ÉTIENNE DELASSUS

Sur les mouvements holonomes dont les équations admettent des formes multiples de Lagrange

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 33 (1916), p. 71-125

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1916_3_33__71_0>

SUR

LES MOUVEMENTS HOLONOMES

DONT LES

ÉQUATIONS ADMETTENT DES FORMES MULTIPLES DE LAGRANGE;

PAR M. ÉT. DELASSUS.

INTRODUCTION.

1. L'importance des équations de Lagrange, au point de vue pratique de l'intégration, vient de la forme spéciale de ces équations et une idée assez naturelle est de chercher si les équations d'un même mouvement holonome ne pourraient pas se mettre de plusieurs façons distinctes sous cette forme; s'il en était ainsi, il pourrait arriver que des intégrales premières non visibles sur la forme primitive fussent mises en évidence par ces nouvelles formes ou que certaines intégrales ne présentant aucun caractère particulier vis-à-vis de la forme primitive fussent des intégrales de nature très spéciale vis-à-vis d'une forme nouvelle et jouant un rôle prépondérant dans l'intégration.

Le problème, posé sous cette forme générale, semble très difficile à résoudre, mais s'aborde assez facilement dans le cas de deux paramètres et l'on arrive à ce résultat que sont seuls susceptibles de formes multiples de Lagrange les mouvements dont les équations sont, au moyen de paramètres convenables, réductibles à celles du mouvement d'un point dans un plan.

Effectivement, le mouvement plan d'une molécule est susceptible de plusieurs formes et l'on aurait pu y être conduit par la remarque très simple que, en coordonnées cartésiennes obliques, les équations de Lagrange se forment avec la force vive

$$2T = x'^2 + y'^2 + 2x'y' \cos\theta$$

et le travail virtuel

$$\varpi = (X + Y\cos\theta)\,\delta x + (X\cos\theta + Y)\,\delta x,$$

mais que les équations élémentaires du mouvement, valables en coordonnées obliques, sont

$$x'' = X, \qquad y'' = Y$$

et peuvent être considérées comme les équations de Lagrange formées avec la force vive

$$2T = x'^2 + y'^2$$

et le travail virtuel

$$\varpi = X\,\delta x + Y\,\delta y.$$

Nous avons donc deux formes de Lagrange, ne fournissant pas les mêmes équations mais des équations équivalentes algébriquement.

Cette simple remarque que l'on généraliserait pour l'espace indique, pour le mouvement ponctuel, la possibilité des formes multiples et l'on montre facilement qu'il en existe dépendant d'une forme quadratique homogène arbitraire à autant de variables qu'il y a de paramètres.

Le sujet qui nous occupe est donc très limité. Il conduit à des cas d'intégration par quadratures qui paraissent n'avoir pas été signalés, par exemple à des lois de forces centrales contenant, comme cas très particuliers, les lois de MM. Darboux et Halphen.

Parmi les cas d'intégration par quadratures auxquels on est amené par la considération des formes multiples figurent des cas présentant une assez grande généralité et se ramenant, par des réductions, à des cas très particuliers, les uns évidents, les autres signalés par divers auteurs (MM. Lecornu, Appell, etc.). Ces cas, qui paraissaient absolument indépendants les uns des autres et qui avaient été vus en partant d'idées bien distinctes, relèvent donc, au fond, d'une même idée. A ce point de vue, la considération des formes multiples sert à grouper bien des résultats épars en les englobant dans un résultat unique mais beaucoup plus général.

Généralités.

2. Les équations du mouvement d'un système holonome défini par des paramètres indépendants et soumis à des forces ne dépendant que de la position se forment au moyen de deux expressions, la première est la force vive $2T$ et la seconde le travail virtuel ϖ des forces données appliquées au système.

Ces deux expressions permettront de construire des équations de Lagrange bien déterminées, elles constitueront une forme de Lagrange et, pour abréger, nous dirons que c'est la forme

$$(2T, \varpi).$$

Une forme peut se modifier de bien des façons sans que les équations de Lagrange soient modifiées, en entendant par là que ce n'est pas seulement l'ensemble des équations, c'est-à-dire le système, qui reste équivalent à lui-même, mais que c'est chaque équation, prise isolément, qui reste équivalente à elle-même.

1° On peut multiplier $2T$ et ϖ par une même constante choisie arbitrairement.

2° On peut (c'est le principe d'équivalence des forces vives) ajouter à $2T$ la dérivée totale exacte $\frac{d\theta}{dt}$ d'une fonction arbitrairement choisie θ des paramètres et du temps.

3° ω étant une fonction arbitrairement choisie des paramètres et du temps, on peut ajouter 2ω à $2T$ en ajoutant simultanément à ϖ la variation virtuelle

$$-\delta\omega = -\sum \frac{\partial \omega}{\partial q}\,\delta q.$$

Lorsque $2T$ n'est pas homogène, on peut ainsi prendre des groupes de termes dans $2T_0$ et les remplacer par des termes dans ϖ; c'est cette transformation d'une portion de force vive en travail, c'est-à-dire en forces, qui constitue, en réalité, l'introduction des forces fictives dans la théorie du mouvement relatif.

On peut de cette façon faire passer tout T_0 dans ϖ.

Réciproquement, si l'on trouve dans ϖ un morceau qui soit une variation virtuelle exacte, on pourra le supprimer en le remplaçant par des termes convenables de $2T$. En particulier, s'il y a fonction de forces, c'est-à-dire si ϖ est une variation virtuelle exacte, on pourra faire passer tout ϖ dans $2T$ et arriver ainsi à une forme

$$(2T', 0)$$

qui sera à fonction génératrice et que nous représenterons plus simplement par

$$(2G).$$

En résumé, toutes les formes

$$\left(2KT + \frac{d\theta}{dt} + 2\omega, \qquad K\varpi - \delta\omega\right),$$

dans lesquelles K est une constante et θ, ω deux fonctions arbitraires des q et de t, fournissent les mêmes équations de Lagrange. Nous dirons que toutes ces formes sont *équivalentes*.

3. Considérons un système de Lagrange $(2T, \varpi)$. Nous savons que, généralement, les intégrales premières sont mises en évidence par les groupements de termes provenant de $2T$ et particulièrement par les portions

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'}\right)$$

qui sont des dérivées exactes et permettent, par des combinaisons, de former d'autres groupements qui sont encore des dérivées exactes.

Les modifications apportées à $2T$ et ϖ et qui ont été indiquées précédemment permettent de mettre parfois en évidence des intégrales non visibles sur la forme primitive. Il en est de même du changement de paramètres qui, effectué la plupart du temps sans règle directrice, peut faire apparaître l'intégrale des forces vives, intégrale visible, provenant d'une intégrale quadratique dont l'existence pouvait même être insoupçonnée. Ces modifications constituent donc une ressource assez étendue quand la forme primitive ne met pas en évidence des intégrales premières de nombre et de nature tels que l'intégration par quadratures en résulte.

Ces modifications sont-elles les seules possibles? Y en aurait-il d'autres plus profondes susceptibles de mettre en évidence des intégrales premières que les précédentes ne feraient pas apercevoir?

Pour traiter la question, il faut donner à la notion d'équivalence sa forme la plus générale. Un système de Lagrange est un système du second ordre linéaire par rapport aux dérivées secondes; résolu, il est de la forme

$$(1)\qquad \begin{cases} q''_1 = P_1(q'_1, \ldots, q'_n, q_1, \ldots, q_n, t), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ q''_n = P_n(q'_1, \ldots, q'_n, q_1, \ldots, q_n, t), \end{cases}$$

les P étant quadratiques aux q' mais ces formes quadratiques ne sont pas quelconques.

Partons d'un système de Lagrange sous sa forme primitive ($2T$, ϖ) où $2T$ est la force vive vraie. Résolvons-le par rapport aux q'', ce qui nous donnera les expressions (1).

Soit alors $2T'$ une autre forme quadratique des q', forme assujettie seulement à ce que son discriminant ne soit pas identiquement nul et, qui, par conséquent, peut avoir un signe variable. Nous dirons que le système de Lagrange ($2T'$, ϖ') où ϖ' est une expression analogue à ϖ, est équivalent à ($2T$, ϖ) si, résolu, il donne les expressions (1) des q'' et cela, quels que soient les q', les q et t.

Pour la commodité du langage et ne pas faire de confusions, nous conserverons le nom de *formes équivalentes* pour des formes dérivant d'une même forme ($2T$, ϖ) par les modifications indiquées au paragraphe 1, c'est-à-dire pour des formes donnant *les mêmes équations de Lagrange* et nous désignerons par « *formes homologues* » *des formes donnant des équations de Lagrange* qui ne sont pas les mêmes mais fournissent les mêmes q'' par leur résolution.

Pour écrire qu'une forme ($2T'$, ϖ') est homologue de la forme ($2T$, ϖ) nous prenons les q'' tirés de la première forme et nous écrivons qu'ils vérifient la seconde forme; il peut arriver que cette vérification se fasse avec une fonction $2T'$ dont le discriminant est nul, c'est-à-dire avec une forme ($2T'$, ϖ') qui n'est pas une véritable forme de Lagrange en ce sens qu'elle ne détermine pas tous les q''. Nous dirons malgré cela que la forme ainsi obtenue est homologue de la forme primitive et il est indispensable de ne pas l'exclure car ses équations sont des conséquences des équations véritables du mouvement, de sorte que toute combinaison intégrable formée avec elles donnera une intégrale première véritable.

En résumé :

1° Une forme de Lagrange possède toujours une infinité de formes équivalentes.

2° On conçoit qu'une forme de Lagrange puisse posséder des formes homologues : les unes complètes, c'est-à-dire déterminant tous les q'' et pouvant remplacer la forme primitive; les autres incomplètes, ne déterminant pas tous les q'', ne pouvant pas remplacer la forme primitive, mais pouvant mettre en évidence des intégrales premières utiles à considérer. Dans les formes homologues, la force vive n'est plus une forme quadratique à signe forcément constant.

3° Si, dans deux formes homologues, on fait le même changement de paramètres elles détermineront les mêmes valeurs des dérivées secondes des nouveaux paramètres, donc deux formes homologues restent homologues par un changement quelconque de paramètres.

4. Le fait que l'existence des formes homologues est indépendante du choix des paramètres nous permet de simplifier un peu la recherche des systèmes de Lagrange possédant cette propriété en partant d'une forme aussi réduite que possible.

Néanmoins, dès que l'on arrive au cas de trois paramètres, on se proheurte à des difficultés analytiques considérables en disproportion probable avec le résultat à atteindre.

Nous nous restreindrons alors à la recherche des systèmes de Lagrange à deux paramètres admettant des formes homologues; nous trouverons des systèmes d'une nature très simple et nous considérerons les systèmes analogues à plus de deux paramètres, nous vérifierons aisément qu'ils sont encore à formes homologues mais, bien que ce soit fort probable, nous ne pourrons pas affirmer qu'ils soient les seuls à posséder cette propriété.

I.

Les systèmes à deux paramètres et à formes homologues.

5. Partons d'une forme de Lagrange formée avec une force vive $2T$ assujettie seulement à la condition que sa portion homogène et du second degré

$$2T_2 = A x'^2 + 2C x' y' + B y'^2$$

ait un discriminant non nul. Nous pouvons toujours décomposer $2T_2$ en deux facteurs linéaires distincts et, considérant t comme une constante, déterminer, pour chacun d'eux, un facteur intégrant, ce qui permet d'écrire $2T_2$ sous la forme

$$2T_2 = \lambda\left(\frac{d\theta}{dt} - \frac{\partial\theta}{\partial t}\right)\left(\frac{d\varphi}{dt} - \frac{\partial\varphi}{\partial t}\right),$$

θ et φ étant deux fonctions de x, y et t. Si alors on prend θ et φ comme nouveaux paramètres on est ramené à la forme réduite

$$2T = 2C x' y' + 2A_1 x' + 2B_1 y',$$
$$\mathfrak{C} = \mathcal{A}\,\delta x + \mathcal{B}\,\delta y.$$

C'est de cette forme que nous allons partir. Elle donne les équations de Lagrange

$$C y'' = -y'^2 \frac{\partial C}{\partial y} - y' W + \mathcal{A} - \frac{\partial A_1}{\partial t} - \frac{\partial C}{\partial t},$$
$$C x'' = -x'^2 \frac{\partial C}{\partial x} + x' W + \mathcal{B} - \frac{\partial B_1}{\partial t} - \frac{\partial C}{\partial t}$$

dans lesquelles nous représentons par W la quantité

$$\frac{\partial A_1}{\partial y} - \frac{\partial B_1}{\partial x}.$$

Considérons alors un système de Lagrange

$$2T = X x'^2 + 2Z x' y' + Y y'^2 + 2X_1 x' + 2Y_1 y' + Z_1,$$
$$\mathfrak{C} = \mathcal{X}\,\delta x + \mathcal{Y}\,\delta y$$

et écrivons que les valeurs trouvées précédemment pour x'' et y'' vérifient les équations de ce système. En annulant les coefficients des deux polynomes du second degré en x' et y' ainsi obtenus, nous aurons douze équations parmi lesquelles il y en aura neuf ne contenant que les inconnues X, Y, X. Ce sont

$$
\begin{array}{lll}
C\dfrac{\partial X}{\partial x} = 2X\dfrac{\partial C}{\partial x}, & C\dfrac{\partial Y}{\partial x} = 0, & C\dfrac{\partial Z}{\partial x} = Z\dfrac{\partial C}{\partial x}, \\
C\dfrac{\partial X}{\partial y} = 0, & C\dfrac{\partial Y}{\partial y} = 2Y\dfrac{\partial C}{\partial y}, & C\dfrac{\partial Z}{\partial y} = Z\dfrac{\partial C}{\partial y}, \\
C\dfrac{\partial X}{\partial t} = X\dfrac{\partial C}{\partial t} - XW, & C\dfrac{\partial Y}{\partial t} = Y\dfrac{\partial C}{\partial t} + YW, & C\dfrac{\partial Z}{\partial t} = Z\dfrac{\partial C}{\partial t}.
\end{array}
$$

Le troisième groupe montre que l'on a

$$Z = KC,$$

K étant une constante.

Le premier groupe admet la solution

$$X = 0$$

et n'en admet pas d'autres si C et W ne satisfont pas à certaines conditions d'intégrabilité.

De même le second groupe admet la solution

$$Y = 0$$

et n'en admet pas d'autre en général.

Nous trouvons ensuite les équations

$$C\left(\frac{\partial X_1}{\partial y} - \frac{\partial Y_1}{\partial x}\right) = ZW,$$

$$\mathcal{X} = \frac{\partial X_1}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial Z_1}{\partial x} + \frac{1}{C}\left[X\left(\mathcal{B} - \frac{\partial B_1}{\partial t}\right) + Z\left(\mathcal{A} - \frac{\partial A_1}{\partial t}\right)\right],$$

$$\mathcal{Y} = \frac{\partial Y_1}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial Z_1}{\partial y} + \frac{1}{C}\left[Z\left(\mathcal{B} - \frac{\partial B_1}{\partial t}\right) + Y\left(\mathcal{A} - \frac{\partial A_1}{\partial t}\right)\right]$$

qui, en introduisant l'hypothèse

$$X = Y = 0, \qquad Z = KC,$$

deviennent

$$\frac{\partial X_1}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial_1} = KW,$$

$$\mathcal{X} = \frac{\partial X_1}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial Z_1}{\partial x} + K\left(\mathcal{A} - \frac{\partial A_1}{\partial t}\right),$$

$$\mathcal{Y} = \frac{\partial Y_1}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial Z_1}{\partial y} + K\left(\mathcal{B} - \frac{\partial B_1}{\partial t}\right).$$

La première montre immédiatement que l'on doit avoir

$$X_1 = KA_1 + \frac{\partial \theta}{\partial x},$$

$$Y_1 = KB_1 + \frac{\partial \theta}{\partial y},$$

θ étant une fonction arbitraire de x, y, t. Se donnant ensuite arbitrairement Z_1, $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ seront complètement déterminés. On a ainsi la solution

$$2T' = 2KCx'y' + 2\left(KA_1 + \frac{\partial \theta}{\partial x}\right)x' + 2\left(KB_1 + \frac{\partial \theta}{\partial y}\right)y' + Z_1,$$

$$\mathfrak{T} = \left(K\mathcal{A} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial x\,\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial Z_1}{\partial x}\right)\delta x + \left(K\mathcal{B} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y\,\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial Z_1}{\partial y}\right)\delta y$$

qui, en posant

$$\omega = \frac{1}{2}Z_1 - \frac{\partial \theta}{\partial t},$$

peut s'écrire

$$2T' = 2KT + \frac{d(2\theta)}{dt} + 2\omega,$$

$$\mathfrak{T}' = K\mathfrak{T} - \delta\omega,$$

et l'on reconnaît là l'expression générale des formes équivalentes à la forme proposée. Dans notre hypothèse, le système n'admet donc que les formes équivalentes à sa forme primitive, il n'admet pas de formes homologues.

6. Pour avoir des formes homologues, il faut que les trois équations en X admettent une solution autre que

$$X = 0$$

ou que les trois équations en Y admettent une solution autre que

$$Y = 0.$$

Or, si l'on forme les équations d'intégrabilité, on trouve qu'elles sont les mêmes pour ces deux systèmes

$$\frac{\partial^2 \log C}{\partial x \partial y} = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \log C}{\partial t} + \frac{W}{C}\right) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \log C}{\partial t} - \frac{W}{C}\right) = 0.$$

La première montre que C est de la forme

$$C = f(x, t)\,\varphi(y, t)$$

de sorte que, si l'on prend comme nouveaux paramètres

$$\int f(x, t)\,dx, \qquad \int \varphi(y, t)\,dy,$$

nous serons ramenés au cas de

$$C = 1.$$

Avec ces paramètres, les deux autres conditions d'intégrabilité deviendront

$$\frac{\partial W}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial W}{\partial y} = 0,$$

donc exigent que W soit une fonction de t seulement. Si l'on fait un changement

$$x = \lambda u, \qquad y = \frac{1}{\lambda} v,$$

λ étant une fonction de t seulement, la forme de $2T$ se conservera; on sera encore dans le cas de $C = 1$ mais W deviendra

$$W' = -\frac{2}{\lambda}\frac{d\lambda}{dt} + W(t).$$

Si donc on prend

$$\lambda = e^{\int \frac{1}{2} W(t)\,dt},$$

on aura

$$W' = 0$$

et alors la portion $2T_1$ de la force vive pourra être supprimée par équivalence. En faisant passer le terme T_0 dans le travail virtuel, nous arrivons au résultat suivant :

Les seuls systèmes de Lagrange admettant des formes homologues sont ceux qui, par un choix convenable de paramètres, sont réductibles à la forme

$$2T = 2x'y',$$
$$\mathcal{T} = \mathcal{A}\,\delta x + \mathcal{B}\,\delta y$$

ou, ce qui revient au même, à la forme

$$2T = x'^2 + y'^2,$$
$$\mathcal{T} = X\,\delta x + Y\,\delta y$$

qui caractérise le mouvement d'un point matériel dans un plan fixe.

7. Le résultat précédent provoque un certain nombre de remarques :

1° La condition d'existence des formes homologues ne dépend pas des coefficients du travail virtuel $\mathcal{T}$, elle ne dépend que des coefficients de $2T$, c'est-à-dire de la définition du système matériel dont on étudie le mouvement. On est ainsi amené à appeler *système ponctuel* tout système matériel dont la force vive, modifiée au besoin par équivalence, peut être identifiée avec celle d'un point matériel mobile dans un plan et à dire :

Pour que les équations de Lagrange du mouvement d'un système matériel holonome possèdent des formes homologues, il faut et il suffit que ce système matériel soit un système ponctuel.

2° Considérons un tel système de Lagrange sous sa forme réduite

$$2T = x'^2 + y'^2,$$
$$\mathcal{T} = X\,\delta x + Y\,\delta y$$

et soit

$$F(x, y)$$

une forme quadratique homologue arbitrairement choisie. Considérons la forme

$$2T' = F(x', y'),$$
$$\mathcal{T}' = \mathcal{X}\,\delta x + \mathcal{Y}\,\delta y\,;$$

elle donnera lieu, puisque F est à coefficients constants, aux deux équations de Lagrange

$$\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x''} = \mathcal{X}_1,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial y''} = \mathcal{Y}_1$$

et, en écrivant qu'elles sont vérifiées par les valeurs X et Y de x'' et y'' fournies par le système primitif, on a

$$\mathcal{X}_1 = \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial X},$$

$$\mathcal{Y}_1 = \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial Y},$$

donc la forme

$$2T = x'^2 + y'^2,$$
$$\mathcal{T} = X\,\delta x + Y\,\delta y$$

admet toutes les formes homologues

$$2T' = F(x', y'),$$
$$\mathcal{T}' = \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial X}\delta x + \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial Y}\delta y,$$

F étant une forme quadratique homogène arbitraire à coefficients constants. Ainsi, ou bien le système ne possède aucune forme homologue, ou bien il en possède et alors elles dépendent de trois constantes arbitraires homogènes qui se réduisent à deux non homogènes puisque, par équivalence, on peut multiplier la forme par une constante abitrairement choisie.

3° Pour une quelconque de ces formes homologues, la combinaison des forces vives s'écrit

$$\frac{1}{2}\left(x'\frac{\partial F}{\partial x''} + y'\frac{\partial F}{\partial y''}\right) - (\mathcal{X}_1 x' + \mathcal{Y}_1 y')$$

ou, puisque F est quadratique homogène,

$$\frac{1}{2}\left(x''\frac{\partial F}{\partial x'} + y''\frac{\partial F}{\partial y'}\right) - (\mathcal{X}_1 x' + \mathcal{Y}_1 y')$$

ou enfin, puisque F est à coefficients constants,

$$\frac{1}{2}\frac{d\mathrm{F}}{dt} - (\mathcal{X}_1 x' + \mathcal{Y}_1 y')$$

et ne peut être une dérivée exacte que si $\mathcal{X}_1$ et $\mathcal{Y}_1$ sont les deux dérivées partielles d'une fonction de x et y indépendante de t. L'intégrale des forces vives ne peut donc exister pour une quelconque des formes homologues que si elle est à fonction de forces, fonction indépendante du temps, c'est-à-dire si la forme est à fonction génératrice indépendante du temps.

8. L'importance de l'intégrale des forces vives au point de vue de l'intégration par quadratures nous conduit à chercher les formes homologues à fonction génératrice. On aura une telle forme s'il existe une fonction quadratique F telle que

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{X}}, \quad \frac{1}{2}\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{Y}}$$

soient les dérivées partielles d'une même fonction de x et y, c'est-à-dire s'il existe trois constantes K, K_1, K_2, telles que l'on ait identiquement

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mathrm{K}_1\mathrm{X} + \mathrm{K}\mathrm{Y}) = \frac{\partial}{\partial x}(\mathrm{K}\mathrm{X} + \mathrm{K}_2\mathrm{Y})$$

ou

$$\mathrm{K}_1\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial y} + \mathrm{K}\left(\frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial y} - \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial x}\right) - \mathrm{K}_2\frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial x} = 0,$$

ce qui revient à dire que les trois fonctions

$$\mathcal{U} = \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial y}, \qquad \mathcal{O} = -\frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial x}, \qquad \mathcal{W} = \frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial x}$$

doivent être liées par une relation linéaire homogène et à coefficients constants.

Nous obtenons ainsi, pour les systèmes ponctuels et, en particulier, pour le point matériel, la généralisation de la notion de fonction de force. Nous dirons qu'il y a fonction de force si le système possède une forme homologue ayant une fonction de force au sens ordinaire.

Il est utile toutefois de remarquer que, dans ce sens général, il peut exister une infinité de fonctions de forces.

Dans tout ce qui va suivre, nous nous bornerons au cas où la forme initiale *réduite* ne contient pas explicitement le temps. Celui-ci ne figure alors dans aucune des formes homologues, telles qu'on les obtient et l'existence d'une fonction de forces entraîne l'existence de l'intégrale des forces vives.

9. Une forme homologue est caractérisée par une forme quadratique homogène

$$F(X, Y).$$

Si les formes homologues

$$F_1, \quad F_2, \quad F_3, \quad \ldots$$

sont à fonction génératrice, il en est de même de toutes les formes de la série linéaire

$$F = \lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 + \lambda_3 F_3 + \ldots.$$

S'il y a trois formes distinctes F_1, F_2, F_3 à fonction G, la forme F est une forme arbitraire, donc toutes les formes homologues sont à fonction génératrice.

S'il y a deux formes linéairement distinctes F_1 et F_2, on aura les formes à fonctions G de la série linéaire

$$F = \lambda_1 F_1(X, Y) + \lambda_2 F_2(X, Y)$$

qui peut s'interpréter comme représentant un couple variable formé par deux rayons homologues d'un faisceau involutif à moins que F_1 et F_2 n'aient un facteur linéaire commun auquel cas le couple variable F est formé d'un rayon fixe et d'un rayon variable.

Enfin, il peut n'y avoir qu'une seule forme F à fonction G.

Comment reconnaître ces différents cas sans employer le procédé d'identification consistant à former, dans chaque exemple, la quantité

$$K_1 \frac{\partial X}{\partial y} + K\left(\frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) - K_2 \frac{\partial Y}{\partial x},$$

à écrire qu'elle est identiquement nulle et à voir quelle est l'indétermination qui en résulte pour les trois constantes K_1, K, K_2 de la forme F?

Premier cas. — Toutes formes homologues sont à fonction G.

L'équation en $\mathscr{u}$, $\mathscr{v}$, $\mathscr{w}$ doit être vérifiée quels que soient K_1 K_2, K; donc on doit avoir

$$\mathscr{u} = \mathscr{v} = \mathscr{w} = 0.$$

Les deux premières équations montrent que l'on doit avoir

$$X = f(x), \qquad Y = \varphi(y)$$

et la troisième

$$f'(x) = \varphi'(y),$$

ces deux dérivées doivent donc être égales à une constante ρ et l'on est ainsi conduit à la loi de force

$$X = \rho x + \alpha, \qquad Y = \rho y + \beta$$

que, par une translation des axes, on ramène à la forme simple

$$X = \rho x, \qquad Y = \rho y.$$

On est donc dans le cas de la force centrale proportionnelle à la distance.

Deuxième cas. — Il y a une série linéaire de formes homologues à fonction G.

Puisqu'il y a alors deux formes distinctes F_1 et F_2 donnant des fonctions génératrices, on a, entre $\mathscr{u}$, $\mathscr{v}$, $\mathscr{w}$, deux relations distinctes linéaires homogènes et à coefficients constants de sorte que l'on a

$$\frac{\mathscr{u}}{\alpha} = \frac{\mathscr{v}}{\beta} = \frac{\mathscr{w}}{\gamma},$$

α, β, γ étant trois constantes non toutes nulles. Les formes F à fonctions G seront celles de la série linéaire dont les coefficients K_1, K_2, K satisferont à l'égalité

$$K_1\alpha + K_2\beta + K\gamma = 0$$

qui permet de les exprimer linéairement au moyen de deux arbitraires λ_1, λ_2.

En général on est dans le cas de l'involution. On obtiendra les rayons doubles en cherchant m tel que

$$F = (Y - mX)^2$$

appartienne à la série considérée ; on obtient ainsi

$$m^2\alpha - m\gamma + \beta = 0.$$

Ces rayons seront réels ou imaginaires suivant le signe de la quantité

$$\gamma^2 - 4\alpha\beta.$$

Pour que le couple F ait un rayon fixe, il faut que l'équation

$$F(X, Y) = K_1 X^2 + 2KXY + K_2 Y^2 = 0$$

soit vérifiée par les valeurs fixes X_0 et Y_0 ce qui donne entre K_1, K_2 et K une relation qui doit être identique à celle de définition de la série ; on doit donc avoir

$$\frac{\alpha}{X_0^2} = \frac{\gamma}{2X_0Y_0} = \frac{\beta}{Y_0^2}$$

et, par conséquent,

$$\gamma^2 - 4\alpha\beta = 0.$$

Cherchons maintenant la loi de force.

Mettons en évidence les deux racines m et m' de l'équation

$$m^2\alpha - m\gamma + \beta = 0,$$

c'est-à-dire les coefficients angulaires des rayons doubles. Les deux égalités

$$m^2\alpha - m\gamma + \beta = 0,$$
$$m'^2\alpha - m'\gamma + \beta = 0$$

peuvent servir à définir les trois constantes α et β de sorte que $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$ doivent vérifier

$$m^2\,\mathfrak{U} - m\,\mathfrak{W} + \mathfrak{V} = 0,$$
$$m'^2\,\mathfrak{U} - m'\,\mathfrak{W} + \mathfrak{V} = 0$$

qui peuvent s'écrire

$$m\left(\frac{\partial X}{\partial x} + m\frac{\partial X}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial Y}{\partial x} + m\frac{\partial Y}{\partial y}\right) = 0,$$
$$m'\left(\frac{\partial X}{\partial x} + m'\frac{\partial X}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial Y}{\partial x} + m'\frac{\partial Y}{\partial y}\right) = 0.$$

Effectuons alors un changement d'axes de coordonnées en prenant pour nouveaux axes, qui ne sont pas rectangulaires, les deux droites doubles

$$y - mx = 0, \qquad y - m'x = 0.$$

Les nouveaux paramètres x_1, y_1, coordonnées obliques par rapport à ces axes, seront

$$x_1 = \sigma(y - mx), \qquad y_1 = \sigma(y - m'x)$$

et les nouvelles composantes de la force

$$X_1 = \sigma(Y - mX), \qquad Y_1 = \sigma(Y - m'X),$$

σ étant un facteur constant dont la valeur est

$$\frac{\sqrt{1+m^2}\sqrt{1+m'^2}}{m - m'}.$$

Un calcul sans difficulté montre alors que les deux conditions trouvées pour la force peuvent s'écrire

$$\frac{\partial X_1}{\partial y_1} = 0, \qquad \frac{\partial Y_1}{\partial x_1} = 0;$$

ce qui peut s'interpréter en disant qu'il existe deux axes obliques tels que les composantes de la force suivant ces axes puissent être considérées comme des attractions obliques et fonctions de la distance seulement par ces axes.

Ce qui précède suppose implicitement que les deux droites doubles sont réelles. Supposons qu'il n'en soit pas ainsi; l'involution sera alors celles des diamètres conjugués d'une ellipse

$$\beta x^2 - \gamma xy + \alpha y^2 = 0$$

que l'on pourra supposer, par un changement rectangulaire, rapportée à ses axes, ce qui donnera

$$\gamma = 0, \qquad \alpha\beta > 0.$$

Cette ellipse aura deux diamètres conjugués égaux dont les deux coefficients angulaires seront m et $-m$ donnés par

$$\alpha m^2 - \beta = 0.$$

Les deux relations entre $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{v}'$, $\mathfrak{w}$ seront alors, avec les axes rectangulaires choisis,

$$\mathfrak{W} = 0, \qquad m^2\mathfrak{U} - \mathfrak{V} = 0$$

ou

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y},$$
$$m^2\frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial x} = 0$$

et, si l'on rapporte le point et la force aux deux axes obliques formés par les deux diamètres conjugués égaux, on voit que les deux conditions précédentes deviennent

$$\frac{\partial X_1}{\partial x_1} = \frac{\partial Y_1}{\partial y_1},$$
$$\frac{\partial X_1}{\partial y_1} = -\frac{\partial Y_1}{\partial x_1}$$

et expriment que la quantité imaginaire

$$Z = X_1 + iY_1$$

est une fonction analytique de la variable imaginaire

$$z = x_1 + iy_1.$$

Supposons, en dernier lieu, que le couple F ait une droite fixe. Nous ferons un changement rectangulaire de façon que cet unique rayon double soit l'axe des y. On aura alors

$$\alpha = 0, \qquad \gamma = 0,$$

donc

$$\mathfrak{U} = 0, \qquad \mathfrak{W} = 0$$

ou

$$\frac{\partial X}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y}$$

et, par conséquent, la loi de force

$$X = F(x),$$
$$Y = yF'(x) + \Phi(x)$$

qui ne parait pas susceptible d'interprétation géométrique simple.

Troisième cas. — Il n'y a qu'une seule forme homologue à fonction de force. On a alors une seule relation différentielle entre les deux composantes de la force, et la loi de force est d'une nature trop générale pour en donner une interprétation simple.

10. Le cas de l'attraction proportionnelle à la distance donne lieu à une remarque qu'il est bon de signaler en passant. Le problème est tellement simple et facile à intégrer que c'est par l'intégration que l'on obtient généralement la trajectoire correspondant à des conditions initiales déterminées. Cette trajectoire peut s'obtenir sans intégration parce que l'on connaît trois intégrales distinctes

$$\begin{aligned} x'^2 &= \rho x^2 + \alpha, \\ y'^2 &= \rho y^2 + \beta, \\ xy' - yx' &= \lambda \end{aligned}$$

dont les deux premières sont les intégrales de force vive fournies par la décomposition et la troisième l'intégrale des aires. L'élimination de x', y' donne la trajectoire sous la forme irrationnelle

$$x\sqrt{\rho y^2 + \beta} - y\sqrt{\rho x^2 + \alpha} = \lambda.$$

La forme homologue

$$2G = 2x'y' + 2\rho xy$$

donne une intégrale de force vive

$$x'y' = \rho xy + \gamma$$

qui est connue (¹) puisque l'on est dans le cas où

$$\frac{\partial Y}{\partial y} = \frac{\partial X}{\partial x},$$

mais que l'on n'utilise pas. Cependant l'élimination de x', y' entre les trois intégrales de force vive donne immédiatement

$$(\rho x^2 + \alpha)(\rho y^2 + \beta) = (\rho xy + \gamma)^2$$

ou

$$\rho(\beta x^2 - 2\gamma xy + \alpha y^2) = \gamma^2 - \alpha\beta,$$

(¹) APPELL, *Mécanique rationnelle*, 3ᵉ édition, t. I, Exercice 14, p. 376.

c'est-à-dire, sans aucun calcul, la trajectoire sous sa forme définitive.

11. Le cas où $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$ sont proportionnelles à des constantes donne des systèmes qui, *a priori*, sont intégrables par quadratures. Si l'on fait l'intégration en partant de la forme primitive, les formes homologues à fonction de force en font connaître deux intégrales quadratiques distinctes qui ne mettent pas en évidence une intégration par quadratures. Cette intégration devient au contraire évidente si l'on part de l'une des formes à fonction G, parce qu'alors on a deux intégrales, dont l'une est l'intégrale des forces vives du système à intégrer : c'est le cas bien connu fourni par la méthode de Jacobi pour les systèmes à deux paramètres.

Au point de vue pratique, le calcul est bien plus facile. Si l'on a une involution véritable à rayons doubles réels on est ramené, avec des axes obliques convenables, à

$$\frac{\partial X_1}{\partial y_1} = 0, \qquad \frac{\partial Y_1}{\partial x_1} = 0$$

et, si les rayons doubles sont imaginaires, à X_1, Y_1, fonctions harmoniques conjuguées. En prenant les équations élémentaires du mouvement, on est donc ramené aux équations

$$x_1'' = X_1,$$
$$y_1'' = Y_1$$

qui s'intègrent comme si les axes étaient rectangulaires et qui sont dans le cas de la séparation des paramètres et s'intègrent par deux intégrales de force vive ou sont dans le cas des fonctions harmoniques conjuguées et s'intègrent par une seule intégrale de force vive relative à une fonction analytique d'une variable imaginaire [1].

Il est à remarquer que les deux équations précédentes du mouvement aux coordonnées obliques ne sont pas les équations de Lagrange obtenues directement. La forme directe de Lagrange est, en appelant θ

---

[1] Lecornu, *Journal de l'École Polytechnique*, LV^e cahier.

l'angle des axes,

$$2T = x_1'^2 + 2x_1' y_1' \cos\theta + y_1'^2,$$
$$\varpi = (X_1 + Y_1 \cos\theta)\,\delta x_1 + (X_1 \cos\theta + Y_1)\,\delta y_1,$$

de sorte que, si l'on pose

$$F(X, Y) = X^2 + 2XY\cos\theta + Y^2,$$

elle s'écrit

$$2T = F(x_1', y_1'),$$
$$\varpi = \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial X_1}\delta x_1 + \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial Y_1}\delta y_1$$

et est une forme homologue de

$$2T = x_1'^2 + y_1'^2,$$
$$\varpi = X_1\,\delta x_1 + Y_1\,\delta y_1.$$

Cette forme, qui convient quels que soient les axes, est donc la forme directe si les axes sont rectangulaires et une forme homologue de la forme directe quand les axes sont obliques.

Considérons le cas où le couple F des formes à fonctions G a un rayon fixe; on est ramené, en axes rectangulaires, à

$$\frac{\partial X}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y};$$

la première condition montre que x est déterminé isolément par une intégrale de force vive et la seconde condition montre l'existence d'une intégrale bien connue et qui en réalité est l'intégrale des forces vives de la forme homologue à fonction G qui est déterminée par la forme quadratique

$$F(X, Y) = 2XY.$$

Posant

$$X = f(x),$$
$$Y = yf'(x) + \varphi(x),$$

on aura les deux intégrales de force vive

$$x'^2 = 2\int f(x)\,dx + \alpha = f_1(x) + \alpha,$$
$$x'y' = yf(x) + \int \varphi(x)\,dx + \beta = \frac{1}{2}yf_1'(x) + \varphi_1(x) + \beta;$$

la première donne x par quadrature et la seconde peut s'écrire en vertu de la première

$$x'y' - x''y = \varphi_1(x) + \beta,$$

de sorte qu'en posant

$$y = x'z,$$

elle devient

$$x'^2 z' = \varphi_1(x) + \beta$$

ou

$$z' = \frac{\varphi_1(x) + \beta}{x'^2} = \frac{\varphi_1(x) + \beta}{f_1(x) + \alpha}$$

et donne z par une quadrature.

On est donc ramené en définitive à des cas élémentaires et connus d'intégration par quadratures, mais la condition que $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{W}$ soient proportionnelles à des constantes n'en reste pas moins intéressante comme faisant connaître une catégorie très générale de systèmes réductibles à ces systèmes particuliers.

12. Comme premier exemple, prenons la loi de force en coordonnées rectangulaires

$$X = ax^2 + (a-2)y^2, \qquad Y = 2axy + 2ay^2.$$

On a

$$\mathfrak{V} = \frac{\partial X}{\partial y} = 2(a-2)y,$$

$$\mathfrak{P} = -\frac{\partial Y}{\partial x} = -2ay,$$

$$\mathfrak{W} = \frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial X}{\partial x} = 4ay.$$

Ces trois fonctions sont proportionnelles aux trois constantes

$$\alpha = a - 2, \qquad \beta = -a, \qquad \gamma = 2a$$

et l'on a

$$\gamma^2 - 4\alpha\beta = 8a(a-1).$$

Premier cas. — a n'est pas compris entre o et 1. On est dans le cas de l'involution à rayons doubles réels et leurs coefficients angulaires λ et μ sont les deux racines de

$$(a-2)m^2 - 2am - a = 0.$$

Ce sont ces deux droites que nous allons prendre comme axes obliques. Nous savons que si nous prenons x''_1 et y''_1, ce seront des fonctions respectivement de x_1 et y_1, donc le fait continuera à exister si nous prenons pour nouveaux paramètres des quantités proportionnelles

$$\xi = y - \lambda x, \qquad \eta = y - \mu x.$$

On a effectivement

$$\xi'' = y'' - \lambda x'' = \mathrm{Y} - \lambda \mathrm{X} = -\lambda a x^2 + 2axy - [\lambda(a-2) - 2a]y^2,$$

ce qui, en vertu de l'équation vérifiée par λ, peut s'écrire

$$-\lambda a x^2 + 2axy - \frac{a}{\lambda}y^2$$

ou

$$-\frac{a}{\lambda}[y - \lambda x]^2.$$

On aurait de même η'' et l'on est ramené à intégrer

$$\xi'' = -\frac{a}{\lambda}\xi^2,$$

$$\eta'' = -\frac{a}{\mu}\eta^2,$$

c'est-à-dire

$$\xi'^2 = -\frac{2a}{3\lambda}\xi^3 + \text{const.},$$

$$\eta'^2 = -\frac{2a}{3\mu}\eta^3 + \text{const.}$$

Deuxième cas. — a est compris entre o et 1. On est dans le cas des rayons doubles imaginaires. Soient λ et μ les coefficients angulaires des deux diamètres conjugués égaux que nous devons prendre comme axes obliques. L'ensemble des bissectrices de ce système de deux droites sera

$$\frac{(y - \lambda x)^2}{1 + \lambda^2} = \frac{(y - \mu x)^2}{1 + \mu^2}$$

ou

$$y^2(\mu + \lambda) - 2xy(\lambda\mu - 1) - x^2(\mu + \lambda) = 0.$$

Ce couple devra être le couple des axes de l'involution; comme c'est un couple rectangulaire, il suffit d'écrire qu'il appartient à l'involution.

Le couple λ, μ dont l'équation est

$$y^2 - xy(\lambda + \mu) + \lambda\mu x^2 = 0$$

en fait partie aussi, de sorte qu'on doit avoir les deux conditions

$$+ (\mu + \lambda)(a - 2) + (\lambda\mu - 1)\, 2a + (\mu + \lambda)a = 0,$$
$$\lambda\mu(a - 2) - (\lambda + \mu)a - a = 0$$

donnant

$$\mu - \lambda = \frac{-2a}{2a^2 - 3a + 2},$$
$$\lambda\mu = \frac{2a^2 - a}{2a^2 - 3a + 2},$$

de sorte que λ et μ sont les racines de

$$(2a^2 - 3a + 2)m^2 + 2am + 2a^2 - a = 0.$$

Il faudra prendre ξ, η proportionnels, avec le même facteur de proportionnalité, aux coordonnées obliques. Il suffit, pour cela, de prendre les distances

$$\xi = \frac{y - \lambda x}{\sqrt{1 + \lambda^2}}, \qquad \eta = \frac{y - \mu x}{\sqrt{1 + \mu^2}}.$$

On formera alors

$$z'' = \xi'' + i\eta'' = \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda^2}}(Y - \lambda X) + \frac{i}{\sqrt{1 + \mu^2}}(Y - \mu X)$$

et l'on vérifiera qu'en vertu des relations que vérifient λ et μ le second membre est de la forme

$$K\left[y\left(\frac{1}{\sqrt{1 + \lambda^2}} + \frac{i}{\sqrt{1 + \mu^2}}\right) - x\left(\frac{\lambda}{\sqrt{1 + \lambda^2}} + \frac{i\mu}{\sqrt{1 + \mu^2}}\right)\right]^2$$

ou

$$K[\xi + i\eta]^2.$$

On est donc ramené à l'équation

$$Z'' = KZ^2$$

et à l'intégrale des forces vives

$$Z'^2 = \frac{2K}{3}Z^3 + h,$$

où K est une constante réelle, tandis que h est une constante imaginaire.

Troisième cas. — a est nul ou égal à 1. Prenons ce dernier cas.

Les fonctions F donnant les formes à fonction G sont données ici par

$$-K_1 + 2K - K_2 = 0.$$

Ce sont donc les formes

$$\begin{aligned} F(X, Y) &= K_1 X^2 + (K_1 + K_2) XY + K_2 Y^2 \\ &= (K_1 X + K_2 Y)(X + Y), \end{aligned}$$

le rayon fixe est

$$X + Y = 0,$$

de sorte que nous serons amenés à prendre

$$\xi = x + y, \qquad \eta = x - y,$$

d'où

$$\begin{aligned} \xi'' &= X + Y = x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2 = \xi^2, \\ \eta'' &= X - Y = x^2 - 2xy - 3y^2 = 2(x^2 - y^2) - (x + y)^2 = 2\xi\eta - \xi^2. \end{aligned}$$

On a l'intégrale des forces vives

$$\xi'^2 = \frac{2}{3}\xi^3 + h$$

et la forme homologue

$$\begin{aligned} &2T = 2\xi'\eta', \\ &\varpi = \xi^2\,\delta\eta + (2\xi\eta - \xi^2)\,\delta\xi = \delta\left(\xi^2\eta - \frac{\xi^3}{3}\right) \end{aligned}$$

donnant l'intégrale de force vive

$$\xi'\eta' - \xi^2\eta = \frac{\xi^3}{3} + h'$$

qui, en remplaçant ξ^2 par ξ'' et posant

$$\eta = \xi' z,$$

donne

$$z' = \frac{\dfrac{\xi^3}{3} + h}{\xi'^2} = \frac{\dfrac{\xi^3}{3} + h'}{\dfrac{2}{3}\xi^3 + h}.$$

13. Comme second exemple, considérons une force de direction fixe. Avec des axes rectangulaires convenables on aura

$$X = 0,$$

donc toujours la relation linéaire

$$\mathfrak{V} = 0.$$

On aura ensuite

$$\mathfrak{V} = -\frac{\partial Y}{\partial x}, \qquad \mathfrak{W} = \frac{\partial Y}{\partial y},$$

de sorte que, pour être dans le cas d'intégration où $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$ sont proportionnelles à des constantes, il suffira que Y satisfasse à une équation de la forme

$$-\mu\frac{\partial Y}{\partial x} + \lambda\frac{\partial Y}{\partial y} = 0,$$

λ et μ étant deux constantes. On en déduit

$$Y = \mathfrak{F}(\lambda x + \mu y + \nu),$$

ν étant une autre constante.

Les fonctions $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$ sont alors proportionnelles aux trois constantes

$$\alpha = 0, \qquad \beta = \lambda, \qquad \gamma = -\mu$$

donnant

$$\gamma^2 - 4\alpha\beta = \mu^2.$$

Si μ est nul, Y est une fonction de x et l'on a les deux intégrales de force vive

$$x'^2 = h, \qquad x'y' = \int Y\,dx + h_1$$

qui donnent immédiatement l'intégration.

Si μ n'est pas nul, on a une involution dont les rayons doubles sont réels

$$x = 0, \qquad \lambda x + \mu y = 0;$$

on aura

$$x'' = 0,$$
$$\eta'' = \lambda x'' + \mu y'' = \mu Y = \mu\mathfrak{F}(\eta),$$

donc x et η seront donnés séparément par des intégrales de force vive. La loi de force de direction fixe que nous venons de considérer contient, comme cas particulier, la loi de MM. Darboux et Halphen.

14. Le cas où il n'y a qu'une seule forme homologue à fonction génératrice, c'est-à-dire où $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$ sont liées par une seule relation

linéaire homogène à coefficients constants est intéressant en lui-même car il met en évidence une intégrale de force vive qui, pour la forme primitive, était une intégrale quadratique généralement peu visible.

Mais comme cette intégrale ne suffit pas à fournir l'intégration par quadratures, ce cas ne présente pas d'intérêt en lui-même à ce point de vue, à moins de le combiner, si c'est possible, avec un autre cas fournissant, lui aussi, une intégrale première.

On pourrait toutefois se demander si la forme à fonction génératrice et intégrale des forces vives ne pourrait pas, par un changement de paramètres indépendant du temps, de façon à conserver l'intégrale des forces vives, se transformer en une forme décomposable, ce qui conduirait, en réalité, à deux intégrales de forces vives. Si une telle forme décomposable existait, elle s'écrirait

$$2\,G = f(u)\,u'^2 + \varphi(v)\,v'^2 + 2\,F(u) + 2\,\Phi(v)$$

et se mettrait immédiatement sous la forme réduite

$$2\,G = x'^2 + y'^2 + 2\,F_1(x) + 2\,\Phi_1(y)$$

donnant

$$\mathfrak{U} = 0, \qquad \mathfrak{V} = 0$$

qui sont deux relations distinctes entre $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$, relations linéaires homogènes à coefficients constants. Ce fait ne peut donc pas se présenter dans le cas actuel.

15. L'étude des formes homologues à fonction G met en évidence des intégrales quadriques. Existe-t-il des formes homologues mettant en évidence des intégrales linéaires?

Pratiquement, il ne peut en être ainsi, pour une forme initiale indépendante du temps, que s'il existe une forme homologue telle qu'en y faisant un changement convenable de paramètres indépendant du temps, il y ait une des équations qui soit une dérivée exacte d'une fonction également indépendante du temps. Avec ces paramètres u, v on devra donc avoir

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial u'}\right) - \frac{\partial T}{\partial u} - \mathcal{X} = \frac{d}{dt}\,\theta(u, u', v, v').$$

Nous remarquerons d'abord que la forme réduite initiale étant à force vive homogène et indépendante du temps, il en est de même de la force vive en u, v d'après la nature du changement de paramètres; donc

$$\frac{\partial T}{\partial u'}$$

est indépendant du temps, de sorte que

$$\frac{\partial T}{\partial u} + \mathfrak{X}$$

doit être dérivée exacte d'une fonction de u et v indépendante de t, ce qui exige que $\frac{\partial T}{\partial u}$ qui est homogène et du second degré en u' et v' soit nulle et qu'il en soit de même de $\mathfrak{X}$.

Nous devons donc chercher les changements indépendants du temps et qui satisfont aux deux conditions suivantes :

1° Ils transforment la force vive en une autre force vive dont les coefficients ne dépendent que de v;

2° Ils transforment le travail virtuel en une expression de même forme mais où le coefficient de δu est nul.

16. La force vive dont nous partons peut toujours, par un premier changement de paramètres indépendant du temps, être supposée ramenée à la forme

$$2T = 2x'y'$$

et c'est à partir de ces paramètres que nous allons faire le changement de façon à arriver à

$$\begin{aligned} 2T' &= f(v)u'^2 + \varphi(v)v'^2 + 2\psi(v)u'v' \\ &= (\alpha u' + \beta v')(\alpha_1 u' + \beta_1 v'), \end{aligned}$$

α, β, α_1, β_1 étant des fonctions de v seulement. L'identification nous donne immédiatement

$$\begin{aligned} x' &= e^{\mu}(\alpha u' + \beta v'), \\ y' &= e^{-\mu}(\alpha_1 u' + \beta_1 v'), \end{aligned}$$

μ étant une fonction convenable de u et v. En écrivant que les deux seconds membres sont des dérivées exactes, nous avons

$$\frac{\partial\alpha}{\partial v} + \alpha\,\frac{\partial\mu}{\partial v} = \quad \beta\,\frac{\partial\mu}{\partial u},$$

$$\frac{\partial\alpha_1}{\partial v} - \alpha_1\,\frac{\partial\mu}{\partial v} = -\,\beta_1\,\frac{\partial\mu}{\partial u};$$

d'où résulte

$$\frac{\partial\mu}{du} = \mathrm{F}(v),$$

$$\frac{\partial\mu}{\partial v} = \Phi(v)$$

et, en écrivant les deux valeurs de $\frac{\partial^2\mu}{\partial u\,\partial v}$,

$$\mathrm{F}'(v) = 0,$$

donc $\frac{\partial\mu}{\partial u}$ est une constante λ et l'on peut écrire

$$\mu = \lambda u + \log\theta(v).$$

Les deux équations d'intégrabilité de x' et y' peuvent alors s'écrire

$$\frac{d}{dv}\,(\alpha\theta) = \lambda\beta\theta,$$

$$\frac{d}{dv}\left(\frac{\alpha_1}{\theta}\right) = -\,\frac{\lambda\beta_1}{\theta},$$

ce qui donne

$$x' = e^{\lambda u}\,\left[\alpha\theta u' + \beta\theta v'\right] = e^{\lambda u}\left[\alpha\theta u' + \frac{1}{\lambda}\,\frac{d}{dv}\,(\alpha\theta)\,v'\right],$$

$$y' = e^{-\lambda u}\left[\frac{\alpha_1}{\theta}\,u' + \frac{\beta_1}{\theta}\,v'\right] = e^{-\lambda u}\left[\frac{\alpha_1}{\theta}\,u' - \frac{1}{\lambda}\,\frac{d}{dv}\left(\frac{\alpha_1}{\theta}\right)v'\right],$$

c'est-à-dire en intégrant

$$x = \quad \frac{1}{\lambda}\,e^{\lambda u}\,\alpha\theta,$$

$$y = -\,\frac{1}{\lambda}\,e^{-\lambda\mu}\,\frac{\alpha_1}{\theta};$$

on arrive ainsi à un changement de la forme générale

$$x = e^{\lambda u} f(v),$$
$$y = e^{-\lambda u}\varphi(v).$$

17. Considérons l'expression ϖ

$$\varpi = \mathfrak{X}\,\delta x + \mathfrak{Y}\,\delta y.$$

Le changement précédent la transforme en

$$\mathcal{X}_1\left(\frac{\partial x}{\partial u}\delta u+\frac{\partial x}{\partial v}\delta v\right)+\mathcal{Y}_1\left(\frac{\partial y}{\partial u}\delta u+\frac{\partial y}{\partial v}\delta v\right),$$

$\mathcal{X}_1$ et $\mathcal{Y}_1$ étant les fonctions $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ exprimées au moyen de u et v. Pour que le coefficient de δu soit nul il faut que

$$\mathcal{X}_1\frac{\partial x}{\partial u}+\mathcal{Y}_1\frac{\partial y}{\partial u}=0.$$

Or

$$\frac{\partial x}{\partial u}=\lambda x,\qquad \frac{\partial y}{\partial u}=-\lambda y,$$

de sorte qu'en revenant aux variables x et y, la condition étudiée s'écrit

$$\mathcal{X}x-\mathcal{Y}y=0.$$

18. Considérons la forme primitive réduite

$$2\mathrm{T}=2x'y',$$
$$\mathfrak{T}=\mathcal{X}\,\delta x+\mathcal{Y}\,\delta y;$$

elle donne

$$x''=\mathcal{Y},\qquad x''=\mathcal{X},$$

donc les formes homologues qu'on peut écrire comme il suit

$$2\mathrm{T}=2(\alpha x'+\beta y')(\alpha_1 x'+\beta_1 y'),$$
$$\mathfrak{T}=\mathcal{A}\,\delta x+\mathcal{B}\,\delta y,$$

avec

$$\mathcal{A}=\alpha(\alpha_1\mathcal{Y}+\beta_1\mathcal{X})+\alpha_1(\alpha\mathcal{Y}+\beta\mathcal{X}),$$
$$\mathcal{B}=\beta(\alpha_1\mathcal{Y}+\beta_1\mathcal{X})+\beta_1(\alpha\mathcal{Y}+\beta\mathcal{X}).$$

Effectuons le changement

$$\alpha x+\beta y=\xi,$$
$$\alpha_1 x+\beta_1 y=\eta.$$

La forme homologue sera mise sous la forme réduite

$$2\mathrm{T}=2\xi'\eta',$$
$$\mathfrak{T}=\mathcal{A}\left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\delta\xi+\frac{\partial x}{\partial\eta}\delta\eta\right)+\mathcal{B}\left(\frac{\partial y}{\partial\xi}\delta\xi+\frac{\partial y}{\partial\eta}\delta\eta\right)$$
$$=\mathcal{X}_1\,\delta\xi+\mathcal{Y}_1\,\delta\eta.$$

Pour que cette forme homologue soit susceptible, avec des paramètres convenables, de donner une intégrale linéaire immédiate, il faut avoir

$$\mathcal{X}_1 \xi - \mathcal{Y}_1 \eta = 0,$$

c'est-à-dire

$$\left(\mathcal{A}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \mathcal{B}\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)\xi - \left(\mathcal{A}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \mathcal{B}\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)\eta = 0$$

ou encore, en remplaçant $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ par leurs valeurs,

$$\begin{aligned}
&\mathcal{X}\left\{\left[(\alpha\beta_1 + \alpha_1\beta)\frac{\partial x}{\partial \xi} + 2\beta\beta_1\frac{\partial y}{\partial \xi}\right]\xi - \left[(\alpha\beta_1 + \alpha_1\beta)\frac{\partial x}{\partial \eta} + 2\beta\beta_1\frac{\partial y}{\partial \eta}\right]\eta\right\} \\
&+ \mathcal{Y}\left\{\left[2\alpha\alpha_1\frac{\partial x}{\partial \xi} + (\alpha\beta_1 + \alpha_1\beta)\frac{\partial y}{\partial \xi}\right]\xi - \left[2\alpha\alpha_1\frac{\partial x}{\partial \eta} + (\alpha\beta_1 + \alpha_1\beta)\frac{\partial y}{\partial \eta}\right]\eta\right\} = 0.
\end{aligned}$$

Si nous différentions par rapport à ξ la première formule de transformation nous avons l'égalité

$$\alpha_1\frac{\partial x}{\partial \xi} + \beta_1\frac{\partial y}{\partial \xi} = 0,$$

de laquelle on déduit immédiatement

$$\begin{aligned}
(\alpha\beta_1 + \alpha_1\beta)\frac{\partial x}{\partial \xi} + 2\beta\beta_1\frac{\partial y}{\partial \xi} &= (\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta)\frac{\partial x}{\partial \xi}, \\
2\alpha\alpha_1\frac{\partial x}{\partial \xi} + (\alpha\beta_1 + \alpha_1\beta)\frac{\partial y}{\partial \xi} &= -(\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta)\frac{\partial y}{\partial \xi},
\end{aligned}$$

de même en différentiant la première formule de transformation par rapport à η, on a

$$\alpha\frac{\partial x}{\partial \eta} + \beta\frac{\partial y}{\partial \eta} = 0,$$

d'où l'on déduit

$$\begin{aligned}
(\alpha\beta_1 + \alpha_1\beta)\frac{\partial x}{\partial \eta} + 2\beta\beta_1\frac{\partial y}{\partial \eta} &= -(\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta)\frac{\partial x}{\partial \eta}, \\
2\alpha\alpha_1\frac{\partial x}{\partial \eta} + (\alpha\beta_1 + \alpha_1\beta)\frac{\partial y}{\partial \eta} &= \quad(\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta)\frac{\partial y}{\partial \eta}.
\end{aligned}$$

Si l'on supprime le facteur

$$\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta$$

qui n'est pas nul si la forme homologue considérée est complète, la condition s'écrit donc

$$\mathfrak{X}\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\xi + \frac{\partial x}{\partial \eta}\eta\right) - \mathfrak{Y}\left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\xi + \frac{\partial y}{\partial \eta}\eta\right) = 0$$

ou simplement

$$\mathfrak{X}x - \mathfrak{Y}y = 0.$$

Cette condition est indépendante de la forme homologue considérée. Elle montre que, s'il existe une forme homologue complète possédant la propriété étudiée, toutes les formes, et en particulier la forme primitive, la possèdent, de sorte qu'au point de vue où nous nous plaçons les formes homologues n'ont aucune importance.

La condition trouvée est relative à la forme réduite

$$\begin{aligned} 2\,T &= 2\,x'y', \\ \mathfrak{G} &= \mathfrak{X}\,\delta x + \mathfrak{Y}\,\delta y, \end{aligned}$$

et il est facile d'en déduire la condition relative à la forme réduite

$$\begin{aligned} 2\,T &= x'^2 + y'^2, \\ \mathfrak{G} &= X\,\delta x + Y\,\delta y; \end{aligned}$$

il suffit, en effet, de l'écrire pour une quelconque des formes homologues et en particulier pour la forme

$$\begin{aligned} 2\,T &= 2\,x'y' \\ \mathfrak{G} &= Y\,\delta x + X\,\delta y \end{aligned}$$

qui donne alors la condition

$$Yx - Xy = 0$$

exprimant que l'on a affaire à une force centrale.

19. Considérons le cas intéressant où le système admet une forme homologue à fonction G et possède en même temps la propriété relative aux intégrales linéaires immédiates; on a alors

$$\frac{X}{x} = \frac{Y}{y} = F(xy),$$

donc

$$\mathfrak{U} = x\frac{\partial F}{\partial y}, \qquad \mathfrak{V} = -y\frac{\partial F}{\partial x}, \qquad \mathfrak{W} = y\frac{\partial F}{\partial y} - x\frac{\partial F}{\partial x}$$

et la relation à coefficients constants entre $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ donne

$$\alpha x \frac{\partial F}{\partial y} - \beta y \frac{\partial F}{\partial x} + \gamma \left(y \frac{\partial F}{\partial y} - x \frac{\partial F}{\partial x} \right) = 0,$$

α, β, γ étant trois constantes. On a ainsi l'équation linéaire

$$(\alpha x + \gamma y) \frac{\partial F}{\partial y} - (\gamma x + \beta y) \frac{\partial F}{\partial x} = 0,$$

qui, en posant

$$\omega(x, y) = \alpha x^2 + 2\gamma xy + \beta y^2,$$

peut s'écrire

$$\frac{D(F, \omega)}{D(x, y)} = 0$$

et montre que F est une fonction de ω. On est ainsi amené à la loi de force centrale

$$X = x\, F(\alpha x^2 + 2\gamma xy + \beta y^2),$$
$$Y = y\, F(\alpha x^2 + 2\gamma xy + \beta y^2),$$

qui donne l'intégrale bien connue des aires, mais ne donne pas de fonction de force au sens ordinaire.

Pour intégrer pratiquement, on considérera la forme homologue qui correspond à la fonction

$$\omega(X, Y) = \alpha X^2 + 2\gamma XY + \beta Y^2$$

et qui sera

$$2T = \omega(x', y'),$$
$$\begin{aligned}\varpi &= [\alpha x\, F(\omega) + \gamma y\, F(\omega)]\, \delta x + [\gamma x\, F(\omega) + \beta y\, F(\omega)]\, \delta y \\ &= F(\omega)\, [(\alpha x + \gamma y)\, \delta x + (\gamma x + \beta y)\, \delta y] \\ &= \frac{1}{2} F(\omega)\, \delta\omega.\end{aligned}$$

Si l'on pose

$$\int \frac{1}{2} F(\omega)\, d\omega = U(\omega),$$

cette forme homologue deviendra

$$2G = \omega(x', y') + 2\, U[\omega(x, y)].$$

Si ω est à discriminant négatif, on peut écrire

$$\omega(x, y) = (\alpha x + \beta y)(\alpha_1 x + \beta_1 y),$$

et, en posant

$$\begin{aligned} \alpha x + \beta y &= e^u v, \\ \alpha_1 x + \beta_1 y &= e^{-u}, \end{aligned}$$

on est ramené à

$$2\,G = -\,v u'^2 - u' v' + 2\,U(v),$$

c'est-à-dire au cas régulier d'intégration par quadratures.

Si ω est à discriminant positif, on peut écrire

$$\omega(x, y) = (\alpha x + \beta y)^2 + (\alpha_1 x + \beta_1 y)^2,$$

et, en posant

$$\begin{aligned} \alpha x + \beta y &= u \cos v, \\ \alpha_1 x + \beta_1 y &= u \sin v, \end{aligned}$$

on est encore ramené au cas régulier avec la fonction génératrice

$$2\,G = u'^2 + u^2 v'^2 + 2\,U(u^2)$$

d'un problème de force centrale fonction de la distance.

20. Dans ce qui précède, nous avons fait implicitement l'hypothèse que la forme homologue à fonction G était une forme complète.

La relation

$$\alpha\,\mho + \beta\,\Upsilon + \gamma\,\Psi = 0$$

donne la forme homologue à fonction G qui correspond à

$$F(X, Y) = \alpha X^2 + 2\gamma XY + \beta Y^2.$$

Si donc les trois constantes α, β, γ sont telles que

$$\alpha\beta - \gamma^2 = 0,$$

la forme à fonction G est une forme homologue incomplète.

Le calcul du paragraphe précédent est encore valable mais conduit maintenant à une fonction ω qui est un carré parfait c'est-à-dire, en définitive, à la loi de force centrale

$$\begin{aligned} X &= x\,F(\alpha x + \beta y), \\ Y &= y\,F(\alpha x + \beta y), \end{aligned}$$

qui ne donne pas de fonction de force au sens ordinaire. Nous ne savons pas *a priori* s'il y a intégration par quadratures, parce que l'intégrale des forces vives qui existe n'est pas celle d'une forme complète. Pour tenter l'intégration faisons un changement orthogonal, l'une des nouvelles variables étant

$$\alpha x + \beta y;$$

on sera ramené à la forme

$$2\mathrm{T} = x'^2 + y'^2,$$
$$\mathfrak{S} = \mathrm{F}(x)(x\,\delta x + y\,\delta y)$$

et l'équation de Lagrange relative à x ne contient que cette inconnue; elle s'écrit

$$x'' = x\,\mathrm{F}(x)$$

et donne l'intégrale des forces vives

$$x'^2 = 2\int x\,\mathrm{F}(x)\,dx + h,$$

qui est celle de la forme incomplète à fonction G qui correspond à la fonction X^2.

L'équation correspondant à y est ensuite

$$y'' = y\,\mathrm{F}(x)$$

qu'on pourrait intégrer comme équation linéaire, mais qu'il vaut mieux remplacer par l'intégrale des aires

$$xy' - yx' = \mathrm{C},$$

qui, en posant

$$y = zx,$$

devient

$$z'x^2 = \mathrm{C}$$

et donne z par une quadrature.

Les deux lois que nous venons de trouver pour les forces centrales contiennent comme cas particulier les lois de MM. Darboux et Halphen, et, si l'on faisait la transformation d'Halphen, on retomberait sur la loi de force de direction constante étudiée au paragraphe 13. Ce passage d'un cas ne donnant qu'une seule intégrale de force vive à un cas en donnant deux est curieux et tient à ce que la transformation est choisie de façon à transformer l'intégrale linéaire des aires qui existe dans le cas de la force centrale en une autre intégrale linéaire

$$x' = \text{const.}$$

qui peut être considérée comme intégrale quadratique

$$x'^2 = \text{const.}$$

et intégrale de force vive du système transformé.

II.

Les systèmes à trois paramètres et à formes homologues.

21. Considérons un système matériel holonome dont la force vive est réductible, par équivalence et par un choix convenable de paramètres à la forme ponctuelle

$$2\mathrm{T} = \Sigma q'^2,$$

et soit, avec ces paramètres,

$$\mathfrak{T} = \Sigma \mathrm{Q}\,\delta q$$

le travail virtuel. On a alors les équations du mouvement

$$q''_1 = \mathrm{Q}_1, \quad \ldots, \quad q''_n = \mathrm{Q}_n.$$

Considérons alors une forme

$$2\mathrm{T} = \mathrm{F}(q'), \qquad \mathfrak{T} = \Sigma \mathrm{R}\,\delta q,$$

F étant quadratique homogène à coefficients constants. Elle donnera les équations

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial q''_1} = \mathrm{R}_1, \quad \ldots, \quad \frac{1}{2}\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial q''_n} = \mathrm{R}_n,$$

et doit, pour être homologue de la forme ponctuelle, être vérifiée par les valeurs Q des q''. On doit donc avoir

$$\mathrm{R}_1 = \frac{1}{2}\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{Q}_1}, \quad \ldots, \quad \mathrm{R}_n = \frac{1}{2}\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{Q}_n},$$

de sorte que le système admet toutes les formes homologues

$$2T = F(q'_1, \ldots, q'_n),$$
$$\mathcal{E} = \sum \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial Q} \delta q,$$

où F est une forme quadratique homogène à coefficients constants complètement arbitraire. Les formes F à discriminant non nul fourniront des *formes homologues complètes* dont chacune fournit un système d'équations rigoureusement équivalent au système primitif. Les formes F à discriminant nul fourniront des *formes homologues incomplètes*.

22. Supposant que t ne figure pas dans la forme réduite, cherchons si une forme homologue peut mettre en évidence une fonction de force et, par conséquent, une fonction génératrice et une intégrale de force vive.

Il faut pour cela que les n quantités

$$\frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial Q_1}, \quad \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial Q_2}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial Q_n}$$

soient les dérivées partielles d'une même fonction de $q_1, q_2, \ldots, q_n$.

On a à écrire que

$$\frac{n(n-1)}{2}$$

fonctions de $q_1, q_2, \ldots, q_n$ sont identiquement nulles. On obtient de cette façon des relations entre les coefficients constants et inconnus de F, relations qui peuvent être compatibles ou incompatibles. Si elles sont compatibles elles sont forcément linéaires et homogènes, car si $F_1, F_2, \ldots, F_p$ donnent des fonctions de force, il en sera de même de

$$F = \lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 + \ldots + \lambda_p F_p,$$

les λ étant des constantes arbitraires. Les formes F donnant des fonctions de force formeront ainsi forcément une série linéaire.

Dans ce qui va suivre, nous nous bornerons à faire la discussion pour un système à trois paramètres avec les paramètres x, y, z que nous considérerons comme des coordonnées. Nous partirons donc de

$$2T = x'^2 + y'^2 + z'^2,$$
$$\mathcal{E} = X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z.$$

23. Les formes homologues peuvent-elles être toutes à fonction G? Si l'on écrit que la fonction

$$F(X, Y, Z) = AX^2 + BY^2 + CZ^2 + 2DYZ + 2EZX + 2FXY$$

donne une forme homologue à fonction G, quelles que soient les constantes A, B, C, D, E, F, on trouve immédiatement

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial X}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial Z}{\partial y} = 0,$$
$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y} = \frac{\partial Z}{\partial z},$$

d'où l'on déduit immédiatement, après une translation convenable,

$$X = \rho x, \qquad Y = \rho y, \qquad Z = \rho z,$$

ρ étant une constante. C'est l'attraction proportionnelle à la distance déjà rencontrée dans les systèmes à deux paramètres et dont il n'y a plus lieu de s'occuper.

24. Peut-il arriver que toutes les formes homologues à fonction G soient incomplètes? Il faut que tous les cônes F de la série linéaire se décomposent en deux plans. Ce fait ne peut se produire que si p est égal à 3 ou à 2. Si $p = 3$, le couple F se compose d'un plan fixe et d'un plan complètement arbitraire ou de deux plans arbitraires issus d'une droite fixe, de sorte que par un choix évident d'axes rectangulaires on peut supposer que la série F est de l'une des deux formes

$$X(\lambda X + 2\mu Y + 2\nu Z),$$
$$\lambda X^2 + \mu Y^2 + 2\nu XY.$$

Écrivons alors que les trois conditions

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial Y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial X}\right),$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial Z}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial Y}\right),$$
$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial X}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial Z}\right)$$

sont vérifiées quelles que soient les trois constantes λ, μ, ν. Nous obtiendrons dans le premier cas

$$\begin{aligned}X &= f(x),\\ Y &= y\,f'(x) + \varphi(x),\\ Z &= z\,f'(x) + \psi(x),\end{aligned}$$

donnant les trois intégrales de force vive

$$x'^2 = 2\int f(x)\,dx + \alpha = 2\,F(x) + \alpha,$$

$$x'y' = y\,f(x) + \int \varphi(x)\,dx + \beta = y\,F'(x) + \Phi(x) + \beta,$$

$$x'z' = z\,f(x) + \int \psi(x)\,dx + \gamma = z\,F'(x) + \Psi(x) + \gamma.$$

La première donne x par une quadrature et, connaissant x, les deux dernières donnent

$$y = x'\int \frac{\Phi(x)+\beta}{2\,F(x)+\alpha}\,dt, \qquad z = x'\int \frac{\Psi(x)+\gamma}{2\,F(x)+\alpha}\,dt.$$

On a donc l'intégration complète par quadratures.

Passons au second cas. On voit immédiatement que X et Y sont indépendantes de z, de sorte que x et y seront déterminés par le système

$$x'' = X(x, y), \qquad y'' = Y(x, y)$$

et que z sera ensuite déterminé par

$$z'' = Z(x, y, z).$$

Enfin le système en xy satisfait aux conditions

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y},$$

donc est dans le cas de la force centrale proportionnelle à la distance. Dans ce cas nous n'arrivons donc pas à l'intégration complète par quadratures; par l'intégration d'un problème d'attraction proportionnelle à la distance, on obtient la réduction au problème du mouvement rectiligne d'un point avec une force dépendant en général du temps.

Si $p = 2$, le couple F ne peut être composé que d'un plan fixe et d'un plan variable issu d'une droite fixe ou de deux plans issus d'une droite fixe et appartenant à un faisceau involutif.

Examinons d'abord ce dernier cas. En prenant des axes rectangulaires convenables dont l'axe des z sera l'axe du faisceau, on aura les formes

$$F = \lambda F_1 + \mu F_2,$$

F_1 et F_2 ne contenant pas Z. En écrivant les conditions on trouvera d'abord que X et Y ne dépendent pas de z, de sorte que x et y seront déterminés par le système

$$x'' = X(x, y), \qquad y'' = Y(x, y)$$

et que z sera ensuite déterminé par

$$z'' = Z(x, y, z).$$

Mais le système en x, y est dans le cas de l'involution ; on a, pour lui,

$$\frac{\mathfrak{U}}{\alpha} = \frac{\mathfrak{V}}{\beta} = \frac{\mathfrak{W}}{\gamma},$$

α, β, γ étant les constantes convenables et nous avons vu dans l'étude du mouvement plan qu'on avait toujours l'intégration par quadratures. Ainsi, par des quadratures fournissant deux des paramètres, on est ramené à un problème de mouvement rectiligne d'un point.

Arrivons enfin au dernier cas. Changeons d'axes rectangulaires en prenant le plan fixe comme plan des xy et, comme plan des zx, le plan perpendiculaire passant par la droite fixe, laquelle n'est pas dans le plan fixe sans quoi on serait dans le cas précédent avec la fausse involution. Avec ces axes on aura les formes F

$$F = Z[2\lambda Y + \mu(Z + 2KX)],$$

où K est une constante fixe non nulle, et donnant les conditions

$$\mu K \frac{\partial Z}{\partial y} = \lambda \frac{\partial Z}{\partial x},$$

$$\mu K \frac{\partial Z}{\partial y} = \lambda \frac{\partial Y}{\partial x} + \mu K \frac{\partial X}{\partial x} + \mu \frac{\partial Z}{\partial x},$$

$$\lambda \frac{\partial Z}{\partial y} = \lambda \frac{\partial Y}{\partial y} + \mu K \frac{\partial X}{\partial y} + \mu \frac{\partial Z}{\partial y},$$

exigeant, puisque λ et μ sont arbitraires,

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial Z}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x} = 0,$$
$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial Z}{\partial y}, \qquad \frac{\partial Y}{\partial y} = \frac{\partial Z}{\partial y};$$

et l'on voit immédiatement que, s'il en est ainsi, les trois conditions précédentes sont réalisées quelles que soient les trois constantes λ, μ et K, de sorte qu'on a des formes à fonctions G en associant le plan des x, y avec un plan complètement arbitraire et l'on se trouve dans le cas de $p = 3$. Le cas qui nous restait à examiner n'existe donc pas.

25. Arrivons maintenant au cas où, p étant au moins égal à 2, les formes homologues à fonction de force ne sont pas toutes incomplètes.

Choisissons dans la série, d'une façon quelconque, une forme complète

$$(\mathcal{F}) \qquad 2G = F(x', y', z') + 2U(x, y, z),$$

puis une autre forme complète ou incomplète

$$(\mathcal{F}_1) \qquad 2G_1 = F_1(x', y', z') + 2U_1(x, y, z),$$

sans même nous donner la peine de former la fonction U_1 qui n'interviendra que dans le raisonnement.

Considérons les deux cônes

$$F(X, Y, Z) = 0, \qquad F_1(X, Y, Z) = 0$$

dont le premier est un cône véritable; cherchons-en un système de diamètres conjugués communs, problème qui se ramène à une équation du troisième degré. Au moyen des trois plans trouvés

$$P(X, Y, Z) = 0, \qquad Q(X, Y, Z) = 0, \qquad R(X, Y, Z) = 0,$$

nous pourrons, en posant

$$x_1 = \alpha\, P(X, Y, Z),$$
$$y_1 = \beta\, Q(X, Y, Z),$$
$$z_1 = \gamma\, R(X, Y, Z),$$

α, β, γ étant trois constantes convenables, écrire

$$F = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2, \qquad F_1 = a x_1^2 + b y_1^2 + c z_1^2,$$

c'est-à-dire faire la réduction simultanée des deux formes F et F_1 à des sommes de carrés. Avec ces nouveaux paramètres les deux formes deviendront

$$\begin{aligned} 2G &= x_1'^2 + y_1'^2 + z_1'^2 + 2U(x_1, y_1, z_1), \\ 2G_1 &= a x_1'^2 + b y_1'^2 + c z_1'^2 + 2U_1(x_1, y_1, z_1) \end{aligned}$$

et seront homologues l'une de l'autre. Mais la première est sous forme réduite avec

$$X_1 = \frac{\partial U}{\partial x_1}, \qquad Y_1 = \frac{\partial U}{\partial y_1}, \qquad Z_1 = \frac{\partial U}{\partial z_1},$$

et, puisque la forme quadratique

$$F_1 = a X_1^2 + b Y_1^2 + c Z_1^2$$

conduit à une forme homologue à fonction de force, les trois quantités

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{\partial F_1}{\partial X_1} &= a X_1 = a \frac{\partial U}{\partial x_1}, \\ \frac{1}{2}\frac{\partial F_1}{\partial Y_1} &= b Y_1 = b \frac{\partial U}{\partial y_1}, \\ \frac{1}{2}\frac{\partial F_1}{\partial Z_1} &= c Z_1 = c \frac{\partial U}{\partial z_1} \end{aligned}$$

doivent être les dérivées partielles d'une même fonction de x_1, y_1, z_1, ce qui donne les trois conditions

$$\begin{aligned} (b - c)\frac{\partial^2 U}{\partial y_1 \partial z_1} &= 0, \\ (c - a)\frac{\partial^2 U}{\partial z_1 \partial x_1} &= 0, \\ (a - b)\frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial y_1} &= 0. \end{aligned}$$

Suivant les valeurs de a, b, c apparaissent alors des conséquences bien différentes.

26. Si les trois nombres a, b, c sont distincts, les égalités précé-

dentes donnent

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y_1 \partial z_1} = \frac{\partial^2 U}{\partial z_1 \partial x_1} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial y_1} = 0,$$

ce qui montre que U est décomposable sous la forme

$$U = \mathfrak{X}(x_1) + \mathfrak{Y}(y_1) + \mathfrak{Z}(z_1).$$

De là résulte deux faits importants :

Le premier est qu'avec la forme homologue choisie et les paramètres adoptés ou d'autres n'en différant que par des facteurs constants, on a la décomposition complète en paramètres isolés dont chacun est donné par une intégrale de forces vives. Il y a donc intégration complète par quadratures.

Le second est relatif à la série des formes homologues à fonction de force. On peut, pour chercher ces formes, partir de la forme ($\mathfrak{F}$) avec les paramètres ξ, η, ζ, c'est-à-dire, en définitive, de la forme

$$2G = x'^2 + y'^2 + z'^2 + 2\mathfrak{X} + 2\mathfrak{Y} + 2\mathfrak{Z},$$

$\mathfrak{X}$ ne dépendant que de x, $\mathfrak{Y}$ que de y et $\mathfrak{Z}$ de z. Prenons une fonction F homogène et du second degré, on aura

$$\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial X} = A\mathfrak{X}' + F\mathfrak{Y}' + E\mathfrak{Z}',$$
$$\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial Y} = F\mathfrak{X}' + B\mathfrak{Y}' + D\mathfrak{Z}',$$
$$\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial Z} = E\mathfrak{X}' + D\mathfrak{Y}' + C\mathfrak{Z}';$$

donc les trois conditions pour avoir une fonction de force sont

$$D\,\mathfrak{Z}'' = D\,\mathfrak{Y}'',$$
$$E\mathfrak{X}'' = E\,\mathfrak{Z}'',$$
$$F\,\mathfrak{Y}'' = F\mathfrak{X}''$$

et se réduisent à

$$D = E = F = 0,$$

de sorte qu'on a toutes les formes homologues à fonction G fournies par la série

$$F = AX^2 + BY^2 + CZ^2,$$

A, B, C étant arbitraires. On a donc exactement

$$p = 3.$$

La conclusion précédente serait en défaut si deux des dérivées secondes $\mathfrak{X}''$, $\mathfrak{Y}''$, $\mathfrak{Z}''$ étaient des constantes égales. Si l'on a, par exemple,

$$\mathfrak{Y}'' = \mathfrak{Z}'' = \mathrm{K},$$

il ne reste que les deux conditions

$$\mathrm{E} = \mathrm{F} = 0,$$

et l'on a, pour les formes F, la série

$$\mathrm{F} = \mathrm{AX}^2 + \mathrm{BY}^2 + \mathrm{CZ}^2 + 2\,\mathrm{DYZ},$$

pour laquelle on a

$$p = 4.$$

Enfin si

$$\mathfrak{X}'' = \mathfrak{Y}'' = \mathfrak{Z}'' = \mathrm{K},$$

il ne reste aucune condition et l'on a la série F constituée par une forme quadratique absolument arbitraire. C'est le cas

$$p = 6,$$

déjà rencontré et fourni par une force centrale proportionnelle à la distance.

Nous remarquerons en outre que les deux formes $(\mathcal{F})$ et $(\mathcal{F}_1)$ que nous avons utilisées sont données par les deux cônes

$$\begin{gathered} x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 0, \\ a x_1^2 + b y_1^2 + c z_1^2 = 0, \end{gathered}$$

et que la condition que a, b, c soient inégaux exprime qu'ils ne sont pas bitangents.

En résumé, si, parmi la série des cônes F fournissant les formes à fonctions G, il y a deux cônes non bitangents, l'un d'eux étant un cône véritable, on est forcément dans l'un des deux cas

$$p = 3, \qquad p = 4,$$

ou bien dans le cas de l'attraction proportionnelle à la distance et l'intégration se fait complètement par quadratures.

En pratique, quand on aura trouvé les trois plans diamétraux conjugués P, Q, R, communs à deux formes F et F_1 non bitangentes appartenant à la série, on posera

$$\xi = P(x, y, z), \qquad \eta = Q(x, y, z), \qquad \zeta = R(x, y, z),$$

on cherchera ξ'', y'', ζ'' par les formules

$$\begin{aligned} \xi'' &= P(x'', y'', z'') = P(X, Y, Z), \\ \eta'' &= Q(x'', y'', z'') = Q(X, Y, Z), \\ \zeta'' &= R(x'', y'', z'') = R(X, Y, Z), \end{aligned}$$

et l'on constatera ce fait (connu *a priori* par suite de la décomposition démontrée) que P(X, Y, Z) est une fonction de $P(x, y, z)$, c'est-à-dire de ξ; que Q(X, Y, Z) est une fonction de η et que R(X, Y, Z) est une fonction de ζ, ce qui nous fournira la décomposition effective.

27. Supposons que deux des trois nombres a, b, c soient égaux, par exemple

$$a = b.$$

Les trois conditions relatives à $U(x_1, y_1, z_1)$ se réduiront à

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y_1\, \partial z_1} = 0, \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial z_1\, \partial x_1} = 0,$$

et nous montreront qu'on a

$$U(x_1, y_1, z_1) = V(x_1, y_1) + \mathfrak{F}(z_1).$$

On a encore une décomposition, mais seulement en deux groupes. Le paramètre z_1 est isolé et sera donné par quadratures. Quant aux deux paramètres x_1 et y_1 ils seront fournis par le système

$$2\,G_{x_1 y_1} = x_1'^2 + y_1'^2 + 2\,V(x_1, y_1),$$

qui possède l'intégrale des forces vives, mais qu'on ne peut pas intégrer par quadratures dans le cas général.

Cherchons les formes homologues à fonction G. Nous pouvons, pour cela, partir de la forme ($\mathcal{F}$) qui, avec les paramètres adoptés, s'écrit

$$\begin{aligned} 2T &= x'^2 + y'^2 + z'^2, \\ \mathfrak{T} &= \frac{\partial V}{\partial x}\delta x + \frac{\partial V}{\partial y}\delta y + \mathfrak{F}'\,\delta z. \end{aligned}$$

Nous devons prendre une forme quadratique

$$F(XY) = AX^2 + BY^2 + CZ^2 + 2DYZ + 2EZX + 2FXY,$$

former les trois quantités

$$\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial X} = A\frac{\partial V}{\partial x} + F\frac{\partial V}{\partial y} + E\mathfrak{z}',$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial Y} = F\frac{\partial V}{\partial x} + B\frac{\partial V}{\partial y} + D\mathfrak{z}',$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial Z} = E\frac{\partial V}{\partial x} + D\frac{\partial V}{\partial y} + C\mathfrak{z}',$$

et écrire que ce sont les trois dérivées partielles d'une même fonction. On a ainsi

$$E\mathfrak{z}'' = E\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + D\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y},$$

$$D\mathfrak{z}'' = E\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y} + D\frac{\partial^2 V}{\partial y^2},$$

$$A\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y} + F\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = F\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}.$$

La dernière exprime que la fonction quadratique

$$AX^2 + BY^2 + 2FXY$$

fournit une forme homologue à fonction G du système

$$2G = x'^2 + y'^2 + 2V(x, y)$$

déterminant x, y. Les deux premières équations étant vérifiées en prenant

$$D = E = 0,$$

on voit ainsi que si le système en x, y admet une infinité de formes homologues à fonction G, le système en x, y, z est en réalité dans le cas

$$p = 3,$$

et la décomposition incomplète tient à ce que les deux formes $(\mathcal{F})$ et $(\mathcal{F}_1)$ servant de base à la réduction correspondent à deux cônes bitangents; si l'on était parti de deux cônes non bitangents pris dans la série triple, on aurait obtenu directement la décomposition complète.

Supposons que le système en x, y n'admette que sa forme initiale comme forme à fonction G, la dernière condition exigera

$$A = B, \qquad F = 0.$$

Si $\mathcal{L}''$ n'est pas une constante, les deux premières exigeront

$$D = E = 0,$$

et si $\mathcal{L}''$ est une constante, son élimination conduira à

$$(D^2 - E^2)\frac{\partial^2 V}{\partial x\, \partial y} = ED\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right),$$

c'est-à-dire, avec les notations des systèmes à deux paramètres, à

$$\frac{\mathcal{W}}{\mathcal{U}} = \text{const.},$$

et comme on a déjà, pour ce système,

$$\mathcal{U} + \mathcal{V} = 0,$$

les trois fonctions $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$ seraient proportionnelles à des constantes, ce qui est impossible, le système en x, y n'admettant qu'une seule forme à fonction G; on est donc obligé de prendre

$$D^2 - E^2 = 0, \qquad DE = 0,$$

c'est-à-dire

$$D = E = 0.$$

Dans tous les cas on a donc les seules formes à fonction G fournies par les fonctions

$$F(X, Y, Z) = A(X^2 + Y^2) + CZ^2$$

pour lesquelles on a

$$p = 2,$$

et qui forment une série de cônes bitangents. Alors, quels que soient les deux cônes de la série pris comme base du calcul, on retombera toujours sur la même décomposition incomplète et sur un mouvement plan possédant une seule forme à fonction G et, par suite, une seule intégrale de force vive.

Pratiquement on cherchera le plan des contacts P de la série, puis deux plans Q, R conjugués entre eux et avec P dans un quelconque des cônes. Prenant alors P, Q, R comme nouveaux paramètres ξ, η, ζ, on calculera ξ'', η'', ζ'' comme dans le cas précédent et l'on trouvera que ξ'' ne dépend que de ξ, tandis que η'' et ζ'' sont des fonctions des deux variables η, ζ. On aura ainsi en évidence la décomposition.

28. La discussion des cas où il y a une infinité de formes homologues à fonction G peut se résumer ainsi :

1° $p=2$. — *a.* La série comprend de vrais cônes. C'est forcément une série de cônes bitangents et, par des quadratures, on est ramené au mouvement d'un point dans un plan avec une et une seule intégrale de force vive ;

b. Tous les cônes de la série sont décomposables. Le cône variable F est alors formé par un couple de plans homologues dans une involution vraie ou fausse autour d'une droite fixe. Par des quadratures on est ramené au mouvement rectiligne d'un point sans intégrale de force vive.

2° $p=3$. — *a.* La série comprend de vrais cônes. On a l'intégration complète par quadratures;

b. Tous les cônes de la série sont décomposables en un couple de plans. Ce couple est formé d'un plan fixe et d'un plan arbitraire ou de deux plans arbitraires issus d'une droite fixe ;

b_1. Le couple a un plan fixe. Le problème s'intègre complètement par quadratures ;

b_2. Le couple est formé de deux plans arbitraires issus d'une droite fixe. Par des quadratures on est ramené au mouvement rectiligne sans intégrale de force vive.

3° $p=4$. — La série contient forcément de vrais cônes et l'on a l'intégration complète par quadratures.

4° $p=5$. — Ce cas n'existe pas.

5° $p=6$. — C'est le cas de la force centrale proportionnelle à la distance.

29. Comme premier exemple, considérons une loi de force telle que

les équations du mouvement admettent les formes homologues à fonction G correspondant à deux cônes non bitangents. On sait qu'on aura l'intégration par quadratures. Prenons les deux formes

$$X^2 + 2YZ, \qquad Y^2 + 2ZX,$$

qui donnent bien deux cônes non bitangents. Pour la première on a

$$\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial X} = X,$$
$$\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial Y} = Z,$$
$$\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial Z} = Y,$$

d'où les conditions

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Z}{\partial x}, \qquad \frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial Y}{\partial x}, \qquad \frac{\partial Z}{\partial z} = \frac{\partial Y}{\partial y}.$$

Pour la seconde on a

$$\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial X} = Z,$$
$$\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial Y} = Y,$$
$$\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial Z} = X,$$

d'où les conditions

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}, \qquad \frac{\partial Z}{\partial z} = \frac{\partial X}{\partial x}, \qquad \frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial X}{\partial y}.$$

Ces six conditions peuvent s'écrire

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y} = \frac{\partial Z}{\partial z},$$
$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial x},$$
$$\frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial Z}{\partial y}$$

et se déduisent les unes des autres par permutation circulaire sur xyz. Elles expriment aussi que

$$Y, \quad X, \quad Z \; \ldots$$

sont les dérivées d'une même fonction, c'est-à-dire que la forme quadratique

$$Z^2 + 2XY$$

donne également une forme à fonction G. On est donc dans le cas $p = 3$ avec la série linéaire

$$F = \lambda(X^2 + 2YZ) + \mu(Y^2 + 2ZX) + \nu(Z^2 + 2XY).$$

Pour faire l'intégration nous devrons chercher un système de plans diamétraux conjugués communs aux deux cônes primitifs. Un calcul élémentaire de Géométrie analytique nous conduit aux trois plans

$$\begin{aligned} X + \quad Y + \quad Z &= 0,\\ X + \alpha\, Y + \alpha^2 Z &= 0.\\ X + \alpha^2 Y + \alpha\, Z &= 0, \end{aligned}$$

α et α^2 étant les deux racines cubiques imaginaires de l'unité. On est donc conduit à prendre ces trois fonctions comme nouveaux paramètres et à former ξ'', η'', ζ'' qui, en vertu des relations vérifiées par X, Y, Z, se réduisent à des fonctions de ξ, η, ζ respectivement.

Nous retrouvons ainsi, comme cas très particulier des cas d'intégration par quadratures mis en évidence au moyen des formes homologues, un cas signalé par M. Appell (¹) avec un procédé d'intégration qui est précisément l'application du procédé relatif au cas général.

30. Comme second exemple, considérons la loi de force

$$\begin{aligned} X &= x(P^2 + \theta) - P\theta,\\ Y &= y(P^2 + \theta) - P\theta,\\ Z &= z(P^2 + \theta) - P\theta \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} P &= x + y - z,\\ \theta &= z^2 - 2xy. \end{aligned}$$

Pour que

$$F(XYZ) = AX^2 + BY^2 + CZ^2 + 2DYZ + 2EZX + 2FXY$$

(¹) *C. R. Acad. Sc.*, 19 mars 1877.

donne une fonction de force, il faut trois conditions qui exigent

$$B = A, \qquad D = E = -A, \qquad F = 2A - C.$$

On a donc la série

$$F = A[X^2 + Y^2 - 2YZ - 2ZX + 4XY] + C(Z^2 - 2XY)$$

pour laquelle

$$p = 2,$$

et qui contenant le cône

$$Z^2 - 2XY = 0,$$

qui n'est pas décomposable, doit être une série de cônes bitangents. Si nous considérons le cône particulier

$$A = 1, \qquad C = 1,$$

nous obtenons

$$F = (X + Y - Z)^2 = P^2(X, Y, Z).$$

Si l'on remarque qu'on a identiquement

$$Z^2 - 2XY = (X - Z)^2 + (Y - Z)^2 - (X + Y - Z)^2,$$

on voit que les deux plans

$$X - Z = 0,$$
$$Y - Z = 0$$

forment avec le plan P un système de trois plans diamétraux conjugués dans les cônes F. On doit donc poser

$$\xi = x + y - z,$$
$$\eta = x - z,$$
$$\zeta = y - z.$$

On a

$$\xi'' = x'' + y'' - z'' = X + Y - Z = (x + y - z)(P^2 + \theta) - P\theta = P^3(x, y, z) = \xi^3,$$

$$\eta'' = x'' - z'' = X - Z = (x - z)(P^2 + \theta)$$
$$= (x - z)[(x - z)^2 + (y - z)^2] = \eta(\eta^2 + \zeta^2),$$

$$\zeta'' = y'' - z'' = Y - Z = (y - z)(P^2 + \theta)$$
$$= (y - z)[(x - z)^2 + (y - z)^2] = \zeta(\eta^2 + \zeta^2).$$

On a donc ξ par l'intégrale des forces vives

$$\xi'^2 = \frac{1}{2}\xi^4 + \alpha,$$

et η, ζ par le mouvement plan avec la force

$$\eta(\eta^2+\zeta^2), \quad \zeta(\eta^2+\zeta^2);$$

c'est un problème de force centrale fonction de la distance avec la loi

$$\mathrm{F} = r^3,$$

et on l'intégrera par quadratures.

31. Le cas où il n'y a qu'une seule forme homologue à fonction G ne donne lieu à aucune remarque très intéressante. Il semble difficile de pouvoir généraliser les raisonnements faits dans le cas analogue de deux paramètres. Nous nous bornerons à chercher les lois de force centrale qui sont dans ce cas. On a alors

$$\mathrm{X} = x\,\Phi(x, y, z), \qquad \mathrm{Y} = y\,\Phi(x, y, z), \qquad \mathrm{Z} = z\,\Phi(x, y, z).$$

Soit $\omega(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z})$ la forme quadratique donnant la fonction de force, on aura

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\omega}{\partial \mathrm{X}} = \frac{1}{2}\Phi\frac{\partial\omega}{\partial x}, \qquad \frac{1}{2}\frac{\partial\omega}{\partial \mathrm{Y}} = \frac{1}{2}\Phi\frac{\partial\omega}{\partial y}, \qquad \frac{1}{2}\frac{\partial\omega}{\partial \mathrm{Z}} = \frac{1}{2}\Phi\frac{\partial\omega}{\partial z},$$

d'où les trois conditions

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\partial\omega}{\partial x} - \frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial\omega}{\partial y} = 0,$$
$$\frac{\partial\Phi}{\partial z}\frac{\partial\omega}{\partial y} - \frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\partial\omega}{\partial z} = 0,$$
$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial\omega}{\partial z} - \frac{\partial\Phi}{\partial z}\frac{\partial\omega}{\partial x} = 0,$$

qui expriment que Φ est une fonction de $\omega(x, y, z)$. On a donc la loi de force

$$\mathrm{X} = x\,\mathcal{F}(\omega),$$
$$\mathrm{Y} = y\,\mathcal{F}(\omega),$$
$$\mathrm{Z} = z\,\mathcal{F}(\omega),$$

ω étant une forme quadratique homogène en x, y, z.

Si la forme ω est un carré parfait, le résultat est toujours le même, mais se met sous la forme plus simple consistant à considérer alors ω comme une fonction homogène et du premier degré de x, y, z.

Dans le cas où ω est du second degré on ramènera à une attraction fonction de la distance en considérant la forme homologue complète qui correspond à la forme quadratique ω.

Dans le cas où ω est du premier degré nous ne pouvons plus faire de même, car ω^2 fournit une forme homologue incomplète.

On fera un changement orthogonal en prenant ω comme variable z. On sera ainsi amené à un système de même genre, mais où la fonction ω sera z:

$$X = x\mathcal{F}(z), \qquad Y = y\mathcal{F}(z), \qquad Z = z\mathcal{F}(z),$$

z est donné par la dernière au moyen d'une intégrale de forces vives. On a ensuite les deux intégrales des aires

$$xz' - zx' = \alpha,$$
$$yz' - zy' = \beta,$$

qui, en posant

$$x = uz, \qquad y = vz,$$

donnent u et v par des quadratures

$$u' = \frac{\alpha}{z^2}, \qquad v' = \frac{\beta}{z^2}.$$

Nous avons ainsi la généralisation du cas correspondant de deux paramètres. Il est à remarquer d'ailleurs que, la trajectoire étant plane, on serait ramené, dans ce plan, à une loi de force centrale fournie par l'intersection de la quadrique ω avec le plan de la trajectoire, de sorte que le cas de l'espace ne diffère pas, au fond, du cas du plan.

32. Il est à remarquer que le fait de l'intégration ou de la décomposition qui est fourni rien que par la considération de deux formes homologues à fonction G, même quand il existe une série pour laquelle p est supérieur à deux, se généralise pour un nombre quelconque de paramètres.

Soient deux formes homologues à fonction G fournies l'une par une forme quadratique

$$F(x_1, \ldots, x_n)$$

supposée à discriminant non nul et l'autre fournie par la forme quadratique

$$F_1(x_1, \ldots, x_n)$$

dont le discriminant peut être nul. Si nous faisons un changement de paramètres de façon à obtenir la réduction simultanée de F et F_1 à des sommes de carrés, nous obtiendrons deux formes qu'on pourra écrire

$$\begin{aligned} 2G &= x_1'^2 + \ldots + x_n'^2 + 2U(x_1, \ldots, x_n), \\ 2G_1 &= a_1 x_1'^2 + \ldots + a_n x_n'^2 + 2U_1(x_1, \ldots, x_n); \end{aligned}$$

nous voyons que la première forme, qui est réduite, admet la forme homologue à fonction G définie par la forme quadratique

$$\Sigma a X^2,$$

d'où résultent les conditions

$$(a_i - a_j)\frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} = 0.$$

Si les a sont inégaux entre eux on en déduit les conditions

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} = 0,$$

qui montrent qu'on a

$$U = \mathfrak{X}_1(x_1) + \mathfrak{X}_2(x_2) + \ldots + \mathfrak{X}_n(x_n),$$

c'est-à-dire la décomposition en paramètres isolés, donc l'intégration complète par quadratures.

Si les coefficients a ne sont pas inégaux entre eux, on pourra les partager en plusieurs groupes tels que tous les a d'un même groupe soient égaux et que deux a de deux groupes différents soient inégaux. Les variables x correspondantes formeront des groupes correspondants tels qu'on ait

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} = 0$$

chaque fois que x_i et x_j appartiendront à deux groupes différents, et il en résulte immédiatement que U se décompose en plusieurs morceaux dont chacun ne contient que les variables x d'un même groupe.

Comme les formes F et F_1 sont distinctes, les a ne peuvent être tous égaux, donc forment au moins deux groupes, de sorte que la considération des deux formes homologues à fonction G fournit une décomposition en un nombre de groupes compris entre 2 et n et un nombre correspondant d'intégrales de force vive. Il peut arriver qu'à certains des systèmes partiels on puisse appliquer le même raisonnement et qu'ils donnent des intégrales de force vive décomposables; c'est qu'alors il existerait, pour le système total, des formes homologues à fonction G qui fourniraient, par deux d'entre elles, une décomposition plus complète.