modules très petits avec  $|t_0|$  et  $|y_0|$ ; nous supposerons, par exemple,  $|\varepsilon_1| < \frac{1}{2}$ , et  $|\varepsilon_2| < \frac{1}{2}$ .

La convergence des approximations et les relations (92) ne paraissent établies que lorsque  $x$  n'est pas intérieur à  $(\gamma_0)$  ou  $(\gamma_1)$ . Mais, lorsqu'il n'en est plus ainsi, les pôles des quantités à intégrer étant d'ordre  $\frac{1}{2}$ , les approximations restent toujours possibles <sup>(1)</sup>; et l'on en déduira aussi que les formules (92) restent toujours applicables.

Appliquons maintenant le raisonnement de M. Painlevé <sup>(2)</sup>; prenons comme conditions initiales  $x_0 = \lambda_1^{-1}$ ,  $t_0 = t_1$  et  $y_0 = \alpha^{-\frac{1}{2}}(t_1)$ ; et appelons  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  les arcs décrits par  $x$ , correspondant respectivement aux chemins  $\widehat{t_1 t_2}$  et  $(\widehat{t_1 t_2})$ ; on aura

$$\frac{s_2}{s_1} = \frac{\int_{\sigma_2} \left| \frac{dt}{dx} \right| dx_2}{\int_{\sigma_1} \left| \frac{dt}{dx} \right| d\sigma_1} = \frac{\int_{\sigma_2} \left| \frac{(1-t)ty}{\sqrt{X-y^2Y}} \right| d\sigma_2}{\int_{\sigma_1} \left| \frac{(1-t)ty}{\sqrt{X-y^2Y}} \right| d\sigma_1};$$

mais sur le cercle  $(\Gamma)$  qui correspond à  $(\gamma)$  dans le plan  $(x)$ ,  $|\sqrt{X-y^2Y}|$  est égal à  $4r^{-2\omega}(1+\varepsilon)$ ,  $\varepsilon$  étant très petit, par conséquent, si  $|t_0|$  et  $|y_0|$  sont assez petits, le rapport

$$\left| \frac{\sqrt{(X-y^2Y)\sigma_1}}{\sqrt{(X-y^2Y)\sigma_2}} \right|$$

reste inférieur à 2 pour tout couple de points  $x$  appartenant respectivement à  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ ; d'autre part, en vertu de (92), on a

$$\frac{1}{4} |t_0 y_0| < |ty| < \frac{9}{4} |t_0 y_0|;$$

<sup>(1)</sup> On vérifiera que  $|y_n y_0^{-1} - 1|$  et  $|t_n|$  sont encore très petits.

<sup>(2)</sup> *Bull. Soc. math.*, t. XXVIII, 1900, p. 237-238.

il viendra donc

$$\frac{s_2}{s_1} < 18 \frac{1+r_0}{1-r_0} \frac{\int_{\sigma_2} d\sigma_2}{\int_{\sigma_1} d\sigma_1}.$$

Mais le dernier rapport est inférieur à  $\frac{\pi}{2}$ , puisque  $\sigma_2$  est le plus petit des deux arcs de  $(\Gamma)$  limités par  $\lambda_1^{-1}$  et  $\lambda_2^{-1}$ ; en prenant  $r_0 < \frac{1}{2}$ , on pourra donc écrire

$$\frac{s_2}{s_1} < 27\pi;$$

ce qui montre bien que la longueur de  $\mathcal{L}'$  est finie.

C. Q. F. D.

35. Je vais démontrer maintenant qu'on peut trouver des chemins  $\mathcal{L}'$  tels qu'il existe sur eux des points  $t$  arbitrairement voisins de 0 et pour lesquels on a ( $\omega$  ayant toujours la même signification que plus haut) :

1° Soit  $|t^\omega \lambda^{-1}|$  et  $|\alpha|$  bornés;

2° Soit  $|t^{1-\omega} \lambda|$  et  $|\alpha|$  bornés.

En d'autres termes, *il existe toujours des chemins pour lesquels la première alternative de notre lemme est vraie, quelle que soit l'intégrale de (VI).*

En effet, si elle était erronée, notre lemme nous permettrait de tracer un chemin  $\mathcal{L}'$  de longueur finie, en tout point duquel on aurait  $|t^\omega \lambda^{-1}| < 1$ , par exemple; dès lors, pour que le théorème actuel fût inexact, il faudrait que, sur  $\mathcal{L}'$ ,  $|\alpha^{-1}|$  tende vers zéro avec  $|t|$ . Il faudrait donc que  $\left| \int_{t_0}^t \frac{1}{\alpha} \frac{dz}{dt} dt \right|$  croisse indéfiniment avec  $|t^{-1}|$ , sur le chemin  $\mathcal{L}'$ . Or, d'après (1), on a

$$\int_{t_0}^t \frac{1}{\alpha} \frac{dz}{dt} dt = - \int_{t_0}^t \left[ \frac{1}{1 - \frac{t}{\lambda}} + \frac{2c}{\alpha} \frac{\lambda - 1}{\left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^2} \right] \frac{dt}{\lambda};$$

mais le chemin d'intégration  $\mathcal{L}'$  étant de longueur finie, l'inégalité  $|\lambda^{-1}| < |t^{-\omega}|$  montre que le second membre de la relation précédente restera sûrement borné si  $|\alpha|$  est borné inférieurement. Il existe donc, aussi près qu'on le veut de l'origine, des points de  $\mathcal{L}'$  pour lesquels  $|\alpha|$  prend une valeur arbitrairement petite et notre théorème se trouve ainsi démontré.

36. Soit alors  $\mathcal{L}$  un chemin, convergeant vers zéro et sur lequel la première hypothèse du n° 35 est vérifiée (1); il existera donc des points, arbitrairement rapprochés de zéro, pour lesquels l'expression  $s^2(t) = 4a + 4c + 1 - 4\alpha(t)$  reste bornée ( $|t^\omega \lambda^{-1}|$  y étant inférieur à 1). Or supposons que  $s(t)$  ne tende pas vers l'une des valeurs (34); que  $|s(t)|$  soit borné ou non, on pourra toujours trouver sur  $\mathcal{L}$ , arbitrairement près de zéro, des points  $t_1$  pour lesquels  $s(t)$  prendra une valeur finie  $s_1$ , dont la différence avec l'une des valeurs (34) sera, en module, supérieure à un nombre essentiellement positif  $\bar{\rho}$ . Or je dis que, dans ces conditions on peut déterminer une caractéristique de première espèce  $[\bar{\lambda}(t), \bar{\alpha}(t)]$  prenant pour  $t = t_1$  les mêmes valeurs, soient  $(\bar{\lambda}_1, \bar{\alpha}_1)$ , que notre intégrale en question.

En effet, considérons toutes les caractéristiques définies comme au n° 8 par les conditions initiales suivantes : pour  $t = t_1$ ,  $\lambda = \bar{\lambda}_1$ ; et pour  $t = 0$ ,  $\alpha = \bar{\alpha}_1 + \theta \bar{\eta}$  ( $|\theta| < 1$ ),  $\bar{\eta}$  étant un nombre positif arbitrairement petit; pour toutes ces caractéristiques,  $|h_1^{-1} - h_2^{-1}|$  sera supérieur à un nombre positif fixe, ne dépendant que de  $\bar{\rho}$  et  $\bar{\eta}$ . De plus, en procédant comme au n° 23, on démontrerait qu'on peut dériver terme à terme par rapport à  $\alpha_0$  les séries (53) qui fournissent ces caractéristiques (2); et, pour  $|t_1|$  assez petit (3), la somme des dérivées reproduira  $\frac{\partial \alpha}{\partial \alpha_0}$  et vérifiera la relation

$$(93) \quad \left| \frac{\partial \alpha}{\partial \alpha_0} - 1 \right| < H r \left( \frac{r_1}{r_0} \right)^\omega,$$

(1) Les démonstrations qui vont suivre ont été rédigées pour des caractéristiques de première espèce; mais il est clair qu'elles s'appliqueraient mot pour mot à des caractéristiques de deuxième espèce.

(2) Les nombres  $\eta$  et  $\omega$  relatifs à ces caractéristiques étant arbitrairement choisis.

(3) Et indépendant de  $\lambda_1$ , en vertu de la condition vérifiée par  $|t^\omega \lambda^{-1}|$ . [Cf. la formule (54).]

où  $H$  est un nombre positif borné ne dépendant que de  $\eta$ ,  $\bar{\rho}$  et  $\bar{\eta}$ . Enfin, par une méthode semblable à celle du n° 22, on prouverait que (93) est encore applicable à l'intérieur des cercles  $(\bar{\gamma}_k)$ . Donc, pour  $r_1 = |t_1|$  assez petit, on aura, dans tout le secteur  $S$  correspondant à l'une quelconque de ces caractéristiques,

$$\left| \frac{\partial \alpha}{\partial z_0} \right| > \frac{1}{2},$$

ce qui suffit à établir que l'équation  $\alpha(t_1; \alpha_0, \lambda_1) = z_1$  a sûrement une solution et une seule  $\alpha_0$ , sous les conditions indiquées. Si donc  $s(t)$  ne tend pas vers l'une des valeurs (34), l'intégrale en question coïncide nécessairement avec une caractéristique de première espèce le long d'une spirale  $\ominus$ , convenablement tracée, issue d'un point  $t_1$ , suffisamment rapproché de zéro.

Un raisonnement analogue s'appliquerait à la seconde hypothèse du n° 35; en définitive, le seul cas (1) qu'il nous reste à examiner est le suivant : le long de  $\mathcal{L}$ ,  $|t^\omega \lambda^{-1}|$  est  $\leq 1$  et  $s^2(t)$  tend vers l'une des valeurs  $\sigma$  données par (34) ou (69); comme il est loisible de supposer que cette propriété est vérifiée pour tous les chemins de longueurs bornées convergeant vers zéro, nous pouvons supposer que  $\mathcal{L}$  est une spirale logarithmique  $\ominus$ . Cela étant, je vais montrer qu'il ne saurait exister aucune intégrale distincte des caractéristiques exceptionnelles que nous avons obtenues dans la première Partie et qui possèdent effectivement la propriété précédente. Je diviserai la démonstration, qui est assez délicate, en deux parties, suivant que  $\sigma$  est de la première ou de la deuxième sorte.

37. Considérons donc le premier de ces deux cas. Je dis, tout d'abord, qu'on peut toujours supposer que, sur  $\ominus$ ,  $\lambda$  tend vers la valeur  $h$  correspondant à  $\sigma$  (n° 25). En effet, s'il en était autrement, on pourrait trouver sur  $\ominus$ , arbitrairement près de zéro, des points  $t_1$  tels que (2)  $|\lambda_1 - h|$  serait supérieur à un nombre positif fixe  $\eta'$ . Or, en vertu du n° 14, on peut construire des caractéristiques de première

(1) Abstraction faite du cas analogue de la seconde hypothèse.

(2) On a posé  $\lambda_1 = \lambda(t_1)$ .

espèce, aux conditions initiales  $\lambda_1$  et  $\alpha_0 = a + c + \frac{1-\sigma^2}{4}$ , et convergentes dans un secteur  $S'_1$  auquel correspond, dans le plan ( $t$ ), un secteur spiraliforme, dont le sommet est à une distance  $r_0$  de l'origine; d'autre part,  $r_0$  ne peut être nul, car d'après (35) les coefficients qui interviennent dans les inégalités sur lesquelles s'appuie la démonstration de convergence du n° 19 sont bornés supérieurement en fonction de  $\eta'$ . Dès lors, on peut appliquer le raisonnement du numéro précédent au cas actuel, et la conclusion que l'on obtiendra ainsi sera identique à la première.

Nous devons donc supposer que,  $t$  tendant vers zéro,  $s(t)$  tend vers  $\sigma$  et  $\lambda$  vers la valeur  $h$  correspondante; il en résulte évidemment que, si l'on effectue sur  $\lambda(t)$  la transformation (79), les fonctions  $\rho$  et  $t\rho'$  que l'on en déduit doivent tendre simultanément vers zéro. Toute la question revient donc à examiner si l'équation (80) possède d'autres intégrales répondant à cette double condition que les caractéristiques définies par les approximations (81).

38. Pour ne pas rompre l'enchaînement de la démonstration, j'établirai immédiatement un lemme qui jouera bientôt un rôle essentiel :

*Soient  $f(x)$  et  $g(x)$  deux fonctions positives et continues lorsque la variable réelle  $x$  satisfait aux inégalités  $0 \leq x \leq 1$ ; supposons que ces fonctions s'annulent avec  $x$ , que  $g(x)$  soit croissante, et que, pour  $x = 0$ , la plus grande des limites du rapport  $r(x) \equiv f(x) : g(x)$  soit égale à  $+\infty$ ; cela étant, je dis qu'il existe une infinité de points  $\xi$ , ayant zéro comme point d'accumulation et tels qu'en chacun des points  $\xi$  on ait*

FOIS

$$f(x) < f(\xi) \quad (\text{pour } x < \xi)$$

et

$$r(x) < r(\xi) \quad (\text{pour } \xi < x)$$

*quel que soit  $x$  (satisfaisant aux conditions indiquées).*

En effet, introduisons la fonction auxiliaire  $y = f(x) - mg(x)$ , où  $m$  est un paramètre positif; cette fonction est continue pour  $0 \leq x \leq 1$ ; elle peut s'écrire encore  $y = g(x) [r(x) - m]$ . Donc, en vertu de nos hypothèses, on peut affirmer que, si grand que soit  $m$ , il existe des points  $x$ , arbitrairement voisins de zéro et pour lesquels

$y$  est positif. Soit alors  $p (> 0)$  le maximum de  $y$  dans l'intervalle  $(0, 1)$ ; appelons  $\xi_m$  la borne inférieure de l'ensemble  $E_m$  des valeurs de  $x$  pour lesquelles on a  $y = p$ ; on sait que  $\xi_m$  appartient à  $E_m$  et que  $y(\xi_m) = p$ . Ceci posé, je dis que le point  $\xi_m$  vérifie les inégalités de l'énoncé; en effet, on a, quel que soit  $x$ ,

$$f(x) - m g(x) \leq p = f(\xi_m) - m g(\xi_m),$$

l'égalité n'ayant lieu que pour les points de  $E_m$ . Et, puisque  $g(x)$  est croissante, on tire de là

$$f(x) - f(\xi_m) \leq m[g(x) - g(\xi_m)] < 0 \quad (\text{pour } x < \xi_m)$$

et

$$r(x) - r(\xi_m) \leq [r(\xi_m) - m] \left[ \frac{g(\xi_m)}{g(x)} - 1 \right] < 0 \quad (\text{pour } \xi_m < x).$$

Notre théorème sera donc complètement démontré si j'établis qu'il ne peut exister un nombre  $\bar{\xi}$  tel qu'on ait, quel que soit  $m$ ,  $\bar{\xi} \leq \xi_m$ . En effet, supposons qu'il existe un tel nombre  $\bar{\xi}$ , et appelons  $M$  le maximum de  $f(x)$  dans l'intervalle  $(0, 1)$ ; prenons pour  $m$  un nombre supérieur à  $\frac{M}{g(\bar{\xi})}$ ; on aura pour tous les nombres  $\xi_m$

$$\frac{f(\xi_m)}{g(\xi_m)} \leq \frac{M}{g(\bar{\xi})} < m,$$

d'où

$$f(\xi_m) - m g(\xi_m) < 0;$$

mais, pour toute valeur de  $x$ , comprise (au sens étroit) entre 0 et  $\bar{\xi}$ , on devrait avoir

$$f(x) - m g(x) < f(\xi_m) - m g(\xi_m) < 0;$$

et, par hypothèse, il existe, quel que soit  $m$ , des points  $x$ , arbitrairement voisins de zéro, pour lesquels le premier membre est positif: nous aboutissons donc à une contradiction, et les points  $\xi_m$  ont bien l'origine comme point d'accumulation. C. Q. F. D.

39. Revenons maintenant à notre problème. Choisissons (arbitrairement) pour  $\sigma$  l'une des racines carrées de  $\sigma^2$  et prenons pour spi-

rale  $\mathcal{E}$  l'une quelconque des spirales du n° 25, sur lesquelles  $|t^\sigma|$  tend vers zéro. Il faut prouver que, sur  $\mathcal{E}$ , la fonction  $\rho(t)$  déduite de notre intégrale au moyen de (79) se confond, pour un choix convenable de  $A$ , avec la fonction-limite des approximations (81). Pour cela, je me servirai d'un système d'équations intégrales vérifiées par  $\rho(t)$  et  $t\rho'(t)$ ; il sera d'ailleurs sous-entendu que toutes les quadratures que l'on aura à effectuer seront évaluées le long de  $\mathcal{E}$ .

Tout d'abord, puisque  $\rho$  satisfait à (80) et puisque  $\rho$ ,  $t\rho'$  et  $t^\sigma$  tendent vers zéro avec  $t$  sur la spirale  $\mathcal{E}$ , nous pouvons écrire

$$(94) \quad \int_0^t t^{1+\sigma} \psi(\rho', \rho, t) dt = \int_0^t [(t\rho'' + \rho') t^\sigma - \sigma^2 \rho t^{\sigma-1}] dt = t^{1+\sigma} \rho' - \sigma t^\sigma \rho;$$

par contre, nous ne pourrions pas écrire l'égalité analogue où  $\sigma$  serait remplacé par  $-\sigma$  : car nous ne sommes pas sûrs, *a priori*, que  $t^{-\sigma}(t\rho' + \sigma\rho)$  tende vers une limite finie lorsque  $t$  tend vers zéro; et c'est précisément dans la démonstration de ce point que réside toute la difficulté du problème. Pour le moment, nous devons donc nous contenter d'écrire

$$(95) \quad \int_{t_0}^t t^{1-\sigma} \psi(\rho', \rho, t) dt = \int_{t_0}^t [(t\rho'' + \rho') t^{-\sigma} - \sigma^2 \rho t^{-\sigma-1}] dt \\ = t^{1-\sigma} \rho' + \sigma t^{-\sigma} \rho - (t_0^{1-\sigma} \rho_0' + \sigma t_0^{-\sigma} \rho_0),$$

$t_0$  étant une valeur initiale que nous pouvons prendre, d'ailleurs, arbitrairement petite. Cela étant, on déduit de (94) et (95) :

$$(96) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho = \frac{t^\sigma}{2\sigma} \int_{t_0}^t t^{1-\sigma} \psi(\rho', \rho, t) dt \\ \quad - \frac{t^{-\sigma}}{2\sigma} \int_0^t t^{1+\sigma} \psi(\rho', \rho, t) dt + \frac{t_0^{-\sigma}}{2\sigma} (t_0 \rho_0' + \sigma \rho_0) \cdot t^\sigma, \\ t\rho' = \frac{t^\sigma}{2} \int_{t_0}^t t^{1-\sigma} \psi(\rho', \rho, t) dt \\ \quad + \frac{t^{-\sigma}}{2} \int_0^t t^{1+\sigma} \psi(\rho', \rho, t) dt + \frac{t_0^{-\sigma}}{2} (t_0 \rho_0' + \sigma \rho_0) \cdot t^\sigma; \end{array} \right.$$

c'est le système d'équations intégrales que nous avons annoncé.

40. Je vais utiliser ce système pour démontrer le théorème suivant :

*Si, lorsque  $t$  tend vers zéro (sur  $\ominus$ ),  $t^{-\sigma}\rho$  et  $t^{1-\sigma}\rho'$  ne tendent pas vers des limites finies, on peut trouver, arbitrairement près de l'origine, des points  $\tilde{t}$  pour lesquels les deux expressions précédentes restent bornées.*

En effet, puisque  $\rho$  et  $t\rho'$  doivent tendre vers zéro, on peut écrire, d'après (80),

$$|\psi(\rho', \rho, t)| = \frac{\psi_1(r)}{r^2},$$

$\psi_1(r)$  étant une fonction positive de  $r$  qui tend vers zéro avec  $r$ . Or, disons d'une fonction positive  $f(r)$ , nulle avec  $r$ , qu'elle est *au moins de l'ordre  $\alpha$*  (positif), si le rapport  $r^{-\alpha}f(r)$  reste borné dans un certain intervalle fermé  $(0, r_0)$ . Cette définition admise, supposons que  $\psi_1(r)$  soit au moins de l'ordre <sup>(1)</sup>  $g\varpi$ ,  $g$  désignant un nombre essentiellement positif et différent de 1 (d'ailleurs quelconque). Il existera donc un nombre  $M$  tel que l'on ait, sur  $\ominus$  <sup>(2)</sup> :

$$\left| \int_{t_0}^t t^{1-\sigma} \psi(\rho', \rho, t) dt \right| < LM \int_r^{r_0} r^{(g-1)\varpi-1} dr = \frac{LM}{(g-1)\varpi} [r_0^{g-1, \varpi} - r^{(g-1)\varpi}],$$

$$\left| \int_0^t t^{1+\sigma} \psi(\rho', \rho, t) dt \right| < LM \int_0^r r^{(g+1)\varpi-1} dr = \frac{LM}{(1+g)\varpi} r^{(g+1)\varpi};$$

donc, d'après (96),  $|\rho|$  et  $|t\rho'|$  sont au moins de l'ordre  $g'\varpi$ ,  $g'$  désignant le plus petit des nombres  $g$  et 1; et, pour  $g > 1$ , il en résultera aussitôt que  $\sigma t^{-\sigma}\rho$  et  $t^{1-\sigma}\rho'$  tendent vers une limite finie lorsque  $t$  tend vers zéro. Supposons donc  $g < 1$ ;  $|\rho|$  et  $|t\rho'|$  seront au moins de l'ordre  $g\varpi$ , et d'après (80),  $\psi_1(r)$  sera au moins de l'ordre  $g_1\varpi = (g+a)\varpi$ ,  $a$  désignant le plus petit des nombres  $g$  et  $\varpi^{-1}$ . Mais on peut opérer sur  $g_1$  comme sur  $g$ , et définir ainsi, par itérations successives, une suite de nombres  $g_1, g_2, \dots, g_n$ , croissant et satisfaisant à la relation  $g_n \geq g + na$ . Il existera donc une certaine valeur de  $n$  pour laquelle on aura <sup>(3)</sup>  $g_n > 1$ ; dès lors, le raisonnement de tout à

(1) Rappelons que  $\varpi$  a été défini de telle sorte que, sur  $\ominus$ ,  $|t^\sigma| = r^\varpi$  (n° 25).

(2) Voir au n° 18 la définition de  $L$ .

(3) On peut toujours supposer que l'égalité est exclue.

l'heure montre qu'à ce moment on pourra affirmer l'existence d'une limite pour  $t^{-\sigma}\rho$  (et pour  $t^{1-\sigma}\rho'$ ).

Si donc  $t^{-\sigma}\rho$  et  $t^{1-\sigma}\rho'$  ne tendent pas vers des limites, c'est qu'il n'existe aucun nombre positif  $g$  jouissant de la propriété précédemment définie; nous allons examiner ce cas.

41. Dans l'hypothèse que nous venons de formuler, quel que soit le nombre positif  $g$  (non nul), la plus grande des limites de  $r^{-g\sigma}\psi_1(r)$ , pour  $r$  tendant vers zéro, est  $+\infty$ . Attribuons alors à  $g$  une valeur quelconque (inférieure à 1) et appliquons (1) le lemme du n° 38 après avoir remplacé  $x$  par  $r$ ,  $f(x)$  par  $\psi_1(r)$ ,  $g(x)$  par  $r^{g\sigma}$ . Le lemme nous apprend qu'il existe des points  $t = \tilde{t}$ , arbitrairement voisins de zéro, et tels que l'on ait sur  $\varepsilon$ , de 0 à  $\tilde{t}$ ,  $\psi_1(r) < \psi_1(\tilde{r})$  et de  $\tilde{t}$  à  $t_0$ ,  $r^{-g\sigma}\psi_1(\tilde{r}) > r^{-g\sigma}\psi_1(r)$ . On pourra donc écrire

$$\left| \int_0^{\tilde{t}} t^{1-\sigma} \psi(\rho', \rho, t) dt \right| < l \int_{\tilde{r}}^{r_0} r^{-1-(1-g)\sigma} \frac{\psi_1(r)}{r^{g\sigma}} dr$$

$$< \frac{l}{(1-g)\sigma} \left[ 1 - \left( \frac{\tilde{r}}{r_0} \right)^{(1-g)\sigma} \right] \psi_1(\tilde{r}) \tilde{r}^{-\sigma}$$

et

$$(97) \quad \left| \int_0^{\tilde{t}} t^{1+\sigma} \psi(\rho', \rho, t) dt \right| < l \int_0^{\tilde{r}} r^{-1+\sigma} \psi_1(r) dr < \frac{l}{\sigma} \psi_1(\tilde{r}) \cdot \tilde{r}^{\sigma}.$$

Donc, d'après (96), il existera des nombres positifs bornés, C et D, tels que l'on ait

$$(98) \quad \left| \rho(\tilde{t}) \right| < C \psi_1(\tilde{r}) + D \tilde{r}^{-\sigma}$$

et

$$\left| \tilde{t} \rho'(\tilde{t}) \right| < C \psi_1(\tilde{r}) + D \tilde{r}^{\sigma}.$$

Mais, en vertu de la définition de  $\psi(\rho', \rho, t)$  (n° 28) et de  $\psi_1(r)$  (n° 40),

---

(1) Ce qui est évidemment légitime, puisque  $\rho(t)$  est sûrement holomorphe le long de  $\mathcal{E}$ ;  $\psi_1(r)$  est donc continue.

on peut trouver deux nombres positifs bornés P et Q tels que l'on ait

$$\psi_1(\tilde{r}) < P [C \psi_1(\tilde{r}) + D \tilde{r}^\sigma]^2 + Q \tilde{r} [C \psi_1(\tilde{r}) + D \tilde{r}^\sigma]$$

ou

$$PC^2 \psi_1^2(\tilde{r}) - (1 - 2PCD \tilde{r}^\sigma - QC \tilde{r}) \psi_1(\tilde{r}) + D \tilde{r}^\sigma (PD \tilde{r}^\sigma + Q \tilde{r}) > 0.$$

Or, le premier membre est un trinôme du second degré en  $\psi_1(\tilde{r})$  qui, égalé à zéro, admet deux racines : l'une finie, l'autre de la forme  $R \tilde{r}^\sigma$ , R étant borné (et même très petit avec  $\tilde{r}$ );  $\psi_1(\tilde{r})$ , qui est très petit avec  $\tilde{r}$  doit donc être inférieur à la seconde racine; et, d'après (98), on en conclut aussitôt les inégalités

$$(99) \quad \left| \rho(\tilde{t}) \right| < H_1 \tilde{r}^\sigma \quad \text{et} \quad \left| \tilde{t} \rho'(\tilde{t}) \right| < H_1 \tilde{r}^\sigma,$$

$H_1$  étant borné. Le théorème énoncé au début du n° 40 est donc démontré.

42. Nous pouvons établir maintenant que  $t^{-\sigma} \rho$  et  $t^{1-\sigma} \rho'$  tendent vers des limites finies. En effet, supposons qu'il n'en soit pas ainsi; le théorème du n° 40 nous permet de marquer sur  $\mathfrak{E}$  une suite  $\tilde{t}_1, \dots, \tilde{t}_n, \dots$  de points  $\tilde{t}$ , de modules décroissants. Or, en vertu de (99), l'expression

$$\frac{\tilde{t}_n^{-\sigma}}{2\sigma} [\tilde{t}_n \rho'(\tilde{t}_n) + \sigma \rho(\tilde{t}_n)]$$

a (quelque petit que soit  $\tilde{r}_n$ ) un module borné; et il est donc loisible de faire coïncider  $t_0$  avec l'un quelconque des  $\tilde{t}$ , soit  $\tilde{t}_n$ . Cela étant, considérons l'arc  $\tilde{t}_n \tilde{t}_{n-1}$ , suivi à partir de  $\tilde{t}_n$ ; le long d'une certaine portion  $\tilde{t}_n t'$  de cet arc, on a sûrement

$$|t^{-\sigma} \rho| < H_2 \quad \text{et} \quad |t^{1-\sigma} \rho'| < H_2,$$

$g$  étant un nombre qu'on choisira entre  $\frac{1}{2}$  et 1 et supérieur à  $1 - \varpi^{-1}$ , et

$H_2$  étant borné. Dès lors, en tout point  $t$  de  $\widetilde{t}_n t'$ , on peut écrire

$$(100) \quad \left| t^\sigma \int_{\widetilde{t}_n}^t t^{1-\sigma} \psi(\rho', \rho, t) dt \right| < H_3 r^{g\varpi + \varpi'},$$

$\varpi'$  désignant le plus petit des deux nombres  $g\varpi$  et 1. On a, en outre,

$$\begin{aligned} & \left| t^{-\sigma} \int_0^t t^{1+\sigma} \psi(\rho', \rho, t) dt \right| \\ \leq & \left| t^{-\sigma} \int_0^{\widetilde{r}_n} t^{1+\sigma} \psi(\rho', \rho, t) dt \right| + \left| t^{-\sigma} \int_{\widetilde{r}_n}^t t^{1+\sigma} \psi(\rho', \rho, t) dt \right|; \end{aligned}$$

or, en vertu de (97) et (99), le module du premier terme du second membre est inférieur à  $H_4 r^{-\varpi} \widetilde{r}_n^{2\varpi}$ ; mais on a  $\widetilde{r}_n < r$ ; ce terme est donc inférieur à  $H_4 r^\varpi$ . Enfin, en procédant comme pour (100), on obtient

$$\left| t^{-\sigma} \int_{\widetilde{r}_n}^t t^{1+\sigma} \psi(\rho', \rho, t) dt \right| < H_5 r^{g\varpi + \varpi'},$$

$H_5$  (comme  $H_3$  et  $H_4$ ) étant borné (quel que soit  $n$ ); en définitive, on aura donc

$$|2\sigma t^{-\sigma} \rho(t)| < (H_3 + H_5) r^{g\varpi + \varpi' - \varpi} + H_4 + \left| \widetilde{t}_n^{-\sigma} \left[ \widetilde{t}_n \rho'(\widetilde{t}_n) + \sigma \rho(\widetilde{t}_n) \right] \right|.$$

Or l'expression  $g\varpi + \varpi' - \varpi$ , égale à  $g\varpi + 1 - \varpi$  ou à  $(2g - 1)\varpi$ , est sûrement positive en vertu de la façon dont on a choisi  $g$ ; le premier membre est donc borné sur l'arc  $\widetilde{t}_n t'$  et la même conclusion s'applique à  $|t^{1-\sigma} \rho'(t)|$ ; les deux expressions sont d'ailleurs uniformément bornées par rapport à  $n$ .

Extrayons alors de  $\widetilde{t}_n \widetilde{t}_{n-1}$  l'arc  $\widetilde{t}_n t'$ , et procédons sur l'arc restant, à partir de  $t'$  comme nous venons de le faire sur le premier à partir de  $\widetilde{t}_n$ . Deux hypothèses seront possibles : ou bien nous arriverons

ainsi en  $\widetilde{t}_{n-1}$ , au bout d'un nombre fini d'opérations et nous aurons montré que les expressions  $|t^{-\sigma} \rho(t)|$  et  $|t^{1-\sigma} \rho'(t)|$  sont uniformément bornées; ou bien il existera sur  $\widetilde{t}_n \widetilde{t}_{n-1}$ , un point-limite  $t^0$ , infranchissable pour nos constructions d'arcs. Mais cette dernière hypothèse est absurde; car  $\rho(t)$  est holomorphe en  $t^0$ ; par suite, si l'on a pour tous les points de  $\widetilde{t}_n t^0$  (sauf peut-être en  $t^0$ ),  $|t^{-\sigma} \rho(t)| \leq \Pi$ , la relation précédente doit être encore vérifiée en  $t^0$ .

Donc  $\widetilde{t}_{n-1}$  est atteint au bout d'un nombre fini d'opérations;  $|t^{-\sigma} \rho(t)|$  et  $|t^{1-\sigma} \rho'(t)|$  sont bornés le long du chemin  $\ominus$ ; et comme au n° 40, on voit aussitôt que  $\sigma t^{-\sigma} \rho(t)$  et  $t^{1-\sigma} \rho'(t)$  tendent vers une même limite finie,  $\bar{A}$ , lorsque  $t$  tend vers zéro.

C. Q. F. D.

43. Et maintenant il sera bien facile de démontrer que toute intégrale  $\rho(t)$  de (80), tendant vers zéro ainsi que  $t\rho'$ , se confond nécessairement avec une des caractéristiques (81). En effet, nous avons maintenant le droit de faire tendre  $t_0$  vers zéro dans les formules (96); à la limite, nous obtiendrons la relation

$$\rho = \frac{t^\sigma}{2\sigma} \int_0^t t^{1-\sigma} \psi(\rho', \rho, t) dt - \frac{t^{-\sigma}}{2\sigma} \int_0^t t^{1+\sigma} \psi(\rho', \rho, t) dt + \bar{A} t^\sigma,$$

et une relation analogue pour  $t\rho'$ . Or, soient  $\bar{\rho}_0, \bar{\rho}_1, \dots, \bar{\rho}_{n+1}$  les approximations successives qu'on obtiendrait par l'algorithme (81), en donnant à  $A$  la valeur  $\bar{A}$ . On pourra écrire

$$2\sigma(\rho - \bar{\rho}_{n+1}) = t^\sigma \int_0^t t^{1-\sigma} [\psi(\rho', \rho, t) - \psi(\bar{\rho}'_n, \bar{\rho}_n, t)] dt \\ - t^{-\sigma} \int_0^t t^{1+\sigma} [\psi(\rho', \rho, t) - \psi(\bar{\rho}''_n, \bar{\rho}_n, t)] dt$$

et une égalité analogue pour  $t(\rho' - \bar{\rho}'_{n+1})$ . Dès lors, si l'on applique (1)

---

(1) On supposera  $r$  assez petit, de façon que  $\rho$  et  $t\rho'$  vérifient les inégalités analogues à (77) qui s'introduisent dans la démonstration de convergence des approximations (81).

à ces équations un raisonnement classique dans l'intégration des équations différentielles par approximations successives, on constatera aussitôt que  $\rho(t)$  coïncide nécessairement avec la fonction limite  $\bar{\rho}(t)$  des approximations (81).

44. Une conclusion identique s'appliquerait aux équations en  $\mu$  du n° 29. Il ne nous reste donc plus qu'à examiner le cas des caractéristiques exceptionnelles de la deuxième sorte; en d'autres termes, nous allons résoudre le problème suivant :

« Soit (82) une équation (VI) pour laquelle

$$4b + 1 = 0 = 4(a + b + c + d + 1);$$

appelons  $\lambda(t)$  une intégrale quelconque de (82), telle cependant que sur un chemin  $\mathfrak{C}$ , de longueur finie et convergeant vers zéro,  $|t^\omega \lambda^{-1}|$  reste borné (avec  $0 \leq \omega < 1$ ) et  $s^2(t) \equiv 4a + 4c + 1 - 4\alpha(t)$  tende vers zéro avec  $t$ . L'intégrale  $\lambda(t)$  se confond-elle avec l'une des caractéristiques (83) définies au n° 30? »

La réponse est affirmative; pour le montrer, j'établirai d'abord que  $t$  tendant vers zéro,  $|\lambda|$  reste borné inférieurement. A cet effet, je commence par effectuer sur le système (1) la transformation  $\lambda = \mu^{-2}$ ; il s'écrira dans le cas actuel (1)

$$(101) \quad t(t-1)^2 \mu'^2 = - \left[ \alpha - \left( a + c + \frac{1}{4} \right) \right] (1 - \mu^2) \mu^2 \\ + \left( a + \frac{1}{4} \right) \mu^2 (1 - \mu^2) (1 - t\mu^2) + c(1 - \mu^2) (2 - \mu^2 - t\mu^2) \\ + \frac{\alpha - \left( a + c + \frac{1}{4} \right)}{t} (1 - \mu^2)$$

et

$$(102) \quad \frac{\alpha - \left( a + c + \frac{1}{4} \right)}{t} + \frac{1}{t} \int_0^t \left[ \frac{\alpha \mu^2}{1 - t\mu^2} + \frac{2c(1 - \mu^2)}{(1 - t\mu^2)^2} \right] dt = 0.$$

---

(1) L'intégrale qui figure dans (102), et les autres intégrales de ce numéro, sont calculées le long du chemin  $\mathfrak{C}$ .

Or supposons que  $|\mu|$  ne soit pas borné (supérieurement); puisque  $|\mu^\omega \mu^2|$  doit rester borné, les équations précédentes montrent qu'on aura

$$|\mu^{\omega/2}| < K r^{-2\omega},$$

$K$  étant un nombre positif borné, d'où

$$(103) \quad |\mu'| < K r^{-\frac{1}{2}-\omega}.$$

Dès lors, deux cas peuvent se présenter : 1° si l'on a  $\omega < \frac{1}{2}$ , l'intégration de (103) montre que  $|\mu|$  reste borné; 2° si l'on a  $\omega > \frac{1}{2}$  (1); on déduit de (103)

$$|\mu^{\omega_1} \mu^2| < K_1,$$

$K_1$  étant borné, et  $\omega_1$  étant donné par la relation  $-\frac{\omega_1}{2} = \frac{1}{2} - \omega$  ou

$$1 - \omega_1 = 2(1 - \omega).$$

Mais on peut raisonner sur  $\omega_1$  comme sur  $\omega$ ; et la relation précédente prouve que,  $\omega$  étant différent de 1, au bout d'un nombre fini  $p$  d'opérations, on obtiendra (1) un nombre  $\omega_p < \frac{1}{2}$ , et une dernière application du procédé montrera que  $|\mu|$  reste borné.

Ce point acquis, (101) et (102) prouvent aussitôt que  $\left| \frac{\mu^{\omega/2}}{1-\mu^2} \right|$  reste borné; or la transformée de (82) par  $\lambda = \mu^{-2}$  peut s'écrire

$$(104) \quad \mu'' + \frac{\mu'}{\mu} = - \left( \frac{1}{1-\mu^2} + \frac{t}{1-t\mu^2} \right) \mu^{\omega/2} + \frac{(1-\mu^2)\mu'}{(1-t)(1-t\mu^2)} + \frac{\mu(1-\mu^2)(1-t\mu^2)}{t(1-t)^2} \left[ a + \frac{1}{4} + c \frac{t-1}{(1-t\mu^2)^2} \right] \equiv \Phi(\mu', \mu, t);$$

$|\Phi(\mu', \mu, t)|$  reste donc borné quand  $t$  tend vers zéro; par suite, dans l'égalité

$$\mu^{\omega/2} = \int_{t_0}^t \Phi(\mu', \mu, t) dt + \text{const.}$$

(1) On peut évidemment s'arranger pour ne pas avoir  $\omega$  (ou  $\omega_p$ ) =  $\frac{1}{2}$ .

(qui se déduit de la précédente par intégration), on a le droit de faire tendre la limite inférieure vers zéro; et la constante est évidemment nulle puisque  $t^2 \mu'^2$  doit tendre vers zéro avec  $t$ ; on peut donc écrire

$$(105) \quad t \mu' = \int_{t_0}^t t \Phi(\mu', \mu, t) dt,$$

et, puisque  $|t\Phi|$  est borné, il en est de même de  $|\mu'|$ ; donc  $\mu$  tend vers une limite finie,  $\mu_0$ , et l'on déduit de (105) la formule

$$\mu = \int_0^t \frac{dt}{t} \int_0^t t \Phi(\mu', \mu, t) dt + \mu_0.$$

Or, en partant de cette équation, on peut reprendre le raisonnement classique du n° 43 [adapté aux approximations du n° 30, qu'on aurait appliquées à (104) au moyen de la transformation  $\lambda = \mu^{-2}$ ]; on constatera qu'il n'existe qu'une intégrale de (104), ou de (82), pour laquelle  $s^2(t)$  tend vers zéro avec  $t$ , tandis que  $\mu$  tend vers  $\mu_0$ , ou  $\lambda$  vers  $\lambda_0$ . Notre intégrale se confond donc bien avec une caractéristique exceptionnelle (de la seconde sorte), et les recherches qui faisaient l'objet de cette seconde Partie se trouvent ainsi terminées.

En résumé, le problème posé au n° 33 admet bien une réponse affirmative, de sorte qu'une intégrale quelconque de (VI) peut être représentée sur tout chemin (de longueur finie) convergeant vers zéro par l'une ou l'autre des caractéristiques que nous avons définies dans la première Partie. Par suite, pour étudier dans le voisinage de l'origine une intégrale quelconque de (VI), nous avons le droit de la définir, non plus par les valeurs arbitraires prises en  $t_0$  par  $\lambda$  et  $\lambda'$  (ou  $\lambda$  et  $\alpha$ ), mais par la caractéristique de la première Partie avec laquelle elle coïncide le long d'un rayon  $O\Delta$  du plan (T). C'est ce que nous ferons dans la troisième Partie de ce Mémoire.

## TROISIÈME PARTIE.

45. Définissons d'abord ce que nous entendons par *voisinage de l'origine*. Soit  $\eta'$  un nombre positif arbitrairement petit (<sup>1</sup>); considérons la région ( $\mathcal{R}$ ), lieu des points T dont les arguments sont compris entre  $\frac{\pi}{2} + \eta'$  et  $\frac{3\pi}{2} - \eta'$ ; nous appellerons *voisinage* (ou *domaine*) *de l'origine le lieu des points t qui correspondent à ( $\mathcal{R}$ ) en vertu d'une transformation (19) où  $|t_0| = r_0$  a été pris suffisamment petit (<sup>2</sup>). Ceci posé, la troisième Partie de ce Mémoire a précisément pour objet l'étude d'une intégrale quelconque de (VI) dans le voisinage de l'origine.*

Le problème ainsi posé se subdivise en deux étapes distinctes. En premier lieu, les développements qui fournissent la caractéristique que nous prenons comme donnée initiale de l'intégrale (n° 44, *ad fin.*) convergent non seulement sur le rayon O $\Delta$  qui supporte la caractéristique dans le plan (T), mais encore dans tout un secteur S de ce plan; nous aurons donc tout d'abord à étudier l'allure de l'intégrale dans le

(<sup>1</sup>) On pourra prendre, par exemple, pour  $\eta'$ , le nombre  $\eta$  du n° 9.

(<sup>2</sup>) La définition du voisinage d'un point transcendant O qu'on vient de donner s'imposera peut-être comme la plus naturelle ou la plus commode dans d'autres recherches relatives aux fonctions multiformes, lorsqu'il n'existera aucun point critique arbitrairement près de O. Pour le problème actuel elle peut paraître trop restrictive; c'est ainsi qu'elle nous interdit d'étudier l'intégrale le long d'une spirale convergeant trop lentement vers O, telle que  $r = \theta^{-m}$ , où  $m$  est un nombre positif quelconque. De même, l'étude de l'intégrale le long d'un cercle de rayon arbitrairement petit, mais *suivi une infinité de fois*, nous entraînerait loin du « voisinage » de l'origine. En réalité, la discussion de la première Partie permettrait d'étudier l'intégrale dans une région du plan ( $t$ ) limitée par une spirale de la forme  $r = \theta^{-m}$  [cf. par exemple la formule (23)]; cette région serait donc plus étendue que celle qui correspond à ( $\mathcal{R}$ ). Mais nous ne ferons pas la démonstration pour le double motif que voici : d'abord la notion du voisinage que nous avons introduite plus haut nous suffit pour la solution du problème de Riemann qui est une des principales raisons d'être de l'étude actuelle. De plus, j'espère montrer dans un travail ultérieur qu'on peut faire  $\eta' = 0$  et  $r_0 \neq 0$  dans la définition du n° 45 sans que les approximations de la première Partie cessent d'être convergentes dans le domaine du plan ( $t$ ) ainsi obtenu.

secteur  $S$ . Ceci fait, il s'agira de prolonger cette étude à travers toute la région  $(\mathcal{A})$ ; et, pour cela, nous aurons à rechercher d'autres caractéristiques qui convergeront dans un secteur différent de  $S$ , mais présentant avec  $S$  un secteur commun  $S'$ ; de plus, dans  $S'$ , les nouvelles caractéristiques devront représenter la même intégrale que les anciennes. Et ainsi, de proche en proche, nous finirons par recouvrir toute la région  $(\mathcal{R})$ .

46. Commençons par le premier problème, en supposant d'abord qu'il s'agisse d'une caractéristique de première espèce et du type général,  $s$  étant un nombre complexe, non nul et différent de  $\sigma$ . Rappelons d'abord que le domaine où nous savons calculer nos caractéristiques est formé par un secteur  $S$  du plan  $(T)$  dont les frontières sont les droites  $O\Delta_1$  et  $O\Delta_2$ , d'arguments  $\frac{3\pi}{2} - \gamma_1$ ,  $\frac{3\pi}{2} - \gamma_2$ , où  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  désignent les arguments respectifs de  $s(1 - \eta)^{-1} - 1$  et  $s(1 - \eta)^{-1} + 1$ . D'ailleurs, nous sommes assurés que la convergence des développements (53) a lieu uniformément sur tous les rayons  $O\Delta$  intérieurs à  $S$  (au sens large); toutes les inégalités du n° 19 seront uniformément valables à l'intérieur de  $S$ ; enfin dans le plan  $(t)$  le domaine spirali-forme qui correspond à  $S$  aura son sommet à une distance de  $O$  essentiellement positive [mais tendant vers 0 avec  $1 - \omega$  (1)]; il ne sera donc jamais évanouissant. Cela étant, étudions l'intégrale à l'intérieur de  $S$ .

47. Soit  $D$  une demi-droite indéfinie quelconque appartenant à  $S$ ; nous allons étudier l'intégrale sur  $(D)$ . On a, pour un point quelconque de  $(D)$  :  $T = \bar{T} + ue^{i\gamma}$  ( $0 \leq u < \infty$ ), où  $\bar{T}$  et  $\gamma$  sont constants. Je dis tout d'abord qu'on peut trouver un nombre réel  $\omega$ , satisfaisant aux conditions  $0 \leq \omega < 1$ , ne dépendant que de  $s$  et  $\gamma$ , et tel que sur  $(D)$   $|t^\omega \lambda^{-1}|$  reste borné supérieurement (et, en général, inférieurement). Un tel résultat constituera évidemment l'extension à  $\lambda(t)$  d'une proposition analogue, énoncée au n° 11 pour  $\lambda^0$ .

En effet, reprenons la représentation géométrique du n° 11 (*fig. 1*), et figurons les points  $M$ ,  $M_{-1}$ ,  $M_1$ , ayant respectivement pour affixes

---

(1) Cf. la note du n° 19 (p. 271).

$s = \nu e^{\delta}$ ,  $s - 1$  et  $s + 1$ . Nous dirons que les rayons  $O\Delta$  du plan (T) et  $ON$ , du plan (s) sont *correspondants* si leurs arguments respectifs  $\gamma$  et  $\gamma_1$  satisfont à la relation  $\gamma + \gamma_1 = \frac{3\pi}{2}$ ; le rayon correspondant à  $OM$  sera dit la *médiane* de S; enfin les rayons correspondant aux frontières  $O\Delta_{-1}$ ,  $O\Delta_1$  de S seront intérieurs à l'angle  $M_{-1}OM_1$  et différeront arbitrairement peu de ses côtés. Cela étant, l'équation (18) peut s'écrire

$$(106) \quad \lambda^{-1} = A e^{s\nu} + B + C e^{-s\nu},$$

A, B, C étant trois constantes qu'on calculerait aisément en fonction de  $h_1$ ,  $h_2$  et  $\lambda_0$ , et qui, dans le cas actuel ( $h_1 \neq h_2$ ) satisfont à la condition  $AC \neq 0$ . De (106) on tire, grâce à (55) (1),

$$(107) \quad \lambda^{-1} = A e^{sT}(1 + \theta_1 Lr_0) + B + C e^{-sT}(1 + \theta_2 Lr_0) \quad (|\theta_i| < 1),$$

L étant un nombre positif borné. Mais on a  $|e^{s(r-\bar{T})}| = \left(\frac{t}{l}\right)^x$  avec

$$x = \frac{r \cos(\gamma + \delta)}{\cos \gamma};$$

$x$  étant égal à la mesure algébrique (2) de  $\overrightarrow{NM}$ , pour que  $|t^\omega \lambda^{-1}|$  soit borné supérieurement, il faut et il suffit qu'on ait  $\omega = MN$ . Supposons alors que (D) ne soit pas parallèle à la médiane de S; on aura  $\omega \neq 0$ ; de plus  $\overrightarrow{NM}$  sera soit de sens positif, soit de sens négatif. Dans le premier cas, pour  $r_0$  très petit, le terme prépondérant du second membre de (107) est le dernier, et, sur (D),  $t^\omega \lambda^{-1}$  différera peu de

$$C t_0^\omega e^{(\omega-s)T} = C t_0^\omega e^{(\omega-s)\bar{T} + i\omega(\omega \sin \gamma - r \sin(\gamma + \delta))} = C t_0^\omega e^{(\omega-s)\bar{T}} e^{i\omega \cdot ON};$$

de même, si  $\overrightarrow{NM}$  est de sens négatif,  $t^\omega \lambda^{-1}$  sera très voisin de

$$A t_0^\omega e^{(\omega+s)\bar{T}} e^{-i\omega \cdot ON}.$$

D'où cette conséquence, valable dans les deux cas: si l'on marque sur (D) une suite de points  $T_0, T_1, \dots, T_n, \dots$  (dont le premier est

(1) Si T est intérieur aux cercles ( $\bar{\gamma}_k$ ), on s'appuiera, en outre, sur les considérations du n° 22.

(2) Comme au n° 11, N est l'intersection du rayon ON avec  $M_{-1}M_1$ .

quelconque) à des distances mutuelles de  $\Omega = \frac{2\pi}{ON}$ , toutes les valeurs prises en ces points par  $t^\omega \lambda^{-1}$  seront, pour  $|t|$  suffisamment petit, finies, non nulles et *arbitrairement voisines les unes des autres*.

Observons d'ailleurs que la relation (1)

$$\begin{aligned} -t\lambda^{-2}\lambda' &= s(A e^{s\mu} - C e^{-s\mu})(1 + F) \\ &= s[A e^{sT}(1 + \theta_1 L r_0) - C e^{-sT}(1 + \theta_2 L r_0)](1 + \theta_3 L_1 r^{1-\omega}), \end{aligned}$$

qui est une conséquence de (106), (14) et (42), montre qu'aux points  $T_n$ ,  $t^{1+\omega}\lambda'$  prend aussi des valeurs finies, non nulles et arbitrairement voisines les unes des autres. Aussi, en raison de la double propriété des points  $T_n$  par rapport à  $\lambda$  et à  $\lambda'$ , nous appellerons  $\Omega$  la *pseudo-période* relative à la direction d'argument  $\gamma$ ; nous dirons de plus que  $\omega$  est l'*exposant d'indétermination* de  $\lambda$  le long de  $OA$ .

Supposons maintenant que (D) soit parallèle à la médiane de S; on aura  $\omega = 0$ . Dans (107) aucun terme ne pourra être négligé et, pour  $r$  très petit,  $\lambda^{-1}$  sera sensiblement égal à

$$A e^{s\bar{T}} e^{-iu \cdot ON} + B + C e^{-s\bar{T}} e^{iu \cdot ON}.$$

Sur (D) on pourra donc marquer deux suites de points soient  $T_{0,1}, T_{1,1}, \dots, T_{n,1}, \dots$  et  $T_{0,2}, T_{1,2}, \dots, T_{n,2}, \dots$  (dont le premier est quelconque), tels que les points de chaque suite soient séparés par des intervalles égaux à la pseudo-période  $\Omega = 2\pi|s|^{-1}$ ; pour  $r$  assez petit, les valeurs prises par  $\lambda^{-1}$  en ces points sont arbitrairement voisines les unes des autres; à l'intérieur d'une *même* suite, il en est de même des valeurs prises par  $t\lambda^{-2}\lambda'$ ; toutes les valeurs précédentes sont d'ailleurs finies, mais cette fois, elles ne sont pas nécessairement différentes de 0. L'intégrale peut donc présenter des *pôles* dans la direction de la médiane; effectivement, nous allons voir qu'elle en possède une infinité. C'est ce qui résultera du théorème général qui fait l'objet du numéro suivant.

48. Soit  $\omega$  un nombre positif (ou nul) et inférieur à 1; appelons

---

(1) On a toujours  $|\theta_3| < 1$ ; et  $L_1$  est un nombre positif borné. Voir aussi la note précédente.

$O\Delta'$  et  $O\Delta''$  les deux rayons de  $S$  (distincts ou non) qui admettent  $\omega$  pour exposant d'indétermination, et  $\Omega'$  et  $\Omega''$  les pseudo-périodes correspondantes; ceci posé, on a le théorème suivant :

*Pour toute valeur de  $k$  ( $\neq 0$  et  $\infty$ ) l'équation  $t^\omega \lambda^{-1} - k = 0$  possède dans  $S$  deux suites infinies de racines; pour la première (seconde) de ces suites, les modules des différences des racines convergent vers  $\Omega'$  ( $\Omega''$ ), et les arguments de ces différences tendent vers celui de  $O\Delta'$  ( $O\Delta''$ ); enfin, pour  $\omega = 0$ , on peut supprimer la restriction  $k \neq 0$  (1).*

Supposons d'abord  $\omega \neq 0$ , et soit  $At^\omega e^{st}$  le terme de  $t^\omega \lambda^{-1}$  qui, dans (106), ne devient pas infiniment petit sur  $O\Delta'$ ; marquons dans le secteur  $S$  les racines  $T_0, T_1, \dots, T_n, \dots$  de l'équation  $At_0^\omega e^{(\omega+s)T} = k$ ; ces racines sont situées à des intervalles de  $\Omega'$  sur une parallèle à  $O\Delta'$ . Entourons chacune d'elles, soit  $T_n$ , d'un cercle ( $c_n$ ) de rayon  $\rho$ , arbitrairement petit (et inférieur à  $\Omega' : 2\pi$ ); notre théorème sera démontré (pour  $\omega \neq 0$ ), si j'établis que  $n$  étant assez grand (une fois  $\rho$  fixé), les ( $c_n$ ) contiennent une et une seule racine de l'équation  $t^\omega \lambda^{-1} - k = 0$ . Or, on a tout d'abord

$$(108) \quad t^\omega \lambda^{-1} - k = A t_0^\omega [e^{(\omega+s)T} (1 + \eta_1) - e^{(\omega+s)T_n}],$$

où, d'après (107),  $\eta_1$  est une quantité complexe, de module arbitrairement petit avec  $r_0$  et  $r$ ; on pourra donc prendre  $r_0$  (2) et  $r$  assez petits pour que l'on ait, par exemple,

$$(109) \quad |\eta_1| < \frac{2\pi\rho^2}{M\Omega'},$$

$M$  désignant la borne supérieure de  $\left| \frac{ze^z}{e^z - 1} \right|$  à l'intérieur du cercle  $|z| = 1$  (3); ceci entraînera d'ailleurs une inégalité de la forme  $n > n_0$ ;

(1) Le lecteur montrera sans peine que pour  $k = 0 \neq \omega$  et pour  $k = \infty$ , l'équation  $t^\omega \lambda^{-1} - k = 0$  n'admet aucune racine infiniment voisine de l'origine.

(2) Une caractéristique étant donnée, rien n'empêche de la représenter par un nouveau développement, issu d'un point  $t_0$  plus rapproché de  $t = 0$  que l'ancien.

(3) On pourrait démontrer que  $M$  est égal à  $e : (e - 1)$ .

$n$  ayant été ainsi fixé, on aura, d'après (108),

$$(110) \quad t^{\omega} \lambda^{-1} - k = A t_0^{\omega} e^{(\omega+s)T_n} [e^{(\omega+s)(T-T_n)} - 1] (1 + \eta_2),$$

avec

$$\eta_2 = \eta_1 \frac{e^{(\omega+s)(T-T_n)}}{e^{(\omega+s)(T-T_n)} - 1};$$

donc, en tenant compte de (109) et de la relation  $|\omega + s| = \frac{2\pi}{\Omega}$ , on a, sur  $(c_n)$ , (dont le rayon  $\rho$  satisfait bien à  $\rho|\omega + s| < 1$ ),

$$|\eta_2| < \frac{M|\eta_1|}{|(\omega + s)(T - T_n)|} < \rho;$$

$|\eta_2|$  est donc arbitrairement petit sous les conditions énoncées. Ceci posé, étendons à  $(c_n)$  l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{d(t^{\omega} \lambda^{-1})}{t^{\omega} \lambda^{-1} - k},$$

dont la valeur sera précisément le nombre de racines cherché  $N$ ; on aura

$$(111) \quad N = \frac{1}{2\pi i} \int_{(c_n)} \frac{\omega + \frac{d \log \lambda^{-1}}{d\mu} t^{\mu'}}{t^{\omega} \lambda^{-1} - k} t^{\omega} \lambda^{-1} dT \\ = \frac{1}{2\pi i} \int_{(c_n)} \frac{\omega + s \frac{A e^{s\mu} - C e^{-s\mu}}{A e^{s\mu} + B + C e^{-s\mu}} (1 + F)}{t^{\omega} \lambda^{-1} - k} t_0^{\omega} \lambda^{-1} dT;$$

mais pour  $|T|$  assez grand, on peut écrire ( $|\omega + s|$  étant  $\neq 0$ )

$$\omega + s \frac{A e^{s\mu} - C e^{-s\mu}}{A e^{s\mu} + B + C e^{-s\mu}} (1 + F) = (\omega + s) (1 + \eta_3),$$

$\eta_3$  étant arbitrairement petit; tenons compte de (110) et de (111) et il viendra

$$N = \frac{1}{2\pi i} \int_{(c_n)} \frac{(\omega + s) e^{(\omega+s)(T-T_n)} (1 + \eta_1) (1 + \eta_1)}{e^{(\omega+s)(T-T_n)} - 1} \frac{(1 + \eta_1) (1 + \eta_1)}{1 + \eta_2} dT;$$

le second membre diffère donc arbitrairement peu de 1; puisqu'il est entier, sa valeur est 1.

C. Q. F. D.

Considérons maintenant le cas où  $\omega = 0$ , et supposons d'abord

$k \neq h_1$  (et  $h_2$ ). L'équation (18) peut encore s'écrire

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2} \right) \operatorname{ch} s(\mu - \bar{h}_1),$$

$\bar{h}_1$  ayant la même signification qu'au n° 12. Or les racines de l'équation

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2} \right) \operatorname{ch} s(T - \bar{h}_1)$$

se divisent en deux suites, l'une d'elles étant de la forme

$$T_0, \quad T_1 = T_0 + \frac{2\pi i}{s}, \quad \dots, \quad T_n = T_0 + \frac{2n\pi i}{s},$$

comme précédemment (n° 47) et ne contenant aucun des points  $h_k$ . On peut donc entourer  $T_n$  d'un cercle ( $c'_n$ ), de rayon indépendant de  $n$  et à l'intérieur duquel on aura

$$\left| \operatorname{coth} \left[ s(T_n - \bar{h}_1) + s(1 + \theta_4 r_0) \frac{T - T_n}{2} \right] \right| < M,$$

avec  $|\theta_4| < 1$  et  $M$  borné (quel que soit  $n$ ). Soit alors  $\eta_4$  un nombre positif arbitrairement petit; entourons  $T_n$  d'un cercle ( $c_n$ ), intérieur à ( $c'_n$ ) et de rayon  $\rho$  (indépendant de  $n$ ), inférieur à la plus petite des quantités

$$\frac{4}{3|s|}, \quad \frac{\eta_4}{M|s|} \quad \text{et} \quad \frac{\eta_4}{64K},$$

où  $K$  est le nombre positif défini au n° 19; puis, prenons <sup>(1)</sup>  $r_0$  inférieur à  $\rho^2$  et  $\rho : 4K$ . Je dis maintenant que l'équation  $\lambda - k = 0$  aura une (et une seule) racine dans ( $c_n$ ), pour  $r$  assez petit (ou  $n$  assez grand).

En effet, observons d'abord que pour  $|z| < 1$ , on a

$$\frac{1}{2} < |z^{-1} \sin z| < 2,$$

---

(1) Voir la note <sup>(2)</sup> de la page 317.

d'où, pour  $|x| < \frac{2}{3}$  et  $|\varepsilon| < \frac{1}{2}$ ,

$$(112) \quad |\coth x(1+\varepsilon) - \coth x| = \left| \frac{\operatorname{sh} \varepsilon x}{\operatorname{sh} x(1+\varepsilon) \operatorname{sh} x} \right| < \frac{8|\varepsilon x|}{|x^2(1+\varepsilon)|} < 16 \left| \frac{\varepsilon}{x} \right|.$$

Puis, étendons à  $(c_n)$  l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{d(\lambda^{-1})}{\lambda^{-1} - k^{-1}} = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{s \operatorname{sh} s(\mu - \bar{h}_1) d\mu}{\operatorname{ch} s(\mu - \bar{h}_1) - \operatorname{ch} s(\mathbf{T}_n - \bar{h}_1)};$$

sa valeur sera

$$N = \frac{1}{2\pi i} \int_{(c_n)} \frac{s}{2} \left[ \coth \frac{s(\mu - \mathbf{T}_n)}{2} + \coth \left\{ s(\mathbf{T}_n - \bar{h}_1) + \frac{s(\mu - \mathbf{T}_n)}{2} \right\} \right] (1+F) d\mathbf{T};$$

mais, d'après (55), on a

$$\mu - \mathbf{T}_n = (\mathbf{T} - \mathbf{T}_n) \left( 1 + \frac{2\mathbf{K}\theta_3 r_0}{\rho} \right) = (\mathbf{T} - \mathbf{T}_n) \left( 1 + \frac{\theta_6}{2} r_0 \right) \quad (|\theta_3|, |\theta_6| < 1),$$

et, d'après (112) (1),

$$\left| \coth \frac{s(\mu - \mathbf{T}_n)}{2} - \coth \frac{s(\mathbf{T} - \mathbf{T}_n)}{2} \right| < 16 \frac{2\mathbf{K}r_0}{\rho |s| \frac{\rho}{2}} < \frac{64\mathbf{K}}{|s|} \frac{r_0}{\rho^2} < \frac{64\mathbf{K}}{|s|}.$$

En vertu de ces inégalités, il viendra donc

$$N = \frac{1}{2\pi i} \int_{(c_n)} \frac{s}{2} \coth \frac{s(\mathbf{T} - \mathbf{T}_n)}{2} d\mathbf{T} \\ + \frac{1}{2\pi i} \int_{(c_n)} \left[ \frac{s\mathbf{F}}{2} \coth \frac{s(\mu - \mathbf{T}_n)}{2} + 32\theta_7\mathbf{K} + \frac{\mathbf{M}s}{2}\theta_8 \right] d\mathbf{T} \quad (|\theta_7|, |\theta_8| < 2);$$

or, la première intégrale est égale à 1; la seconde est inférieure en module à

$$2r_4 + \frac{1}{2\pi} \left| \int_{c_n} \frac{s\mathbf{F}}{2} \coth \frac{s(\mu - \mathbf{T}_n)}{2} d\mathbf{T} \right|,$$

(1) La formule (112) est bien applicable ici, car on a

$$|x| = \left| \frac{s(\mathbf{T} - \mathbf{T}_n)}{2} \right| = \frac{|s|\rho}{2} < \frac{2}{3}, \quad |\varepsilon| = \left| \frac{\mu - \mathbf{T}}{\mathbf{T} - \mathbf{T}_n} \right| < \frac{2\mathbf{K}r_0}{\rho} < \frac{1}{2}.$$

où le second terme est infiniment petit avec  $r$  <sup>(1)</sup>; on a donc encore  $N = 1$ .

C. Q. F. D.

On ferait une démonstration analogue pour  $k = h_1$  ou  $h_2$ , d'où  $T_n = \bar{h}_1$ , par exemple; on prendrait pour cercles  $(c_n)$  les cercles  $(\bar{\gamma}_j)$ , (n° 12) et l'on s'appuierait encore sur l'inégalité (55), toujours applicable sur le contour de  $(\bar{\gamma}_j)$ . Mais, cette fois, on arriverait à la conclusion suivante: pour  $j$  assez grand, les cercles  $(\bar{\gamma}_j)$ , pris *de deux en deux*, contiennent (chacun) *deux racines* de l'équation  $\lambda - h_1 = 0$ ; et les cercles  $(\bar{\gamma}_j)$  restants contiennent deux racines de l'équation  $\lambda - h_2 = 0$ .

Ainsi, l'équation  $t^\omega \lambda^{-1} - k = 0$  possède toujours dans  $S$  deux suites infinies de racines simples; pour  $\omega \neq 0$ , ces deux suites s'éloignent dans deux directions différentes de  $S$ ; pour  $\omega = 0 \neq (k - h_1)(k - h_2)$ , elles se rapprochent indéfiniment de deux parallèles à la médiane de  $S$ ; pour  $\omega = 0 = P(k)$ , les deux suites tendent à se confondre l'une dans l'autre <sup>(2)</sup>.

49. En adoptant une dénomination due à M. Pierre Boutroux <sup>(3)</sup>, on pourra dire que, dans le secteur  $S$ , notre intégrale est *asymptote* à une intégrale convenablement choisie de l'équation

$$t^2 \lambda'^2 = \lambda^2 P(\lambda),$$

le sens de cet asymptotisme se trouvant parfaitement précisé par la discussion précédente.

Il résulte encore du théorème du n° 48, qu'à l'intérieur de  $S$ , le point  $T = \infty$  est un point essentiel pour notre intégrale. En conséquence, aucune caractéristique de première espèce et du type général ne

<sup>(1)</sup> D'après (42).

<sup>(2)</sup> En conséquence, l'équation  $t^\omega \lambda^{-1} - k = 0$  ne peut avoir de racines doubles infiniment petites que pour  $\omega = 0 = P(k)$ . Effectivement, on peut indiquer un cas où ce fait a lieu pour tous les cercles  $(\bar{\gamma}_j)$ . Reportons-nous à (6) et écrivons que  $F_1(h_1, \alpha - \alpha_0, t)$  est fini quels que soient  $\alpha - \alpha_0$  et  $t$ ; il en résultera que  $\lambda'$  s'annulera avec  $\lambda - h_1$ . Or, la condition précédente exige  $h_1 = 1$  ou  $h_1 = \infty$ , ce qui nécessite  $4b + 1 = 0$  ou  $a + b + c + d + 1 = 0$ ; et, réciproquement, s'il en est ainsi, on vérifie directement que l'équation  $\lambda^{-1} = 1$  ou  $0$  a toujours des racines doubles.

<sup>(3)</sup> *Ann. sc. Ec. Normale supérieure*, 3<sup>e</sup> série, t. XXX, 1913, p. 257, 271, etc.

pourra appartenir à une branche d'intégrale de (VI), holomorphe pour  $t = 0$ .

Remarquons, en outre, qu'une théorie tout analogue à celle des nos 46-48 s'appliquerait aux caractéristiques de deuxième espèce et du type général; ainsi, pour ces caractéristiques, il existe un théorème analogue à celui du n° 48 et qu'on démontrerait de même (1).

Enfin, avant d'aborder le second des deux problèmes énoncés au n° 45, j'observerai que pour les caractéristiques exceptionnelles, le premier problème se résout immédiatement. Car, s'il s'agit d'une caractéristique de la deuxième sorte, nous savons qu'elle est holomorphe pour  $t = 0$  (et, dès lors, nos deux problèmes sont résolus simultanément); et, s'il s'agit d'une caractéristique de la première sorte, ou bien elle est holomorphe pour  $t = 0$ , ou bien il existe un nombre  $\sigma$  tel que, dans le secteur  $S$  où elle est définie,  $t^{1-\sigma}(\lambda' - \Lambda'_1)$  et  $\sigma t^{-\sigma}(\lambda - \Lambda_1)$  tendent vers une même limite non nulle quand  $T$  s'éloigne indéfiniment dans ce secteur (2). Nous sommes ainsi complètement renseignés sur l'allure de l'intégrale dans  $S$ ; et nous pouvons ajouter qu'à l'intérieur de  $S$ ,  $T = \infty$  n'est plus une singularité essentielle, mais seulement une singularité *transcendante* pour l'intégrale (et même *algébrique*, si  $\sigma$  est un nombre rationnel réel).

50. Arrivons maintenant au second des deux problèmes du n° 45: il s'agit d'étendre à la région (A) l'étude de l'intégrale qui, jusqu'à présent, n'a été faite que dans le secteur  $S$ . Pour plus de netteté, je supposerai d'abord que  $s$  est *complexe et ne coïncide avec aucune des valeurs  $\sigma + n$ ,  $\sigma + n$*  (où  $n$  est un entier réel); et, pour plus de régularité dans les notations ultérieures, j'écrirai  $s_0$  au lieu de  $s$ ; je désignerai par  $S_0$  le secteur que nous appelions  $S$ ; et, enfin, je dirai que  $s_0$  est la *constante fondamentale* (3) du secteur  $S_0$ .

Introduisons encore quelques locutions pour la commodité de l'exposition. La médiane  $O\Delta_0$  de  $S_0$  divise ce secteur en deux demi-

(1) Ce nouveau théorème se trouve énoncé d'ailleurs au n° 51.

(2) En particulier, dans le domaine du plan ( $t$ ) correspondant à  $S$ , l'origine est un zéro isolé de l'équation  $\lambda - h = 0$ .

(3) *Constante caractéristique* conviendrait mieux, s'il n'y avait à craindre une équivoque.

secteurs; nous désignerons par  $S'_0$  celui de ces demi-secteurs dont les rayons correspondent <sup>(1)</sup> à des vecteurs  $\overrightarrow{NM}$  de sens positif;  $S'_0$  sera dit *supérieur*, tandis que l'autre demi-secteur, que nous désignerons par  $S''_0$ , sera dit *inférieur*. Nous dirons de même que les rayons de  $S'_0$  sont *supérieurs à la médiane* et à ceux de  $S''_0$ , et que  $O\Delta_1$ , frontière commune de  $S_0$  et  $S'_0$ , est la *frontière supérieure* de  $S_0$ .

Ceci posé, étudions d'abord  $\alpha^*$  à l'intérieur de  $S_0$ ; d'après (84), on a

$$(113) \quad \alpha^* - \alpha = \frac{t\lambda'}{2\lambda} \frac{1-t}{1-\frac{t}{\lambda}} + \frac{1}{2} - \lambda;$$

or cette formule montre que  $\alpha^*$  est indéterminé dans la direction de la médiane. D'une façon plus précise, on verrait comme plus haut <sup>(2)</sup> que l'équation  $\alpha^* - k' = 0$  admet, pour  $k' \neq \alpha_0 + \frac{1 \pm s_0}{2}$ , une double infinité de solutions, tendant à être équidistantes (avec  $\Omega = 2\pi : |s|$  comme intervalle), et à prendre la direction de la médiane. Mais il y a plus; si l'on s'éloigne parallèlement à un autre rayon de  $S_0$ , (113) montre que  $\alpha^* - \alpha$  tend vers la limite de

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left( \frac{t\lambda'}{\lambda} + 1 \right) &= \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{d}{d\mu} \left( \log \frac{1}{\lambda} \right) t \frac{d\mu}{dt} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ 1 - s_0 \frac{A e^{s_0 T} (1 + \theta_1 L r_0) - C e^{-s_0 T} (1 + \theta_2 L r_0)}{A e^{s_0 T} (1 + \theta_1 L r_0) + B + C e^{-s_0 T} (1 + \theta_2 L r_0)} (1 + F) \right] \end{aligned}$$

[d'après (106) et (107)]; donc, *suivant que le rayon considéré appartient à  $S'_0$  ou à  $S''_0$ ,  $\alpha^* - \alpha$  tendra vers  $\frac{1}{2}(1 + s_0)$  ou  $\frac{1}{2}(1 - s_0)$ ;  $\alpha^*$  tendra donc vers une des valeurs précédemment interdites à  $k'$ . De plus, dans*

(1) Cf. n° 47.

(2) On prendra comme valeurs approchées des solutions les points T où la fonction  $\lambda(T)$ , définie en faisant  $\mu = T$  dans (106), est égale à l'une ou l'autre des racines de l'équation

$$\frac{\sqrt{P(\lambda)}}{2} - \lambda = k' - \alpha_0 - \frac{1}{2},$$

et l'on observera que  $\lambda(T)$  ne peut s'annuler.

le premier cas, on aura, d'après  $(\dot{4})$ ,

$$s^2 = 4(\alpha + c + 1) - 4 \left[ \alpha_0 + \frac{1}{2}(1 + s_0) \right] = (s_0 - 1)^2;$$

nous poserons alors, dans  $S'_0$ ,

$$s_1 = s^* = s_0 - 1,$$

en choisissant toujours la racine dont la partie imaginaire a un coefficient positif; au contraire, dans  $S''_0$ , on poserait

$$s_{-1} = s^* = s_0 + 1.$$

Cela étant, soit  $\lambda$ , la valeur (finie) prise par  $\lambda$  en un point  $t$ , dont l'image  $T$ , est sur un rayon  $O\Delta$  de  $S'_0$ ; il est clair que, *le long de*  $O\Delta$ , *l'intégrale que nous étudions peut* <sup>(1)</sup> *aussi être représentée par une caractéristique de deuxième espèce*, en prenant pour conditions initiales  $\lambda(t_1) = t_1^{-1}\lambda_1$  et  $\alpha_0 = \alpha + c + 1 - \frac{s_1^2}{4}$ . Or il est aisé de déterminer le secteur  $S_1$  où converge le développement qui fournit cette caractéristique de deuxième espèce. En procédant comme au n° 47, on figurerait les points  $s_1 + 1 = s_0$  et  $s_1 - 1 = s_2 = s_0 - 2$ ; les frontières  $O\Delta_0$  et  $O\Delta_2$  de  $S_1$  correspondent <sup>(2)</sup> aux rayons  $OM_0$  et  $OM_2$  ( $M_0$  et  $M_2$ , affixes de  $s_0$  et  $s_2$ );  $S_1$  admettra donc  $O\Delta_1$  pour médiane; son demi-secteur inférieur  $S''_1$  sera identique au demi-secteur supérieur  $S'_0$  de  $S_0$ ; nous dirons en conséquence que  $S_0$  et  $S_1$  sont *adhérents* <sup>(3)</sup>.

Par le même procédé on construirait <sup>(1)</sup> un second secteur  $S_{-1}$ , adhérent à  $S_0$  et tel que  $S'_1 = S''_0$ ;  $S_0$  sera dit *de première espèce*, tandis que  $S_{-1}$  et  $S_1$  seront dits *de deuxième espèce*; enfin,  $S_{-1}$  et  $S_1$  seront dits *adjacents*. On voit aisément que, dans la direction  $O\Delta_1$  (ou  $O\Delta_{-1}$ )

(1) On observera que  $s_0 \pm 1$  n'est pas une valeur exceptionnelle  $\sigma^*$ .

(2) Plus exactement, elles correspondent à des rayons arbitrairement voisins de  $OM_0$  et  $OM_2$  (cf. n° 46).

(3) Il résulte aussitôt de là qu'on peut définir une intégrale  $\lambda(t)$ , s'annulant en un point  $t_0$ , et qui, le long d'une spirale logarithmique issue de  $t_0$  (mais suffisamment loin de  $t_0$ ), est représentée par une caractéristique de première espèce : c'est le résultat annoncé au n° 19 (note de la page 271).

$\lambda^*$  devient indéterminé et prend toute valeur (finie) arbitrairement choisie (1); de même, dans l'une ou l'autre de ces directions,  $\alpha$  peut prendre (une double infinité de fois) toute valeur, finie ou non, donnée à l'avance, et distincte de  $\alpha_0$  et  $\alpha_2 \equiv \alpha_0 + s_0 - 1$  (ou de  $\alpha_0$  et  $\alpha_{-2} \equiv \alpha_0 - s_0 - 1$ ).

Considérons enfin le demi-secteur supérieur de  $S_1$ ; soit  $S'_1$  ce demi-secteur. Sur un rayon  $O\Delta$  de  $S_1$  (suivi indéfiniment),  $\alpha$  tend vers la même limite que

$$\alpha_0^* - \frac{1}{2} \left( \frac{\ell \lambda'}{\lambda} + 1 \right) = \alpha_0^* - \frac{1}{2} \left( \frac{\ell \lambda'}{\lambda} + 2 \right);$$

mais on peut écrire

$$(106) \quad \lambda^* = A^* e^{s^* \tau} + B^* + C^* e^{-s^* \tau},$$

et, dans  $S'_1$ , c'est le dernier terme qui est prépondérant; dans  $S'_1$  la limite de  $\alpha$  sera donc

$$\alpha_2 = \alpha_0^* + \frac{s^*}{2} - 1 = \alpha_0 + \frac{1 + s_0}{2} + \frac{s_0 - 1}{2} - 1 = \alpha_0 + s_0 - 1$$

et l'on en déduira

$$s_2^2 \equiv 4a + 4c + 1 - 4\alpha_2 = s_0^2 - 4s_0 + 4 = (s_0 - 2)^2;$$

la constante fondamentale de  $S_2$  sera donc précisément

$$s_2 = s_0 - 2,$$

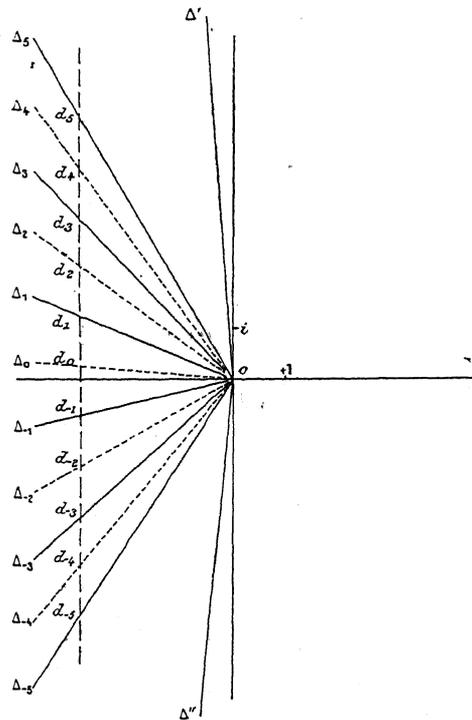
en choisissant toujours la racine dont la partie imaginaire a un coefficient positif; et sur  $O\Delta$ , on pourra représenter notre intégrale par un *nouveau développement de première espèce*. Le secteur de première espèce  $S_2$ , où convergera ce développement, sera adjacent à  $S_0$  et adhérent à  $S_1$  ainsi qu'à un autre secteur de deuxième espèce  $S_3$  dont la constante caractéristique  $s_3$  serait  $s_0 - 3$ .

Le procédé s'étendant de lui-même, je me contenterai d'énoncer sous forme générale le résultat auquel nous sommes conduits.

(1) Cf. n° 48.

51. Appelons toujours  $(\mathcal{R})$  la région du plan  $(T)$  dont les points, situés à l'intérieur de  $\Delta' O \Delta''$ , ont leurs arguments compris entre  $\frac{\pi}{2} + \eta'$  et  $\frac{3\pi}{2} - \eta'$ ; et soit  $\lambda(t)$  une intégrale de (VI) définie le long d'un

Fig. 5.



rayon  $O\Delta$  de  $\mathcal{R}$  par une caractéristique de première espèce dont la constante fondamentale  $s_0$  satisfait aux conditions

$$\Re\left(\frac{s_0}{i}\right) \neq 0 \quad \text{et} \quad s_0 - \sigma \neq n \neq s_0 - \sigma^*$$

( $n$  entier réel quelconque). A l'intérieur de  $(\mathcal{R})$ ,  $\lambda(t)$  peut être représentée de la façon suivante :

Soit  $d_n$  le point [du plan  $(T)$ ] d'affixe  $-i s_0^{-1} |s_0|^2 + ni$ ; appelons  $S_n$  le secteur dont les frontières  $O\Delta_{n-1}$  et  $O\Delta_{n+1}$  passent respectivement

par  $d_{n-1}$  et  $d_{n+1}$ . Suivant que  $n$  sera  $\begin{cases} \text{pair} \\ \text{impair} \end{cases}$ ,  $\lambda(t)$  sera représentée dans  $S_n$  par des caractéristiques de  $\begin{cases} 1^{\text{re}} \\ 2^{\text{e}} \end{cases}$  espèce; la constante fondamentale de  $S_n$  sera  $s_n = s_0 - n$  et l'on peut toujours supposer  $t_0$  de module assez petit pour que  $\begin{cases} \lambda(t_0) = \lambda_0 \\ \lambda^*(t_0) = t_0^{-1} \lambda_0 \end{cases}$  soit la seconde condition initiale qui, avec  $s_n$ , détermine complètement dans  $S_n$  (quel que soit  $n$ ) les caractéristiques de  $\lambda(t)$ . Dans un secteur de  $\begin{cases} 1^{\text{re}} \\ 2^{\text{e}} \end{cases}$  espèce, l'équation

$$\begin{cases} t^\omega \lambda^{-1} - k = 0 \\ t^\omega \lambda^* - k^* = 0 \end{cases}$$

[où l'on a soit  $0 \leq \begin{cases} \omega \\ \omega^* \end{cases} < 1$  et  $\begin{cases} k \\ k^* \end{cases} \neq 0$  et  $\infty$ , soit  $\begin{cases} \omega \\ \omega^* \end{cases} = 0$  et  $\begin{cases} k \\ k^* \end{cases} \neq \infty$ ] admet une double suite infinie de racines; ces racines se rapprochent indéfiniment de deux parallèles à deux rayons  $O\Delta$  (distincts ou confondus) qui coupent la droite lieu des points  $d_n$  en des points  $d$  tels que  $dd_n = \omega$ ; et les distances de deux racines consécutives tendent vers  $\Omega = \frac{2\pi}{O\Delta}$ . Quant à  $\begin{cases} \alpha \\ \alpha^* \end{cases}$ , il tend vers une limite bien déterminée  $\begin{cases} \alpha_n \\ \alpha_n^* \end{cases}$  (correspondant à  $s_n$  par  $\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ ), si l'on s'éloigne parallèlement à une direction de  $S_n$  distincte de  $O\Delta_{n-1}$  et  $O\Delta_{n+1}$ , et cela pour  $n$   $\begin{cases} \text{pair} \\ \text{impair} \end{cases}$ ; dans cette même hypothèse, l'équation

$$\begin{cases} \alpha - k' = 0 \\ \alpha^* - k'^* = 0 \end{cases}$$

[où l'on a  $\begin{cases} k' \neq \alpha_n \text{ et } \alpha_{n+2} \\ k'^* \neq \alpha_n^* \text{ et } \alpha_{n+2}^* \end{cases}$ ] admet parallèlement à  $O\Delta_{n+1}$  une double infinité de racines à des intervalles qui tendent vers  $\frac{2\pi}{O\Delta_{n+1}}$ .

On peut dire aussi qu'à l'intérieur de chaque secteur, l'intégrale est *asymptote* à une solution convenablement choisie d'une équation

$$\begin{cases} t^2 \lambda'^2 = \lambda^2 P(\lambda) \\ t^2 \lambda'^2 = \tilde{P}(\lambda^*) \end{cases},$$

où le polynome  $\begin{Bmatrix} P(\lambda) \\ \dot{P}(\lambda) \end{Bmatrix}$ , qui dépend de  $s_n$ , varie avec chaque secteur.

J'insisterai enfin sur deux propriétés de  $\lambda(t)$  qu'on vient de découvrir et qui semblent particulièrement remarquables : l'une est la pseudo-périodicité de l'intégrale le long de tout rayon  $O\Delta$  de  $\mathfrak{R}$ ; c'est une *propriété approchée* (ou asymptotique) <sup>(1)</sup>. L'autre est caractérisée par la relation  $s_n = s_0 - n$ ; c'est ce qu'on pourrait appeler une *propriété-limite exacte*. Dans un autre travail, consacré au problème de Riemann, je montrerai qu'elle tire sa véritable origine des propriétés classiques des équations différentielles linéaires.

52. Nous allons examiner maintenant les cas que nous avons dû laisser de côté jusqu'ici; commençons d'abord par celui où  $s_0$  est réel. Pour le traiter, procédons par continuité : imaginons que le nombre complexe  $s_0$  varie en tendant vers une valeur réelle  $\bar{s}_0$ , positive par exemple. Si l'on a  $\bar{s}_0 > 1$ , les frontières du secteur  $S_0$ , et de tous les secteurs inférieurs  $S_{-1}, S_{-2}, \dots$  tendront toutes à se confondre avec le demi-axe imaginaire négatif; par suite, lorsque la partie imaginaire de  $s_0$  sera devenue assez petite, *tous les secteurs précédents seront sortis de la région* ( $\mathfrak{R}$ ). Il n'existe donc aucune caractéristique (de première espèce, par exemple) correspondant à une valeur réelle  $\bar{s}_0$ , de module supérieur à 1; et la même conclusion s'appliquerait pour  $\bar{s}_0 = \pm 1$ . Mais, quel que soit le nombre réel  $\bar{s}_0$  ( $\neq \pm 1$ ), il existe certainement deux valeurs consécutives de  $\bar{s}_n = \bar{s}_0 - n$  (d'indice négatif dans le cas précédent,  $\bar{s}_0 > 1$ ) qui sont comprises entre  $-1$  et  $+1$ . Et, en procédant comme tout à l'heure, on voit qu'il existera sûrement *deux secteurs adhérents*, soient  $S_n$  et  $S_{n-1}$  qui, à un certain moment, finiront par recouvrir toute la région ( $\mathfrak{R}$ ). Donc, dans ( $\mathfrak{R}$ ), l'intégrale sera représentée indifféremment par un développement de première ou de deuxième

---

(1) Cette propriété permet de considérer dans le plan (T) la singularité

$$T = \infty, \quad [\mathfrak{R}(T) < 0]$$

comme la *superposition* d'une suite de singularités essentielles distinctes, d'allure nettement définie, et qui sont mutuellement solidaires en vertu de la seconde propriété.

espèce; et, le long de tout rayon  $O\Delta$  de  $(\mathcal{R})$ , elle sera de l'ordre de  $t^{\bar{s}}$ , en désignant par  $\bar{s}_0$  celle des deux racines de  $\bar{s}^2$  qui est positive.

Actuellement, le théorème du n° 48 sera donc en défaut, ainsi que les développements du n° 50; il faudra les remplacer par l'énoncé suivant :

Si  $s$  est réel, et compris (au sens strict) entre  $-1$  et  $+1$ ,  $\lambda, \lambda_{-1}^*$ ,  $\alpha - \alpha_0$  et  $\bar{\alpha} - \bar{\alpha}_0$  tendent uniformément vers zéro dans  $(\mathcal{R})$ ; dans cette région, le point  $T = \infty$  n'est, au plus, qu'une *singularité transcendante* de l'intégrale, qui d'ailleurs peut être représentée par un développement (1) procédant suivant les puissances de  $t$  et  $t^s$  [et convergeant dans la région correspondant à  $(\mathcal{R})$ ]. En particulier, pour  $s$  rationnel ( $\neq 0$ ),  $t = 0$  est une singularité *algébrique* de la branche d'intégrale considérée.

On voit d'ailleurs directement que, pour  $s = 0$ ,  $t = 0$  est une singularité transcendante de l'intégrale,  $\lambda(t)$  étant de l'ordre de  $\log^{-2} t$  ou de  $\log^{-1} t$  (2).

Bien entendu, le passage à la limite que nous venons de faire a besoin d'être légitimé; on y parviendrait en établissant (grâce aux développements de la première Partie) (3) l'existence d'un nombre positif  $R_0$  jouissant de la propriété suivante : pour  $|t_0| < R_0$ , les caractéristiques (de première espèce, par exemple) définies par les conditions initiales ( $t_0 = \lambda_0$  et  $\dot{s}(0) = s_0$  [avec  $|s_0 - \bar{s}_0| < \eta$ , où  $\bar{s}_0$  est réel et de module inférieur à 1]) sont sûrement convergentes dans la région  $(\mathcal{R})$ .

Le théorème précédent comporte d'ailleurs une autre conséquence importante que nous utiliserons prochainement (n° 55, p. 339).

53. Passons maintenant au cas où l'un des  $s_n$ , soit par exemple  $s_0$ , coïncide avec l'une des valeurs exceptionnelles  $\sigma$  (ou  $\sigma^*$ ). A cet effet,

(1) Pour le prouver, on établirait qu'il en est ainsi de chacune des fonctions  $\alpha_i, \mu_j$  qui figurent dans les approximations successives (cf. la note de la page 287).

(2) On suppose  $a + b + c + d + 1$  et  $4b + 1$  non nuls à la fois; et alors,  $\lambda(t)$  ne peut pas être holomorphe pour  $t = 0$ .

(3) Voir notamment les n°s 11 et 16.

nous rechercherons d'abord comment, dans le cas actuel, on peut représenter l'intégrale dans  $(\mathcal{R})$ ; puis, en vue d'une application ultérieure, nous ferons tendre  $s_0$  vers  $\sigma$  (par exemple) et nous étudierons comment s'effectue le passage à la limite.

Posons toujours  $\sigma = re^{i\theta}$ , et traçons le rayon  $O\Delta_0$  correspondant (n° 47) à  $O\sigma$ ; supposons, par exemple, que  $t^\sigma$  tende vers zéro sur tous les rayons  $O\Delta$  inférieurs à  $O\Delta_0$ . Donc, pour toutes les valeurs de  $s$  du type  $\sigma - n$  ( $n > 0$ ), c'est-à-dire pour tous les secteurs  $S_n$  supérieurs à  $O\Delta_0$ , l'analyse des nos 47-51 restera toujours valable; et elle le sera encore pour  $S'_0$ , demi-secteur supérieur de  $S_0$ . En conséquence, si l'intégrale est définie par une caractéristique dont le support  $O\Delta$  est supérieur à  $O\Delta_0$ , nous saurons l'étudier dans toute la région de  $(\mathcal{R})$  supérieure à  $O\Delta_0$ ; reste la région inférieure.

Or, d'après le n° 20, nous savons que les développements de première espèce qui convergent dans  $S'_0$  sont encore valables dans un secteur partiel de  $S''_0$ , ce nouveau secteur  $\bar{S}''_0$  étant assujéti à la condition  $5\omega < 1$ ; de plus, dans  $\bar{S}''_0$ ,  $\mu - T$  et  $\frac{d\mu}{dT} - 1$  sont arbitrairement petits pour  $r_0$  assez petit; et, enfin, on a actuellement (1)

$$C = 0 \quad \text{et} \quad B = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} \right) = \frac{1}{h},$$

d'où

$$(106') \quad \lambda^{-1} - h^{-1} = (\lambda_0^{-1} - h^{-1}) e^{\sigma\mu} = A e^{\sigma\mu}.$$

De tout ceci, il résulte donc que, dans  $\bar{S}''_0$ ,  $t^{-\sigma}(\lambda - h)$  et  $\sigma^{-1} t^{1-\sigma} \lambda'$ , tendent uniformément vers la même limite :  $-h^2 t_0^{-\sigma} (\lambda_0^{-1} - h^{-1})$ ; en définitive, dans  $\bar{S}''_0$ , notre intégrale peut être indifféremment représentée soit par des caractéristiques du type général, soit par les caractéristiques du type exceptionnel formées au n° 28, la constante arbitraire  $A$  de ce numéro étant prise égale à  $-h^2 (\lambda_0^{-1} - h^{-1}) t_0^{-\sigma}$ . Dès lors, les caractéristiques exceptionnelles que l'on vient d'obtenir permettent de représenter notre intégrale sur tous les rayons du secteur exceptionnel  $\Sigma_1$  inférieur à  $O\Delta_0$ .

---

(1) Cf. n° 47.

Rien n'empêche d'ailleurs qu'une même intégrale ne présente dans  $\mathfrak{R}$  deux secteurs exceptionnels  $\Sigma'$  et  $\Sigma''$  (d'espèces distinctes ou non), limités respectivement par les deux frontières  $O\Delta'$  et  $O\Delta''$  de  $\mathfrak{R}$ , et séparés par un certain nombre de secteurs de types généraux. Nous en verrons un exemple très simple au début de la quatrième Partie (n° 56).

54. Ainsi donc, dans le cas où  $s_0 = \sigma$ , le point  $T = \infty$  doit être considéré [dans ( $\mathfrak{R}$ )] comme étant formé par la soudure d'un point transcendant et d'un nombre de points essentiels élémentaires <sup>(1)</sup> d'autant plus grand que  $\mathfrak{R}$  se rapprochera davantage du demi-plan  $\Re(T) < 0$ . La représentation de l'intégrale apparaît donc actuellement comme plus complexe que dans le cas général étudié au n°s 47-51 : pour approfondir l'origine de cette complication, nous allons étudier la représentation de l'intégrale lorsque  $s_0$  tend vers  $\sigma$ , et ceci nous amènera à préciser les résultats énoncés aux n°s 13 et 14.

Le nombre positif  $\eta$  du n° 9 ayant été fixé une fois pour toutes faisons tendre  $s_0$  vers  $\sigma$ ;  $h_1 - h_2$  tendra vers zéro. D'après le n° 13 nous savons alors que pour  $s_0 - \sigma$  assez petit, il existera dans  $S_0$  une bande  $\mathfrak{B}$ , limitée par deux parallèles à la direction  $\gamma = 3\frac{\pi}{2} - \delta_0$ , et dans laquelle il nous sera interdit de calculer l'intégrale par des développements de première espèce;  $s_0 - \sigma$  tendant vers zéro, cette bande s'élargira de plus en plus, et, à la limite, pour  $s_0 - \sigma = 0$ , la bande aura fini par recouvrir tout le secteur  $\bar{\Sigma}$  inférieur à une droite  $O_1D_1$  (*fig. 4*, p. 263). Or, d'une part, pour  $s_0 - \sigma = 0$ , nous savons calculer l'intégrale dans  $\bar{\Sigma}$ , et, d'autre part, pour  $s_0 - \sigma$  très petit, mais non nul, nos développements antérieurs sont impuissants à nous fournir l'intégrale dans  $\mathfrak{B}$  : c'est cette dernière étude qu'il nous faut effectuer pour découvrir l'origine de la singularité transcendante.

Dans la discussion qui va suivre, nous supposerons  $h \neq 1$  et  $\infty$ , ces deux cas se ramenant à celui de  $h$  quelconque par les transformations du n° 29; de plus, nous laisserons de côté le cas de  $h = 0 = \sigma_0$ , dont l'examen direct n'offre pas de difficulté <sup>(2)</sup>; enfin, nous supposerons

<sup>(1)</sup> Cf. la note de la page 328.

<sup>(2)</sup> Cf. n° 25.

$\lambda_0 \neq h$ , ce qui est légitime, puisque l'équation  $\lambda - h = 0$  n'admet pas de solution voisine (et distincte) de zéro dans la région ( $t$ ) correspondant au secteur  $\bar{\Sigma}$ .

Cela étant, soit  $\tilde{\eta}$  un nombre positif, inférieur à  $\eta$  et que nous ferons tendre vers zéro,  $\eta$  restant toujours fixe; en vertu des hypothèses précédentes, on pourra poser

$$(114) \quad s_0 - \sigma = \frac{2h^2\theta^2\tilde{\eta}}{\sigma} \sqrt{\frac{[4(a+b+c+d+1)]^2}{4b+1}}, \quad (|\theta|=1);$$

mais on a

$$h_1 - h_2 = \frac{\sqrt{(s_0^2 - \sigma^2)(s_0'^2 - \sigma'^2)}}{4(a+b+c+d+1)},$$

$\sigma^2$  et  $\sigma'^2$  désignant les carrés des expressions (34), et, de plus,

$$h_1 + h_2 - h_1 h_2 = 2h - h^2;$$

des relations précédentes on déduira donc d'abord :

$$h_1 - h_2 = 4h^2\theta\sqrt{\tilde{\eta}}(1 + f_1\tilde{\eta});$$

puis

$$(115) \quad \begin{cases} h_1 = h + 2h^2\theta\sqrt{\tilde{\eta}}(1 + f_2\sqrt{\tilde{\eta}}), \\ h_2 = h - 2h^2\theta\sqrt{\tilde{\eta}}(1 - f_2\sqrt{\tilde{\eta}}), \end{cases}$$

les  $f_i$  désignant (comme dans tout ce numéro) des nombres de modules bornés (indépendants de  $\tilde{\eta}$  et de  $r$ ); enfin, la quantité  $\zeta$ , définie au n° 13, aura pour valeur

$$(116) \quad \zeta = f_3\sqrt{\tilde{\eta}} \quad (f_3 \neq 0).$$

Or appelons  $D_1$  la frontière supérieure de  $\mathfrak{v}$ , et  $D_2$  sa frontière inférieure; si l'on suppose  $\Re(i\sigma) < 0$ , ce qui n'implique d'ailleurs aucune restriction, on aura sur  $D_1$  d'après (35)

$$(117) \quad e^{s_0 T} = f_4\sqrt{\tilde{\eta}} \quad (f_4 \neq 0),$$

et, sur  $D_2$ ,

$$\zeta^2 e^{-s_0 T} = f'_3 \sqrt{\eta} \quad (f'_3 \neq 0),$$

d'où, en vertu de (116),

$$(118) \quad e^{s_0 T} = f_3 \frac{\tilde{\eta}}{\sqrt{\eta}} \quad (f_3 \neq 0),$$

(ce qui montre bien que  $D_2$  s'éloigne indéfiniment quand  $\tilde{\eta}$  tend vers zéro).

Observons enfin que, sur  $D_1$  et  $D_2$  nos approximations successives étant encore valables,  $\lambda$  sera sur ces droites très voisin de  $h$  (pour  $\tilde{\eta}$  et  $r$  assez petits); donc, s'il en est ainsi,  $|\lambda|$  aura sur  $D_1$  et  $D_2$  une borne inférieure non nulle,  $l_0$ . Soit alors  $\tilde{R}$  le nombre obtenu en substituant respectivement  $\tilde{\eta}$  et  $l_0$  à  $\eta$  et  $|\lambda_0|$  dans (54); prenons un nombre  $\tilde{t}$ , dont l'image  $\tilde{T}$  (fig. 6) sera sur  $D_1$ , et qui vérifiera la condition  $|\tilde{t}| < \tilde{R}$ ; soit  $\tilde{\lambda}$  la valeur prise en ce point par notre intégrale. D'après (54), les caractéristiques de première espèce, que l'on calculera en partant de  $\tilde{\eta}$  au lieu de  $\eta$ , qui correspondent aux données initiales  $s_0$ ,  $\tilde{t}$  et  $\tilde{\lambda}$ , et qui, par conséquent, appartiennent à la même intégrale de (VI) que nos caractéristiques primitives, ces caractéristiques, dis-je, convergeront en général pour tous les points d'un secteur  $\tilde{S}$ , de sommet  $\tilde{T}$ , de même orientation que  $S_0$ , mais qui ne présentera plus de bande analogue à  $ab$ . En effet, on tire de (115)

$$\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2} = -4\theta \sqrt{\tilde{\eta}} (1 + f_6 \tilde{\eta}),$$

d'où

$$\frac{2\sqrt{\tilde{\eta}}}{\left| \frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2} \right|} = \frac{1}{2} \frac{1}{|1 + f_6 \tilde{\eta}|},$$

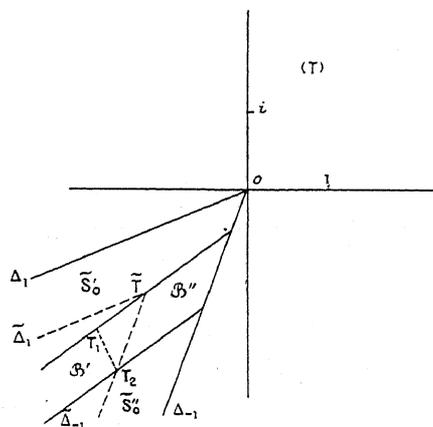
la condition (32) sera donc vérifiée, relativement à  $\tilde{\eta}$  (choisi suffi-

samment petit); par suite les seules régions de  $\tilde{S}$  où la convergence de nos nouvelles approximations ne soit pas assurée sont des cercles ( $\tilde{\gamma}_k$ ), tous extérieurs les uns aux autres, et où l'on sait d'ailleurs calculer l'intégrale de (VI). En conséquence, nos nouvelles caractéristiques nous permettent de représenter l'intégrale en tout point de la région  $\mathfrak{B}'$  formée par les points de  $\mathfrak{B}$  intérieurs à  $\tilde{S}$ ; en ces points (sauf sur la région *médiane* de  $\mathfrak{B}'$ ), (55) étant applicable, on voit, en s'appuyant sur (117), (118) et sur l'équation

$$(119) \quad \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} \right) = \left( \frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{h_1} \right) \left[ \left( 1 + \frac{\zeta}{2} \right)^2 e^{s\mu} + \frac{\zeta^2}{4} e^{-s\mu} \right],$$

que  $\lambda$  est très voisin de  $h$  (pour  $\tilde{\eta}$  et  $r$  assez petits). De plus,  $\mathfrak{B}'$  établit une *liaison* entre les parties  $\tilde{S}'_0$  et  $\tilde{S}''_0$  du secteur  $S_0$  qui étaient primitivement séparées par  $\mathfrak{B}$ ; on conçoit donc qu'on puisse maintenant *prolonger l'intégrale dans la région  $S''_0$* , ainsi que dans tous les autres

Fig. 6.



secteurs adhérents. Reste donc à étudier la portion de  $\mathfrak{B}$  extérieure à  $\tilde{S}$  (et qui croît indéfiniment avec  $\tilde{\eta}^{-1}$ ); appelons-la  $\mathfrak{B}''$ , et soit  $T_2$  le point de  $\mathfrak{B}''$  dont le correspondant  $t_2$  a le plus petit module; la largeur

de  $\mathfrak{w}$  étant égale à

$$\frac{1}{|s_0|} \log \frac{f_2}{f_3} \frac{\eta}{\tilde{\eta}},$$

on a évidemment

$$T_2 = \tilde{T} + f_7 \log \frac{\eta}{\tilde{\eta}},$$

et, si, par  $T_2$ , on mène une parallèle à la direction  $\gamma = \frac{\pi}{2} + \eta'$  cette droite coupera  $D_1$  en un point  $T_1$  tel que

$$T_1 = T_2 + f_8 \log \eta \tilde{\eta}^{-1} = \tilde{T} + (f_7 + f_8) \log \frac{\eta}{\tilde{\eta}};$$

d'où, pour le point  $t_1$  correspondant,

$$(120) \quad t_1 = \rho' \left( \frac{\tilde{\eta}}{\eta} \right)^z \tilde{t} \quad (|\theta'| = 1, z > 0).$$

Cela étant, effectuons sur  $\lambda$  la transformation (79); je dis qu'on pourra obtenir une intégrale  $\rho(t)$  de l'équation (80) au moyen des approximations suivantes :

$$(121) \quad \begin{cases} \rho_0 &= A t^\sigma + B t_1^{2\sigma} t^{-\sigma}, \\ \rho_{n+1} - \rho_n &= \frac{t^\sigma}{2\sigma} \int_{t_1}^t t^{1-\sigma} \psi(\rho'_n, \rho_n, t) dt - \frac{t^{-\sigma}}{2\sigma} \int_{t_1}^t t^{1+\sigma} \psi(\rho'_n, \rho_n, t) dt \\ & \quad (n = 0, 1, \dots), \end{cases}$$

où les intégrales sont prises le long de courbes correspondant aux rayons issus de  $T_1$  dans la région  $T_1 \tilde{T} T_2 + \mathfrak{w}''$ , et où A et B désignent deux constantes arbitraires. En effet, la convergence des approximations (121) s'établit comme celle des approximations (81); on obtient, par exemple,

$$|\rho_0| < |A| r^\varpi + |B| r^\varpi \left( \frac{r_1}{r} \right)^\varpi < (|A| + |B|) r^\varpi \equiv C r^\varpi,$$

$$\left| \int_{t_1}^t t^{-\sigma-1} \rho_0^\varpi dt \right| < \frac{C^2 l}{\varpi} (r^\varpi - r_1^\varpi) < \frac{C^2 l}{\varpi} r^\varpi,$$

les nombres  $l^{(1)}$  et  $\varpi$  étant aisément calculables, et l'on démontrera

---

(<sup>1</sup>)  $l$  est sûrement borné, par suite de la façon dont nous avons choisi le point  $T_1$ .

que pour  $r_1 < r < r'_0$  les approximations (121) convergent régulièrement vers une intégrale de (VI). Dès lors, notre problème sera résolu si nous parvenons à prouver, d'une part, que cette intégrale coïncide avec celle que nous voulons étudier, et, d'autre part, que son domaine de convergence contient  $\mathfrak{B}''$ .

Pour réaliser la première condition, il nous suffit de choisir A et B de telle sorte qu'en  $T_1$ ,  $\Lambda_1(t) + \rho(t)$  et  $\Lambda'_1 + \rho'$  prennent respectivement les mêmes valeurs que  $\lambda$  et  $\lambda'$ ; calculons donc  $\lambda(t_1)$  et  $\lambda'(t_1)$ .

Or, on a d'abord, en vertu de (119),

$$\lambda - h = \frac{1 - \frac{h}{2} \left( \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} \right) - h \left( \frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{h_1} \right) \left[ \left( 1 + \frac{\zeta}{2} \right)^2 e^{s_0 t} + \frac{\zeta^2}{4} e^{-s_0 t} \right]}{\frac{1}{2} \left( \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} \right) + \left( \frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{h_1} \right) \left[ \left( 1 + \frac{\zeta}{2} \right)^2 e^{s_0 t} + \frac{\zeta^2}{4} e^{-s_0 t} \right]},$$

mais, d'après (115), on a

$$1 - \frac{h}{2} \left( \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} \right) = f_8 \tilde{\eta};$$

tenons compte de (55), et il viendra

$$\lambda(t_1) - h = f_9 \tilde{\eta} - h^2 \left( \frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{h} \right) \left( 1 + f_{10} \sqrt{\tilde{\eta}} \right) \left( 1 + f_{11} \tilde{r} \right) \tilde{t}_0^{-s_1} t_1^{s_1},$$

puisque, sur  $(D_1)$ , le crochet se réduit sensiblement à  $e^{s_0 t}$ , d'après (116) et (117). De même, en dérivant (119), on trouvera

$$t_1 \lambda'(t_1) = -h^2 s_0 \left( \frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{h} \right) \left( 1 + f_{12} \sqrt{\tilde{\eta}} \right) \left( 1 + f_{13} \tilde{r} \right) \tilde{t}_0^{-s_0} t_1^{s_0}.$$

Cela étant, désignons par  $\Lambda_1$  et  $\Lambda_2$  deux nombres bornés introduits par (79); la coïncidence des deux intégrales en  $t_1$  exigera les relations

$$(122) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{A} + \mathbf{B} = \left[ \begin{array}{l} (\Lambda_1 t_1 + f_9 \tilde{\eta}) t_1^{-s_0} \\ - h^2 \left( \frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{h} \right) \left( 1 + f_{10} \sqrt{\tilde{\eta}} \right) \left( 1 + f_{11} \tilde{r} \right) t_0^{-s_0} \end{array} \right] t_1^{s_0 - \sigma}, \\ \sigma(\mathbf{A} - \mathbf{B}) = \left[ \begin{array}{l} \Lambda_2 t_1^{1-s_0} \\ - h^2 s_0 \left( \frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{h} \right) \left( 1 + f_{12} \sqrt{\tilde{\eta}} \right) \left( 1 + f_{13} \tilde{r} \right) t_0^{-s_0} \end{array} \right] t_1^{s_0 - \sigma}. \end{array} \right.$$

Or on peut prendre (1)

$$\tilde{t} = \theta'' l_0 \eta^{\frac{1}{2}} \tilde{\eta}^m \quad (|\theta''| = 1),$$

ce qui est bien compatible avec la condition  $|\tilde{t}| < \tilde{R}$ , cette égalité, jointe à (120), donnera

$$l_1 = f_{11} \tilde{\eta}^{x+m} \eta^{-x+\frac{1}{2}},$$

d'où, puisque (117) s'applique sur  $(D_1)$ ,

$$|l_1^{1-s_0}| = \frac{f_{11}}{f_1} \left(\frac{\tilde{\eta}}{\eta}\right)^x \tilde{\eta}^m < f_{13} \tilde{\eta}^m;$$

en outre, d'après (114),  $1 - \frac{\sigma}{s_0} = f_{16} \tilde{\eta}$ , de sorte que

$$l_1^{s_0-\sigma} = (f_4 \sqrt{\eta})^{f_{16}} \tilde{\eta}$$

tend vers 1. En définitive, les équations (122) montrent donc que  $A + B$  et  $A - B$  restent bornés; dès lors, on sera sûr que les approximations (121) convergent dans  $\mathfrak{B}'$ : à condition de prendre  $r_0$  inférieur au plus petit  $R'_0$  des nombres  $r'_0$  définis plus haut, et que l'on obtiendrait en donnant à  $A$  et  $B$  toutes les valeurs possibles (bornées comme il vient d'être dit).

Du même coup, nos deux questions se trouvent résolues par l'affirmative; et, comme, de plus, on montrerait sans peine que, pour  $r_0$  assez petit, la fonction-limite  $\rho(t)$  des approximations (121) reste très petite en module, nous pouvons affirmer maintenant que (pour  $r_0$  et  $s_0 - \sigma$  assez petits)  $|\lambda - h|$  est très voisin de zéro dans toute la région  $\mathfrak{B}'$ : ainsi se trouve expliquée l'origine de notre singularité transcendante (2).

55. Pour terminer cette troisième Partie, nous allons démontrer

(1) Rappelons que  $m$  est l'exposant qui figure dans (54).

(2) On montrerait sans peine que, si  $s_0 - \sigma$  tend vers zéro, le développement (121) tend uniformément (pour  $r$  assez petit) vers le développement (81).

une proposition qui trouvera une importante application dans un Mémoire ultérieur consacré à la solution du problème de Riemann.

Nous dirons d'abord qu'une *branche d'intégrale* (1) de (VI) a pour paramètre  $\xi$  dans le domaine de l'origine, si l'ensemble des déterminations de  $\frac{\log \xi}{2\pi i}$  coïncide avec l'ensemble des valeurs  $s_n$  définies au n° 51; plus brièvement, nous dirons même (ce qui ne prête ici à aucune équivoque) que  $\lambda(t)$  a pour paramètre  $\xi$ . Cela étant, le théorème que j'ai en vue peut être énoncé de la façon suivante :

*Soient  $\varepsilon$  et  $\eta'$  deux nombres positifs arbitrairement petits, et  $(\mathcal{R})$  la région qui a été définie au moyen de  $\eta'$  au n° 45; il existe un nombre positif  $R_0$  qui ne dépend que de  $a, b, c, d, \varepsilon, \eta'$  et qui jouit de la propriété suivante : toutes les intégrales de (VI) qui ont pour paramètre l'un quelconque des nombres  $\xi$  satisfaisant à la condition*

$$(123) \quad \varepsilon < |\xi| < \frac{1}{\varepsilon},$$

*et qui prennent en un point  $t_0$  la valeur arbitrairement choisie  $\lambda_0$ , peuvent être représentées par des caractéristiques dans la région  $(t)$  correspondant à  $(\mathcal{R})$ , et cela sous la condition que l'on ait  $|t_0| \equiv r_0 < R_0$  (et, en outre,  $|\xi - e^{2\pi i \sigma}| > \varepsilon$ , si  $\sigma$  est une valeur exceptionnelle réelle).*

La démonstration détaillée ne présente aucune difficulté après les développements précédents; aussi, nous nous bornerons aux remarques suivantes :

Supposons d'abord  $|\xi - e^{2\pi i \sigma}| > \varepsilon$ ,  $|\xi - e^{2\pi i \sigma^*}| > \varepsilon$  et  $|\xi - e^{2\pi i \bar{s}_0}| > \varepsilon$  (où  $\bar{s}_0$  est réel); nous sommes alors dans le cas général des n°s 47-51;  $(\mathcal{R})$  sera recouvert par une alternance de secteurs d'espèces distinctes, et dans l'un d'eux, soit  $S_0$ , on pourra calculer en fonction de  $\xi$  la valeur de  $\alpha_0$  ou  $\alpha_0^*$ , qui, d'après (123), sera bornée supérieurement.

Cela étant, observons qu'on peut établir pour les développements de deuxième espèce une formule analogue à (54); ainsi, pour

(1) C'est-à-dire l'ensemble des déterminations de  $\lambda(t)$  que l'on obtient quand  $t$  varie d'une manière quelconque sans franchir une coupure qui joint deux des singularités fixes de (VI) (ici 1 et  $\infty$ ).

$r_0 < \hat{R}_0 \eta'' |\lambda_0^{-1}|$ , c'est-à-dire pour  $|\lambda_0|$  inférieur à une quantité suffisamment petite  $\eta''$ , et en outre, pour  $r_0$  inférieur à un nombre fixe  $R_{01}$ , plus petit que 1, notre intégrale pourra sûrement être représentée par des développements de deuxième espèce; mais, pour  $|\lambda_0| > \eta''$ , la formule (54) fournira un nombre  $R_{02}$  tel que, pour  $r_0 < R_{02}$ , l'intégrale puisse être représentée par des développements de première espèce.

D'autre part, pour  $|\xi - e^{2\pi i \bar{\sigma}}| < \varepsilon$ , le théorème du n° 52 fournit un nombre  $R_{03}$  analogue aux précédents. Enfin, pour  $|\xi - e^{2\pi i \sigma}| < \varepsilon$  (ou pour  $|\xi - e^{2\pi i \sigma^*}| < \varepsilon$ ), si  $\sigma$  (ou  $\sigma^*$ ) est complexe et  $\eta''$  assez petit, nous savons que la décomposition de  $\mathfrak{A}$  en secteurs comprendra toujours des secteurs non exceptionnels. En se plaçant dans ces secteurs, on raisonnera comme plus haut, et, d'après le n° 54, nous saurons calculer un nombre  $R_{04}(\hat{R}_{04})$  tel que, pour  $r_0 < R_{04}(\hat{R}_{04})$ , l'intégrale puisse être calculée dans *tout* le domaine  $\mathfrak{A}$  (*γ compris les secteurs exceptionnels ou tendant vers des secteurs exceptionnels*). Dès lors notre théorème est démontré;  $R_0$  sera le plus petit des nombres  $R_{01}$ ,  $R_{02}$ ,  $R_{03}$ ,  $R_{04}(\hat{R}_{04})$ .

Supposons maintenant  $\sigma$  réel; dans ce cas, il n'existe plus de secteur du type général (1); les développements (81) convergent dans toute la région ( $\mathfrak{A}$ ), et l'intégrale tend uniformément vers  $h$  dans la région ( $\mathfrak{A}$ ). Dans ce cas, nous ne savons pas calculer une intégrale répondant à la condition  $\lambda(t_0) = \lambda_0$ , où  $\lambda_0$  est un nombre choisi arbitrairement. Ce cas appelant de nouvelles recherches, nous l'avons réservé dans l'énoncé (ainsi que les cas voisins), bien qu'il nous paraisse vraisemblable que la restriction ainsi introduite puisse être complètement levée (2).

(1) La même circonstance se produit pour les caractéristiques du type exceptionnel et de la deuxième sorte.

(2) Au préalable, il faudrait étudier le *prolongement* de l'intégrale hors de la région où nous avons établi la convergence des caractéristiques qui la représentent; voir la note (2) de la page 276 (n° 23).

## QUATRIÈME PARTIE.

---

56. On sait qu'il existe deux cas où l'équation (VI) possède des intégrales réductibles aux fonctions classiques; dès lors, il est tout indiqué de rechercher si les résultats obtenus dans ce Mémoire se vérifient dans les deux cas précédents. Effectivement, c'est bien ce qui a lieu, comme nous allons le montrer dans ce numéro et dans le suivant.

Commençons par le cas le plus simple. Les quantités  $r_0$ ,  $r_1$ ,  $r_l$  et  $r_\infty$  étant définies comme aux nos 25 et 32, on a tout d'abord :

$$a = r_0^2 - r_0, \quad b = r_1^2 - r_1, \quad c = r_l^2 - r_l, \quad a + b + c + d + \frac{3}{4} = r_\infty^2 + r_\infty;$$

d'autre part, on sait (1) que pour

$$(124) \quad r_0 + r_1 + r_l + r_\infty = \frac{1}{2},$$

c'est-à-dire pour

$$a + b + c + d + 1 = (r_0 + r_1 + r_l - 1)^2,$$

l'équation (VI) admet toutes les intégrales de l'équation de Riccati

$$(125) \quad \frac{t(t-1)\lambda'}{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)} = \frac{2r_0-1}{\lambda} + \frac{2r_1-1}{\lambda-1} + \frac{2r_l}{\lambda-t}.$$

Or l'intégrale générale de (125) est donnée par la formule

$$(126) \quad \lambda = t - \frac{t(t-1)}{2(r_0 + r_1 + r_l - 1)} \frac{\Theta'}{\Theta},$$

$\Theta$  désignant une solution quelconque de l'équation hypergéométrique

$$\Theta'' - 2 \left( \frac{r_0 + r_l - 1}{t} + \frac{r_1 + r_l - 1}{t-1} \right) \Theta' + \frac{2(2r_l - 1)(r_0 + r_1 + r_l - 1)}{t(t-1)} \Theta = 0;$$


---

(1) Voir, par exemple, *Thèse* déjà citée, p. 111.

dans le voisinage de l'origine on pourra donc écrire [sauf peut-être pour  $2(r_0 + r_t)$  entier]

$$(127) \quad \Theta = A\Theta_1 + Bt^{2r_0+2r_t-1}\Theta_2,$$

A et B désignant deux constantes arbitraires, et  $\Theta_1, \Theta_2$  représentant deux fonctions (hypergéométriques) holomorphes pour  $t = 0$ . Enfin, on trouve aisément pour les intégrales de (125)

$$(128) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha = 2r_0r_t(t-1) + 2r_1r_t t + r_t \frac{t(t-1)}{\lambda-t}, \\ \alpha^* = 2r_0r_t(t-1) + 2r_1r_t t - r_0(\lambda-1) - r_1\lambda - r_t(\lambda+t-1). \end{array} \right.$$

Cela étant, supposons  $2r_0 + 2r_t - 1$  complexe et  $AB \neq 0$ ; si T s'éloigne indéfiniment dans  $(\mathfrak{R})$  de telle sorte que  $|t^{2r_0+2r_t-1}|$  tende vers l'infini, les formules (126), (127) et (124) montrent aussitôt que  $\lambda$  tend vers la valeur

$$\bar{\lambda} = \frac{2(r_\infty + r_1)}{2r_\infty + 1}.$$

Mais d'après (128), on aura alors  $\alpha_0 = -2r_0r_t$ , d'où, pour l'une des valeurs de  $s$ , l'expression  $s = 1 - 2r_0 - 2r_t = 2(r_\infty + r_1)$ . Dès lors les formules (68) et (69) montrent aussitôt qu'on a  $s = \sigma$  et  $\bar{\lambda} = h$ ; on est donc dans un cas exceptionnel (de première espèce); et le champ où nous devons faire mouvoir T pour que  $t^s$  tende vers zéro coïncide évidemment avec le secteur exceptionnel  $\Sigma_1$  défini au n° 25. Enfin, dans le cas actuel, il est bien facile de faire le prolongement de l'intégrale dans *tout le demi-plan*  $\Re(T) < 0$ : ainsi, lorsque T s'éloigne dans une direction  $O\Delta$  telle que  $t^s$  reste fini et non nul,  $\lambda, \bar{\lambda}, \alpha$  et  $\alpha^*$  deviennent indéterminés; et si T s'éloigne de telle sorte que  $t^{-s}$  tende vers zéro,  $\lambda$  tend vers zéro, et  $\bar{\lambda}$  vers la valeur  $(1)$ ,  $\bar{h} = \frac{2r_0-1}{2(r_0-r_t^*)}$ , équivalente à (68). Dans les mêmes conditions,  $\alpha^*$  tend vers  $\alpha_0^* = -2r_0r_t + r_0 + r_t$  et l'on a bien  $\bar{s} = s + 1$ . Les nouvelles directions qu'il faut imposer à T appartiennent à un secteur exceptionnel de deuxième espèce  $\bar{\Sigma}$  séparé de  $\Sigma$  par le rayon  $O\Delta$ ; et, actuellement, rien n'empêche de considérer  $\Sigma$

---

(1)  $r_t^* = 1 - r_t$  désigne la seconde racine de l'équation caractéristique de  $E_{VI}$  pour  $x = t$ .

et  $\Sigma^*$  comme limites respectivement par les deux demi-axes imaginaires  $\Re(\mathbf{T}) = 0$ .

Pour  $A = 0$ , et pour  $B = 0$ , on obtiendrait deux intégrales holomorphes pour  $t = 0$ ; la première est une des deux intégrales  $\Lambda_i(t)$  dont nous avons montré l'existence au n° 27; la seconde, qu'on pourrait désigner par  $t\tilde{\Lambda}(t)$ , joue un rôle analogue dans la théorie des caractéristiques de deuxième espèce.

Laissons de côté le cas où  $2r_0 + 2r_1 - 1$  est réel (entier ou non), mais non nul, la vérification n'offrant alors aucune difficulté; et passons au cas, plus intéressant, où l'on a  $2r_1 - 1 = 0 = 2(r_0 + r_1) - 1$ . On a alors  $s = 0 = \sqrt{4b + 1} = \sqrt{4(a + b + c + d + 1)}$ ; nous sommes donc dans le cas des caractéristiques exceptionnelles de la première espèce et de la deuxième sorte, et il doit y avoir des intégrales holomorphes pour  $t = 0$  et prenant en  $t = 0$  une valeur arbitraire  $\lambda_0$ ; effectivement, l'équation (125) s'écrit alors

$$(t-1)\lambda' = 2r_1(\lambda-1);$$

son intégrale générale est  $\lambda = 1 + (\lambda_0 - 1)(1-t)^{2r_1}$  (1). De même, pour  $2r_0 = 1 = 2r_1$ , on trouvera  $s = 0 = \sqrt{4a + 1} = \sqrt{4c + 1}$ ; on est donc dans le cas des caractéristiques exceptionnelles de la deuxième espèce et de la deuxième sorte; les intégrales obtenues doivent être telles que  $\lambda : t$  soit holomorphe et prenne à l'origine une valeur arbitraire; et, en effet, l'équation (125) s'écrit dans ce cas

$$\frac{t(t-1)\lambda'}{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)} = \frac{2r_1-1}{\lambda-1} + \frac{1}{\lambda-t};$$

son intégrale générale est

$$\lambda = \frac{t}{1 + C(1-t)^{2r_1}}, \quad \text{ou} \quad \lambda^{-1} = 1 + (\lambda_0^{-1} - 1)(1-t)^{2r_1} \quad (2).$$

(1) Il semble donc qu'on ait obtenu une caractéristique exceptionnelle de la première espèce et de la deuxième sorte, s'annulant en  $t = 0$ , ce qui serait contraire à notre théorie; mais il est facile d'expliquer ce paradoxe. Car une équation (VI) qui possède des caractéristiques de la première espèce et de la deuxième sorte prenant en  $t = 0$  la valeur  $\lambda_0$  possède aussi, (en général) une caractéristique de la deuxième espèce et de la première sorte, holomorphe et nulle en  $t = 0$ . Mais sauf dans un seul cas, qui est précisément celui de l'exemple actuel, il est impossible d'obtenir cette intégrale en faisant  $\lambda_0 = 0$  dans la famille précédente.

(2) Pour  $\lambda_0^* = \infty$ , on ferait une remarque analogue à celle de la note précédente.

Le deuxième cas que nous allons étudier est beaucoup plus instructif : aussi bien, il fournit un exemple (unique jusqu'à présent) où l'on sait exprimer par des fonctions classiques l'intégrale *générale* de l'équation (VI) (et non plus seulement, comme tout à l'heure, une famille d'intégrales dépendant d'une constante arbitraire).

57. Dans l'équation (VI), faisons  $a = b = c = d = -\frac{1}{4}$ ; nous obtenons une équation que nous désignerons par (VI<sub>0</sub>), et qui s'écrit

$$(VI_0) \quad \lambda'' = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda-1} + \frac{1}{\lambda-t} \right) \lambda'^2 - \left( \frac{1}{t} + \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t-\lambda} \right) \lambda' + \frac{\lambda(\lambda-1)}{2t(t-1)(\lambda-t)}.$$

Cette équation s'intègre de la façon suivante. Appelons  $\varphi(y, t)$  la fonction elliptique de  $y$  définie par l'inversion de l'intégrale

$$y = \int_{\infty}^{\varphi} \frac{dz}{\sqrt{4z(z-1)(z-t)}},$$

et posons

$$(129) \quad \omega_1 = \int_{\infty}^1 \frac{dz}{\sqrt{4z(z-1)(z-t)}}, \quad \omega_2 = \int_{\infty}^{t'} \frac{dz}{\sqrt{4z(z-1)(z-t)}},$$

de sorte que  $\varphi$  admettra  $2\omega_1$  et  $2\omega_2$  comme couple de périodes primitives. Cela étant, l'intégrale générale de (VI<sub>0</sub>) sera donnée par la formule

$$(130) \quad \lambda = \varphi(2A_1\omega_1 + 2A_2\omega_2, t),$$

où  $A_1$  et  $A_2$  sont des constantes arbitraires <sup>(1)</sup>. En vertu des valeurs

<sup>(1)</sup> L'équation (VI<sub>0</sub>) a été formée pour la première fois (à la notation près) par M. Émile Picard dans son Mémoire couronné (*Journ. de Liouville*, 4<sup>e</sup> série, t. V, 1889, p. 298-300). Quelque temps après, elle était étudiée (sous sa forme actuelle) par M. Painlevé (*C. R. Acad. Sc.*, t. 117, 1893, p. 686, et *Leçons de Stockholm*, p. 507, 599) qui montrait que son intégrale contient les constantes sous forme essentiellement transcendante; l'équation (VI<sub>0</sub>) figure encore dans le *Tableau des équations à points critiques fixes*, publié par M. Painlevé dans le Mémoire des *Acta* cité à la note <sup>(2)</sup> de la page 1. Enfin, elle a été étudiée par M. Richard Fuchs à propos de la résolution du problème de Riemann pour l'équation (E<sub>VI<sub>0</sub></sub>) du n° 4 (*Math. Ann.*, t. 70, 1911, p. 525), mais sa méthode peut être notablement simplifiée.

choisies pour  $a, b, c, d$ ,  $(VI_0)$  possédera des caractéristiques du type général ou du type exceptionnel, mais de la deuxième sorte; en particulier, *on doit pouvoir vérifier sur cet exemple la décomposition de  $(\mathcal{R})$  en secteurs*; c'est bien ce qui a lieu, comme nous allons voir.

Tout d'abord, on peut évidemment choisir dans (129) les déterminations des radicaux de telle sorte qu'on ait (avec les notations classiques) :

$$(131) \quad 2\omega_1 = \pi F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; t\right) = \pi [1 + t \mathfrak{F}_1(t)],$$

$$(132) \quad \tau = \frac{\omega_2}{\omega_1} = -\frac{i}{\pi} \log t + \frac{4i \log 2}{\pi} + 1 + t \mathfrak{F}_2(t),$$

les  $\mathfrak{F}_j$  désignant (comme plus loin  $\mathfrak{F}_3$  et  $\mathfrak{F}_4$ ) des fonctions holomorphes pour  $t = 0$ ; on tire de là

$$(133) \quad q = e^{\pi i \tau} = -\frac{t}{16} [1 + t \mathfrak{F}_3(t)].$$

On a, d'autre part,

$$(134) \quad \varphi(y) = \frac{1+t}{3} + py,$$

et de plus, conformément à (129),

$$(135) \quad e_1 = 1 - \frac{1+t}{3} = \frac{2-t}{3}, \quad e_2 = t - \frac{1+t}{3} = \frac{2t-1}{3}, \quad e_3 = -\frac{1+t}{3}.$$

Cela étant, nous nous appuyerons sur les formules suivantes <sup>(1)</sup> :

$$(136) \quad p(2\omega_1 x) = -\frac{\eta_1}{\omega_1} + \left(\frac{\pi}{2\omega_1}\right)^2 \frac{1}{\sin^2 \pi x} \\ - 2 \left(\frac{\pi}{\omega_1}\right)^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n q^{2n}}{1 - q^{2n}} \cos 2\pi n x,$$

$$(137) \quad p(2\omega_1 x + \omega_2) = -\frac{\eta_1}{\omega_1} - 2 \left(\frac{\pi}{\omega_1}\right)^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n q^n}{1 - q^{2n}} \cos 2\pi n x,$$

$$(138) \quad \zeta(2\omega_1 x + \omega_2) - 2\eta_1 x - \eta_2 = \frac{2\pi}{\omega_1} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{q^n}{1 - q^{2n}} \sin 2\pi n x.$$

---

(1) Voir, par exemple, *Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications*, par G. Halphen [t. I, Paris, 1886, p. 426, formules (32) et (34)].

Comme, d'après (133), on a  $|q| < 1$  pour  $|t|$  assez petit, la convergence de (136) sera assurée pour

$$(139) \quad \Re [i(\tau \pm x)] < 0,$$

et, celle de (137) et (138), pour

$$(140) \quad \Re [i(\tau \pm 2x)] < 0;$$

mais, puisqu'on a  $|q| < 1$ , (139) est une conséquence de (140) qui suffit donc à assurer la convergence des trois séries précédentes. Exprimons enfin que le second membre de (136) ne contient pas de terme indépendant de  $x$ ; il viendra

$$(141) \quad \frac{\eta_1}{\omega_1} = \frac{\pi^2}{12\omega_1^2} - 3 \left( \frac{\pi}{\omega_1} \right)^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nq^{2n}}{1-q^{2n}} = \frac{1}{3} + t \mathfrak{F}_4(t).$$

Revenons maintenant à notre intégrale; pour la représenter par le procédé précédent, il suffira de poser

$$x = A_1 + A_2 \tau;$$

on aura donc

$$(142) \quad \lambda = \frac{t}{3} - t \mathfrak{F}_4(t) + \left[ \mathbf{F} \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; t \right) \right]^{-2} \\ \times \left\{ \frac{1}{\sin^2 \pi(A_1 + A_2 \tau)} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4nq^{2n}}{1-q^{2n}} \cos 2\pi n(A_1 + A_2 \tau) \right\}.$$

Il viendra de plus, en dérivant  $\varphi$  par rapport à  $t$  :

$$t(t-1)y' = \frac{t(t-1)\lambda'}{\sqrt{4\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}} + \frac{1}{2} \int_{\infty}^{\varpi} \frac{t(t-1)dz}{(z-t)\sqrt{4z(z-1)(z-t)}} \\ = \frac{t(t-1)\lambda'}{\sqrt{4\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}} + \frac{1}{2} \int_0^y \frac{(e_2 - e_3)(e_2 - e_1)}{py - e_2} dy \\ = \frac{t(t-1)\lambda'}{\sqrt{4\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}} - \frac{1}{2} [\zeta(y + \omega_2) - \eta_2 + e_2 y],$$

d'où, d'après (135), (138) et (141),

$$(143) \quad \frac{t(t-1)\lambda'}{\sqrt{4\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}} \\ = t(t-1)(2A_1\omega'_1 + 2A_2\omega'_2) + t \left[ \frac{2}{3} + \tilde{\pi}_1(t) \right] (A_1\omega_1 + A_2\omega_2) \\ - \frac{\pi}{\omega_1} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{q^n}{1-q^{2n}} \sin 2\pi n(A_1 + A_2\tau).$$

On a enfin, d'après la première équation (1),

$$z = \frac{t^2(t-1)^2\lambda'^2}{4\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)} - \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}{4} \left[ \frac{1}{\lambda(\lambda-1)} - \frac{1}{(\lambda-t)^2} \right] \\ = \frac{t^2(t-1)^2\lambda'^2}{4\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)} + \frac{2t-1}{4} + \frac{t(t-1)}{4(\lambda-t)};$$

mais

$$\frac{t(t-1)}{\lambda-t} = \frac{(c_2 - e_3)(e_2 - e_1)}{p y - e_2} = p(y + \omega_2) - e_2;$$

il viendra donc, en vertu de (135), (137) et (141),

$$(144) \quad z = \frac{t^2(t-1)^2\lambda'^2}{4\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)} - \frac{1}{4} + t \left[ \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \tilde{\pi}_1(t) \right] \\ - \frac{\pi^2}{2\omega_1^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nq^n}{1-q^{2n}} \cos 2\pi n(A_1 + A_2\tau).$$

Les formules (142) à (144), jointes à (131), (132) et (133), ainsi qu'aux conditions (139) et (140), vont nous permettre d'effectuer la vérification annoncée. Tout d'abord, pour  $|t|$  assez petit, (140) peut s'écrire

$$(145) \quad \Re [(1 \pm 2A_2) \log t] < 0;$$

et si  $t$  tend vers zéro en satisfaisant à cette condition, les sommes des séries figurant dans (142), (143) et (144) tendront aussi vers zéro; le premier membre de (143) tendra donc vers la même limite que

$$-t(2A_1\omega'_1 + 2A_2\omega'_2),$$

c'est-à-dire vers  $A_2t$ ; donc, d'après (144), si  $t$  tend vers zéro ou satis-

fait à (145),  $\alpha$  tendra vers  $\alpha_0 = -A_2^2 - \frac{1}{4}$  et l'on en déduira

$$s^2 = 4\alpha + 4c + 1 - 4\alpha_0 = -1 - 4\alpha_0 = 4A_2^2.$$

Supposons  $A_2 \neq 0$ ; on pourra prendre  $s = 2A_2$ ; et avec les notations du n° 11 pour  $s$  et  $\log t$ , (145) s'écrira

$$\cos \gamma \pm c \cos(\gamma + \delta) < 0;$$

nous retrouvons donc la condition (25) avec  $\omega = 1$ ; et, par suite, la région du plan (T) où convergent les développements précédents coïncide avec l'un des secteurs  $S_n$  du n° 51, soit, par exemple,  $S_0$ . Mais la formule (142) montre aussitôt l'allure de  $\lambda$  dans ce secteur; en effet, puisque (145) est vérifiée, les quotients  $e^{2\pi i \tau (1 \pm A_2)} : e^{\pm 2\pi i A_2 \tau}$  (où les signes sont pris de toutes les manières possibles) tendent vers zéro avec  $|t|$ . Donc, sur toute direction  $O\Delta$ , intérieure à  $S_0$  (au sens strict), on peut écrire

$$\lambda = \frac{1 + \varepsilon_1}{\sin^2 \pi (A_1 + A_2 \tau)},$$

d'où

$$\lambda = -\frac{e^{\pm 2\pi i A_1}}{4} \left(-\frac{t}{16}\right)^{\pm s} (1 + \varepsilon_2),$$

$\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  étant infiniment petits avec  $|t|$ , et le double signe étant choisi de telle sorte que  $t^{\pm s}$  tende vers zéro sur le chemin considéré; on voit aussitôt que  $\lambda$  est bien de l'ordre de  $t^0$ ,  $\omega$  étant associé à  $O\Delta$  comme il a été expliqué au n° 47. On obtient donc déjà une première vérification; allons plus loin. D'après (139), la formule (142) est encore applicable pour  $\Re[(1 \pm A_2) \log t] < 0$ , c'est-à-dire lorsque T appartient au secteur  $\Delta_1 O\Delta_2$  du n° 11, que l'on construirait en prenant  $\omega = 2$ ; or, avec la notation du n° 51, ce secteur coïncide avec l'ensemble des deux secteurs (de deuxième espèce)  $S_{-1}$  et  $S_1$ . Sur la frontière  $O\Delta_1$  de  $S_0$  et  $S_2$ ,  $\lambda$  sera de l'ordre de  $t$ , sa partie principale étant

$$\frac{t}{3} - \frac{1}{\sin^2 \pi (A_1 + A_2 \tau)} - 4q^2 \cos 2\pi (A_1 + A_2 \tau);$$

sur les autres rayons de  $S_1$ ,  $\lambda$  sera de l'ordre de  $-4q^2 \cos^2 \pi (A_1 + A_2 \tau)$ , c'est-à-dire de l'ordre de  $t^{2\pm s}$ , le signe étant facile à déterminer, et

nous vérifions ainsi les résultats des n<sup>os</sup> 47 et suivants. Et ce n'est pas tout; dans les autres secteurs  $S_n (|n| > 1)$ , (142) n'est plus applicable; mais, en vertu de la double périodicité de  $\lambda$ , il sera aisé de calculer l'intégrale dans les secteurs  $S_{2n-1}$ ,  $S_{2n}$  et  $S_{2n+1}$ . On a, en effet,

$$\lambda = \varphi [2A_1\omega_1 + 2(A_2 - n)\omega_2, t],$$

donc, sans changer  $\lambda$ , on pourra associer à toute direction  $O\Delta$  de  $\mathfrak{R}$  [et même du demi-plan  $\mathfrak{R}(T) < 0$ ] un nombre entier réel  $n$  tel que l'on ait sur  $O\Delta$

$$\mathfrak{R} \{ [1 \pm 2(A_2 - n)] \log t \} < 0$$

pour  $|t|$  assez petit <sup>(1)</sup>; et la théorie précédente sera encore applicable après substitution de  $A_2 - n$  à  $A_2$ , c'est-à-dire de  $s_n \equiv s - 2n$  à  $s_0 \equiv s$ .

Nous laisserons le lecteur compléter cette vérification en discutant les variations de  $\alpha^*$  et  $\lambda^*$  à l'intérieur de ces différents secteurs; pour terminer, nous ajouterons une remarque relative aux cas de  $s = 0$  et de  $s = 1$ . Pour  $s = 0$ , l'intégrale doit être représentée par des caractéristiques exceptionnelles de la première espèce et de la deuxième sorte; il doit donc y avoir une infinité d'intégrales holomorphes pour  $t = 0$  et prenant en ce point une valeur arbitraire,  $\lambda_0 (\neq 0)$ ; c'est bien ce qui a lieu, puisqu'on a alors  $A_2 = 0$ , d'où

$$\lambda = \varphi(2A_1\omega_1, t) \quad \text{et} \quad \lambda_0 = \varphi[2A_1\omega_1(0), 0] = \sin^{-2}\pi A_1.$$

De même, pour  $s = 1$ , on a  $s^* = 0$  et l'on doit retrouver des caractéristiques exceptionnelles de la deuxième espèce et de la deuxième sorte; effectivement, on trouve alors

$$\lambda = \varphi(2A_1\omega_1 + \omega_2, t) = \frac{1+t}{3} + e_2 + \frac{(e_2 - e_3)(e_2 - e_1)}{p(2A_1\omega_1) - e_2},$$

d'où

$$\lambda = t \frac{\varphi(2A_1\omega_1, t) - 1}{\varphi(2A_1\omega_1, t) - t},$$

de sorte que,  $t$  tendant vers zéro,  $\lambda$  tend vers  $\cos^2\pi A_1$ .

58. Pour terminer, je dirai quelques mots d'un Mémoire publié par

(1) On montrerait aisément que  $O\Delta$  appartient à  $S_{2n-1}$ ,  $S_{2n}$  ou  $S_{2n+1}$ .

M. Richard Fuchs dans les *Mathematische Annalen* <sup>(1)</sup>; ce Mémoire, auquel j'ai déjà fait allusion dans l'Introduction, a pour objet la représentation de l'intégrale générale de (VI) dans le voisinage de l'origine; mais, comme je vais le montrer, ses résultats sont, tous, complètement inexistantes.

Tout d'abord, M. Richard Fuchs prétend que,  $\lambda(t)$  désignant l'intégrale générale de (VI),  $\lambda$  et  $t\lambda'$  tendent vers zéro avec  $t$  <sup>(2)</sup>. Or, comment obtient-il ce résultat qui, s'il était exact, aurait une portée considérable, et qui, au surplus, serait incompatible avec ceux de notre première Partie? De la façon suivante: il commence par supposer que l'équation (VI) admet des intégrales  $\lambda(t)$  qui tendent vers zéro avec  $t$  (ainsi que  $t\lambda'$ ); partant de là, il s'efforce de prouver qu'il existe une infinité d'intégrales jouissant de cette propriété; et comme, d'autre part, ces intégrales ont été obtenues en partant de deux constantes arbitraires <sup>(3)</sup>, il en conclut qu'elles coïncident avec l'intégrale générale.

Énoncer ce « raisonnement » suffit à le juger.

Mais, si les résultats du géomètre allemand ne sont susceptibles d'aucune portée générale, du moins pourrait-on supposer qu'il a obtenu une représentation de certaines intégrales valable sous certaines conditions. Or, nous allons voir qu'il n'a même pas donné une solution correcte du problème ainsi restreint.

L'idée directrice de l'auteur consiste à représenter l'intégrale par une série procédant suivant les puissances de  $t$  et de  $\xi = \alpha t^\gamma$  (où  $\alpha$  et  $\gamma$  sont deux constantes arbitraires); ainsi donc, d'après lui, le développement de  $\lambda$  sera de la forme

$$(146) \quad \lambda = t\lambda_0 + t^2\lambda_1 + \dots + t^{n+1}\lambda_n + \dots,$$

<sup>(1)</sup> Voir la note de la page 241, n° 1.

<sup>(2)</sup> Observons d'ailleurs que l'auteur ne se préoccupe nullement de définir la loi suivant laquelle il faut tendre  $t$  vers zéro; pratiquement, il opère comme si  $t$  suivait un chemin rectiligne.

<sup>(3)</sup> En fait, M. Richard Fuchs n'a jamais démontré que ces constantes (les constantes  $\alpha$  et  $\gamma$  dont il sera question ci-dessous) figurent d'une façon *distincte* dans les intégrales en question; si l'on généralisait sans précaution le procédé de l'auteur, on serait exposé à de graves erreurs. Ainsi, on pourrait dire que toute équation algébrique  $f(x) = 0$  possède une infinité de racines dépendant d'une constante arbitraire: par exemple, la valeur initiale que l'on prend pour résoudre l'équation par la méthode de Newton.

avec

$$\lambda_n = \alpha_{n,n+1} \zeta^{-(n+1)} + \dots + \alpha_{n,1} \zeta^{-1} + \alpha_{n,0} + \beta_{n,1} \zeta + \dots + \beta_{n,n+1} \zeta^{n+1}.$$

Et, dès lors, nous voici en présence d'un double problème; d'une part, il s'agit de calculer les  $\alpha$  et les  $\beta$ ; d'autre part, il faut démontrer la convergence de la série (146).

Le premier problème, M. R. Fuchs le résout par la méthode des coefficients indéterminés; après de longs calculs, il montre que le développement (146) satisfait aux relations (1)

$$(147) \quad Y = \gamma^2 + \int_0^t (\gamma^2 P + Q) dt + \int_0^t P dt \int_0^t (\gamma^2 P + Q) dt + \dots$$

$$(148) \quad \lambda = \lambda_0 + \frac{\zeta}{2} \int_0^t \frac{dt}{t \zeta} \int_0^t M \zeta dt,$$

où  $P, Q, M$  sont des fonctions de  $\lambda, t\lambda'$  et  $t$ , holomorphes par rapport à ces variables sous certaines conditions; de plus,  $M$  est une fonction linéaire de  $Z \equiv \frac{Y - \gamma^2}{t}$ .

Supposons donc qu'on ait obtenu les  $\alpha$  et les  $\beta$  en écrivant que (146) vérifie identiquement (147) et (148); pour que la solution précédente ne soit pas purement formelle, il faudra démontrer la convergence de la série *double* (146). Or, pour faire cette démonstration, l'auteur se place d'abord dans le cas où

$$(149) \quad 0 < \Re(\gamma) < 1,$$

et il emploie la méthode des majorantes. Mais au lieu de former les

(1) La méthode par laquelle M. Richard Fuchs obtient ces relations soulève quelques critiques. Il commence par substituer à (VI) un système  $f = 0 = g$  dont toutes les solutions (sauf  $\lambda = \text{const.}$ ) appartiennent à (VI); et ce système, il le remplace ensuite par le suivant:  $g = 0 = h$ , avec  $2\lambda' h = f' - Pf + \lambda(\lambda - 1)g$ ; il est clair que toutes les solutions de ce dernier système vérifieront le système  $f' - Pf = 0 = g$ . Or, que fait M. R. Fuchs: il se contente d'écrire que la solution de  $g = 0 = h$  vérifie  $f = 0$  à l'origine. Mais si sa conclusion est exacte, c'est seulement parce que  $tP$  tend vers zéro avec  $t$ , comme une puissance de  $t$ , en vertu des conditions imposées à ses intégrales; et cette circonstance aurait dû être mise en évidence.

majorantes de (147) et (148), il majore (148) et sa dérivée par rapport à  $t$  :

$$(150) \quad t\dot{\lambda}' = t\dot{\lambda}'_0 + \gamma(\dot{\lambda} - \lambda_0) + \frac{1}{2\xi} \int_0^t M\xi dt.$$

Or  $Z$  [qui avec  $\dot{\lambda}$  constitue la seconde fonction inconnue du système différentiel  $(1) f = 0 = g$  substitué à (VI)],  $Z$  figure dans (148) et (150), et il faudrait diriger les calculs de façon à lui trouver une série majorante. Mais l'auteur passe ce point sous silence; peut-être lui suffit-il d'ailleurs d'avoir obtenu antérieurement un nombre positif auquel  $|Z|$  reste inférieur; et, sans se préoccuper davantage de  $Z$ , il demande à la théorie des fonctions implicites de lui fournir deux majorantes pour les fonctions  $\lambda$  et  $\lambda'$  déduites de (148) et (150). Or, il saute aux yeux que le procédé précédent ne peut, en aucune façon, fournir la suite infinie des nombres positifs qui doivent majorer les  $\alpha$  et les  $\beta$ ; les majorantes de M. Richard Fuchs n'ont donc aucun rapport avec celles du problème. Sa tentative de démonstration appellerait d'ailleurs bien d'autres critiques; mais ce qui précède suffit à prouver qu'elle n'établit aucunement la convergence du développement en série double, déduit de (147) et (148).

Continuons l'examen du Mémoire de l'auteur allemand. Après avoir étudié les cas  $\gamma = 0$  et  $1$ , il cherche à étendre sa démonstration aux autres cas où (149) n'est plus vérifiée; et, pour cela, il remplace l'équation (VI) par la suivante

$$(151) \quad u'' + \frac{2t-1}{t(t-1)} u' + \frac{u}{4t(t-1)} \\ = \frac{2\sqrt{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}}{t^2(t-1)^2} \\ \times \left[ a + b + c + d + 1 - \left( a + \frac{1}{4} \right) \frac{t}{\lambda^2} \right. \\ \left. + \left( b + \frac{1}{4} \right) \frac{t-1}{(\lambda-1)^2} - \left( c + \frac{1}{4} \right) \frac{t(t-1)}{(\lambda-t)^2} \right],$$

où l'on a posé

$$u = \int_{\infty}^{\lambda} \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}},$$

---

(1) Voir la note précédente.

et il cherche à développer la solution de (151) suivant les puissances croissantes de

$$K_1 = \sqrt{a + b + c + d + 1}, \quad \dots, \quad K_i = \sqrt{c + \frac{1}{i}}.$$

Or, voici comme il prouve la légitimité de ce développement. Les termes de la série (146) sont des polynomes par rapport à  $K_1, \dots, K_4$ , soient  $\lambda_n = P_n(\xi; K_1, K_2, K_3, K_4)$ ; d'autre part, cette série est absolument convergente; on peut donc l'ordonner suivant les puissances des  $K_i$ .

Mais ce qu'il aurait fallu démontrer, pour établir une telle conclusion, c'était non pas la convergence de la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |t^{n+1} P_n(\xi; K_1, K_2, K_3, K_4)|$$

(la seule que l'auteur ait envisagée), mais celle de la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |t^{n+1} P_n(\xi; |K_1|, |K_2|, |K_3|, |K_4|)|.$$

Il se peut d'ailleurs que le développement de l'intégrale, suivant les puissances des  $K_i$ , conduise à des conclusions intéressantes, et l'on pourrait peut-être retrouver par cette voie (1) quelques-uns des résultats de notre première ou de notre troisième Partie. Mais, en tous cas, ce développement ne peut être valable que pour  $|t|$  assez petit. Or, après avoir fait de lui-même la remarque précédente, M. R. Fuchs l'oublie un peu plus loin, quand il tente d'établir, au moyen de ces développements, des relations entre les constantes  $\alpha$  et  $\gamma$  de la série (146), relative à  $t = 0$ , et les constantes analogues des séries relatives à  $t = 1$  et  $\infty$  (2).

(1) Bien entendu, il faudrait s'appuyer sur l'étude directe de l'équation (VI<sub>0</sub>) que nous avons faite au n° 37.

(2) M. Richard Fuchs avoue spontanément que, dans une Communication aux *Göttingen Nachrichten*, il avait commis une erreur en annonçant que le développement de  $\lambda(t)$  par rapport aux  $K_i$  converge quel que soit  $t$ , et que les pôles de  $\lambda(t)$  sont indépendants

Dans le même ordre d'idées, toutes les conclusions que cet auteur énonce à la fin de son travail sur la distribution des racines <sup>(1)</sup> des équations  $\lambda = 0, 1, t$  ou  $\infty$ , sont complètement dénuées de fondement.

Je crois en avoir dit suffisamment pour faire apprécier la valeur du Mémoire de M. Richard Fuchs.

---

des  $K_i$ ; c'est sans doute la persistance de la première de ces deux erreurs qui a entraîné celle du texte. La place me fait défaut pour en montrer toute la répercussion dans la théorie des groupes de monodromie des équations linéaires.

<sup>(1)</sup> D'après M. Richard Fuchs, *ces racines s'obtiendraient en résolvant des équations modulaires*. D'ailleurs, ce qu'il envisage sous la notation  $\lambda$ , c'est l'ensemble de toutes les déterminations de l'intégrale obtenues en tournant *de toutes les façons possibles* autour des trois points singuliers transcendants.

