

# ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

ÉMILE PICARD

**Sur la nature algébrique-logarithmique des intégrales de différentielles totales relatives aux surfaces régulières**

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 3<sup>e</sup> série*, tome 33 (1916), p. 373-379

[http://www.numdam.org/item?id=ASENS\\_1916\\_3\\_33\\_\\_373\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1916_3_33__373_0)

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1916, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

SUR LA NATURE ALGÈBRICO-LOGARITHMIQUE

DES

# INTÉGRALES DE DIFFÉRENTIELLES TOTALES

RELATIVES

AUX SURFACES ALGÈBRIQUES RÉGULIÈRES,

PAR M. ÉMILE PICARD.



1. J'ai démontré autrefois la proposition suivante <sup>(1)</sup> relative aux intégrales de différentielles totales de troisième espèce correspondant à une fonction algébrique quelconque de deux variables : *Sur une surface algébrique, on peut tracer  $\rho$  courbes algébriques irréductibles particulières*

$$C_1, C_2, \dots, C_\rho$$

*telles qu'il n'existe pas d'intégrale de différentielle totale de troisième espèce, ayant seulement pour courbes logarithmiques la totalité ou une partie de ces courbes  $C$ , mais telles qu'il existe une intégrale ayant seulement pour courbes logarithmiques une  $(\rho + 1)$ ème courbe algébrique irréductible quelconque  $\Gamma$  de la surface, et la totalité ou une partie des courbes  $C$ .*

Il est nécessaire de rappeler rapidement les considérations dont j'ai fait usage et pour le détail desquelles je renvoie au Livre cité. On envisage  $2\rho$  intégrales distinctes de seconde espèce

$$(1) \quad I_i = \int \frac{Q_i(x, \bar{y}, z) dx}{f'_z} \quad (i = 1, 2, \dots, 2\rho)$$

---

<sup>(1)</sup> *Annales de l'École Normale*, 1901. On peut aussi consulter ma *Théorie des fonctions algébriques de deux variables*, t. II, Chap. IX, p. 231.

relatives à la courbe entre  $x$  et  $z$  :

$$(2) \quad f(x, \bar{y}, z) = 0$$

[ $f(x, y, z) = 0$  étant l'équation de la surface de degré  $m$ ], les  $Q_i$  étant des polynomes en  $x, y$  et  $z$ .

Une courbe algébrique  $C_h$  étant donnée sur la surface, on considère ensuite une intégrale de troisième espèce relative à la courbe (2), ayant pour points logarithmiques les points de  $C_h$ , correspondant à la valeur  $\bar{y}$ , avec la période logarithmique  $un$ , et en outre *un des points* à l'infini de la courbe (2). Désignons cette intégrale par  $J_h$ , et faisons successivement  $h = 1, 2, \dots, \lambda$ , en posant  $\lambda = \rho + 1$ . On peut déterminer les fonctions rationnelles  $a$  de  $y$ , et les constantes  $c$  de manière que les périodes, regardées comme fonctions de  $y$ , de l'intégrale relative à la courbe (2)

$$(3) \quad a_1 I_1 + a_2 I_2 + \dots + a_{2p} I_{2p} + c_1 J_1 + \dots + c_\lambda J_\lambda$$

ne dépendent pas de  $y$ . La considération du groupe de monodromie d'une certaine équation différentielle linéaire  $E$ , qui a joué un rôle essentiel dans toutes mes recherches sur les fonctions algébriques de deux variables, conduit à former le système d'équations du premier degré relatives aux constantes  $P$  et  $c$ ,

$$(4) \quad P_i = m_1^i P_1 + m_2^i P_2 + \dots + m_{2p}^i P_{2p} + c_1 \mu^i + c_2 \nu^i + \dots + c_\lambda \pi^i \quad (i=1, 2, \dots, 2p)$$

pour chacune des substitutions fondamentales du groupe de  $E$  (les  $m$ , ainsi que les  $\mu, \nu, \dots, \pi$ , sont des entiers). Si nous prenons pour courbes  $C_h$  les courbes  $C_1, C_2, \dots, C_\rho$  et  $\Gamma$ , l'ensemble de ces équations admettra une solution avec les constantes  $c$  non toutes nulles. On aura certainement  $c_\lambda \neq 0$ ; de plus, les rapports des  $c$  sont déterminés, car s'il y avait plus d'une arbitraire, on pourrait former une intégrale avec les *seules* courbes logarithmiques  $C_1, C_2, \dots, C_\rho$ . On peut donc supposer que les  $c$  sont des nombres entiers parfaitement déterminés.

Les équations donnant les fonctions *rationnelles*  $a_1, a_2, \dots, a_{2p}$  de  $y$  sont

$$(5) \quad a_1 \omega_1^i + a_2 \omega_2^i + \dots + a_{2p} \omega_{2p}^i + Y_i = P_i \quad (i=1, 2, \dots, 2p),$$

où l'on a posé

$$Y_i = c_1 v_i^1 + c_2 v_i^2 + \dots + c_\lambda v_i^\lambda,$$

les  $\omega$  et les  $v$  étant les périodes des I et des J, la signification des indices étant évidente.

L'expression (3) ainsi déterminée permet de former une intégrale de différentielle totale

$$\int R dx + S dy,$$

où R et S sont rationnelles en  $x, y$  et  $z$ , ayant les *seules* courbes logarithmiques  $C_1, C_2, \dots, C_\lambda$ . Elle peut avoir une autre ligne d'infini (non logarithmique), à savoir la courbe à l'infini de la surface.

Nous supposerons dans la suite que les cycles  $(1, 2), (3, 4), \dots, (2p - 1, 2p)$  sont les couples de cycles formant les rétrosections classiques sur la surface de Riemann relative à  $f(x, y, z) = 0$ .

Prenons la somme

$$\omega_1^h(Y_2 - P_2) - \omega_2^h(Y_1 - P_1) + \omega_3^h(Y_4 - P_4) - \omega_4^h(Y_3 - P_3) + \dots$$

qui correspond à une combinaison normale. On voit facilement, à cause des relations (4), que cette expression ne change pas, quand on effectue sur les  $\omega$  et les  $v$  les substitutions correspondant à une circulation de  $y$ ; ceci revient d'ailleurs au fait que les  $a$  sont des fonctions rationnelles de  $y$ :

2. Ces résultats antérieurs sommairement rappelés, supposons maintenant que *la surface donnée soit régulière*, c'est-à-dire qu'elle n'ait pas d'intégrales de différentielles totales *transcendantes* de seconde espèce, ou, ce qui revient au même, que tous ses cycles linéaires se ramènent à zéro, ce qui d'ailleurs est le cas général pour une surface algébrique. Ici les rapports des P et des  $c$  du paragraphe précédent sont entièrement déterminés; nous pouvons donc supposer que tous ces nombres sont des entiers. De plus, pour les surfaces régulières, les intégrales de première espèce de la courbe entre  $x$  et  $z$  représentée par l'équation  $f(x, y, z) = 0$ , peuvent être prises sous la forme

$$\int \frac{Q_i(x, y, z) dx}{f'_z} \quad (i = 1, 2, \dots, p),$$

les  $Q$  représentant des polynomes adjoints d'ordre  $m - 3$  de la surface envisagée.

On va donc supposer que les intégrales  $I_1, I_2, \dots, I_p$  précédemment envisagées sont de première espèce, les autres  $I_{p+1}, \dots, I_{2p}$  seront de seconde espèce.

Dans ces conditions, les

$$\omega_1^1, \omega_1^2, \dots, \omega_1^p$$

sont holomorphes pour  $y = \infty$ , et les développements commencent par un terme en  $\frac{1}{y}$ .

La combinaison formée plus haut

$$(6) \quad c_1 J_1 + c_2 J_2 + \dots + c_\lambda J_\lambda$$

qui est une intégrale de troisième espèce relative à la courbe (2), n'a d'autres infinis (et ce sont des infinis logarithmiques simples) que les points de rencontre de  $y = \bar{y}$  avec les courbes  $C$ . Pour  $y = b$  (les  $b$  correspondant aux plans tangents parallèles au plan des  $xz$ ), le genre de la courbe (2) diminue d'une unité; il y a en plus deux infinis logarithmiques nouveaux sur les deux branches de courbe passant par le nouveau point double que présente alors la courbe.

Le point  $y = b$  est un point singulier logarithmique pour les  $\omega$ , comme il l'est pour les  $\omega$ . Les  $\omega$  n'ont pas d'autres points singuliers que les  $b$ ; de plus, on peut supposer que, pour  $y = \infty$ , l'intégrale (6) se transforme en une intégrale parfaitement déterminée. Soit, en effet, la courbe gauche  $C$  mise sous la forme

$$A(x, y) = 0, \quad z = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)},$$

$P$  et  $Q$  étant de degrés  $\mu + 1$  et  $\mu$ . Soient en outre  $a(x, y)$ ,  $p(x, y)$ ,  $q(x, y)$  et  $\varphi(x, y, z)$  les termes de degré le plus élevé dans  $A$ ,  $P$ ,  $Q$  et  $f$ . On peut s'arranger de manière que l'intégrale  $J$  relative à  $C$  devienne, pour  $y = \infty$ , une intégrale relative à la courbe

$$\varphi(x', y, z') = 0$$

et ayant comme uniques infinis (logarithmiques) les points corres-

pendant à

$$a(x', 1) = 0, \quad z' = \frac{p(x', 1)}{q(x', 1)} \quad (\text{on a posé } x = x'y, \quad z = z'y),$$

cela pour chacune des courbes  $C_1, C_2, \dots, C_\lambda$ . Dans ces conditions, il arrive que les  $v$  sont holomorphes pour  $y = \infty$ .

3. Nous nous proposons maintenant d'étudier les  $2p$  équations (5), en  $a_1, a_2, \dots, a_{2p}$ .

*Je dis d'abord que  $a_{p+1} = \dots = a_{2p} = 0$ .*

Multiplications en effet ces équations respectivement par

$$-\omega_2^h, \quad +\omega_1^h, \quad -\omega_4^h, \quad +\omega_3^h, \quad \dots, \quad -\omega_{2p}^h, \quad +\omega_{2p-1}^h$$

et faisons la somme. En donnant successivement à  $h$  les valeurs  $1, 2, \dots, 2p$ , nous obtiendrons un système équivalent au premier. Or considérons les  $p$  premières de ces équations; elles seront homogènes et linéaires en  $a_{p+1}, \dots, a_{2p}$ , car les coefficients des autres  $a$  et les termes indépendants des  $a$  sont des fonctions uniformes de  $y$ , partout holomorphes, et dont le développement, dans le voisinage de  $y = \infty$ , commence par un terme en  $\frac{1}{y}$ ; tous ces coefficients et tous ces termes sont donc nuls. On tire de là immédiatement :

$$a_{p+1} = a_{p+2} = \dots = a_{2p} = 0.$$

Je dis maintenant que les  $p$  premiers  $a$  sont des fonctions linéaires et entières de  $y$ . On peut le voir en recourant à l'analyse de ma *Théorie des fonctions algébriques* (t. II, p. 428 et suiv.), analyse développée pour un autre but. La seule différence consiste en ce que, dans les équations (5), on a les termes en  $v$ , mais leur présence ne change rien aux raisonnements.

Il résulte de là que nous avons formé une intégrale de différentielle totale de troisième espèce avec une seule période (entière)

$$(7) \quad \int R dx + S dy,$$

ayant les courbes logarithmiques (simples)  $C_1, C_2, \dots, C_\lambda$ , c'est-à-dire devenant infinies d'une manière purement logarithmique suivant toutes ces courbes ou quelques-unes d'entre elles ( $C_\lambda$  étant certainement l'une d'elles), et n'ayant aucune autre courbe d'infini (polaire ou logarithmique).

On en conclut que l'expression

$$e^{2\pi i \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} R dx + S dy}$$

est une fonction rationnelle de  $(x, y, z)$ . Par suite, l'intégrale (7) est de la forme

$$A \log T(x, y, z),$$

$T$  étant rationnelle en  $(x, y, z)$  et  $A$  une constante.

4. Soit maintenant

$$(8) \quad I = \int P dx + Q dy$$

une intégrale de différentielle totale algébrique, absolument quelconque, correspondant à notre surface régulière  $f$ . Désignons ses courbes logarithmiques (qui peuvent être aussi en même temps des lignes d'infini non logarithmiques) par  $D_1, D_2, \dots, D_r$ . On peut former avec  $C_1, C_2, \dots, C_p$  et  $D_i$  une intégrale de la forme

$$(9) \quad A_i \log T_i(x, y, z),$$

la période logarithmique de (9) pour  $D_i$  étant égale à celle de l'intégrale (8). Si l'on fait la différence

$$(10) \quad I - \sum A_i \log T_i(x, y, z),$$

on aura une intégrale de différentielle totale qui ne pourra avoir d'autres courbes logarithmiques que les courbes  $C_1, C_2, \dots, C_p$ , ce qui est impossible. La différence (10) sera donc une intégrale de seconde espèce, c'est-à-dire, puisque la surface est régulière, une fonction rationnelle  $H(x, y, z)$ . On a donc

$$I = H(x, y, z) + \sum A_i \log T_i(x, y, z).$$

Par suite, *pour une surface algébrique RÉGULIÈRE, toute intégrale de différentielle totale est une expression algébrico-logarithmique.*

Nous retrouvons donc le théorème énoncé par M. Severi (1), et que l'éminent géomètre italien a établi par des considérations géométriques assez délicates. Il m'a paru intéressant de le déduire de l'analyse même qui m'avait conduit à la notion du nombre  $\rho$ , fondamental dans la théorie des courbes algébriques tracées sur une surface algébrique.

---

(1) F. SEVERI, *Sulla totalità delle curve algebriche tracciate sopra una superficie algebrica* (*Mathematische Annalen*, t. LXII, 1906).

