Annales scientifiques de l'É.N.S.

Georges Giraud

Sur les groupes des transformations semblables arithmétiques de certaines formes quadratiques quaternaires indéfinies et sur les fonctions hyperabéliennes correspondantes

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 33 (1916), p. 303-329

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1916_3_33__303_0>

SUR LES GROUPES

DES

TRANSFORMATIONS SEMBLABLES ARITHMÉTIQUES

DE CERTAINES

FORMES QUADRATIQUES QUATERNAIRES INDÉFINIES

ET SUR LES

FONCTIONS HYPERABÉLIENNES CORRESPONDANTES,

PAR M. GEORGES GIRAUD.

1. Le groupe des transformations semblables d'une forme quadratique quaternaire du type

$$u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 - u_4^2$$

est isomorphe au groupe formé des substitutions *droites*

$$\Xi = \frac{a\xi + b}{c\xi + d}, \qquad \mathrm{H} = \frac{\alpha\eta + \beta}{\gamma\eta + \delta},$$

et *gauches*

$$\Xi = \frac{a\eta + b}{c\eta + d}, \qquad \mathrm{H} = \frac{\alpha\xi + \beta}{\gamma\xi + \delta}.$$

Les groupes *discontinus* de substitutions de cette sorte, si l'on a, pour toutes leurs substitutions,

$$ad - bc = \alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$

ont été nommés par M. Picard groupes *hyperabéliens* (1). On obtient

(1) PICARD, *Sur les fonctions hyperabéliennes* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 4e série, t. I, 1885).

en particulier des groupes hyperabéliens en supposant que la forme quadratique dont on part est à coefficients entiers et en ne retenant que ses transformations semblables arithmétiques, c'est-à-dire à coefficients entiers.

Ces formes quaternaires peuvent se diviser en trois catégories :

1° Celles qui ne peuvent pas représenter zéro; ce cas a été étudié par M. Picard : le polyèdre fondamental du groupe hyperabélien correspondant n'a aucun point commun avec la frontière du domaine fondamental (domaine où ξ et η ont leurs coefficients de i positifs); nous ne reviendrons pas sur ce cas.

2° Celles qui peuvent représenter zéro, mais qui, égalées à zéro, sont les équations en coordonnées homogènes de quadriques sans génératrices rectilignes rationnelles, c'est-à-dire sans génératrices dont les deux équations soient à coefficients entiers. Le polyèdre fondamental du groupe hyperabélien correspondant possède un nombre fini de points réels ; il n'a, sur la frontière du domaine fondamental, aucun point imaginaire. Des cas particuliers de formes de cette sorte ont été étudiés par M. Bourget et par M. Cotty (1).

3° Celles de ces formes qui, égalées à zéro, sont les équations de quadriques pourvues de génératrices rationnelles; le polyèdre fondamental du groupe hyperabélien correspondant touche la frontière du domaine fondamental le long d'un nombre fini de portions de variétés à deux dimensions, comprenant un nombre fini de points réels. Un de ces groupes appartient à une catégorie considérée à un autre point de vue par M. Picard dans son Mémoire cité, la catégorie des groupes où chacune des deux variables complexes subit indépendamment de l'autre les transformations d'un groupe fuchsien : si chacun de ces groupes fuchsiens se réduit au groupe arithmétique, on a en effet le groupe hyperabélien correspondant à la forme $x_1x_4 + x_2x_3$. Si l'on admet les substitutions semblables de déterminant *moins un*, ce groupe

(1) Bourget, *Sur une classe particulière de groupes hyperabéliens* (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 1898, et *Thèses de la Faculté des Sciences de Paris*, 1898). — Cotty, *Les fonctions abéliennes et la théorie des nombres* (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 1912, et *Thèses de la Faculté des Sciences de Paris*, 1913).

hyperabélien comprend aussi des substitutions gauches, obtenues en faisant suivre une des substitutions droites que nous venons d'indiquer de la substitution gauche

$$\Xi = \eta, \qquad \mathrm{H} = \xi.$$

Dans les trois cas, le polyèdre fondamental, qu'on peut construire par la méthode de réduction continuelle, n'a qu'un nombre fini de faces.

Enfin, dans les trois cas, *trois fonctions hyperabéliennes quelconques* correspondant au groupe considéré *sont liées par une relation algébrique*. Ce fait a été reconnu pour le premier cas d'une manière générale par M. Picard; M. Bourget et M. Cotty l'ont également reconnu pour les formes qu'ils ont considérées et qui appartiennent au deuxième cas.

2. Soit donc $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ une forme quaternaire, décomposable en deux carrés positifs et deux négatifs, et soient Δ son discriminant et $F(\lambda, \mu, \nu, \pi)$ sa forme adjointe. La forme *définie* dont, conformément à la méthode d'Hermite, nous ferons la réduction continuelle est

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) = &-\frac{\lambda_0 \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} + \mu_0 \dfrac{\partial F}{\partial \mu} + \nu_0 \dfrac{\partial F}{\partial \nu} + \pi_0 \dfrac{\partial F}{\partial \pi}}{4\Delta} f(x_1, x_2, x_3, x_4) \\ &+ 2 \operatorname{norme}(\lambda x_1 + \mu x_2 + \nu x_3 + \pi x_4), \end{aligned} \right.$$

où

$$(2) \qquad F(\lambda, \mu, \nu, \pi) = 0,$$

$$(3) \qquad \lambda_0 \frac{\partial F}{\partial \lambda} + \mu_0 \frac{\partial F}{\partial \mu} + \nu_0 \frac{\partial F}{\partial \nu} + \pi_0 \frac{\partial F}{\partial \pi} < 0.$$

Nous convenons de distinguer toujours deux nombres imaginaires conjugués au moyen de l'indice zéro donné à l'un d'eux.

3. Revenons d'abord sur ce qui correspond à la condition (3) dans l'espace hyperabélien; c'est un calcul qu'a déjà fait M. Picard.

Nous pouvons par une transformation linéaire sur x_1, x_2, x_3, x_4

mettre f sous la forme

$$2X_1X_4 + 2X_2X_3;$$

alors, par la substitution adjointe, F devient

$$2\Lambda\Pi + 2MN;$$

si nous posons

$$\xi = \frac{M}{\Lambda}, \qquad \eta = -\frac{N}{\Lambda},$$

la condition (2) prouve que

$$\xi\eta = -\frac{MN}{\Lambda^2} = \frac{\Pi}{\Lambda};$$

la condition (3) devient alors

$$\Lambda\Pi_0 + \Lambda_0\Pi + MN_0 + M_0N < 0,$$

ou bien

$$\Lambda\Lambda_0(\xi - \xi_0)(\eta - \eta_0) < 0.$$

Nous avons donc, dans l'espace hyperabélien où les coordonnées sont ξ et η, un domaine composé de points où les coefficients de i dans ξ et η sont de même signe ; nous ne considérerons que les substitutions qui changent en lui-même le domaine où *ces coefficients sont tous deux positifs* : ce sera le *domaine fondamental*.

4. On sait que, par les substitutions semblables de f, ξ et η subissent des transformations hyperabéliennes droites

$$\Xi = \frac{a\xi + b}{c\xi + d}, \qquad \mathrm{H} = \frac{\alpha\eta + \beta}{\gamma\eta + \delta} \qquad (ad - bc = \alpha\delta - \beta\gamma = 1), \tag{4}$$

ou gauches

$$\Xi = \frac{a\eta + b}{c\eta + d}, \qquad \mathrm{H} = \frac{\alpha\xi + \beta}{\gamma\eta + \delta} \qquad (ad - bc = \alpha\delta - \beta\gamma = 1). \tag{5}$$

Aux premières correspondent des substitutions semblables de f de déterminant

$$\begin{vmatrix} d\delta & c\delta & -d\gamma & c\gamma \\ b\delta & a\delta & -b\gamma & a\gamma \\ -d\beta & -c\beta & d\alpha & -c\alpha \\ b\beta & a\beta & -b\alpha & a\alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d & c & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -d & -c \\ 0 & 0 & b & a \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \delta & 0 & \beta & 0 \\ 0 & \delta & 0 & \beta \\ -\gamma & 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & \gamma & 0 & \alpha \end{vmatrix} \tag{6}$$
$$= (ad - bc)^2(\alpha\delta - \beta\gamma)^2 = 1.$$

Aux substitutions gauches, au contraire, correspondent des substitutions semblables de déterminant *moins un*. Comme toutes les substitutions gauches d'un groupe s'obtiennent en faisant suivre, ou précéder, l'une d'elles de toutes les substitutions droites successivement, nous nous bornerons tout d'abord dans la réduction continuelle aux substitutions droites.

Il suffit pour cela de se borner aux substitutions semblables de déterminant *un :* celles d'entre elles qui conservent le domaine fondamental donnent des substitutions hyperabéliennes droites.

5. Supposons que la forme φ soit réduite pour certaines valeurs de λ, μ, ν, π; et supposons que les points de la quadrique (2) pour lesquels elle est réduite aient pour point d'accumulation un certain point réel de la même quadrique. Les conditions de réduction étant celles de MM. Korkine et Zolotareff, nous allons démontrer que ce point a pour coordonnées (0, 0, 0, 1), c'est-à-dire que F n'a pas de terme en π^2.

En effet, décomposons φ en carrés de cette façon :

$$\begin{aligned}\varphi = {} & \mu_1(x_1+\varepsilon_{1,2}x_2+\varepsilon_{1,3}x_3+\varepsilon_{1,4}x_4)^2 \\ & +\mu_2(x_2+\varepsilon_{2,3}x_3+\varepsilon_{2,4}x_4)^2+\mu_3(x_3+\varepsilon_{3,4}x_4)^2+\mu_4 x_4^2.\end{aligned}$$

Nous avons

$$\frac{1}{2^4}\,\frac{\mathrm{D}\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1},\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_2},\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_3},\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_4}\right)}{\mathrm{D}(x_1,x_2,x_3,x_4)}=\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4\geqq\left(\frac{3}{4}\right)^6\mu_1^4.$$

Or, pour le point réel, φ est carré parfait; donc si λ, μ, ν, π tendent vers les coordonnées de ce point (coordonnées supposées choisies complètement, sans facteur commun arbitraire), le discriminant tend vers zéro; donc μ_1 tend vers zéro. Donc, pour ce point réel, φ ne dépend plus que de x_1, c'est-à-dire que

$$\lambda = 0.$$

Si nous recommençons à faire tendre λ, μ, ν, π vers les coordonnées du point réel, nous voyons que

$$\frac{1}{2^3}\frac{D\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}, \frac{\partial\varphi}{\partial x_3}, \frac{\partial\varphi}{\partial x_4}\right)}{D(x_2, x_3, x_4)} = \mu_2\mu_3\mu_4 + \varepsilon,$$

ε étant positif; mais le premier membre tend encore vers zéro; il en est donc de même de $\mu_2\mu_3\mu_4$; et comme

$$\mu_2\mu_3\mu_4 \geqq \left(\frac{3}{4}\right)^3 \mu_2^3$$

μ_2 tend aussi vers zéro. Donc, pour le point réel, φ ne dépend pas non plus de x_2, et l'on a

$$\mu = 0.$$

On démontrerait de même que

$$\nu = 0.$$

Le point réel est donc bien $(0, 0, 0, 1)$. Comme il est rationnel, cela prouve que F et f peuvent représenter zéro.

6. Supposons maintenant que les points pour lesquels φ est réduite aient pour point d'accumulation un point imaginaire de la surface

$$\lambda_0\frac{\partial F}{\partial\lambda} + \mu_0\frac{\partial F}{\partial\mu} + \nu_0\frac{\partial F}{\partial\nu} + \pi_0\frac{\partial F}{\partial\pi} = 0.$$

Nous allons voir que la quadrique (2) admet la génératrice rectiligne rationnelle

$$\lambda = \mu = 0,$$

et que le point imaginaire est sur cette génératrice.

En effet, pour ce point imaginaire, φ se réduit à une somme de deux carrés, ce qui nous montre tout d'abord que, pour ce point,

$$\lambda = \mu = 0.$$

Soit

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} a_{i,j}x_ix_j,$$

et soit $A_{i,j}$ le coefficient de F qui correspond à $a_{i,j}$. Si $(0, 0, \nu, \pi)$ sont les coordonnées de notre point, on a

$$\begin{aligned} A_{3,3}\nu^2 &+ 2A_{3,4}\nu\pi &&+ A_{4,4}\pi^2 = 0, \\ A_{3,3}\nu_0^2 &+ 2A_{3,4}\nu_0\pi_0 &&+ A_{4,4}\pi_0^2 = 0, \\ A_{3,3}\nu\nu_0 &+ A_{3,4}(\nu\pi_0 + \nu_0\pi) &&+ A_{4,4}\pi\pi_0 = 0; \end{aligned}$$

comme $\nu\pi_0 - \nu_0\pi$ n'est pas nul, ces trois équations entraînent

$$A_{3,3} = A_{3,4} = A_{4,4} = 0.$$

Donc la quadrique (2) admet bien la génératrice rationnelle $\lambda = \mu = 0$; par suite $f = 0$ admet aussi des génératrices rationnelles.

7. Ceci nous entraîne à distinguer dans quel cas une quadrique qui a des points rationnels a aussi des génératrices rationnelles.

Si la quadrique passe par un point rationnel, nous pouvons, par une substitution linéaire à coefficients entiers et de déterminant *un* faire en sorte que ce point soit (0, 0, 0, 1); l'équation devient alors

$$(ax_1 + bx_2 + cx_3)x_4 + f_1(x_1, x_2, x_3) = 0.$$

Une nouvelle transformation portant sur x_1, x_2, x_3 seuls permet de ramener cette équation à la forme

$$dx_1x_4 + f_2(x_1, x_2, x_3) = 0,$$

où d est le plus grand commun diviseur de a, b, c. Mettons en évidence les termes où figure x_1, l'équation devient

$$(7) \qquad f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1(ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4) + \psi(x_2, x_3) = 0,$$

équation où a, b, c n'ont pas le même sens que plus haut.

Supposons que la quadrique ait une génératrice rationnelle; prenons sur cette génératrice un point rationnel, et mettons l'équation de la quadrique sous la forme (7), le point rationnel venant en (0, 0, 0, 1).

Par le point (0, 0, 0, 1) de la quadrique (7) passe une génératrice rationnelle; les équations de cette génératrice ne contiennent évidemment pas x_4. D'autre part, on ne peut pas, des équations de la génératrice, tirer x_2 et x_3 en fonction de x_1, sinon en substituant les valeurs trouvées dans l'équation (7), il y aurait un terme en $x_1 x_4$ non identiquement nul. Alors on peut, par exemple, tirer de ces équations x_1 et x_3 en fonction de x_2; la valeur de x_1 est forcément

$$x_1 = 0,$$

car si

$$x_1 = h x_2, \qquad h \neq 0,$$

on pourrait avoir x_2 et x_3 en fonction de x_1. Les équations de la génératrice sont donc

$$x_1 = 0, \qquad x_3 = \alpha x_2,$$

où α est rationnel; par suite

$$\psi(1, \alpha) = 0;$$

donc $\psi(x_2, x_3)$ peut représenter zéro.

Réciproquement, si cette forme peut représenter zéro, et si α et β sont les racines de l'équation

$$\psi(1, x) = 0,$$

les deux génératrices qui passent par le point (0, 0, 0, 1), savoir

$$x_1 = 0, \qquad x_3 = \alpha x_2,$$

et

$$x_1 = 0, \qquad x_3 = \beta x_2,$$

sont toutes deux rationnelles. Comme elles sont de systèmes différents, cela nous montre en même temps que, si l'un des systèmes de génératrices compte une génératrice rationnelle, l'autre en comprend également une.

Montrons maintenant que, si la quadrique contient des génératrices rationnelles, il en passe une par chaque point rationnel. Si, en effet, ce point rationnel $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ est tel que

$$\xi_1 = 0,$$

il est sur la génératrice rationnelle

$$x_1 = 0, \qquad \frac{x_2}{\xi_2} = \frac{x_3}{\xi_3}.$$

Si maintenant

$$\xi_1 \neq 0,$$

il est sur la génératrice rationnelle

$$(8)\qquad \begin{cases} x_2 = \dfrac{\xi_2}{\xi_1} x_1 + b_2 t, \\ x_3 = \dfrac{\xi_3}{\xi_1} x_1 + b_3 t, \\ x_4 = \dfrac{\xi_4}{\xi_1} x_1 + b_4 t, \end{cases}$$

où t est un paramètre; b_2 et b_3 sont des nombres rationnels tels que

$$\psi(b_2, b_3) = 0;$$

b_4 est pris de façon à annuler le coefficient de $x_1 t$ après substitution des valeurs (8) dans l'équation (7): cela donne pour lui aussi une valeur rationnelle.

Donc les deux génératrices qui passent par un point rationnel sont rationnelles.

De plus, la condition nécessaire et suffisante pour que la quadrique (7) ait des génératrices rationnelles est que la forme $\psi(x_2, x_3)$ puisse représenter zéro.

Quant à reconnaître si l'on peut mettre l'équation de la quadrique sous la forme (7), c'est-à-dire si la quadrique contient des points rationnels, cela peut se faire au moyen d'une méthode, convenant à un problème beaucoup plus général, donnée par M. Jordan [1].

8. Étudions maintenant le groupe des substitutions semblables de la formule (7) qui n'altèrent pas le point (0, 0, 0, 1). Nous formerons ensuite le polyèdre fondamental correspondant dans l'espace hyperabélien.

Soient

$$(9)\qquad X_i = a_i x_1 + b_i x_2 + c_i x_3 + d_i x_4 \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

---

(1) JORDAN, *Théorie arithmétique des formes quadratiques* (*Journal de l'École Polytechnique*, cahier LI, 1882).

les formules de transformation. Il est tout d'abord évident que

$$d_1 = d_2 = d_3 = 0, \qquad d_4 = \pm 1;$$

comme nous pouvons changer les signes de tous les coefficients à la fois sans changer la substitution hyperabéliennne correspondante, nous prendrons

$$d_4 = 1.$$

Ensuite, si nous considérons les termes qui contiennent a_4, nous trouvons

$$b_1 = c_1 = 0, \qquad a_1 = d_4 = 1.$$

Par suite

$$\left\{\begin{array}{l} X_2 = b_2 x_2 + c_2 x_3, \\ X_3 = b_3 x_2 + c_3 x_3 \end{array}\right. \tag{10}$$

est une transformation semblable de la forme $\psi(x_2, x_3)$, de déterminant *un*, si, comme nous le supposons, le déterminant de la transformation (9) est lui-même égale à *un*.

Si la forme ψ ne peut pas représenter zéro, la transformation (10) est donc une puissance d'une certaine transformation fixe.

Si la forme ψ peut représenter zéro, il faut prendre seulement

$$b_3 = c_2 = 0, \qquad b_2 = c_3 = \pm 1;$$

comme on veut que le domaine fondamental soit conservé, il faut même se borner au cas où

$$b_2 = c_3 = 1.$$

Donnons-nous maintenant une transformation (10) de la forme ψ, et cherchons à déterminer a_2, a_3, a_4, b_4, c_4 de manière à avoir une transformation telle que (9). Si a_2 et a_3 sont regardés comme donnés, on trouve a_4, b_4, c_4 par l'identification des termes restants : ce sont des fractions de dénominateur d; ces fractions se réduiront à des entiers seulement dans le cas où a_2 et a_3 satisfont à certaines congruences de module d; ces congruences peuvent n'être compatibles que si b_2, c_2, b_3, c_3 satisfont eux-mêmes à certaines congruences suivant le même module; ces dernières congruences sont en particulier satisfaites si

$$b_2 \equiv c_3 \equiv 1, \qquad b_3 \equiv c_2 \equiv 0 \qquad (\operatorname{mod} d),$$

comme le montre le cas particulier de la transformation unité. Il y a donc des transformations (10) pour lesquelles ces conditions sont remplies; et, comme le produit de deux de ces transformations en est une troisième, toutes ces transformations (10) utiles sont des puissances de l'une d'entre elles.

Supposons maintenant que nous ayons une transformation (9) correspondant à une transformation (10) donnée; nous aurons toutes les autres en faisant suivre ou précéder celle-ci d'une autre où

$$b_2 = c_3 = 1, \qquad b_2 = c_2 = 0. \tag{11}$$

Nous allons déterminer toutes ces dernières transformations; cette détermination est indépendante du fait que ψ peut ou non représenter zéro. Nous avons déjà remarqué que si l'on regarde a_2 et a_3 comme donnés, les valeurs de a_4, b_4, c_4 en résultent et sont des fractions de dénominateur d; il s'agit de choisir a_2 et a_3 de manière que ces fractions se réduisent à des entiers : c'est possible, car le but est atteint en particulier si a_2 et a_3 sont divisibles par d. Or le produit de deux des transformations dont nous nous occupons en ce moment en est une troisième; et si, dans les facteurs, a_2 et a_3 ont respectivement les valeurs a'_2, a'_3 et a''_2, a''_3, ils auront dans le produit les valeurs $a'_2 + a''_2$ et $a'_3 + a''_3$. Donc, toutes les valeurs possibles de a_2 sont des multiples de l'une d'entre elles a'_2, à laquelle correspond pour a_3 la valeur a'_3; si $a_2 = 0$, toutes les valeurs possibles de a_3 sont des multiples de l'une d'elles a''_3; alors tous les systèmes possibles de valeurs de a_2 et de a_3 sont donnés par les formules

$$\left\{\begin{aligned} a_2 &= \alpha a'_2, \\ a_3 &= \alpha a'_3 + \beta a''_3, \end{aligned}\right. \tag{12}$$

où α et β sont des entiers arbitraires; a'_2 et a''_3 peuvent être supposés positifs : ce sont des diviseurs de d.

Nous voyons donc que, si ψ peut représenter zéro, toutes les transformations semblables de point double (0, 0, 0, 1) sont des produits de puissances de deux d'entre elles, d'ailleurs permutables, satisfaisant aux conditions (11). Si ψ ne peut pas représenter zéro il faut faire précéder (ou suivre) ces produits d'une puissance arbitraire d'une troisième substitution.

Que sont les substitutions hyperabéliennes correspondantes ? Si

$$\psi(x_2, x_3) = (\mathrm{A}x_2 + \mathrm{B}x_3)(\mathrm{A}'x_2 + \mathrm{B}'x_3),$$

nous pouvons poser

$$\xi = \frac{\mathrm{A}x_2 + \mathrm{B}x_3}{x_1}; \qquad \eta = -\frac{\mathrm{A}'x_2 + \mathrm{B}'x_3}{x_1};$$

alors, aux substitutions qui satisfont aux conditions (11) répondent des transformations

$$\Xi = \xi + h'', \qquad \mathrm{H} = \eta + k'', \tag{13}$$

h'' et k'' étant certaines constantes. Quant aux autres transformations, qui existent si ψ ne peut pas représenter zéro, elles sont des puissances d'une transformation

$$\Xi = h\xi + h', \qquad \mathrm{H} = k\eta + k', \tag{14}$$

où h, k, h', k' sont des constantes; h et k sont positifs, et de plus

$$hk = 1.$$

Le polyèdre fondamental se détermine immédiatement : les transformations (13) permettent toujours de faire en sorte que

$$\left|\frac{x_2}{x_1} + \frac{x_{20}}{x_{10}}\right| < a'_2, \qquad \left|\frac{x_3}{x_1} + \frac{x_{30}}{x_{10}}\right| < a''_3,$$

a'_2 et a''_3 étant les entiers des formules (12); si ψ ne peut pas représenter zéro, on aura pu s'arranger préalablement, au moyen de la transformation (14), pour que

$$h < \frac{\eta - \eta_0}{\xi - \xi_0} < k,$$

en supposant $h < k$. Tel est le polyèdre fondamental.

En quels points ce polyèdre atteint-il la frontière du domaine fondamental ? En nous bornant aux points à l'infini, nous trouvons le seul point (0, 0, 0, 1) s'il n'y a pas de génératrices rationnelles; il faut y ajouter une portion des deux génératrices qui passent par ce point, si elles sont rationnelles.

9. Supposons maintenant que nous considérons une quadrique pourvue de génératrices rationnelles; étudions le groupe des substitutions semblables arithmétiques qui font revenir sur elle-même une génératrice rationnelle donnée.

Par un changement linéaire de variables, à coefficients entiers et de déterminant *un*, on peut mettre la génératrice donnée sous la forme

$$x_1 = x_2 = 0, \tag{15}$$

et la quadrique donnée sous la forme

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1(ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4) + x_2(b'x_2 + c'x_3) = 0. \tag{16}$$

Pour ξ et η, nous pourrons prendre les valeurs

$$\xi = \frac{x_2}{x_1}, \qquad \eta = -\frac{b'x_2 + c'x_3}{x_1}.$$

Une des transformations cherchées étant donnée par les formules (9), on voit que

$$c_1 = d_1 = c_2 = d_2 = 0;$$

par suite,

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 = \pm 1;$$

mais, comme le signe du coefficient de i dans ξ ne doit pas changer,

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 = 1.$$

En identifiant les coefficients de $x_1 x_3$, $x_1 x_4$, $x_2 x_3$, $x_2 x_4$, nous trouvons que

$$\begin{aligned} (a_1 c + a_2 c')c_3 + a_1 d c_4 &= c, \\ (b_1 c + b_2 c')c_3 + b_1 d c_4 &= c', \\ (a_1 c + a_2 c')d_3 + a_1 d d_4 &= d, \\ (b_1 c + b_2 c')d_3 + b_1 d d_4 &= 0; \end{aligned}$$

donc

$$c_3 = \frac{a_1 c' - b_1 c}{c'}, \qquad c_4 = \frac{-(a_1 c + a_2 c')c' + (b_1 c + b_2 c')c}{c' d},$$

$$d_3 = -\frac{b_1 d}{c'}, \qquad d_4 = \frac{b_1 c + b_2 c'}{c'},$$

d'où

$$c_3 d_4 - c_4 d_3 = 1.$$

Ces valeurs de c_3, c_4, d_3, d_4 seront entières si a_1, a_2, b_1, b_2 satisfont à certaines congruences suivant le module $c'd$, et en particulier si

$$(17) \qquad a_1 \equiv b_2 \equiv 1, \qquad a_2 \equiv b_1 \equiv 0 \qquad (\bmod c'd).$$

Restent à déterminer a_3, a_4, b_3, b_4; nous les obtiendrons en identifiant les termes restants, qui sont en x_1^2, $x_1 x_2$, x_2^2 :

$$(18) \qquad \left\{\begin{array}{l} (a_1 c + a_2 c')a_3 + a_1 d a_4 \hfill = \mathrm{A}, \\ (b_1 c + b_2 c')a_3 + b_1 d a_4 + (a_1 c + a_2 c')b_3 + a_1 d b_4 = \mathrm{B}, \\ \hfill (b_1 c + b_2 c')b_3 + b_1 d b_4 = \mathrm{C}; \end{array}\right.$$

A, B, C sont des fonctions de a_1, a_2, b_1, b_2 dont les coefficients ne contiennent aucun dénominateur. Les déterminants formés avec les coefficients des inconnues ont pour plus grand commun diviseur $c'd\delta$, δ étant le plus grand commun diviseur de c, c', d. Comme les mineurs de ces déterminants sont tous divisibles par δ (et même par δ^2), nous trouvons que A, B, C, donc a_1, a_2, b_1, b_2, doivent satisfaire à certaines congruences suivant le module $c'd$; ces congruences sont en particulier satisfaites par les relations (17), auxquelles répond la transformation unité.

ξ subit donc les transformations d'un certain sous-groupe à congruences du groupe fuchsien arithmétique.

Il nous reste, suivant le procédé déjà employé, à voir comment toutes les transformations qui changent ξ de la même façon se déduisent de l'une d'elles : il est clair qu'elles s'en déduisent en faisant suivre ou précéder celle-ci d'une substitution où

$$a_1 = b_2 = 1, \qquad a_2 = b_1 = 0,$$

et où par conséquent

$$c_3 = d_4 = 1, \qquad c_4 = d_3 = 0.$$

Nous avons les coefficients restants au moyen des équations

$$\begin{array}{llll} c\, a_3 + d a_4 & & & = 0, \\ c' a_3 & + c\, b_3 + d b_4 & & = 0, \\ & c' b_3 & & = 0. \end{array}$$

a_3, a_4, b_3, b_4 sont donc donnés par les formules

$$a_3 = \lambda \frac{d}{\delta}, \qquad a_4 = -\lambda \frac{c}{\delta}, \qquad b_3 = 0, \qquad b_4 = -\lambda \frac{c'}{\delta},$$

où δ est le plus grand commun diviseur de c, c', d, et λ un entier arbitraire ; ce sont des puissances de la transformation

$$\Xi = \xi, \qquad \mathrm{H} = \eta + \frac{d}{\delta}.$$

Les transformations générales du groupe sont données par les formules

$$\Xi = \frac{b_1 \xi + a_1}{b_2 \xi + a_2}, \qquad \mathrm{H} = \eta - \frac{a b_1 + b' a_2 + c' a_3}{a_1}.$$

Pour former le polyèdre fondamental, on peut d'abord disposer de a_1, b_1, a_2, b_2 de manière à amener ξ dans le polygone fondamental du sous-groupe du groupe fuchsien arithmétique dont nous avons parlé ; ensuite on disposera de a_3 de manière à amener la partie réelle de η à être inférieure en valeur absolue à $\frac{c'd}{2\delta}$.

Remarquons que la quantité dont augmente η est entière, car des relations (18) on tire, en éliminant a_4 et b_4,

$$\frac{a b_1 + b' a_2 + c' a_3}{a_1} = \frac{b b_1 + b' b_2 + c' b_3 - b' a_1}{b_1},$$

et a_1 et b_1 sont premiers entre eux.

10. Arrivons maintenant à la formation du polyèdre fondamental du groupe de toutes les transformations semblables de la forme donnée qui correspondent à des substitutions hyperabéliennes. Nous nous bornerons même d'abord au cas des substitutions droites.

Nous dirons que deux points rationnels de la quadrique $f = 0$ appartienent à la même classe s'ils sont transformés l'un de l'autre par une substitution du groupe. S'il y a des génératrices rationnelles, nous dirons de même que deux d'entre elles appartiennent à la même classe si elles sont transformées l'une de l'autre par une substitution du groupe.

Le nombre des classes de points rationnels est fini. En effet, si deux points appartiennent à la même classe, on peut mettre la quadrique sous la même forme (7), en amenant à volonté l'un ou l'autre de ces points en (0, 0, 0, 1); et réciproquement si, en amenant l'un ou l'autre de ces points en (0, 0, 0, 1), on peut avoir la même forme (7), ces points appartiennent à la même classe. Ainsi les valeurs de a, b, c, d et les coefficients de ψ caractérisent une classe de points rationnels. Or, le discriminant de f est égal à $-d^2\delta$, δ étant le discriminant de ψ. Il y a donc un nombre fini de valeurs de d possibles. Puis a, b, c peuvent être supposés tous inférieurs à $\left|\frac{d}{2}\right|$ en valeur absolue : ils n'auront donc aussi qu'un nombre fini de valeurs possibles. Enfin, ψ peut être une forme réduite : pour chaque valeur de d, cela fait également un nombre fini de formes ψ possibles : notre assertion est donc justifiée.

On peut démontrer d'une manière analogue que le nombre des classes de génératrices rationnelles qui existent sur une quadrique donnée est fini.

11. Nous formerons le polyèdre fondamental par la réduction continuelle de la forme φ de la formule (1). Les conditions de réduction adoptées sont celles de MM. Korkine et Zolotareff, complétées toutefois par certaines conditions supplémentaires destinées à rendre la réduite unique.

Si l'on écrit φ, en le décomposant en carrés,

$$(19)\quad \begin{aligned}\varphi = \mu_1(x_1+\varepsilon_{1,2}x_2+\varepsilon_{1,3}x_3+\varepsilon_{1,4}x_4)^2+\mu_2(x_2+\varepsilon_{2,3}x_3+\varepsilon_{2,4}x_4)^2\\ +\mu_3(x_3+\varepsilon_{3,4}x_4)^2+\mu_4 x_4^2,\end{aligned}$$

les géomètres russes ont d'abord montré [1] que, parmi les formes équivalentes à φ, il y en a une qui est telle que μ_1 soit le plus petit nombre représenté par la forme, μ_2 le plus petit qui soit représenté par la somme des trois derniers carrés, μ_3 le plus petit qui soit représenté par la somme des deux derniers. Amenant en outre les ε à la

(1) Korkine et Zolotareff, *Sur les formes quadratiques* (*Mathematische Annalen*, t. VI, 1873, p. 366).

plus petite valeur absolue possible, MM. Korkine et Zolotareff ont montré que ces coefficients satisfont alors aux conditions

$$(20)\qquad \mu_2 \geqq \frac{3}{4}\mu_1 \qquad \mu_3 \geqq \frac{3}{4}\mu_2, \qquad \mu_4 \geqq \frac{3}{4}\mu_3, \qquad -\frac{1}{2} < \varepsilon_{i,j} \leqq +\frac{1}{2};$$

telles sont les conditions de réduction qu'ils ont données. Mais ces conditions peuvent être remplies par plusieurs formes équivalentes à φ, en nombre fini. Nous avons pour but d'ajouter d'autres conditions telles que la forme φ soit une de celles dont MM. Korkine et Zolotareff ont d'abord montré l'existence; sauf dans des cas exceptionnels, on pourra encore faire sur ces formes uniquement les substitutions qui consistent à changer les signes de deux des variables; nous choisirons enfin parmi les formes qui en résultent.

Voyons d'abord comment nous pourrons faire en sorte que μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 soient bien les nombres dont il vient d'être question. D'après les conditions (20),

$$\mu_3 \geqq \left(\frac{3}{4}\right)^2 \mu_1, \qquad \mu_4 \geqq \left(\frac{3}{4}\right)^3 \mu_1.$$

Donc, si $\varphi \leqq \mu_1$,

$$|x_4| \leqq \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{3}{2}},$$

et, si x_4 est entier,

$$|x_4| \leqq 1.$$

Mais alors

$$|x_3 + \varepsilon_{3,4} x_4| \geqq |x_3| - \frac{1}{2};$$

donc

$$|x_3| \leqq \frac{1}{2} + \frac{4}{3},$$

et, x_3 étant entier,

$$|x_3| \leqq 1.$$

On trouve de même

$$|x_2| \leqq 2, \qquad |x_1| \leqq 3.$$

Ainsi, μ_1 sera le minimum de φ s'il est inférieur ou égal à tous les nombres représentés par φ pour

$$|x_4| \leqq 1, \qquad |x_3| \leqq 1, \qquad |x_2| \leqq 2, \qquad |x_1| \leqq 3.$$

De même, μ_2 sera le minimum de la somme des trois derniers termes s'il est au plus égal à tous les nombres représentés par cette somme pour

$$|x_4| \leqq 1, \qquad |x_3| \leqq 1, \qquad |x_2| \leqq 2.$$

Enfin, pour la somme des deux derniers termes, il suffit de prendre

$$|x_4| \leqq 1, \qquad |x_3| \leqq 1,$$

comme il est classique.

Cela fait un nombre fini d'inégalités à ajouter aux inégalités (20).

Comme nous pouvons encore changer les signes de deux variables, nous pouvons profiter de cette faculté rendre $\varepsilon_{1,2}$ et $\varepsilon_{2,3}$ positifs. Si cela donnait à quelques-uns des autres ε la valeur $-\frac{1}{2}$, on voit facilement qu'on pourrait les ramener dans les limites indiquées, sans déranger $\varepsilon_{1,2}$ ni $\varepsilon_{2,3}$.

La forme réduite est bien déterminée par ces conditions, sauf dans certains cas limites. On peut évidemment, dans chacun des cas limites, en nombre fini, qui peuvent se présenter, écrire d'autres systèmes d'inégalités en nombre fini rendant encore la réduite unique. Ces cas ne se présenteront pas dans ce qui suivra.

12. Prenons d'abord le cas où la quadrique $f = 0$ a des points rationnels, mais pas de génératrices rationnelles.

L'essentiel est de démontrer qu'il est inutile, pour trouver les faces du polyèdre fondamental, de donner à λ, μ, ν, π des valeurs telles que le coefficient de x_1^2 dans φ [formule (1)] tombe au-dessous d'une certaine limite fixe : on va voir qu'on peut maintenir ce coefficient égal au moins à $\frac{1}{\Delta}$, Δ étant le discriminant de f.

Tout d'abord si ce coefficient tombe au-dessous de *un*, f n'a pas de terme en x_1^2. Par un changement de variables portant uniquement sur x_2, x_3, x_4, nous pouvons mettre f sous la forme

$$(21) \quad f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2ax_1 + 2bx_2 + 2cx_3 + dx_4)x_4 + \psi(x_2, x_3);$$

pour plus de commodité, nous supposons que les coefficients des termes rectangles sont pairs. La transformation adjointe n'a pas changé λ, ni par suite le coefficient de x_1^2 dans φ, qui est $2\lambda^2$; la forme adjointe devient

$$(22) \qquad F(\lambda, \mu, \nu, \pi) = \lambda(A\lambda + 2B\mu + 2C\nu - 2a\delta\pi) - a^2\Psi(\mu, \nu),$$

δ étant le discriminant de ψ, et Ψ sa forme adjointe. Le discriminant de f est

$$\Delta = -a^2\delta.$$

Nous supposerons, comme il est légitime, qu'on a non seulement

$$(23) \qquad F(\lambda, \mu, \nu, \pi) = 0,$$

mais encore

$$(24) \qquad \lambda_0\frac{\partial F}{\partial\lambda} + \mu_0\frac{\partial F}{\partial\mu} + \nu_0\frac{\partial F}{\partial\nu} + \pi_0\frac{\partial F}{\partial\pi} = -4\Delta.$$

Interprétons ces conditions; nous allons supposer, comme il est encore légitime, que λ est réel et positif; nous désignerons par $\mathcal{R}\mu$ et $\mathcal{J}\mu$ la partie réelle et le coefficient de i dans μ, et de même pour les autres lettres. La condition (23) entraîne en particulier

$$(25) \qquad \begin{aligned} &A\lambda^2 + 2B\lambda\mathcal{R}\mu + 2C\lambda\mathcal{R}\nu - 2a\delta\lambda\mathcal{R}\pi \\ &\quad - a^2\Psi(\mathcal{R}\mu, \mathcal{R}\nu) + a^2\Psi(\mathcal{J}\mu, \mathcal{J}\nu) = 0, \end{aligned}$$

et la condition (24) s'écrit aussi

$$(26) \qquad \begin{aligned} &A\lambda^2 + 2B\lambda\mathcal{R}\mu + 2C\lambda\mathcal{R}\nu - 2a\delta\lambda\mathcal{R}\pi \\ &\quad - a^2\Psi(\mathcal{R}\mu, \mathcal{R}\nu) - a^2\Psi(\mathcal{J}\mu, \mathcal{J}\nu) = -2\Delta; \end{aligned}$$

elle équivaut donc à

$$(27) \qquad \Psi(\mathcal{J}\mu, \mathcal{J}\nu) = \frac{\Delta}{a^2} = -\delta.$$

Si nous mettons φ sous la forme (19), nous trouvons que

$$\mu_1 = 2\lambda^2, \qquad \varepsilon_{1,2} = \mathcal{R}\frac{\mu}{\lambda}, \qquad \varepsilon_{1,3} = \mathcal{R}\frac{\nu}{\lambda},$$

$$\varepsilon_{1,4} = \mathcal{R}\frac{\pi}{\lambda} + \frac{a}{2\lambda^2} = \frac{A\lambda^2 + 2B\lambda\mathcal{R}\mu + 2C\lambda\mathcal{R}\nu - a^2\Psi(\mathcal{R}\mu, \mathcal{R}\nu)}{2a\delta\lambda^2};$$

en outre, dans la somme des termes restants, les coefficients des termes où figure x_2 ou x_3 ne dépendent que de $\mathcal{R}\frac{\mu}{\lambda}$, $\mathcal{R}\frac{\nu}{\lambda}$, $\mathfrak{I}\mu$, $\mathfrak{I}\nu$; et l'on voit tout de suite que

$$\mu_2(x_2+\varepsilon_{2,3}x_3)^2+\mu_3 x_3^2=\psi(x_2, x_3)+2(\mathfrak{I}\mu x_2+\mathfrak{I}\nu x_3)^2;$$

donc

$$\mu_2\mu_3=-\delta,$$

et, par suite,

$$\mu_4=\frac{\Delta}{-\delta\mu_1}=\frac{a^2}{2\lambda^2}.$$

Pour réduire φ, $2\lambda^2$ étant inférieur à $\frac{1}{\Delta}$, nous pouvons :

1° Réduire la forme $\psi(x_2, x_3)+2(\mathfrak{I}\mu x_2+\mathfrak{I}\nu x_3)^2$;
2° Remplir les conditions relatives aux ε, sans nous inquiéter des μ.

Les transformations adjointes de celles-ci ne modifient pas λ. De plus, nous remarquerons que f garde la forme (21), a, b, c, d et ψ étant modifiés.

Je dis que φ est maintenant réduite; en effet, comme $\mu_1=2\lambda^2$,

$$\mu_1\leqq\frac{1}{\Delta}\leqq 1<\mu_2;$$

μ_2 est en effet supérieur à *un*, puisque ψ ne peut pas représenter zéro; cela entraîne

$$\mu_3<-\delta,$$

et, par suite,

$$\mu_4>\mu_3,$$

car cette inégalité équivaut à

$$2\lambda^2\leqq\frac{a^2}{-\delta},$$

ce qui est. De même,

$$\mu_4>\mu_2,$$

car

$$\mu_2<\sqrt{\frac{-4\delta}{3}}\leqq-\delta,$$

puisque $-\delta\geqq 2$. Ces inégalités permettent de démontrer que les conditions de réduction sont toutes satisfaites : μ_3 est évidemment le plus petit des nombres représentés par la forme $\mu_3(x_3+\varepsilon_{3,4}x_4)^2+\mu_4 x_4^2$; μ_2 est le plus petit de ceux que représente la forme

$$\mu_2(x_2+\varepsilon_{2,3}x_3+\varepsilon_{2,4}x_4)^2+\mu_3(x_3+\varepsilon_{3,4}x_4)^2+\mu_4 x_4^2;$$

si $x_4\neq 0$, cela résulte de l'inégalité $\mu_4>\mu_2$; et si $x_4=0$, cela vient de ce que $\psi(x_2, x_3)+2(\mathfrak{I}\mu x_2+\mathfrak{I}\nu x_3)^2$ est réduite. Enfin, comme $\mu_2>\mu_1$, μ_1 est le plus petit nombre représenté par φ. Donc φ est réduite.

Ce qui précède montre alors qu'on peut, sans que φ cesse d'être réduite, faire varier λ en laissant fixes $\mathfrak{R}\frac{\mu}{\lambda}$, $\mathfrak{R}\frac{\nu}{\lambda}$, $\mathfrak{I}\mu$, $\mathfrak{I}\nu$, pourvu que $2\lambda^2$ ne dépasse pas $\frac{1}{\Delta}$; cela fournit un moyen de prolonger dans la région $2\lambda^2<\frac{1}{\Delta}$ les faces du polyèdre qui atteignent cette région.

Donc il est inutile, dans la réduction continuelle, de considérer les valeurs de λ, μ, ν, π telles que le coefficient de x_1^2 soit inférieur à $\frac{1}{\Delta}$; ce coefficient étant limité ainsi inférieurement, les raisonnements s'achèvent à la manière habituelle : le polyèdre a un nombre fini de faces.

La manière dont se prolongent les faces du polyèdre dans la région $2\lambda^2<\frac{1}{\Delta}$ montre que ce polyèdre atteint dans cette région la frontière du domaine fondamental seulement au point $\lambda=\mu=\nu=0$, $\pi=1$. Comme les substitutions réductrices laissent fixe ce point, on voit que, dans cette région, le polyèdre fondamental est le même que celui des substitutions qui ont ce point pour point double. Enfin, le polyèdre fondamendal n'a qu'un nombre fini de ces points réels : un et un seul pour chaque classe de points rationnels. Il n'y a pas d'autres points sur la frontière du domaine fondamental.

13. Arrivons au cas où la quadrique possède des génératrices rationnelles.

Nous allons prouver encore qu'il est inutile de donner à λ, μ, ν, π des valeurs telles que le coefficient de x_1^2 dans φ s'abaisse au-dessous de $\frac{\sqrt{3}}{2\Delta}$.

On montrera comme précédemment que, si cela arrive, on peut, par une substitution qui n'altère pas λ, mettre f sous la forme (21). Mais les opérations que nous avons décrites ensuite pour achever de réduire φ peuvent ne plus réussir : en effet, la supposition que μ_2 est supérieur à *un* est indispensable dans le raisonnement que nous avons fait; or ici, μ_2 peut descendre au-dessous de n'importe quelle limite.

Cette circonstance ne peut, il est vrai, se produire si f est dépourvue de terme en x_2^2 : s'il subsiste un terme en x_2^2 dans f après les transformations indiquées, on peut affirmer que φ est réduite; les considérations développées précédemment permettent d'être assuré que les formes f équivalentes à la forme donnée pour lesquelles cette circonstance se présente sont en nombre fini : l'inégalité $\mu_4 > \mu_2$, sur laquelle nous nous étions appuyés, subsiste ici, bien que δ puisse prendre la valeur *moins un*, à cause de la nouvelle limitation $\frac{\sqrt{3}}{2\Delta}$ adoptée pour $2\lambda^2$.

Passons donc au cas où f, mis sous la forme (21), n'a pas de terme en x_2^2; nous poserons alors

$$\psi = (2b'x_2 + c'x_3)x_3, \tag{28}$$

b' et c' étant des entiers; la condition (25) devient

$$\mathfrak{I}\mu(c'\mathfrak{I}\mu - 2b'\mathfrak{I}\nu) = b'^2; \tag{29}$$

cette condition permet d'exprimer facilement $\mathfrak{I}\nu$ en fonction de $\mathfrak{I}\mu$; la condition (21) permet de même d'exprimer $\mathfrak{R}\pi$ et $\mathfrak{I}\pi$ en fonctions de λ, $\mathfrak{R}\mu$, $\mathfrak{R}\nu$, $\mathfrak{I}\mu$. Nous trouvons alors pour μ_1, μ_2, ..., $\varepsilon_{3,4}$ les valeurs suivantes :

$$\mu_1 = 2\lambda^2, \qquad \varepsilon_{1,2} = \mathfrak{R}\frac{\mu}{\lambda}, \qquad \varepsilon_{1,3} = \mathfrak{R}\frac{\nu}{\lambda},$$

$$\varepsilon_{1,4} = -\frac{2bb'c - b^2c' - b'^2d}{2ab'^2} - \frac{bc' - b'c}{b'^2}\mathfrak{R}\frac{\mu}{\lambda}$$
$$+ \frac{b}{b'}\mathfrak{R}\frac{\nu}{\lambda} - \frac{a}{2b'^2}\mathfrak{R}\frac{\mu}{\lambda}\left(c'\mathfrak{R}\frac{\mu}{\lambda} - 2b'\mathfrak{R}\frac{\nu}{\lambda}\right),$$

$$\mu_2 = 2(\mathfrak{I}\mu)^2, \qquad \varepsilon_{2,3} = \frac{c'}{2b'}, \qquad \varepsilon_{2,4} = \frac{2b'c - bc'}{2b'^2} + \frac{ac'}{2b'^2}\mathfrak{R}\frac{\mu}{\lambda} - \frac{a}{b'}\mathfrak{R}\frac{\nu}{\lambda},$$

$$\mu_3 = \frac{b'^2}{2(\mathfrak{I}\mu)^2}, \qquad \varepsilon_{3,4} = \frac{b}{b'} - \frac{a}{b'}\mathfrak{R}\frac{\mu}{\lambda}, \qquad \mu_4 = \frac{a^2}{2\lambda^2}.$$

Il peut arriver tout d'abord que

$$\mu_1(x_1+\varepsilon_{1,2}x_2)^2+\mu_2 x_2^2$$

ne soit pas une forme réduite : alors nous la réduirons, par une substitution sur x_1 et x_2 ; en même temps, nous ferons une substitution sur x_3 et x_4, destinée à remettre f sous une forme telle que (21); la nouvelle forme ψ sera certainement du type (28), et plus on aura

$$\mu_2<\mu_3;$$

car la nouvelle valeur de μ_2 est plus petite que l'ancienne valeur de $2\lambda^2$, ou que $\frac{\sqrt{3}}{2\Delta}$, ou que $\frac{\sqrt{3}}{2}$; et $\mu_3=\frac{b'^2}{\mu_2}$ est plus grand que $\frac{2}{\sqrt{3}}$. La nouvelle valeur de $2\lambda^2$ est aussi inférieure à $\frac{\sqrt{3}}{2\Delta}$. Nous augmentons ensuite chaque variable x_i de multiples des variables d'indice plus grand, et nous changeons au besoin les signes de deux d'entre ces variables, de manière à satisfaire aux conditions relatives aux ε.

Comparons alors μ_4 et μ_3 ; on a

$$\frac{\mu_4}{\mu_3}=\frac{a^2}{b'^2}\frac{\mu_2}{\mu_1}>\frac{\mu_2}{\Delta\mu_1};$$

cela ne suffit pas à assurer que

$$\mu_3(x_3+\varepsilon_{3,4}x_4)^2+\mu_4 x_4^2$$

soit une forme réduite; toutefois cela montre que

$$\frac{\mu_4}{\mu_3}>\frac{3}{4\Delta};$$

par suite, la substitution réductrice se trouve parmi un nombre fini de substitutions, que l'on peut écrire dès que l'on connaît Δ; on achèvera ensuite, à la manière habituelle, de remplir les conditions relatives aux ε. Alors φ sera elle-même réduite. Il faut remarquer qu'on n'aura eu besoin de cette dernière transformation, qui éloigne f du type (21), que si

$$\mu_2<\Delta\mu_1<\frac{\sqrt{3}}{2};$$

d'autre part, les nouvelles valeurs de μ_4 et de μ_3 sont comprises entre la plus grande et la plus petite des anciennes; donc

$$\mu_3 > \frac{a^2}{2\lambda^2} > \frac{2}{\sqrt{3}} > \mu_2;$$

et de même

$$\mu_3 > \mu_1;$$

on trouve alors immédiatement que φ est réduite; et elle ne cesse pas de l'être si l'on fait varier λ^2 et $(\mathfrak{I}\mu)^2$ en maintenant leur rapport ainsi que $\mathfrak{R}\frac{\mu}{\lambda}$ et $\mathfrak{R}\frac{\nu}{\lambda}$ égaux à des nombres fixes, jusqu'à ce que $2\lambda^2$ atteigne la valeur $\frac{\sqrt{3}}{2\Delta}$.

D'autre part, si, après la réduction, f est encore de la forme (21), on pourra faire croître $2(\mathfrak{I}\mu)^2$ jusqu'à *un*, puis $2\lambda^2$ jusqu'à $\frac{\sqrt{3}}{2\Delta}$: φ ne cesse pas d'être réduite.

Ainsi, à toute forme φ réduite telle que $\mu_1 < \frac{\sqrt{3}}{2\Delta}$ correspond une forme réduite déduite de celle-là uniquement par des variations des paramètres, et où $\mu_1 = \frac{\sqrt{3}}{2\Delta}$: f est resté le même. Donc, il est inutile de considérer les cas où μ_1 s'abaisse au-dessous de cette limite, et les raisonnements s'achèvent à la manière ordinaire.

Le polyèdre a un nombre fini de faces et atteint la frontière du domaine fondamental suivant un nombre fini de portions de variétés à deux dimensions, comprenant un nombre fini de points réels.

14. Dans ce qui précède, on s'est borné aux substitutions de déterminant *un*, et par suite aux transformations hyperabéliennes droites. Si nous admettons les substitutions de déterminant *moins un* et les transformations hyperabéliennes gauches, il suffira de modifier légèrement les conditions de réduction : nous rendrons positifs $\varepsilon_{1,2}$, $\varepsilon_{2,3}$ et $\varepsilon_{3,4}$, au lieu de nous borner aux deux premiers : la réduite est de nouveau unique, sauf, comme toujours, dans des cas limites sans importance. Il n'y a absolument rien à changer à nos conclusions sur le polyèdre fondamental.

15. Nous avons maintenant à étudier la nature des singularités des fonctions thêta-hyperabéliennes aux points du contour du polyèdre fondamental qui sont sur la limite du domaine fondamental.

Nous supposons que notre quadrique est mise sous la forme (7); un des polyèdres fondamentaux a sur son contour le point

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0, \qquad x_4 = 1;$$

si ψ peut représenter zéro, ce polyèdre contient aussi une portion des deux génératrices rationnelles qui se coupent en ce point.

Nous ne laisserons pas ψ sous une forme entièrement quelconque; mais si

$$\psi(x_2, x_3) = (A x_2 + B x_3)(A' x_2 + B' x_3), \qquad AB' - A'B > 0,$$

nous ferons un changement de variables tel que

$$A \geqq 0, \qquad A' \leqq 0, \qquad B \geqq 0, \qquad B' \leqq 0.$$

Pour cela, nous choisirons deux nombres entiers α et γ premiers entre eux tels que

$$A\alpha + B\gamma \geqq 0, \qquad A'\alpha + B'\gamma \leqq 0,$$

ce qui est possible d'une infinité de manières; si alors β et δ sont des entiers tels que

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$

nous prendrons l'entier λ assez grand pour que

$$A(\beta + \lambda\alpha) + B(\delta + \lambda\gamma) \geqq 0,$$
$$A'(\beta + \lambda\alpha) + B'(\delta + \lambda\gamma) \leqq 0;$$

ceci fait, les conditions imposées aux coefficients seront remplies si l'on remplace x_2 et x_3 par des variables y_2 et y_3 telles que

$$x_2 = \alpha y_2 + (\beta - \lambda\alpha) y_3,$$
$$x_3 = \gamma y_2 + (\delta - \lambda\gamma) y_3.$$

En rétablissant la notation de la formule (7), nous posons alors

$$\xi = \frac{A x_2 + B x_3}{x_1}, \qquad \eta = -\frac{A' x_2 + B' x_3}{x_1};$$

il est clair que les coefficients de i dans ξ et dans η seront positifs si les coefficients de i dans $\frac{x_2}{x_1}$ et dans $\frac{x_3}{x_1}$ sont aussi positifs; il suffit même que l'un de ceux-ci le soit, pourvu qu'il soit assez grand.

Nous savons que, dans la série thêta, on prend comme variables deux fonctions homographiques ξ' et η' de ξ et de η, de manière que le domaine fondamental se compose du système des intérieurs de deux cercles. Si ξ_n, η_n, ξ'_n, η'_n sont les transformés de ξ, η, ξ', η' par la $n^{\text{ième}}$ substitution du groupe, la série est

$$\Theta(\xi, \eta) = \Sigma R(\xi'_n, \eta'_n)\left[\frac{D(\xi'_n, \eta'_n)}{D(\xi', \eta')}\right]^k,$$

où $R(\xi', \eta')$ est une fonction rationnelle bornée dans le domaine fondamental, et où l'entier k est au moins égal à *deux*. Ceci s'écrit encore

$$\Theta(\xi, \eta) = \Sigma R(\xi'_n, \eta'_n)\left[\frac{D(\xi'_n, \eta'_n)}{D(\xi_n, \eta_n)}\right]^k \left[\frac{D(\xi_n, \eta_n)}{D(\xi, \eta)}\right]^k \left[\frac{D(\xi, \eta)}{D(\xi', \eta')}\right]^k.$$

Le dernier facteur ne dépend pas de n et peut se mettre en facteur commun; il est rationnel. Le produit des deux premiers facteurs est une fonction rationnelle de ξ et de η, où l'on a remplacé ces variables par ξ_n et η_n. Le facteur intermédiaire est égal à *un* pour les transformations droites qui ont le point double $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, $x_4 = 1$. Parmi celles-ci, se trouvent celles qui consistent à augmenter x_2 et x_3 chacune d'un multiple de dx_1, x_4 se transformant de manière à reproduire la forme donnée. Cela nous montre que, si $\frac{x_2}{x_1}$ et $\frac{x_3}{x_1}$ ont leurs coefficients de i positifs,

$$\Theta(\xi, \eta) = \left[\frac{D(\xi, \eta)}{D(\xi', \eta')}\right]^k \sum_{\alpha=1}^{+\infty} \sum_{\beta=1}^{+\infty} A_{\alpha,\beta}\, e^{\frac{2i\pi}{dx_1}(\alpha x_2 + \beta x_3)}. \tag{30}$$

Il peut arriver que les coefficients de i dans $\frac{x_2}{x_1}$ et dans $\frac{x_3}{x_1}$ ne soient pas positifs dans tout le polyèdre fondamental des substitutions qui conservent le point (o, o, o, 1) (§ 8). Mais, si la forme ψ ne peut pas représenter zéro, on pourra trouver un nombre fini de changements de variables tels que, dans toute partie de ce polyèdre, les variables $\frac{x_2}{x_1}$ et $\frac{x_3}{x_1}$ de l'un d'eux au moins aient leurs coefficients de i positifs; on peut même, si l'on veut, utiliser des changements de variables à coefficients fractionnaires. Si la forme ψ peut représenter zéro, on arrive au même résultat, bien que les parties imaginaires de ξ et de η soient quelconques dans ce polyèdre, grâce à ce que les facteurs de décomposition de ψ sont à coefficients entiers.

Donc, les fonctions hyperabéliennes se comportent, même au voisinage des points singuliers, comme des fonctions rationnelles de deux variables convenablement choisies. Donc, *trois d'entre elles sont liées par une relation algébrique.*

Comme le point (0, 0, 0, 1) et les points des deux génératrices, rationnelles ou non, qui s'y coupent sont des points singuliers de ces fonctions; comme, d'autre part, les transformés par le groupe d'un point réel forment un ensemble dense dans tout le domaine réel, on voit que le prolongement analytique de ces fonctions hyperabéliennes s'arrête à la frontière du domaine fondamental; ces fonctions sont donc uniformes partout où elles existent.