Georges Giraud

Sur une classe de groupes discontinus de transformations birationnelles quadratiques et sur les fonctions de trois variables indépendantes restant invariables par ces transformations

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 32 (1915), p. 237-403

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1915_3_32__237_0>

SUR UNE CLASSE DE GROUPES DISCONTINUS

DE

TRANSFORMATIONS BIRATIONNELLES QUADRATIQUES

ET SUR LES

FONCTIONS DE TROIS VARIABLES INDÉPENDANTES

RESTANT INVARIABLES PAR CES TRANSFORMATIONS;

PAR M. GEORGES GIRAUD.

INTRODUCTION.

Parmi les théories intéressantes qui ont eu leur origine dans la théorie des fonctions elliptiques se trouve la théorie des fonctions fuchsiennes : le premier exemple de ces fonctions fut en effet la fonction modulaire, sur laquelle les mémorables travaux d'Hermite attirèrent l'attention. En de splendides Mémoires (1), Poincaré établit dans toute sa généralité la théorie de la formation des groupes fuchsiens et celle des fonctions invariables par les substitutions de ces groupes : il put exprimer par ces fonctions les coordonnées des points d'une courbe algébrique quelconque et résoudre le problème de l'intégration des équations différentielles linéaires algébriques à points singuliers réguliers. Depuis cette époque, plusieurs classes de fonctions jouissant de propriétés plus ou moins analogues ont été rencontrées. Poincaré lui-même (2) a étudié les fonctions invariables

(1) H. POINCARÉ, *Théorie des groupes fuchsiens* (*Acta mathematica*, t. I); *Mémoire sur les fonctions fuchsiennes* (*Acta mathematica*, t. I); l'illustre géomètre a donné d'autres Mémoires sur ces fonctions dans les *Acta mathematica*, t. IV et V, et dans le *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 4e série, t. III, 1887.

(2) H. POINCARÉ, *Mémoire sur les groupes kleinéens* (*Acta mathematica*, t. III).

par des groupes de substitutions linéaires d'une variable qui ne laissent plus invariable un cercle fixe, comme le faisaient les groupes fuchsiens. M. Picard (¹) a étudié, sous le nom de *groupes hyperfuchsiens*, des groupes de substitutions linéaires portant sur *deux* variables, et n'altérant pas une certaine forme quadratique à indéterminées conjuguées. Les *groupes hyperabéliens*, considérés aussi par M. Picard (²), sont des groupes de substitutions portant sur deux variables, de la forme

$$\left(X = \frac{ax+b}{cx+d},\ Y = \frac{a'y+b'}{c'y+d'}\right),$$

ou de la forme

$$\left(X = \frac{ay+b}{cy+d},\ Y = \frac{a'x+b'}{c'x+d'}\right),$$

et qui transforment en lui-même le domaine formé de l'intérieur d'un cercle du plan de la variable x et de l'intérieur d'un cercle du plan de la variable y; ces groupes hyperabéliens sont donc formés de substitutions birationnelles quadratiques. Il existe d'ailleurs aussi des fonctions hyperfuchsiennes et des fonctions hyperabéliennes, qui jouissent de certaines propriétés analogues à celles des fonctions fuchsiennes.

Des catégories particulières de groupes hyperabéliens se rencontrent dans la théorie de la transformation des fonctions abéliennes de genre deux dont les périodes normales satisfont à la relation

$$h^2 - gg' = D,$$

D étant un entier positif (³). Il était naturel de se demander si le problème de la transformation des fonctions abéliennes non singulières ne viendrait pas offrir d'autres groupes jouissant de propriétés analogues. D'ailleurs, on connaît déjà des fonctions invariantes par un groupe de cette sorte : ce sont précisément les quotients de deux

---

(¹) PICARD, *Acta mathematica*, t. I, p. 297; t. II, p. 114; t. V, p. 121. M. Alezais a étudié également ce sujet (*Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, 1902, p. 261).

(²) PICARD, *Sur les fonctions hyperabéliennes* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 4ᵉ série, t. I, 1885).

(³) PICARD, *Ibid.* — BOURGET, *Sur une classe particulière de groupes hyperabéliens* (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 1898). — COTTY, *Les fonctions abéliennes et la théorie des nombres* (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 1911).

fonctions thêta de la théorie des fonctions abéliennes, où l'on a annulé les deux variables x et y, quand on considère ces quotients comme fonctions des périodes normales g, h, g'.

Les transformations subies par les périodes normales, telles qu'elles ont été données par Hermite dans son célèbre Mémoire *Sur la théorie de la transformation des fonctions abéliennes* (1), sont des transformations birationnelles quadratiques. En supprimant la condition imposée aux coefficients d'être entiers, et en prenant le nombre k d'Hermite égal à *un*, on obtient des transformations (T) qui peuvent constituer des groupes discontinus dans certaines régions de l'espace à six dimensions; on peut alors former des fonctions invariables par ces groupes de transformations : c'est à ces groupes de transformations (T) et à ces fonctions que ce travail est consacré (2).

Dans le Chapitre premier, je définis les substitutions (S), c'est-à-dire les transformations linéaires qui, effectuées simultanément sur deux systèmes de quatre variables

$$\begin{array}{cccc} \omega_1, & \omega_2, & \omega_3, & \omega_4, \\ \upsilon_1, & \upsilon_2, & \upsilon_3, & \upsilon_4, \end{array}$$

correspondant aux périodes des fonctions abéliennes, conservent la forme bilinéaire

$$\omega_1\upsilon_3 - \omega_3\upsilon_1 + \omega_2\upsilon_4 - \omega_4\upsilon_2,$$

et j'y rattache les transformations (T). En introduisant des variables homogènes x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, liées à g, h, g' par les relations

$$(1) \qquad g = \frac{-x_2}{x_1}, \qquad h = \frac{x_3}{x_1}, \qquad g' = \frac{x_4}{x_1}, \qquad gg' - h^2 = \frac{x_5}{x_1},$$

de sorte que

$$(2) \qquad x_1 x_5 + x_2 x_4 + x_3^2 = 0,$$

les formules qui définissent une transformation (T) deviennent linéaires et homogènes, et conservent la relation (2); même si x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 ne satisfaisaient pas à la relation (2), la valeur numérique

(1) *Œuvres*, t. I, p. 444.

(2) Une partie des résultats de ce travail a fait l'objet d'une Note aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CLVII, 29 décembre 1913.

de son premier membre serait conservée. Ce point de vue m'a été souvent utile ; il m'a amené à nommer point de l'espace à six dimensions un système de cinq nombres complexes non nuls ensemble, définis à un facteur près, et liés par la relation (2) ; si x_1 n'est pas nul, le point est dit à distance finie, et ses coordonnées non homogènes g, h, g' sont données par les formules (1). Je démontre encore dans ce Chapitre que toutes les substitutions (S), et, par suite de l'isomorphisme, toutes les transformations (T) peuvent être regardées comme des produits de cinq transformations très simples, dont trois contiennent des paramètres. Une démonstration assez simple du fait que si, en nommant $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$, $\mathcal{G}'$ les parties imaginaires de g, h, g', la forme

$$\mathcal{G}x^2 + 2\mathcal{H}xy + \mathcal{G}'y^2$$

est définie positive, il en est de même pour la forme qui résulte de celle-ci par une transformation (T), découle des considérations qui précèdent. Ce résultat, joint à quelques autres analogues, permet de décomposer l'espace à six dimensions en six domaines (dont trois à six dimensions) invariants par toute transformation (T); on ne peut d'ailleurs pas fragmenter de nouveau ces domaines en domaines invariants plus petits. Quelques résultats utiles dans la suite terminent ce Chapitre : ce sont tout d'abord le calcul du déterminant fonctionnel des transformations (T); puis des intégrales invariables par les transformations (T), et dont l'analogie avec les groupes fuchsiens fait pressentir l'utilité : j'en donne deux, une triple et une sextuple; enfin toute transformation en elle-même de la forme $x_1x_5 + x_2x_4 + x_3^2$ qui a pour déterminant *un* et qui conserve les domaines invariants déjà déterminés, est une transformation (T); de là une interprétation géométrique des transformations (T) analogue à celle que fournit, pour les groupes fuchsiens, la forme $x_1x_3 + x_2^2$.

Dans un deuxième Chapitre, je recherche les points doubles des transformations (T); il y en a quatre, en général. On peut alors se proposer de rechercher leurs positions dans les six domaines invariants: ces positions dépendent de la nature des racines d'une équation réciproque du quatrième degré. On est ainsi amené à une classification des transformations (T). Il est naturel, à cette occasion, de chercher à réduire les transformations (T) à des formes canoniques, en les transformant par des transformations (T) convenablement choisies : le nombre de formes auxquelles on parvient est de vingt-deux, dont quatre pour les cas les plus généraux, où l'on ne suppose aucune relation d'égalité entre les coefficients de la transformation.

La formation du polyèdre fondamental d'un groupe discontinu fait la matière du troisième Chapitre. La méthode employée est fort analogue à la méthode du rayonnement qui, pour les groupes fuchsiens, permet d'obtenir un polygone fondamental présentant des particularités utiles dans certaines démonstrations. Ce qui joue ici le rôle des cercles de la méthode du rayonnement, ce sont des variétés à cinq dimensions qui ne changent pas par les transformations (T) ayant un point double fixé à l'avance, et qu'on nomme le *centre de la variété*; l'équation de ces variétés s'obtient en égalant à zéro une forme quadratique à indéterminées conjuguées en x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, et qui dépend non plus d'*un* paramètre, comme pour les groupes fuchsiens, mais de *deux;* on aurait en outre d'autres variétés dont l'équation serait plus compliquée. Ce nombre de paramètres tient à ce que les transformations qui ont un point double donné dépendent de quatre paramètres seulement : on a donc des variétés à quatre dimensions qui peuvent s'associer de diverses manières pour produire des variétés à cinq dimensions. J'obtiens une famille à un paramètre seulement en me restreignant aux variétés dont l'équation s'obtient en égalant à zéro une forme quadratique à indéterminées conjuguées et *à coefficients réels :* ce sont ces variétés qui servent à construire le polyèdre fondamental. Elles permettent en outre de démontrer que, si les transformés d'un point donné P du domaine

$$(\mathrm{I}) \qquad \mathcal{G}\mathcal{G}' - \mathcal{H}^2 > 0, \qquad \mathcal{G} + \mathcal{G}' > 0$$

n'ont pas P pour point d'accumulation, le groupe est discontinu dans ce domaine.

Dans le Chapitre IV, cette méthode de formation du polyèdre fondamental est appliquée aux groupes formés des puissances d'une seule transformation (T). Dans certains cas, les faces du polyèdre sont indiquées; en général, j'ai recherché les points qui ne se trouvent ni dans le polyèdre fondamental, ni dans aucun de ses transformés; ou encore les points qui se trouvent sur le contour d'une infinité d'entre eux. Dans les groupes fuchsiens, les points doubles des substitutions hyperboliques offrent un exemple de la première circonstance, ceux des substitutions paraboliques un exemple de la seconde. Ici se produit une circonstance particulière : les points trouvés ne sont pas toujours les mêmes quelle que soit la position du centre du polyèdre fondamental. Toutefois, ces points sont toujours en dehors du domaine (I), comme cela résulte de propositions démontrées au Chapitre précédent.

Nous arrivons maintenant (Chapitre V) à la formation de fonctions de g, h, g' invariantes par un groupe discontinu donné de transformations (T). Ces fonctions sont naturellement formées à l'aide des séries dont les séries thêtafuchsiennes de Poincaré sont le prototype; une transformation birationnelle préalable a permis de remplacer le domaine (I) par un domaine situé entièrement à distance finie, ce qui est indispensable pour la convergence de ces séries. Ces séries sont alors convergentes dans le domaine (I), où elles représentent des fonctions holomorphes. On en déduit des fonctions invariantes par les transformations du groupe, et qui sont uniformes dans le domaine (I), où elles se comportent comme des fonctions rationnelles. De même que le prolongement analytique des fonctions fuchsiennes traverse parfois le cercle fondamental, le prolongement analytique de ces fonctions peut, pour certains groupes, sortir du domaine (I). Cela arrive en particulier pour les groupes formés des puissances d'une seule transformation (T); deux exemples étudiés rapidement montrent toutefois que, pour ces groupes, les singularités essentielles peuvent pénétrer à l'intérieur du polyèdre fondamental; de plus, elles dépendent dans une certaine mesure du choix de la fonction rationnelle qui intervient dans les termes des séries.

Le Chapitre VI est consacré spécialement au groupe arithmétique et aux fonctions correspondantes : le groupe arithmétique est, par définition, le groupe de transformations (T) qui correspond aux transformations (S) à coefficients entiers. D'abord (§ I), j'établis que les substitutions de ce groupe peuvent toutes être considérées comme des produits de quatre substitutions fondamentales; ensuite, je démontre que toutes les transformations (T) à coefficients entiers font partie du groupe arithmétique. Le polyèdre fondamental est formé (§ II) par une méthode légèrement différente de celle qui est exposée au Chapitre III. Enfin, la méthode du Chapitre V est employée (§ III) pour la formation de fonctions invariantes par le groupe arithmétique : le prolongement analytique de ces fonctions ne peut pas sortir du domaine (I), de sorte qu'elles sont uniformes partout où elles existent. Le polyèdre fondamental ayant des points sur la frontière du domaine (I), les singularités des fonctions invariantes en ces points sont étudiées : on trouve ainsi que quatre quelconques des fonctions invariantes que nous avons formées sont liées par une relation algébrique. Le quotient de deux fonctions $\Theta(x, y)$ de la théorie des fonctions abéliennes, pour $x = y = 0$, prend un nombre fini de valeurs quand on fait subir aux périodes normales les transformations du groupe arithmétique [il faut supposer que les fonctions $\Theta(x, y)$ dont il s'agit sont paires]; les fonctions symétriques de ces valeurs présentent les mêmes singularités que les fonctions invariantes que nous avons formées : elles en sont donc aussi des fonctions algébriques.

Dans le Chapitre VII, j'étudie les groupes de transformations (T) qui viennent des transformations en elles-mêmes à coefficients entiers de formes quadratiques à cinq variables du type

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 - u_4^2 - u_5^2,$$

u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 étant des formes linéaires à coefficients réels. La méthode classique, introduite par Hermite, qui permet de ramener la réduction des formes quadratiques indéfinies à celle des formes définies, permet, en s'appuyant d'autre part sur le théorème démontré à ce sujet au Chapitre III, de démontrer que ces groupes sont discontinus dans le domaine (I). Une étude sur l'existence, dans ces groupes, de certaines substitutions, permet de démontrer que les fonctions invariantes correspondantes ne peuvent pas se prolonger hors du domaine (I) : elles sont donc uniformes partout où elles existent. Quelques renseignements sur le polyèdre fondamental découlent aussi de cette étude. Il serait désirable d'étudier aussi les singularités essentielles de ces fonctions sur le contour du polyèdre fondamental, de manière à voir si les propriétés des fonctions invariantes par le groupe arithmétique ne s'étendent pas à ces nouvelles fonctions; cette étude n'est pas faite dans ce travail.

J'éprouve un vrai plaisir à pouvoir exprimer ici ma reconnaissance profonde à M. Picard; ce sont ses travaux si lumineux qui m'ont inspiré l'idée de ce travail, et c'est à la bonté avec laquelle il a bien voulu me donner ses conseils que je dois d'avoir pu le poursuivre; en même temps que mon admiration pour son œuvre, je le prie de vouloir bien agréer l'expression de mon affectueux respect et de ma gratitude. J'assure également M. Humbert de toute ma reconnaissance pour le bienveillant intérêt qu'il m'a continuellement témoigné; l'exposition qu'il a faite en 1911-1912 de la théorie des groupes fuchsiens dans son Cours du Collège de France m'a été d'une très grande utilité.

CHAPITRE I.

DÉFINITION ET PREMIÈRES PROPRIÉTÉS DES TRANSFORMATIONS (T).

I. — Les substitutions (S).

1. Considérons deux systèmes de quatre variables

$$\begin{array}{cccc} \omega_1, & \omega_2, & \omega_3, & \omega_4, \\ \upsilon_1, & \upsilon_2, & \upsilon_3, & \upsilon_4; \end{array}$$

nous effectuons sur ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 une certaine substitution linéaire et homogène

$$\left\{\begin{array}{l} \Omega_1 = a_1\omega_1 + a_2\omega_2 + a_3\omega_3 + a_4\omega_4, \\ \Omega_2 = b_1\omega_1 + b_2\omega_2 + b_3\omega_3 + b_4\omega_4, \\ \Omega_3 = c_1\omega_1 + c_2\omega_2 + c_3\omega_3 + c_4\omega_4, \\ \Omega_4 = d_1\omega_1 + d_2\omega_2 + d_3\omega_3 + d_4\omega_4, \end{array}\right.$$

et sur υ_1, υ_2, υ_3, υ_4 la même substitution

$$\left\{\begin{array}{l} \Upsilon_1 = a_1\upsilon_1 + a_2\upsilon_2 + a_3\upsilon_3 + a_4\upsilon_4, \\ \Upsilon_2 = b_1\upsilon_1 + b_2\upsilon_2 + b_3\upsilon_3 + b_4\upsilon_4, \\ \Upsilon_3 = c_1\upsilon_1 + c_2\upsilon_2 + c_3\upsilon_3 + c_4\upsilon_4, \\ \Upsilon_4 = d_1\upsilon_1 + d_2\upsilon_2 + d_3\upsilon_3 + d_4\upsilon_4. \end{array}\right.$$

Cette substitution est choisie de manière qu'on ait l'identité

$$(1)\qquad \Omega_1\Upsilon_3 - \Omega_3\Upsilon_1 + \Omega_2\Upsilon_4 - \Omega_4\Upsilon_2 = \omega_1\upsilon_3 - \omega_3\upsilon_1 + \omega_2\upsilon_4 - \omega_4\upsilon_2.$$

Il est nécessaire et suffisant, pour cela, que les seize coefficients de la substitution satisfassent aux six relations que voici :

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} (ac)_{12} + (bd)_{12} &= 0,\\ (ac)_{13} + (bd)_{13} &= 1,\\ (ac)_{14} + (bd)_{14} &= 0,\\ (ac)_{23} + (bd)_{23} &= 0,\\ (ac)_{24} + (bd)_{24} &= 1,\\ (ac)_{34} + (bd)_{34} &= 0. \end{aligned}\right.$$

Nous avons posé pour abréger

$$(mn)_{ij} = m_i n_j - m_j n_i.$$

Nous appellerons cette substitution *une substitution* (S).

On peut conclure de là que le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix}$$

est égal à *un ;* en effet,

$$\begin{aligned}\Delta = &-(ac)_{12}(bd)_{34} + (ac)_{13}(bd)_{24} - (ac)_{14}(bd)_{23}\\ &-(ac)_{23}(bd)_{14} + (ac)_{24}(bd)_{13} - (ac)_{34}(bd)_{12};\end{aligned}$$

ou bien, en tenant compte des relations entre les coefficients,

$$\begin{aligned}\Delta = \quad &(ac)_{12}(ac)_{34} - (ac)_{13}(ac)_{24} + (ac)_{13} + (ac)_{14}(ac)_{23}\\ &+ (bd)_{23}(bd)_{14} - (bd)_{24}(bd)_{13} + (bd)_{13} + (bd)_{34}(bd)_{12};\end{aligned}$$

mais, entre huit nombres $m_1, m_2, m_3, m_4, n_1, n_2, n_3, n_4$ existe l'identité

$$(3)\qquad (mn)_{12}(mn)_{34} + (mn)_{23}(mn)_{14} - (mn)_{13}(mn)_{24} = 0;$$

nous voyons donc que

$$\Delta = (ac)_{13} + (bd)_{13} = 1.$$

2. Cherchons les mineurs du premier ordre du déterminant Δ; nous désignerons le mineur correspondant à un élément par la lettre majuscule de même nom que cet élément, et affectée du même indice que lui.

Les quatre équations en x_1, x_2, x_3, x_4

$$\begin{aligned}
a_1 x_1 + b_1 x_2 + c_1 x_3 + d_1 x_4 &= 0,\\
a_2 x_1 + b_2 x_2 + c_2 x_3 + d_2 x_4 &= 0,\\
a_3 x_1 + b_3 x_2 + c_3 x_3 + d_3 x_4 &= 1,\\
a_4 x_1 + b_4 x_2 + c_4 x_3 + d_4 x_4 &= 0
\end{aligned}$$

ont comme solution

$$x_1 = -c_1, \qquad x_2 = -d_1, \qquad x_3 = a_1, \qquad x_4 = b_1;$$

nous en tirons immédiatement

$$c_1 = -A_3, \qquad d_1 = -B_3, \qquad a_1 = C_3, \qquad b_1 = D_3;$$

en considérant trois autres systèmes analogues d'équations, nous trouvons que les mineurs forment le tableau suivant :

$$\begin{Bmatrix}
c_3 & c_4 & -c_1 & -c_2\\
d_3 & d_4 & -d_1 & -d_2\\
-a_3 & -a_4 & a_1 & a_2\\
-b_3 & -b_4 & b_1 & b_2
\end{Bmatrix}.$$

La transformation inverse de la transformation donnée

$$\begin{Bmatrix}
a_1 & a_2 & a_3 & a_4\\
b_1 & b_2 & b_3 & b_4\\
c_1 & c_2 & c_3 & c_4\\
d_1 & d_2 & d_3 & d_4
\end{Bmatrix}$$

est donc celle-ci :

$$\begin{Bmatrix}
c_3 & d_3 & -a_3 & -b_3\\
c_4 & d_4 & -a_4 & -b_4\\
-c_1 & -d_1 & a_1 & b_1\\
-c_2 & -d_2 & a_2 & b_2
\end{Bmatrix};$$

mais cette dernière est encore une transformation (S); donc les seize coefficients satisfont encore aux six relations suivantes :

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} (ab)_{13}+(ab)_{24}&=0,\\ (ac)_{13}+(ac)_{24}&=1,\\ (ad)_{13}+(ad)_{24}&=0,\\ (bc)_{13}+(bc)_{24}&=0,\\ (bd)_{13}+(bd)_{24}&=1.\\ (cd)_{13}+(cd)_{24}&=0.\end{aligned}\right.$$

Ces six relations sont donc une conséquence des relations (2); d'ailleurs, le système (2) est lui-même une conséquence du système (4); ces deux systèmes sont équivalents.

3. Il est évident que les substitutions (S) forment un groupe. Il peut être utile d'avoir quelques substitutions simples susceptibles de donner par leurs produits n'importe quelle substitution du groupe. Voici un système de cinq substitutions qui jouit de cette propriété :

$$S_1=\left\{\begin{matrix} r_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & r_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & r_3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & r_4\end{matrix}\right\};\quad S_2=\left\{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ c_1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{matrix}\right\};\quad S_3=\left\{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & c_2 & 1 & 0\\ c_2 & 0 & 0 & 1\end{matrix}\right\};$$

$$S_4=\left\{\begin{matrix} 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{matrix}\right\};\quad S_5=\left\{\begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{matrix}\right\}.$$

Dans S_1, on a $r_1 r_3 = r_2 r_4 = 1$; les paramètres c_1 et c_2 de S_2 et S_3 sont arbitraires.

Si S et T sont deux substitutions (S), nous désignerons par ST le résultat obtenu en effectuant la substitution T sur le résultat de la substitution S.

Prenons une substitution (S) quelconque

$$S=\left\{\begin{matrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4\\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4\\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4\\ \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \delta_4\end{matrix}\right\},$$

et cherchons à la mettre sous la forme d'un produit de substitutions S_1, S_2, S_3, S_4, S_5. Pour cela nous la multiplierons, à gauche pour fixer les idées, par un produit de substitutions S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 choisi de manière que le résultat final soit la substitution unité.

D'abord, en multipliant S par un produit convenable, on peut la remplacer par une substitution où $\alpha_3 = 0$. En effet, si α_3 est nul, il n'y a rien à faire; si α_3 n'est pas nul, nous multiplions à gauche S par S_2, où nous avons pris c_1 tel que $\alpha_1 + \alpha_3 c_1 = 0$; multiplions encore à gauche le résultat par S_4: le coefficient qui tient la place de α_3 dans ce résultat est nul. Nous désignerons encore ce résultat par la même notation que S, mais en tenant compte de ce que $\alpha_3 = 0$.

Nous allons maintenant, sans que α_3 cesse d'être nul, rendre α_4 nul à son tour. S'il l'est, il n'y a rien à faire pour cela. S'il ne l'est pas, nous multiplions à gauche par

$$S_5 S_2 S_5 = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & 1 \end{Bmatrix},$$

après avoir choisi c_1 de façon que $\alpha_2 + \alpha_4 c_1 = 0$; puis nous multiplions à gauche le résultat par

$$S_5 S_4 S_5 = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{Bmatrix};$$

si nous continuons à désigner le résultat par la même notation que S, α_3 et α_4 sont tous deux nuls.

Nous pouvons maintenant annuler α_2; si ce coefficient n'est pas nul de lui-même, nous n'aurons pour cela qu'à multiplier par

$$S_5 S_4^{-1} S_3 S_4 S_5 = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -c_2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix},$$

après avoir choisi c_2 de façon que $\alpha_1 - c_2\alpha_2 = 0$; puis à multiplier le résultat, toujours à gauche, par S_5.

La transformation obtenue est

$$\left\{\begin{matrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 \\ \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \delta_4 \end{matrix}\right\};$$

α_1 n'est sûrement pas nul puisque le déterminant est égal à *un*. Les relations entre les coefficients donnent alors

$$\beta_3 = \delta_3 = 0.$$

Notre transformation est donc de la forme

$$\left\{\begin{matrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_1 & \beta_2 & 0 & \beta_4 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 \\ \delta_1 & \delta_2 & 0 & \delta_4 \end{matrix}\right\}.$$

Si β_4 n'est pas nul, on l'annulera en multipliant par $S_5 S_2 S_5$ où c_1 est tel que $\beta_2 + c_1 \beta_4 = 0$, puis par $S_5 S_4 S_5$. Alors β_2 n'est pas nul, sans quoi le déterminant le serait; nous pourrons donc annuler β_1 en multipliant par $S_5 S_4^{-1} S_3 S_4 S_5$, en prenant c_2 tel que $\beta_1 - \beta_2 c_2 = 0$. Les relations entre les coefficients nous montrent qu'alors γ_4 est nul aussi et que $\alpha_1 \gamma_3 = \beta_2 \delta_4 = 1$. Multiplions à gauche par S_1, en prenant $r_1 = \gamma_3$, $r_2 = \delta_4$, et par suite $r_3 = \alpha_1$, $r_4 = \beta_2$; nous trouvons une transformation telle que

$$\left\{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & 1 & 0 \\ \gamma_2 & \delta_2 & 0 & 1 \end{matrix}\right\}.$$

Nous annulerons γ_1 en multipliant par S_2, où l'on a pris $c_1 = -\gamma_1$; γ_2 en multipliant par S_3, où l'on a pris $c_2 = -\gamma_2$; δ_2 en multipliant par $S_5 S_2 S_5$, avec $c_1 = -\delta_2$. Ceci fait, nous avons, comme nous le voulions, la transformation unité. Nos cinq substitutions ont bien la propriété annoncée.

II. — Les transformations (T).

1. Considérons deux groupes de quatre variables, $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ et $\upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_3, \upsilon_4$, liées par la relation

$$(\omega\upsilon)_{13}+(\omega\upsilon)_{24}=0. \tag{5}$$

Il existe alors, si $(\omega\upsilon)_{12}$ n'est pas nul, trois nombres g, h, g' tels que

$$\begin{aligned} g\omega_1+h\omega_2&=\omega_3, & g\upsilon_1+h\upsilon_2&=\upsilon_3,\\ h\omega_1+g'\omega_2&=\omega_4, & h\upsilon_1+g'\upsilon_2&=\upsilon_4; \end{aligned}$$

en effet, les deux premières équations donnent

$$g=-\frac{(\omega\upsilon)_{23}}{(\omega\upsilon)_{12}}, \qquad h=\frac{(\omega\upsilon)_{13}}{(\omega\upsilon)_{12}};$$

et les deux dernières donnent

$$h=-\frac{(\omega\upsilon)_{24}}{(\omega\upsilon)_{12}}, \qquad g'=\frac{(\omega\upsilon)_{14}}{(\omega\upsilon)_{12}},$$

de sorte que les deux valeurs trouvées pour h coïncident. Nous pouvons remarquer qu'on a de plus

$$(\omega\upsilon)_{34}=\begin{vmatrix} g\omega_1+h\omega_2 & h\omega_1+g'\omega_2\\ g\upsilon_1+h\upsilon_2 & h\upsilon_1+g'\upsilon_2 \end{vmatrix}=(gg'-h^2)(\omega\upsilon)_{12};$$

donc

$$gg'-h^2=\frac{(\omega\upsilon)_{34}}{(\omega\upsilon)_{12}}.$$

Appliquons à $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ et à $\upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_3, \upsilon_4$ une même substitution (S); les variables transformées $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4$, $\Upsilon_1, \Upsilon_2, \Upsilon_3, \Upsilon_4$, satisfont à la même relation que les premières

$$(\Omega\Upsilon)_{13}+(\Omega\Upsilon)_{24}=0.$$

Si donc $(\Omega\Upsilon)_{12}$ n'est pas nul, nous pourrons introduire les nombres

G, H, G′ donnés par les relations

$$
\begin{aligned}
G &= -\frac{(\Omega\Upsilon)_{23}}{(\Omega\Upsilon)_{12}},\\
H &= \frac{(\Omega\Upsilon)_{13}}{(\Omega\Upsilon)_{12}} = -\frac{(\Omega\Upsilon)_{24}}{(\Omega\Upsilon)_{12}},\\
G' &= \frac{(\Omega\Upsilon)_{14}}{(\Omega\Upsilon)_{12}},\\
GG' - H^2 &= \frac{(\Omega\Upsilon)_{34}}{(\Omega\Upsilon)_{12}}.
\end{aligned}
$$

Soit

$$
\left\{
\begin{matrix}
a_1 & a_2 & a_3 & a_4\\
b_1 & b_2 & b_3 & b_4\\
c_1 & c_2 & c_3 & c_4\\
d_1 & d_2 & d_3 & d_4
\end{matrix}
\right\}
$$

la substitution (S) employée; nous avons

$$
\begin{aligned}
(\Omega\Upsilon)_{12} = {} & (ab)_{12}(\omega\upsilon)_{12} + (ab)_{13}(\omega\upsilon)_{13} + (ab)_{14}(\omega\upsilon)_{14}\\
& + (ab)_{23}(\omega\upsilon)_{23} + (ab)_{24}(\omega\upsilon)_{24} + (ab)_{34}(\omega\upsilon)_{34},
\end{aligned}
$$

et des formules analogues pour $(\Omega\Upsilon)_{13}$, $(\Omega\Upsilon)_{14}$, $(\Omega\Upsilon)_{23}$, $(\Omega\Upsilon)_{24}$, $(\Omega\Upsilon)_{34}$, obtenues en remplaçant dans la précédente $(ab)_{mn}$ successivement par $(ac)_{mn}$, $(ad)_{mn}$, $(bc)_{mn}$, $(bd)_{mn}$, $(cd)_{mn}$. Or de là on déduit les valeurs de G, H, G′, qui sont :

$$
\left\{
\begin{aligned}
G &= \frac{-(bc)_{12} + (bc)_{23}g - [(bc)_{13} - (bc)_{24}]h - (bc)_{14}g' - (bc)_{34}(gg' - h^2)}{(ab)_{12} - (ab)_{23}g + [(ab)_{13} - (ab)_{24}]h + (ab)_{14}g' + (ab)_{34}(gg' - h^2)},\\
H &= \frac{(ac)_{12} - (ac)_{23}g + [(ac)_{13} - (ac)_{24}]h + (ac)_{14}g' + (ac)_{34}(gg' - h^2)}{(ab)_{12} - (ab)_{23}g + [(ab)_{13} - (ab)_{24}]h + (ab)_{14}g' + (ab)_{34}(gg' - h^2)},\\
G' &= \frac{(ad)_{12} - (ad)_{23}g + [(ad)_{13} - (ad)_{24}]h + (ad)_{14}g' + (ad)_{34}(gg' - h^2)}{(ab)_{12} - (ab)_{23}g + [(ab)_{13} - (ab)_{24}]h + (ab)_{14}g' + (ab)_{34}(gg' - h^2)},\\
GG' - H^2 &= \frac{(cd)_{12} - (cd)_{23}g + [(cd)_{13} - (cd)_{24}]h + (cd)_{14}g' + (cd)_{34}(gg' - h^2)}{(ab)_{12} - (ab)_{23}g + [(ab)_{13} - (ab)_{24}]h + (ab)_{14}g' + (ab)_{34}(gg' - h^2)}.
\end{aligned}
\right.
$$

C'est une transformation linéaire portant sur g, h, g' et $gg' - h^2$. On peut aussi poser

$$
\begin{gathered}
(\omega\upsilon)_{12} = x_1, \qquad (\omega\upsilon)_{23} = x_2, \qquad (\omega\upsilon)_{13} = -(\omega\upsilon)_{24} = x_3,\\
(\omega\upsilon)_{14} = x_4, \qquad (\omega\upsilon)_{34} = x_5,
\end{gathered}
$$

de sorte que x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 soient liées par la relation

$$x_1 x_5 + x_2 x_4 + x_3^2 = 0.$$

Si, des variables Ω_i, Υ_i, on déduit de la même façon des variables homogènes X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, on aura de même

$$X_1 X_5 + X_2 X_4 + X_3^2 = 0.$$

On a alors les relations linéaires et homogènes

$$(7)\quad \left\{ \begin{aligned} X_1 &= (ab)_{12} x_1 + (ab)_{23} x_2 + 2(ab)_{13} x_3 + (ab)_{14} x_4 + (ab)_{34} x_5, \\ X_2 &= (bc)_{12} x_1 + (bc)_{23} x_2 + 2(bc)_{13} x_3 + (bc)_{14} x_4 + (bc)_{34} x_5, \\ X_3 &= (ac)_{12} x_1 + (ac)_{23} x_2 + [2(ac)_{13} - 1] x_3 + (ac)_{14} x_4 + (ac)_{34} x_5, \\ X_4 &= (ad)_{12} x_1 + (ad)_{23} x_2 + 2(ad)_{13} x_3 + (ad)_{14} x_4 + (ad)_{34} x_5, \\ X_5 &= (cd)_{12} x_1 + (cd)_{23} x_2 + 2(cd)_{13} x_3 + (cd)_{14} x_1 + (cd)_{34} x_5, \end{aligned} \right.$$

qui ne sont autres que les relations (6) rendues homogènes.

Comme l'égalité

$$X_1 X_5 + X_2 X_4 + X_3^2 = 0$$

résulte de

$$x_1 x_5 + x_2 x_4 + x_3^2 = 0,$$

et que son premier membre est une forme quadratique en x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, on a l'identité

$$X_1 X_5 + X_2 X_4 + X_3^2 = \lambda (x_1 x_5 + x_2 x_4 + x_3^2),$$

λ étant une certaine constante qu'on va voir être égale à *un*.

Nous dirons qu'un système de cinq nombres non tous nuls x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, liés par la relation

$$x_1 x_5 + x_2 x_4 + x_3^2 = 0,$$

représente, en coordonnées homogènes, *un point de l'espace à six dimensions;* si x_1 n'est pas nul, nous dirons que le point est *à distance finie* et a pour coordonnées non homogènes les trois nombres complexes

$$g = -\frac{x_2}{x_1}, \qquad h = \frac{x_3}{x_1}, \qquad g' = \frac{x_4}{x_1}.$$

Les transformations (6), ou (7), sont alors des transformations de l'espace à six dimensions, que nous nommerons, pour abréger, des transformations (T). A moins d'avis contraire, toutes les transformations (T) que nous considérerons seront à coefficients réels.

2. Les transformations (T) forment évidemment un groupe isomorphe de celui des transformations (S). Cela nous permet d'affirmer que toute transformation (T) est un produit des transformations qui correspondent à S_1, S_2, S_3, S_4, S_5. Or, si nous formons ces cinq transformations, nous constatons qu'elles ont toutes *un* pour déterminant. Il en est donc de même de toute transformation (T).

Or, par une trausformation (T), $x_1 x_5 + x_2 x_4 + x_3^2$ se multiplie par une constante λ, comme nous avons vu; donc son discriminant est multiplié par λ^5; mais, d'autre part, nous savons que ce discriminant n'a pas changé; comme λ est réel, c'est donc que $\lambda = 1$; ainsi

$$X_1 X_5 + X_2 X_4 + X_3^2 = x_1 x_5 + x_2 x_4 + x_3^2.$$

Ce résultat, obtenu pour les transformations à coefficients réels, s'étend d'ailleurs immédiatement aux transformations à coefficients complexes : car il est vrai pour les transformations correspondant à S_1, S_2, S_3, que les paramètres qui y figurent soient réels ou non.

3. Supposons que x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 soient des nombres complexes, et soient x_{10}, x_{20}, x_{30}, x_{40}, x_{50} leurs conjugués; soient de même X_{10}, X_{20}, X_{30}, X_{40}, X_{50} les conjugués de X_1, X_2, X_3, X_4. X_5. Les transfor mations étant réelles, on voit tout de suite qu'en désignant par λ et μ deux constantes quelconques, $\lambda X_1 + \mu X_{10}$, $\lambda X_2 + \mu X_{20}$, $\lambda X_3 + \mu X_{30}$, $\lambda X_4 + \mu X_{40}$, et $\lambda X_5 + \mu X_{50}$ sont les transformés de $\lambda x_1 + \mu x_{10}$, $\lambda x_2 + \mu x_{20}$, $\lambda x_3 + \mu x_{30}$, $\lambda x_4 + \mu x_{40}$, $\lambda x_5 + \mu x_{50}$; donc

$$\begin{aligned}&(\lambda X_1 + \mu X_{10})(\lambda X_5 + \mu X_{50}) + (\lambda X_2 + \mu X_{20})(\lambda X_4 + \mu X_{40}) + (\lambda X_3 + \mu X_{30})^2\\ &= (\lambda x_1 + \mu x_{10})(\lambda x_5 + \mu x_{50}) + (\lambda x_2 + \mu x_{20})(\lambda x_4 + \mu x_{40}) + (\lambda x_3 + \mu x_{30})^2.\end{aligned}$$

En égalant les coefficients de $\lambda\mu$, on trouve l'identité, importante pour la suite,

$$\begin{aligned}&X_1 X_{50} + X_{10} X_5 + X_2 X_{40} + X_{20} X_4 + 2 X_3 X_{30}\\ &= x_1 x_{50} + x_{10} x_5 + x_2 x_{40} + x_{20} x_4 + 2 x_3 x_{30}.\end{aligned}$$

Désignons, d'une façon générale, par m_0 le conjugué d'un nombre quelconque m. En considérant la transformation (6), cette identité devient

$$\begin{aligned}&\mathrm{GG}' - \mathrm{H}^2 + \mathrm{G}_0\mathrm{G}'_0 - \mathrm{H}_0^2 - \mathrm{GG}'_0 - \mathrm{G}_0\mathrm{G}' + 2\,\mathrm{HH}_0 \\ &= \frac{gg' - h^2 + g_0 g'_0 - h_0^2 - gg'_0 - g_0 g' + 2hh_0}{|(ab)_{12} - (ab)_{23}g + 2(ab)_{13}h + (ab)_{14}g' + (ab)_{34}(gg' - h^2)|^2}.\end{aligned}$$

En particulier, les inégalités et l'égalité

$$\begin{aligned}gg' - h^2 + g_0g'_0 - h_0^2 - gg'_0 - g_0g' + 2hh_0 &> 0,\\ gg' - h^2 + g_0g'_0 - h_0^2 - gg'_0 - g_0g' + 2hh_0 &< 0,\\ gg' - h^2 + g_0g'_0 - h_0^2 - gg'_0 - g_0g' + 2hh_0 &= 0\end{aligned}$$

sont conservées par les relations (6). Posons

$$\begin{aligned}g &= \mathcal{G}_0 + i\mathcal{G},\\ h &= \mathcal{H}_0 + i\mathcal{H},\\ g' &= \mathcal{G}'_0 + i\mathcal{G}',\end{aligned}$$

$\mathcal{G}_0$, $\mathcal{H}_0$, $\mathcal{G}'_0$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$, $\mathcal{G}'$ étant réels; nous avons alors

$$g_0g'_0 - h_0^2 + gg' - h^2 - gg'_0 - g_0g' + 2hh_0 = -4(\mathcal{G}\mathcal{G}' - \mathcal{H}^2);$$

donc $\mathcal{G}\mathcal{G}' - \mathcal{H}^2$ conserve son signe par la transformation (6).

De plus, si $\mathcal{G}\mathcal{G}' - \mathcal{H}^2 \geqq 0$, $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}'$ sont de même signe; or les substitutions correspondant à S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 conservent alors toutes ce signe; donc il en est de même pour toute transformation (T). Ainsi, les six domaines suivants sont changés en eux-mêmes par toutes ces transformations :

(I)	$\mathcal{G}\mathcal{G}' - \mathcal{H}^2 > 0,$	$\mathcal{G} + \mathcal{G}' > 0;$
(I′)	$\mathcal{G}\mathcal{G}' - \mathcal{H}^2 > 0,$	$\mathcal{G} + \mathcal{G}' < 0;$
(II)	$\mathcal{G}\mathcal{G}' - \mathcal{H}^2 < 0;$	
(III)	$\mathcal{G}\mathcal{G}' - \mathcal{H}^2 = 0,$	$\mathcal{G} + \mathcal{G}' > 0;$
(III′)	$\mathcal{G}\mathcal{G}' - \mathcal{H}^2 = 0,$	$\mathcal{G} + \mathcal{G}' < 0;$
(IV)	$\mathcal{G} = \mathcal{H} = \mathcal{G}' = 0.$	

Pour le domaine (IV), ou domaine réel, cette propriété est évidente.

Les points conjugués de ceux du domaine (I) sont dans le domaine (I′), et réciproquement; la même chose a lieu pour les domaines (III) et (III′), qui servent de frontière commune entre le domaine (II) d'une part, et les domaines (I) et (I′) de l'autre.

4. Nous allons maintenant démontrer que tout point d'un de ces domaines peut être changé en un point quelconque du même domaine. Pour cela, il nous suffit de démontrer qu'un point fixe dans chaque domaine peut être changé en n'importe quel autre point du même domaine.

Tout d'abord la transformation

$$\begin{aligned} G &= g + \lambda, \\ H &= h + \mu, \\ G' &= g' + \nu, \end{aligned}$$

correspondant à la substitution (S)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \lambda & \mu & 1 & 0 \\ \mu & \nu & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

permet de modifier comme on veut les parties réelles de g, h, g'; on peut donc se borner à démontrer qu'on peut transformer dans chaque domaine un certain point en un autre dont les coordonnées aient des parties imaginaires assujetties aux seules conditions qui définissent le domaine.

Pour le domaine (I), le point

$$g = g' = i, \qquad h = 0$$

est changé dans le point

$$g = i\mathcal{G}, \qquad h = i\mathcal{H}, \qquad g' = i\mathcal{G}',$$

du même domaine, par la transformation

$$\frac{1}{\left(\dfrac{g}{\sqrt{\mathcal{G}\mathcal{G}' - \mathcal{H}^2}}\right)} = \frac{G}{\left(\dfrac{-\mathcal{G}}{\sqrt{\mathcal{G}\mathcal{G}' - \mathcal{H}^2}}\right)} = \frac{H}{\dfrac{-\mathcal{H}}{\sqrt{\mathcal{G}\mathcal{G}' - \mathcal{H}^2}} + h}$$
$$= \frac{G'}{\dfrac{-\mathcal{H}^2}{\mathcal{G}\sqrt{\mathcal{G}\mathcal{G}' - \mathcal{H}^2}} + 2h\dfrac{\mathcal{H}}{\mathcal{G}} + (gg' - h^2)\dfrac{\sqrt{\mathcal{G}\mathcal{G}' - \mathcal{H}^2}}{\mathcal{G}}} = \frac{GG' - H^2}{-g'\sqrt{\mathcal{G}\mathcal{G}' - \mathcal{H}^2}},$$

qui correspond au tableau

$$\begin{pmatrix} 0 & \dfrac{-\mathcal{H}}{\sqrt{\mathcal{G}(\mathcal{G}\mathcal{G}'-\mathcal{H}^2)}} & \dfrac{1}{\sqrt{\mathcal{G}}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\dfrac{\mathcal{G}}{\mathcal{G}\mathcal{G}'-\mathcal{H}^2}} & 0 & 0 \\ -\sqrt{\mathcal{G}} & 0 & 0 & 0 \\ -\dfrac{\mathcal{H}}{\sqrt{\mathcal{G}}} & 0 & 0 & \sqrt{\dfrac{\mathcal{G}\mathcal{G}'-\mathcal{H}^2}{\mathcal{G}}} \end{pmatrix}.$$

Cette même transformation change encore le point

$$g = g' = -i, \qquad h = 0,$$

du domaine (I′), dans le point

$$g = -i\mathcal{G}, \qquad h = -i\mathcal{H}, \qquad g' = -i\mathcal{G}',$$

du même domaine.

Passons au domaine (II). Le point que nous transformons est ici

$$g = i, \qquad g' = -i, \qquad h = 0;$$

soit encore

$$g = i\mathcal{G}, \qquad g' = i\mathcal{G}', \qquad h = i\mathcal{H}$$

le point à atteindre. Si d'abord $\mathcal{G}$ est positif, la réponse est donnée par la transformation correspondant au tableau

$$\begin{pmatrix} 0 & \dfrac{-\mathcal{H}}{\sqrt{\mathcal{G}(\mathcal{H}^2-\mathcal{G}\mathcal{G}')}} & \dfrac{-1}{\sqrt{\mathcal{G}}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\dfrac{\mathcal{G}}{\mathcal{H}^2-\mathcal{G}\mathcal{G}'}} & 0 & 0 \\ \sqrt{\mathcal{G}} & 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{\mathcal{H}}{\sqrt{\mathcal{G}}} & 0 & 0 & \sqrt{\dfrac{\mathcal{H}^2-\mathcal{G}\mathcal{G}'}{\mathcal{G}}} \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{\left(\dfrac{-g}{\sqrt{\mathcal{H}^2-\mathcal{G}\mathcal{G}'}}\right)} = \frac{G}{\left(\dfrac{\mathcal{G}}{\sqrt{\mathcal{H}^2-\mathcal{G}\mathcal{G}'}}\right)} = \frac{H}{\dfrac{\mathcal{H}}{\sqrt{\mathcal{H}^2-\mathcal{G}\mathcal{G}'}}+h}$$

$$= \frac{G'}{\dfrac{\mathcal{H}^2}{\mathcal{G}\sqrt{\mathcal{H}^2-\mathcal{G}\mathcal{G}'}} + 2\dfrac{\mathcal{H}}{\mathcal{G}}h - \dfrac{\sqrt{\mathcal{H}^2-\mathcal{G}\mathcal{G}'}}{\mathcal{G}}(gg'-h^2)} = \frac{GG'-H^2}{g'\sqrt{\mathcal{H}^2-\mathcal{G}\mathcal{G}'}}.$$

Si $\mathcal{G}$ est négatif, nous avons le résultat au moyen de la transformation correspondant au tableau

$$\left|\begin{array}{cccc} \dfrac{-\mathcal{H}}{\sqrt{-\mathcal{G}(\mathcal{H}^2-\mathcal{G}\mathcal{G}')}} & 0 & 0 & \dfrac{-1}{\sqrt{-\mathcal{G}}} \\ -\sqrt{\dfrac{-\mathcal{G}}{\mathcal{H}^2-\mathcal{G}\mathcal{G}'}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{-\mathcal{G}} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{-\mathcal{H}}{\sqrt{-\mathcal{G}}} & -\sqrt{\dfrac{\mathcal{H}^2-\mathcal{G}\mathcal{G}'}{-\mathcal{G}}} & 0 \end{array}\right|,$$

qui est

$$\frac{1}{\left(\dfrac{-g'}{\sqrt{\mathcal{H}^2-\mathcal{G}\mathcal{G}'}}\right)} = \frac{G}{\left(\dfrac{-\mathcal{G}}{\sqrt{\mathcal{H}^2-\mathcal{G}\mathcal{G}'}}\right)} = \frac{H}{\dfrac{-\mathcal{H}}{\sqrt{\mathcal{H}^2-\mathcal{G}\mathcal{G}'}}-h}$$

$$= \frac{G'}{\dfrac{-\mathcal{H}^2}{\mathcal{G}\sqrt{\mathcal{H}^2-\mathcal{G}\mathcal{G}'}} - 2\dfrac{\mathcal{H}}{\mathcal{G}}h + \dfrac{\sqrt{\mathcal{H}^2-\mathcal{G}\mathcal{G}'}}{\mathcal{G}}(gg'-h^2)} = \frac{GG'-H^2}{g\sqrt{\mathcal{H}^2-\mathcal{G}\mathcal{G}'}}.$$

Si maintenant $\mathcal{G}$ était nul, $\mathcal{G}'$ ne l'étant pas, nous pourrions, par une de ces deux transformations, obtenir le point $g=i\mathcal{G}'$, $h=i\mathcal{H}$, $g'=0$; en appliquant à ce point la transformation correspondant à S_5, on arrive au résultat demandé. Si enfin $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}'$ étaient nuls tous deux, on aurait la solution par la transformation

$$\frac{1}{\left(\dfrac{-g}{\mathcal{H}}\right)} = \frac{G}{\dfrac{1}{4\mathcal{H}}-\dfrac{h}{2\mathcal{H}}-\dfrac{1}{4\mathcal{H}}(gg'-h^2)}$$

$$= \frac{H}{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}(gg'-h^2)} = \frac{G'}{\mathcal{H}+2\mathcal{H}h-\mathcal{H}(gg'-h^2)} = \frac{GG'-H^2}{\mathcal{H}g'},$$

qui correspond au tableau

$$\left|\begin{array}{cccc} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{2\mathcal{H}} & \dfrac{-1}{2\mathcal{H}} & 0 \\ \dfrac{1}{2} & 0 & 0 & \dfrac{-1}{2} \\ \mathcal{H} & 0 & 0 & \mathcal{H} \end{array}\right|.$$

La propriété énoncée a donc lieu pour ce domaine.

Prenons maintenant le domaine (III), et, dans ce domaine, le point $g = i$, $g' = h = 0$. Si $\mathcal{G}$ n'est pas nul, on le change dans le point $g = i\mathcal{G}$, $g' = i\mathcal{G}'$, $h = i\mathcal{H}$ de ce domaine au moyen de la transmation

$$\begin{aligned} G &= g\mathcal{G}, \\ H &= g\mathcal{H} + h, \\ G' &= g\mathcal{G}' \pm 2h\sqrt{\frac{\mathcal{G}'}{\mathcal{G}}} + \frac{g'}{\mathcal{G}}, \end{aligned}$$

qui correspond au tableau

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\mathcal{G}}} & \mp\sqrt{\mathcal{G}'} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\mathcal{G}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\mathcal{G}} & 0 \\ 0 & 0 & \pm\sqrt{\mathcal{G}'} & \frac{1}{\sqrt{\mathcal{G}}} \end{pmatrix},$$

où il faut prendre les signes supérieurs si $\mathcal{H}$ est positif, les signes inférieurs dans le cas contraire. Si $\mathcal{G}$ est nul, $\mathcal{H}$ l'est aussi ; comme on n'a pas un point réel, $\mathcal{G}'$ n'est pas nul ; on arrive alors au résultat en changeant d'abord le point $g = i$, $g' = h = 0$ dans le point $g = i\mathcal{G}'$, $g' = h = 0$, au moyen de la substitution précédente, puis en appliquant au résultat la transformation correspondant à S_5.

La démonstration faite pour le domaine (III) est bonne aussi pour le domaine conjugué (III').

Enfin, pour le domaine réel, la transformation citée en commençant suffit à faire voir que la proposition est encore vérifiée dans ce cas.

5. Dans ce qu'on vient de dire, on a omis de parler des points à l'infini ; cette expression a, bien entendu, ici le sens que nous lui avons donné plus haut. Par une transformation convenable, un tel point peut toujours être ramené à distance finie : il suffit pour cela de se servir d'une des trois transformations correspondant aux tableaux

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

en remarquant que x_1, x_2, x_4 et x_5 ne sont certainement pas nuls ensemble, sinon x_3 le serait aussi.

Quand on le ramène ainsi à distance finie, un point à l'infini tel que

$$x_1 x_{50} + x_{10} x_5 + x_2 x_{40} + x_{20} x_4 + 2 x_3 x_{30}$$

soit nul, vient dans l'un des domaines (III) ou (III'), mais toujours dans le même, quelle que soit la substitution employée : car autrement un point d'un de ces domaines pourrait être changé dans un point de l'autre, ce qui est absurde. Nous dirons alors, suivant le cas, que le point à l'infini appartient au domaine (III) ou au domaine (III'). Nous adopterons des définitions analogues pour les autres domaines.

La propriété qui fait l'objet du numéro précédent subsiste alors quand on adjoint aux domaines considérés leurs points à l'infini.

D'ailleurs, le domaine (I) n'a pas de point à l'infini; car, s'il en avait un, l'une des trois substitutions précédentes le transformerait en un point à distance finie pour lequel g, g' ou $gg' - h^2$ serait nul. Or, dans ce domaine, ni g ni g' ne peuvent être nuls; et, pour $gg' - h^2$, nous pouvons remarquer que, dans ce domaine, on a

$$gg' - h^2 + g_0 g'_0 - h_0^2 - g g'_0 - g_0 g' + 2 h h_0 < 0;$$

si $gg' - h^2 = 0$, cette inégalité devient

$$- g g'_0 - g_0 g' + 2 h h_0 < 0;$$

or, on peut poser

$$g = \alpha^2, \qquad g' = \beta^2, \qquad h = \alpha\beta,$$

α et β étant deux nombres complexes dont les conjugués sont α_0 et β_0; l'inégalité devient alors

$$-(\alpha\beta_0 - \alpha_0\beta)^2 < 0,$$

ce qui est absurde.

6. Nous voulons calculer maintenant le déterminant fonctionnel

$$\frac{D(G, H, G')}{D(g, h, g')}$$

de la transformation (6).

Pour cela, considérons quatre variables x_1, x_2, x_3, x_4, sur lesquelles nous exécutons la transformation (S) à laquelle correspond la transformation (6). En remplaçant x_3 par $gx_1 + hx_2$ et x_4 par $hx_1 + g'x_2$, nous voyons que les variables x_1 et x_2 subissent la transformation

$$X_1 = (a_1 + a_3 g + a_4 h)x_1 + (a_2 + a_3 h + a_4 g')x_2,$$
$$X_2 = (b_1 + b_3 g + b_4 h)x_1 + (b_2 + b_3 h + b_4 g')x_2;$$

g, h, g' subissent eux-mêmes la transformation (6). Or, le déterminant $\frac{D(X_1, X_2)}{D(x_1, x_2)}$ se réduit à

$$(ab)_{12} - (ab)_{23} g + 2(ab)_{13} h + (ab)_{14} g' + (ab)_{34}(gg' - h^2);$$

c'est le dénominateur commun des seconds membres des formules (6); ce dénominateur jouit donc, relativement aux produits de transformations (T), de la même propriété que le déterminant fonctionnel cherché.

Or, ce déterminant se calcule facilement pour les transformations particulières correspondant à S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 : on trouve chaque fois l'inverse du cube du dénominateur. Ce résultat est donc général; on a toujours

$$\frac{D(G, H, G')}{D(g, h, g')} = \frac{1}{[(ab)_{12} - (ab)_{23} g + 2(ab)_{13} h + (ab)_{14} g' + (ab)_{34}(gg' - h^2)]^3}.$$

7. On a déjà vu que, par les transformations (6), l'expression $\mathcal{G}\mathcal{G}' - \mathcal{H}^2$ se reproduit multipliée par l'inverse du carré du module du dénominateur. D'autre part, on vérifie sans peine, à l'aide de S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, que le déterminant fonctionnel de la transformation subie par $\mathcal{G}_0$, $\mathcal{H}_0$, $\mathcal{G}'_0$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$, $\mathcal{G}'$ est égal à l'inverse de la sixième puissance de ce module. Il en résulte immédiatement que l'intégrale sextuple

$$\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int \frac{d\mathcal{G}_0\, d\mathcal{G}\, d\mathcal{H}_0\, d\mathcal{H}\, d\mathcal{G}'_0\, d\mathcal{G}'}{(\mathcal{G}\mathcal{G}' - \mathcal{H}^2)^3},$$

étendue à une certaine région, est égale à la même intégrale étendue à la région résultant de la première par une transformation (T). Si g, h, g' sont trois fonctions continues de trois variables réelles u, v, w assujetties à certaines limitations, l'intégrale triple

$$\int\!\!\int\!\!\int \frac{\left|\frac{D(g, h, g')}{D(u, v, w)}\right| du\, dv\, dw}{(\mathcal{G}\mathcal{G}' - \mathcal{H}^2)^{\frac{3}{2}}}$$

ne change pas non plus par les transformations (T).

8. Nous avons vu que les transformations homogènes (7) sont des transformations en elle-même de la forme quadratique $x_1x_5+x_2x_4+x_3^2$. Est-ce que toute transformation en elle-même de cette forme quadratique est une transformation (7)? Il est d'abord nécessaire pour cela que son déterminant soit *un;* supposons qu'il en soit ainsi.

Soit

$$\begin{aligned}
X_1 &= \alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2+\alpha_3 x_3+\alpha_4 x_4+\alpha_5 x_5,\\
X_2 &= \beta_1 x_1+\beta_2 x_2+\beta_3 x_3+\beta_4 x_4+\beta_5 x_5,\\
X_3 &= \gamma_1 x_1+\gamma_2 x_2+\gamma_3 x_3+\gamma_4 x_4+\gamma_5 x_5,\\
X_4 &= \delta_1 x_1+\delta_2 x_2+\delta_3 x_3+\delta_4 x_4+\delta_5 x_5,\\
X_5 &= \varepsilon_1 x_1+\varepsilon_2 x_2+\varepsilon_3 x_3+\varepsilon_4 x_4+\varepsilon_5 x_5
\end{aligned}$$

une transformation en elle-même de notre forme quadratique, de déterminant *un*. On voit immédiatement que

$$\alpha_1\varepsilon_1+\beta_1\delta_1+\gamma_1^2=0.$$

On peut supposer que α_1 n'est pas nul; s'il l'était, on n'aurait qu'à multiplier à droite cette transformation par une transformation (7) convenable pour le rendre non nul. Prenons alors a_1, a_2, b_1, b_2 quelconques sous la condition

$$(ab)_{12}=\alpha_1;$$

puis choisissons c_1, c_2, d_1, d_2 de façon que

$$\alpha_1 c_1=-a_1\beta_1+b_1\gamma_1,\qquad \alpha_1 c_2=-a_2\beta_1+b_2\gamma_1,$$
$$\alpha_1 d_1=a_1\gamma_1+b_1\delta_1,\qquad \alpha_1 d_2=a_2\gamma_1+b_2\delta_1.$$

Nous avons alors les relations

$$(ab)_{12}=\alpha_1,\qquad (bc)_{12}=\beta_1,\qquad (ac)_{12}=-(bd)_{12}=\gamma_1,$$
$$(ad)_{12}=\delta_1,\qquad (cd)_{12}=\varepsilon_1.$$

Le raisonnement qui a servi à montrer que toute substitution (S) est un produit de substitutions S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 peut, en employant les multiplications à droite, montrer qu'il existe une substitution (S) dont les deux premières colonnes du tableau des coefficients sont :

$$\begin{matrix} a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\\ c_1 & c_2\\ d_1 & d_2; \end{matrix}$$

multiplions alors à droite la transformation donnée par la transformation inverse de la transformation (7) qui correspond à cette substitution (S); si l'on désigne la transformation produit par la même notation que la transformation donnée, on voit qu'on a maintenant

$$\alpha_1 = 1, \qquad \beta_1 = \gamma_1 = \delta_1 = \varepsilon_1 = 0.$$

Égalons alors à *zéro* les coefficients de $x_1 x_2$, $x_1 x_3$, $x_1 x_4$ dans

$$X_1 X_5 + X_2 X_4 + X_3^2,$$

et à *un* celui de $x_1 x_5$, nous trouvons

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = 0, \qquad \varepsilon_5 = 1.$$

De plus, entre les autres coefficients, nous avons les relations suivantes :

$$\beta_2\delta_2 + \gamma_2^2 = 0, \qquad \beta_3\delta_3 + \gamma_3^2 = 1, \qquad \beta_4\delta_4 + \gamma_4^2 = 0,$$
$$\beta_2\delta_4 + \beta_4\delta_2 + 2\gamma_2\gamma_4 = 1,$$
$$\beta_2\delta_3 + \beta_3\delta_2 + 2\gamma_2\gamma_3 = 0,$$
$$\beta_3\delta_4 + \beta_4\delta_3 + 2\gamma_3\gamma_4 = 0;$$

enfin, le déterminant

$$\begin{vmatrix} \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \\ \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 \\ \delta_2 & \delta_3 & \delta_4 \end{vmatrix}$$

est égal à *un*. Donc

$$X_2 = \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_4 x_4,$$
$$X_3 = \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3 + \gamma_4 x_4,$$
$$X_4 = \delta_2 x_2 + \delta_3 x_3 + \delta_4 x_4$$

est une transformation en elle-même de déterminant *un* de la forme

$$x_2 x_4 + x_3^2.$$

Donc, en désignant par a, b, c, d quatre nombres réels convenablement choisis, tels que

$$ad - bc = 1,$$

cette transformation, *si* β_2 *est positif*, est de la forme

$$X_2 = a^2 x_2 + 2ab x_3 - b^2 x_4,$$
$$X_3 = ac x_2 + (ad + bc) x_3 - bd x_4,$$
$$X_4 = -c^2 x_2 - 2cd x_3 + d^2 x_4;$$

c'est encore vrai si β_2 est nul, δ_4 étant positif. Mais, si l'une ou l'autre de ces quantités est négative, il faut prendre la substitution précédente suivie ou précédée de

$$\begin{aligned} X_2 &= -x_2, \\ X_3 &= x_3, \\ X_4 &= -x_4. \end{aligned}$$

Nous prendrons, pour fixer les idées, a, b, c, d de telle façon que cette substitution précède la première citée. Alors, nous multiplierons à droite la substitution à laquelle nous sommes parvenus par l'inverse de la transformation (7) correspondant au tableau

$$\begin{pmatrix} d & c & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & -b \\ 0 & 0 & -c & d \end{pmatrix};$$

puis, si β_2 ou δ_4 était négatif, nous faisons encore la substitution

$$(8) \qquad X_1 = x_1 \qquad X_2 = -x_2, \qquad X_3 = x_3, \qquad X_4 = -x_4, \qquad X_5 = x_5;$$

cette dernière n'est pas une transformation (7), car, appliquée à un système de nombres tels que $x_1x_5 + x_2x_4 + x_3^2 = 0$, elle échange les domaines (I) et (I'). La transformation à laquelle nous sommes parvenus est de la forme

$$\begin{aligned} X_1 &= x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 + \alpha_5 x_5, \\ X_2 &= x_2 - \alpha_4 x_5, \\ X_3 &= x_3 - \frac{1}{2}\alpha_3 x_5, \\ X_4 &= x_4 - \alpha_2 x_5, \\ X_5 &= x_5; \end{aligned}$$

or c'est la transformation (7) qui correspond au tableau

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\alpha_2 & \frac{1}{2}\alpha_3 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2}\alpha_3 & \alpha_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nous avons donc mis notre substitution sous la forme d'un produit de substitutions (7) dans lequel est, dans certains cas, intercalée une substitution (8), et une seule. Quand il n'y a pas de substitution (8), nous avons bien une substitution (7); quand il y en a une, nous n'avons pas une substitution (7), puisque les domaines (I) et (I′) sont échangés.

Ainsi, la condition nécessaire et suffisante pour que notre transformation soit de la forme (7) est qu'elle change le domaine (I) en lui-même.

On peut aussi donner une interprétation géométrique des transformations (S) et (T), ainsi que des transformations analogues à (S) pour lesquelles on a l'identité

$$(\Omega\Upsilon)_{13}+(\Omega\Upsilon)_{24}=-(\omega\upsilon)_{13}-(\omega\upsilon)_{24},$$

auxquelles correspondent les transformations en elle-même de la forme $x_1x_5+x_2x_4+x_3^2$ qui ne sont pas de la forme (7) : les transformations (T), suivies ou non de la transformation (8), sont les transformations subies par les points de la quadrique de l'espace à quatre dimensions

$$x_1x_5+x_2x_4+x_3^2=0;$$

les transformations (S) et leurs analogues qu'on vient de citer sont les transformations subies par les génératrices de cette quadrique dont voici les équations :

$$\begin{aligned} x_1+(ef+g)x_4+f^2x_5&=0,\\ x_2+e^2x_4+(ef-g)x_5&=0,\\ x_3-ex_4-fx_5&=0; \end{aligned}$$

il suffit de poser

$$e=\frac{\omega_3}{\omega_4},\qquad f=-\frac{\omega_1}{\omega_4},\qquad g=-\frac{\omega_2}{\omega_4}.$$

La condition

$$(\omega\upsilon)_{13}+(\omega\upsilon)_{24}=0$$

exprime que les deux génératrices de paramètres ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 et υ_1, υ_2, υ_3, υ_4 se rencontrent; leur point d'intersection a pour coordonnées homogènes

$$x_1=(\omega\upsilon)_{12},\qquad x_2=(\omega\upsilon)_{23},\qquad x_3=(\omega\upsilon)_{13},\qquad x_4=(\omega\upsilon)_{14},\qquad x_5=(\omega\upsilon)_{34}.$$

A un point à coordonnées complexes de la quadrique, on peut faire correspondre une variété réelle à deux dimensions, savoir l'intersection du plan tangent en ce point avec le plan tangent au point conjugué. Les transformations (T) indiquent alors les transformations de cette variété.

CHAPITRE II.

RECHERCHE DES POINTS DOUBLES. CLASSIFICATION DES TRANSFORMATIONS (T).

I. — Recherches des points doubles.

1. Considérons le tableau des coefficients d'une transformation (S) :

$$\begin{Bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{Bmatrix}.$$

Formons l'équation

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} a_1 - s & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 - s & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 - s & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 - s \end{vmatrix} = 0;$$

elle s'écrit encore

$$\begin{aligned} s^4 &- (a_1 + b_2 + c_3 + d_4)s^3 \\ &+ [(ab)_{12} + (ac)_{13} + (ad)_{14} + (bc)_{23} + (bd)_{24} + (cd)_{34}]s^2 \\ &\qquad - (A_1 + B_2 + C_3 + D_4)s + 1 = 0; \end{aligned}$$

mais, à cause des valeurs déjà trouvées pour les mineurs, nous voyons tout de suite que

$$A_1 + B_2 + C_3 + D_4 = a_1 + b_2 + c_3 + d_4,$$

et que, par suite, *cette équation est réciproque*. L'exemple de la transformation S_1 nous montre d'ailleurs que toute équation réciproque du quatrième degré pour laquelle les coefficients extrêmes sont égaux à *un*, est une équation (1) si ses racines sont réelles; la transformation

$$\begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a' & 0 & b' \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c' & 0 & d' \end{pmatrix},$$

où $ad - bc = a'd' - b'c' = 1$, et celle-ci :

$$\begin{pmatrix} r\cos\varphi & r\sin\varphi & 0 & 0 \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r'\cos\varphi & -r'\sin\varphi \\ 0 & 0 & r'\sin\varphi & r'\cos\varphi \end{pmatrix},$$

où $rr' = 1$, nous montrent que c'est encore vrai même si les racines ne sont pas réelles.

Nous appellerons toujours ces quatre racines r_1, r_2, r_3, r_4, et nous aurons les relations

$$r_1 r_3 = r_2 r_4 = 1.$$

2. Plaçons-nous dans le cas où ces quatre racines sont distinctes. Soient r et r' deux d'entre elles, non inverses l'une de l'autre. Le système d'équations en ω_1, ω_2, ω_3, ω_4,

$$\begin{aligned} r\omega_1 &= a_1\omega_1 + a_2\omega_2 + a_3\omega_3 + a_4\omega_4, \\ r\omega_2 &= b_1\omega_1 + b_2\omega_2 + b_3\omega_3 + b_4\omega_4, \\ r\omega_3 &= c_1\omega_1 + c_2\omega_2 + c_3\omega_3 + c_4\omega_4, \\ r\omega_4 &= d_1\omega_1 + d_2\omega_2 + d_3\omega_3 + d_4\omega_4, \end{aligned}$$

admet au moins une solution non nulle; il en est de même du système

$$\begin{aligned} r'\upsilon_1 &= a_1\upsilon_1 + a_2\upsilon_2 + a_3\upsilon_3 + a_4\upsilon_4, \\ r'\upsilon_2 &= b_1\upsilon_1 + b_2\upsilon_2 + b_3\upsilon_3 + b_4\upsilon_4, \\ r'\upsilon_3 &= c_1\upsilon_1 + c_2\upsilon_2 + c_3\upsilon_3 + c_4\upsilon_4, \\ r'\upsilon_4 &= d_1\upsilon_1 + d_2\upsilon_3 + d_3\upsilon_3 + d_4\upsilon_4, \end{aligned}$$

où les inconnues sont υ_1, υ_2, υ_3, υ_4. Pour les solutions de ces systèmes, on a

$$rr'[(\omega\upsilon)_{13} + (\omega\upsilon)_{24}] = (\omega\upsilon)_{13} + (\omega\upsilon)_{24};$$

par suite, comme rr' n'est pas égal à *un*,

$$(\omega\upsilon)_{13} + (\omega\upsilon)_{24} = 0.$$

Alors, par la transformation (T) correspondante, le point

$$x_1 = (\omega\upsilon)_{12}, \qquad x_2 = (\omega\upsilon)_{23}, \qquad x_3 = (\omega\upsilon)_{13}, \qquad x_4 = (\omega\upsilon)_{14}, \qquad x_5 = (\omega\upsilon)_{34}$$

a ses coordonnées homogènes multipliées par rr' : il ne change pas; c'est un point double de cette transformation (T).

Ce procédé ne fait correspondre à r et à r' qu'un seul point double de la transformation (T) : car, si l'un des systèmes qui donnent ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 et υ_1, υ_2, υ_3, υ_4 admettait deux solutions distinctes, c'est-à-dire non composées de nombres proportionnels, r_1, r_2, r_3, r_4 ne seraient pas distincts. En prenant de toutes les façons possibles deux racines non inverses, nous obtenons ainsi *quatre points doubles distincts*, car les produits $r_1 r_2$, $r_1 r_4$, $r_2 r_3$, $r_3 r_4$ sont distincts, du moins si aucun d'eux n'égale *moins un*.

L'équation en s du cinquième degré :

$$(2)\quad \begin{vmatrix} (ab)_{12} - s & (ab)_{23} & 2(ab)_{13} & (ab)_{14} & (ab)_{34} \\ (bc)_{12} & (bc)_{23} - s & 2(bc)_{13} & (bc)_{14} & (bc)_{34} \\ (ac)_{12} & (ac)_{23} & 2(ac)_{13} - 1 - s & (ac)_{14} & (ac)_{34} \\ (ad)_{12} & (ad)_{23} & 2(ad)_{13} & (ad)_{14} - s & (ad)_{34} \\ (cd)_{12} & (cd)_{23} & 2(cd)_{13} & (cd)_{14} & (cd)_{34} - s \end{vmatrix} = 0$$

admet donc les quatre racines distinctes $r_1 r_2$, $r_1 r_4$, $r_2 r_3$, $r_3 r_4$. On démontre d'ailleurs facilement, comme on l'a fait pour l'équation (1), qu'elle est réciproque et admet encore la racine *un*. Nous avons ainsi ses cinq racines quand r_1, r_2, r_3, r_4 sont distincts, et que deux de ces nombres ne sont pas opposés; mais alors, les coefficients de l'équation (2) sont égaux aux fonctions symétriques de ces cinq nombres toutes les fois qu'un certain polynome en a_i, b_i, c_i, d_i n'est pas nul; l'égalité a donc toujours lieu, et les cinq racines ont toujours ces valeurs.

Si aucun des nombres $r_1 r_2$, $r_1 r_4$, $r_2 r_3$, $r_3 r_4$ n'est égal à ± 1, la transformation (T) a donc au moins quatre, au plus cinq points doubles. Mais, en général, à la racine *un* ne correspond aucun point double, comme on le voit par la transformation S_1 : les valeurs trouvées ne satisfont pas à la condition $x_1x_5+x_2x_4+x_3^2=0$; donc, en général, les transformations (T) ont quatre points doubles, et quatre seulement.

3. Si l'on a un point double de la transformation (T), on peut trouver directement les racines de l'équation (1) qui lui correspondent; si le point est à distance finie, ce sont les racines de l'équation

$$\begin{vmatrix} a_1+ga_3+ha_4-s & a_2+ha_3+g'a_4 \\ b_1+gb_3+hb_4 & b_2+hb_3+g'b_4-s \end{vmatrix}=0,$$

où g, h, g' sont les coordonnées du point double. En effet, soient r et r' les racines de cette équation; prenons ω_1 et ω_2 non nuls ensemble et tels que

$$r\omega_1=(a_1+ga_3+ha_4)\omega_1+(a_2+ha_3+g'a_4)\omega_2,$$
$$r\omega_2=(b_1+gb_3+hb_4)\omega_1+(b_2+hb_3+g'b_4)\omega_2;$$

prenons de même υ_1 et υ_2 non nuls ensemble et tels que

$$r'\upsilon_1=(a_1+ga_3+ha_4)\upsilon_1+(a_2+ha_3+g'a_4)\upsilon_2,$$
$$r'\upsilon_2=(b_1+gb_3+hb_4)\upsilon_1+(b_2+hb_3+g'b_4)\upsilon_2.$$

Posons ensuite

$$\omega_3=g\omega_1+h\omega_2,\qquad \upsilon_3=g\upsilon_1+h\upsilon_2,$$
$$\omega_4=h\omega_1+g'\omega_2,\qquad \upsilon_4=h\upsilon_1+g'\upsilon_2;$$

alors, par la transformation (S), ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 sont multipliés par r, et υ_1, υ_2, υ_3, υ_4 par r'; r et r' sont donc bien les racines cherchées.

4. Il est facile de conclure de ce qui précède que la nature des points doubles doit dépendre de la nature des racines r_1, r_2, r_3, r_4. Nous sommes amenés à classer les transformations (S) et (T) en divers types, suivant la nature de ces racines.

Ces types seront au nombre de dix :

Premier type. — r_1, r_2, r_3, r_4 réels et distincts.

Deuxième type. — r_1 et r_3 réels et distincts; r_2 et r_4 imaginaires conjugués.

Troisième type. — r_1 et r_3 imaginaires conjugués; r_2 et r_4 aussi, et distincts de r_1 et r_3.

Quatrième type. — r_1 et r_2 imaginaires conjugués; r_3 et r_4 aussi, et distincts de r_1 et r_2.

Cinquième type. — r_1 et r_2 égaux et réels, et distincts de r_3 et r_4.

Sixième type. — r_1 et r_2 égaux et imaginaires.

Septième type. — r_1 et r_3 égaux; r_2 et r_4 réels et distincts.

Huitième type. — r_1 et r_3 égaux; r_2 et r_4 imaginaires conjugués.

Neuvième type. — r_1 et r_3 égaux à *un*; r_2 et r_4, à *moins un*.

Dixième type. — r_1, r_2, r_3, r_4 égaux.

On reconnaît immédiatement que toute substitution (S) appartient à l'un de ces dix types, et à un seul.

L'objet de l'étude qu'on va faire va être d'étudier la nature des points doubles des substitutions de chaque type, c'est-à-dire de voir auxquels des six domaines (I), (I'), (II), (III), (III') et (IV) ils appartiennent; de voir si le groupe des puissances de la transformation est discontinu, et, s'il l'est, de voir l'effet des puissances de cette transformation sur un point quelconque; enfin, de ramener les substitutions de chaque type à une ou plusieurs formes simples, en les transformant par des substitutions convenablement choisies. C'est d'ailleurs ce dernier point que nous traiterons d'abord dans chaque type; il nous permettra de répondre facilement aux autres questions; de plus, il nous permettra d'achever la classification dont la distinction en dix types est le commencement.

5. Avant de commencer cette étude, remarquons qu'il existe une substitution (S) dont les éléments de la première ligne ont des valeurs données : nous avons même vu une proposition plus étendue, relative à deux lignes ou à deux colonnes (Chap. I, § II, 8). Mais il nous sera utile pour la suite d'avoir une telle substitution ayant certains éléments nuls; les tableaux suivants jouiront des propriétés qui nous serviront.

Soient a_1, a_2, a_3, a_4 les éléments de la première ligne; si d'abord $a_1 a_4$

n'est pas nul, nous aurons le tableau :

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & \frac{1}{a_4} & \frac{1}{a_1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a_1} & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & a_4 \end{vmatrix}.$$

Si, au lieu de $a_1 a_4$, on suppose non nulle l'une des quantités $a_1 a_2$, $a_2 a_3$, $a_3 a_4$, on se ramène au cas de $a_1 a_4 \neq 0$ en multipliant à gauche la transformation cherchée par

$$\begin{array}{lll} S_5 S_4 & \text{si} & a_1 a_2 \neq 0; \\ S_5 & \text{si} & a_2 a_3 \neq 0; \\ S_4 & \text{si} & a_3 a_4 \neq 0. \end{array}$$

Si ces quantités sont toutes nulles, mais si l'une au moins des quantités a_1, a_3 ne l'est pas, la réponse est fournie par le tableau :

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & a_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ c_1 & 0 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

avec la condition $(ac)_{13} = 1$; si c'est l'une au moins des quantités a_2, a_4 qui n'est pas nulle, on se ramène au cas précédent en multipliant à gauche par S_5.

Si, au lieu de se donner les éléments de la première ligne, on se donnait ceux de la deuxième, de la troisième, ou de la quatrième, on se ramènerait au cas qui vient d'être traité en multipliant à droite la transformation cherchée par S_5, S_4 ou $S_5 S_4^{-1} S_5 S_4 S_5$, suivant le cas.

Tout ceci reste vrai même si l'on ne suppose pas avoir affaire à des substitutions réelles.

II. — Premier type.

1. r_1, r_2, r_3, r_4 sont réels et distincts. Il existe alors des nombres m_1, m_2, m_3, m_4 réels et non tous nuls, tels que la transformation (S) consi-

dérée donne lieu à l'identité

$$(3)\qquad m_1\Omega_1 + m_2\Omega_2 + m_3\Omega_3 + m_4\Omega_4 = r_1(m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + m_3\omega_3 + m_4\omega_4).$$

Soit

$$(4)\qquad \begin{Bmatrix} m_1 & m_2 & m_3 & m_4 \\ n_1 & n_2 & n_3 & n_4 \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \\ q_1 & q_2 & q_3 & q_4 \end{Bmatrix}$$

une substitution (S) de première ligne m_1, m_2, m_3, m_4. Posons

$$\begin{aligned} \pi_1 &= m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + m_3\omega_3 + m_4\omega_4, \\ \pi_2 &= n_1\omega_1 + n_2\omega_2 + n_3\omega_3 + n_4\omega_4, \\ \pi_3 &= p_1\omega_1 + p_2\omega_2 + p_3\omega_3 + p_4\omega_4, \\ \pi_4 &= q_1\omega_1 + q_2\omega_2 + q_3\omega_3 + q_4\omega_4; \end{aligned}$$

faisons de la même façon correspondre aux variables Ω_1, Ω_2, Ω_3, Ω_4 de nouvelles variables Π_1, Π_2, Π_3, Π_4. Les variables Π_1, Π_2, Π_3, Π_4 sont alors des transformées de π_1, π_2, π_3, π_4 par une substitution (S), qui est la transformée de la substitution donnée par la substitution (4). Or, en tenant compte de l'identité (3) et des relations entre les coefficients, on voit que cette substitution transformée est de la forme

$$(5)\qquad \begin{Bmatrix} r_1 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_1 & \beta_2 & 0 & \beta_4 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & r_3 & \gamma_4 \\ \delta_1 & \delta_2 & 0 & \delta_4 \end{Bmatrix}.$$

Mais il existe aussi des nombres réels p'_1, p'_2, p'_3, p'_4 non tous nuls tels que

$$(6)\qquad p'_1\Pi_1 + p'_2\Pi_2 + p'_3\Pi_3 + p'_4\Pi_4 = r_3(p'_1\pi_1 + p'_2\pi_2 + p'_3\pi_3 + p'_4\pi_4);$$

et même, p'_3 n'est pas nul; en effet p'_1, p'_2, p'_3, p'_4 sont donnés par les équations

$$\begin{aligned} (r_1 - r_3)p'_1 + \beta_1 p'_2 + \gamma_1 p'_3 + \delta_1 p'_4 &= 0, \\ (\beta_2 - r_3)p'_2 + \gamma_2 p'_3 + \delta_2 p'_4 &= 0, \\ \beta_4 p'_2 + \gamma_4 p'_3 + (\delta_4 - r_3)p'_4 &= 0; \end{aligned}$$

si donc $(\beta_2 - r_3)(\delta_4 - r_3) - \beta_4\delta_2$ n'est pas nul, p'_3 ne sera sûrement pas nul non plus; si cette quantité était nulle, c'est que l'une des racines r_2 et r_4 serait égale à r_3, ce qui est contre l'hypothèse. Donc p'_3 n'est pas nul.

Nous pouvons alors faire de p'_1, p'_2, p'_3, p'_4 la troisième ligne d'une substitution (S); et, d'après ce que nous avons vu (I, 5), nous pouvons faire en sorte que la première ligne de cette substitution soit

$$\frac{1}{p'_3} \quad 0 \quad 0 \quad 0.$$

En transformant la substitution (5) par cette nouvelle substitution, nous la mettons sous la forme

$$\begin{Bmatrix} r_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 & \beta_4 \\ 0 & 0 & r_3 & 0 \\ 0 & \delta_2 & 0 & \delta_4 \end{Bmatrix}.$$

Les racines de l'équation

$$(\beta_2 - s)(\delta_4 - s) - \beta_4 \delta_2 = 0$$

sont r_2 et r_4. Il est donc évident qu'en transformant par une nouvelle substitution de la forme

$$\begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n''_2 & 0 & n''_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & p''_2 & 0 & p''_4 \end{Bmatrix},$$

on arrivera à la substitution

$$(7) \qquad \begin{Bmatrix} r_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_4 \end{Bmatrix}.$$

Donc, en transformant convenablement une substitution (S) du premier type, on peut la mettre sous la forme (7), que nous nommerons *forme canonique des substitutions du premier type*.

2. Quels sont maintenant les domaines auxquels appartiennent les points doubles des transformations (T) du premier type? La transformation (T) qui correspond à la transformation (7), et que nous nommerons aussi *transformation de la forme canonique,* est

$$\begin{aligned}
X_1 &= r_1 r_2 x_1,\\
X_2 &= r_2 r_3 x_2,\\
X_3 &= x_3,\\
X_4 &= r_1 r_4 x_4,\\
X_5 &= r_3 r_4 x_5;
\end{aligned}$$

les points doubles seront au nombre de quatre si tous les nombres $r_1 r_2$, $r_2 r_3$, $r_1 r_4$, $r_3 r_4$ sont distincts, c'est-à-dire si aucun d'eux n'est égal à *moins un;* ce sont les points

$$\begin{aligned}
x_1 &= 1, & x_2 = x_3 = x_4 = x_5 &= 0;\\
x_2 &= 1, & x_1 = x_3 = x_4 = x_5 &= 0;\\
x_4 &= 1, & x_1 = x_2 = x_3 = x_5 &= 0;\\
x_5 &= 1, & x_1 = x_2 = x_3 = x_4 &= 0.
\end{aligned}$$

Ces points doubles sont tous réels. Supposons maintenant que $r_1 r_4$ soit égal à *moins un;* alors on a aussi

$$r_1 = -r_2, \qquad r_2 r_3 = -1.$$

Aux racines r_1 et r_2 correspond encore le point double

$$x_1 = 1, \qquad x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0;$$

aux racines r_3 et r_4 correspond le point double

$$x_5 = 1, \qquad x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0;$$

si maintenant nous faisons

$$X_i = -x_i \qquad (i = 1, 2, 3, 4, 5),$$

nous trouvons

$$x_1 = x_3 = x_5 = 0,$$

x_2 et x_4 restant arbitraires; mais comme

$$x_1 x_5 + x_2 x_4 + x_3^2 = 0,$$

nous voyons que l'une ou l'autre des variables x_2 ou x_4 doit être nulle; l'autre peut être prise égale à *un;* nous retrouvons ainsi les quatre mêmes points doubles que dans le premier cas.

Donc, toute substitution (T) du premier type admet quatre points doubles et quatre seulement; ces points doubles sont réels.

Si r_1, r_2, r_3, r_4 étaient distincts mais non tous réels, on pourrait refaire le même raisonnement, en transformant par des substitutions à coefficients complexes : on mettrait encore la substitution sous la forme (7); on en conclurait, comme on vient de le faire, que, *toutes les fois que* r_1, r_2, r_3, r_4 *sont distincts, la substitution* (T) *admet quatre points doubles, et quatre seulement.*

3. Considérons maintenant le groupe formé par une substitution du premier type et ses puissances positives ou négatives; étudions l'ensemble formé par un point et ses transformés par les substitutions du groupe.

La puissance n de la transformation (7) est

$$\frac{X_1}{r_1^n r_2^n x_1} = \frac{X_2}{r_2^n r_3^n x_2} = \frac{X_3}{x_3} = \frac{X_4}{r_1^n r_4^n x_4} = \frac{X_5}{r_3^n r_4^n x_5}.$$

Supposons $|r_1| > |r_2| > 1$. Si n augmente indéfiniment par valeurs positives, X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 tendent à devenir proportionnels à 1, 0, 0, 0, 0 : le point tend vers le premier point double; cela suppose toutefois que x_1 ne soit pas nul. Si $x_1 = 0$, x_4 n'étant pas nul, le point X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 tend au contraire vers le troisième point double $x_4 = 1$, $x_1 = x_2 = x_3 = x_5 = 0$. Si maintenant x_1 et x_4 sont tous deux nuls, la relation

$$x_1 x_5 + x_2 x_4 + x_3^2 = 0$$

montre que x_3 l'est aussi; si x_2 n'est pas nul aussi, le point limite est le second point double; si x_2 est nul aussi, c'est que $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ est le quatrième point double, qui ne change pas.

Si n augmente indéfiniment par valeurs négatives, le point limite est le quatrième point double si $x_5 \neq 0$; le second si $x_5 = 0$, $x_2 \neq 0$; le troisième si $x_5 = x_2 = x_3 = 0$, $x_4 \neq 0$; enfin, le premier point double est son propre point limite, Nous voyons donc que cette transformation (T) et ses puissances forment un groupe discontinu pour tous les points de l'espace, sauf pour les quatre points doubles; il en est ainsi pour toute transformation (T) du premier type dont les valeurs absolues des racines r_1, r_2, r_3, r_4 sont toutes distinctes.

Si maintenant ces valeurs absolues ne sont pas distinctes, soit

$$|r_1| = |r_2| > 1;$$

alors $r_1 = -r_2$, puisque r_1 et r_2 sont différents. Alors la transformation canonique a pour $n^{\text{ième}}$ puissance :

$$\frac{X_1}{(-1)^n r_1^{2n} x_1} = \frac{X_2}{(-1)^n x_2} = \frac{X_3}{x_3} = \frac{X_4}{(-1)^n x_4} = \frac{X_5}{(-1)^n r_3^{2n} x_5}.$$

Si n augmente indéfiniment par valeurs positives, et si x_1 n'est pas nul, le point limite est le premier point double; si $x_1 = 0$, x_2 et x_4 n'étant pas nuls ensemble, le point X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 oscille vers *deux points limites,* situés tous deux sur la variété $x_1 = x_5 = 0$; ces deux points limites se confondent si l'un d'eux est double et dans ce cas seulement; si enfin $x_1 = x_2 = x_4 = x_3 = 0$, on est au dernier point double, qui est son propre point limite. Pour les puissances négatives, on a un résultat analogue, mais les rôles du premier et du quatrième point double sont intervertis.

Ainsi, dans ce cas, le groupe est discontinu pour tous les points de l'espace, sauf les quatre points doubles et la variété $x_1 = x_5 = 0$: cette variété n'a d'ailleurs aucun point dans les domaines (I) et (I'). Pour les transformations (T) de cette sorte qui ne seraient pas sous la forme canonique, la variété $x_1 = x_5 = 0$ est remplacée par une autre, mais qui n'a non plus aucun point dans les domaines (I) et (I').

De même, pour toutes les substitutions du premier type, on peut remarquer que les variétés qui correspondent à $x_1 = 0$ ou à $x_5 = 0$ n'ont aucun point dans les domaines (I) et (I') et que celles qui correspondent à $x_1 = x_3 = x_4 = 0$ ou à $x_2 = x_3 = x_5 = 0$ sont tout entières situées dans les domaines (III), (III') et (IV).

III. — Deuxième type.

1. r_1 et r_3 sont réels et distincts; r_2 et r_4 sont imaginaires conjugués; comme $r_2 r_4 = 1$, ces deux dernières racines ont alors *un* pour valeur absolue.

En transformant une substitution du deuxième type par une substitution (S) convenable, on voit, comme pour le premier type, qu'on peut la mettre sous la forme

$$(8)\qquad \begin{vmatrix} r_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 & \beta_4 \\ 0 & 0 & r_3 & 0 \\ 0 & \delta_2 & 0 & \delta_4 \end{vmatrix}.$$

Les racines de l'équation en s

$$(\beta_2 - s)(\delta_4 - s) - \beta_4 \delta_2 = 0$$

sont r_2 et r_4. Il existe deux nombres complexes a et b, non nuls ensemble, tels que la transformation

$$(9)\qquad \begin{cases} X = \beta_2 x + \beta_4 y, \\ Y = \delta_2 x + \delta_4 y \end{cases}$$

donne lieu à l'identité

$$aX + bY = r_2(ax + by);$$

si alors a_0 et b_0 sont les conjugués de a et b, on a aussi

$$a_0 X + b_0 Y = r_4(a_0 x + b_0 y).$$

a et b ne sont déterminés qu'à un facteur près; si on les multiplie par un même facteur, le nombre réel $i(ab_0 - a_0 b)$ est multiplié par le carré de la valeur absolue de ce facteur; nous pouvons *supposer que* $i(ab_0 - a_0 b)$ *est positif;* si cela n'avait pas lieu, nous n'aurions qu'à échanger les racines r_2 et r_4, et il le deviendrait; alors, en multipliant a et b par un même facteur, nous pouvons le rendre égal à $\frac{1}{2}$.

Posons alors

$$u = (a+a_0)x + (b+b_0)y, \qquad U = (a+a_0)X + (b+b_0)Y,$$
$$v = -i(a-a_0)x - i(b-b_0)y, \qquad V = -i(a-a_0)X - i(b-b_0)Y;$$

la transformation (9) s'écrit alors

$$U = u\cos\varphi - v\sin\varphi,$$
$$V = u\sin\varphi + v\cos\varphi,$$

en posant

$$r_2 = \cos\varphi + i\sin\varphi, \qquad r_4 = \cos\varphi - i\sin\varphi;$$

alors, en transformant la substitution (8) par

$$\begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a+a_0 & 0 & b+b_0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -i(a-a_0) & 0 & -i(b-b_0) \end{Bmatrix},$$

qui est aussi une substitution (S) à coefficients réels, on la met sous la forme

$$(10) \qquad \begin{Bmatrix} r_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi \\ 0 & 0 & r_3 & 0 \\ 0 & \sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{Bmatrix},$$

que nous appellerons *forme canonique des substitutions du deuxième type*.

La démonstration met en évidence ce fait qu'on ne peut pas mettre la transformation sous la forme analogue à (10), mais où φ est remplacé par $-\varphi$, c'est-à-dire où r_2 et r_4 sont échangées.

2. Cherchons les points doubles; la transformation (T) s'écrit

$$X_1 = r_1x_1\cos\varphi - r_1x_4\sin\varphi,$$
$$X_2 = r_3x_2\cos\varphi + r_3x_5\sin\varphi,$$
$$X_3 = x_3,$$
$$X_4 = r_1x_1\sin\varphi + r_1x_4\cos\varphi,$$
$$X_5 = -r_3x_2\sin\varphi + r_3x_5\cos\varphi.$$

Nous trouvons immédiatement les quatre points doubles, qui sont :

$$\begin{array}{lllll}
x_1 = 1, & x_2 = 0, & x_3 = 0, & x_4 = -i, & x_5 = 0; \\
x_1 = 1, & x_2 = 0, & x_3 = 0, & x_4 = i, & x_5 = 0; \\
x_1 = 0, & x_2 = 1, & x_3 = 0, & x_4 = 0, & x_5 = i; \\
x_1 = 0, & x_2 = 1, & x_3 = 0, & x_4 = 0, & x_5 = -i.
\end{array}$$

Ils sont tous les quatre imaginaires, deux à deux conjugués; deux sont dans le domaine (III), et les deux autres dans le domaine (III'). Il en est donc ainsi pour toutes les substitutions du second type.

3. Cherchons maintenant l'effet des puissances de la transformation sur un point quelconque. La puissance n de la transformation (T) peut s'écrire

$$\frac{X_1}{r_1^n x_1 \cos n\varphi - r_1^n x_4 \sin n\varphi} = \frac{X_2}{r_3^n x_2 \cos n\varphi + r_3^n x_5 \sin n\varphi} = \frac{X_3}{x_3}$$
$$= \frac{X_4}{r_1^n x_1 \sin n\varphi + r_1^n x_4 \cos n\varphi} = \frac{X_5}{-r_3^n x_2 \sin n\varphi + r_3^n x_5 \cos n\varphi}.$$

Supposons

$$|r_1| > 1.$$

Si n augmente indéfiniment par valeurs positives, les rapports de X_2, X_3, X_5 à la plus grande en valeur absolue des variables X_1 et X_4 tendent vers zéro, à condition que x_1 et x_4 ne soient pas nuls ensemble. Quant au rapport

$$\frac{X_4}{X_1} = \frac{x_1 \sin n\varphi + x_4 \cos n\varphi}{x_1 \cos n\varphi - x_4 \sin n\varphi},$$

si φ est commensurable avec π, il ne prend qu'un nombre fini de valeurs, savoir q valeurs si

$$\varphi = \frac{p\pi}{q},$$

p et q étant des entiers premiers entre eux; le point X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 tend donc alors vers q points limites, tous situés sur la variété

$$x_2 = x_3 = x_5 = 0;$$

ces q points sont distincts sauf si l'un d'eux est un point double : alors ils sont tous confondus. Si, au contraire, φ est incommensurable avec π, le rapport précédent peut s'approcher autant qu'on veut d'une quelconque des valeurs du rapport

$$\frac{x_1 \sin\theta + x_4 \cos\theta}{x_1 \cos\theta - x_4 \sin\theta},$$

θ prenant toutes les valeurs de o à 2π; le point X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 se rapproche donc indéfiniment de la variété $x_2 = x_3 = x_5 = 0$, et il peut devenir aussi voisin qu'on veut de n'importe quel point d'une certaine variété à une dimension, située sur la variété $x_2 = x_3 = x_5 = 0$; il n'y a exception que si l'un de ces points limites est un point double, alors tous les autres sont aussi confondus avec ce point double.

Si maintenant x_1 et x_4, et par suite x_3, sont nuls, x_2 et x_5 ne sont pas nuls ensemble; alors, si φ est commensurable avec π, le point X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 occupe le nombre fini q de positions sur la variété

$$x_1 = x_3 = x_4 = 0;$$

si φ est incommensurable avec π, il occupe une infinité de positions, qui forment un ensemble dense sur une certaine variété à une dimension située sur $x_1 = x_3 = x_4 = 0$; dans les deux cas, il n'y a exception que si le point x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 est un point double : la position occupée est alors unique.

Pour les puissances négatives, on a un résultat semblable, mais les rôles des deux variétés

$$x_2 = x_3 = x_5 = 0$$

et

$$x_1 = x_3 = x_4 = 0$$

sont échangés.

Ainsi, le groupe est discontinu sauf pour les points de ces deux variétés, qui sont entièrement situées dans les domaines (III), (III') et (IV), et n'ont aucun point commun. Pour une transformation quelconque du second type, ces variétés ne sont plus les mêmes, mais gardent cette disposition.

IV. — Troisième type.

1. Dans ce type, r_1 et r_3 sont imaginaires conjugués, et r_2 et r_4 aussi; de plus, r_2 et r_4 sont distincts de r_1 et r_3.

Il résulte de là que toutes les racines r_1, r_2, r_3, r_4 ont pour valeur absolue l'unité.

Nous avons déjà vu, à propos du premier type, qu'en transformant la substitution donnée par la substitution (S)

$$\begin{vmatrix} m_1 & m_2 & m_3 & m_4 \\ n_1 & n_2 & n_3 & n_4 \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \\ q_1 & q_2 & q_3 & q_4 \end{vmatrix},$$

à coefficients complexes, nous pouvons la mettre sous la forme (7). Alors il existe un nombre complexe λ tel que

$$p_1 = \lambda m_{10}, \qquad p_2 = \lambda m_{20}, \qquad p_3 = \lambda m_{30}, \qquad p_4 = \lambda m_{40},$$

l'indice zéro ajouté à une lettre servant à désigner le nombre conjugué de celui que représente cette lettre. λ est d'ailleurs purement imaginaire, car

$$(mp)_{13} + (mp)_{24} = 1.$$

En transformant à nouveau par

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{\lambda} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\lambda}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

on mettra la substitution sous la forme

$$\begin{vmatrix} \frac{r_1 + r_3}{2} & 0 & -\frac{r_1 - r_3}{\lambda} & 0 \\ 0 & r_2 & 0 & 0 \\ -\frac{\lambda(r_1 - r_3)}{4} & 0 & \frac{r_1 - r_3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_4 \end{vmatrix};$$

mais la substitution par laquelle on a, à présent, transformé la substitution donnée, a sa première et sa troisième ligne formées d'éléments réels.

Opérons de même sur $n_1, n_2, n_3, n_4, q_1, q_2, q_3, q_4$; nous voyons que, en la transformant par une substitution (S) à coefficients réels, nous pouvons mettre la transformation proposée sous la forme

$$\begin{Bmatrix} \alpha_1 & 0 & \alpha_3 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 & \beta_4 \\ \gamma_1 & 0 & \gamma_3 & 0 \\ 0 & \delta_2 & 0 & \delta_4 \end{Bmatrix};$$

en opérant maintenant sur la première et la troisième ligne de ce tableau, puis sur la deuxième et la quatrième, comme nous avons fait sur la deuxième et la quatrième à propos du deuxième type, nous parvenons à mettre la substitution proposée sous la forme

$$(11) \qquad \begin{Bmatrix} \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi & 0 \\ 0 & \cos\psi & 0 & -\sin\psi \\ \sin\varphi & 0 & \cos\varphi & 0 \\ 0 & \sin\psi & 0 & \cos\psi \end{Bmatrix};$$

c'est la *forme canonique des substitutions du troisième type*. Les nombres r_1, r_2, r_3, r_4 ont pour valeur

$$r_1 = \cos\varphi + i\sin\varphi, \qquad r_2 = \cos\psi + i\sin\psi,$$
$$r_3 = \cos\varphi - i\sin\varphi, \qquad r_4 = \cos\psi - i\sin\psi.$$

La démonstration employée montre qu'on peut échanger les angles φ et ψ : on a encore une substitution transformée de la substitution donnée ; mais on ne peut changer φ en $-\varphi$, ni ψ en $-\psi$.

2. Cherchons les points doubles; le plus simple, pour les trouver, est d'appliquer la méthode donnée au commencement de ce Chapitre. On trouve ainsi les points

$$x_1 = 1, \quad x_2 = i, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = -i, \quad x_5 = -1;$$
$$x_1 = 1, \quad x_2 = -i, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = i, \quad x_5 = -1;$$
$$x_1 = 1, \quad x_2 = -i, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = -i, \quad x_5 = 1;$$
$$x_1 = 1, \quad x_2 = i, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = i, \quad x_5 = 1.$$

Ces points sont deux à deux imaginaires conjugués; l'un est dans le domaine (I), son conjugué dans le domaine (I'), les deux derniers dans le domaine (II).

Cette disposition des points doubles nous montre de nouveau qu'il est impossible, pour arriver à la forme canonique, d'échanger r_1 et r_3, ou r_2 et r_4.

3. Considérons le groupe des puissances de la transformation; la puissance n de la transformation (11) s'obtient en remplaçant φ par $n\varphi$ et ψ par $n\psi$. Si φ ou ψ est incommensurable avec π, aucune puissance de la transformation (11) ne se réduit à la transformation unité. Le groupe n'est alors discontinu pour aucun point de l'espace. En effet, la transformation (T) a pour équations

$$\begin{aligned}
X_1 &= x_1 \cos\varphi \cos\psi + x_2 \sin\varphi \cos\psi - x_4 \cos\varphi \sin\psi + x_5 \sin\varphi \sin\psi,\\
X_2 &= -x_1 \sin\varphi \cos\psi + x_2 \cos\varphi \cos\psi + x_4 \sin\varphi \sin\psi + x_5 \cos\varphi \sin\psi,\\
X_3 &= x_3,\\
X_4 &= x_1 \cos\varphi \sin\psi + x_2 \sin\varphi \sin\psi + x_4 \cos\varphi \cos\psi - x_5 \sin\varphi \cos\psi,\\
X_5 &= x_1 \sin\varphi \sin\psi - x_2 \cos\varphi \sin\psi + x_4 \sin\varphi \cos\psi + x_5 \cos\varphi \cos\psi.
\end{aligned}$$

Nous voyons qu'en prenant φ et ψ suffisamment voisins de zéro, un point x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 quelconque est changé en un point aussi voisin qu'on veut. Ici φ et ψ nous sont donnés; mais, pour la puissance $n^{\text{ième}}$ de la transformation, φ et ψ sont remplacés par $n\varphi$ et $n\psi$, qu'on peut naturellement augmenter d'un multiple quelconque de 2π; or, on peut trouver trois entiers n, h, k tels que, ε étant un nombre positif donné quelconque, on ait

$$|n\varphi + 2\pi h| < \varepsilon,$$
$$|n\psi + 2\pi k| < \varepsilon;$$

pour cette transformation, les angles qui remplacent φ et ψ sont inférieurs à ε en valeur absolue; comme ε est arbitraire, notre proposition est démontrée.

Si maintenant φ et ψ sont commensurables avec π, le groupe des puissances de la transformation (11) est un groupe fini. Si l'on pose

$$\varphi = \pi\frac{p}{q}, \qquad \psi = \pi\frac{p'}{q'},$$

p, p', q, q' étant des entiers dont les deux derniers sont positifs, et p et q étant premiers entre eux, ainsi que p' et q', le nombre des transformations du groupe sera le plus petit commun multiple de q et de q' ou le double de ce nombre suivant que $\frac{pq'+p'q}{\delta}$, où δ est le plus grand commun diviseur de q et de q', est pair ou impair.

Ainsi, la condition nécessaire et suffisante pour que le groupe des puissances d'une transformation du troisième type soit discontinu pour quelque point de l'espace est que φ et ψ soient commensurables avec π; ce groupe est alors fini.

V. — Quatrième type.

1. Dans ce type, r_1 et r_2 sont imaginaires conjugués; il en est de même de r_3 et de r_4, qui sont distincts de r_1 et de r_2. Il résulte de là que la valeur absolue d'aucun de ces nombres n'est égale à *un*.

Comme nous l'avons vu à propos du premier type, il y a une substitution (S), à coefficients complexes,

$$\begin{vmatrix} m_1 & m_2 & m_3 & m_4 \\ n_1 & n_2 & n_3 & n_4 \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \\ q_1 & q_2 & q_3 & q_4 \end{vmatrix},$$

telle que, si l'on transforme la substitution donnée par celle-ci, la transformée soit de la forme (7).

Les coefficients n_1, n_2, n_3, n_4 sont égaux aux conjugués de m_1, m_2, m_3, m_4 multipliés par un même nombre λ; mais, en transformant de nouveau par

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix},$$

nous ne changeons pas la transformée; seulement n_1, n_2, n_3, n_4 sont remplacés par les conjugués de m_1, m_2, m_3, m_4 : nous supposerons donc que n_1, n_2, n_3, n_4 sont les conjugués de m_1, m_2, m_3, m_4.

Les coefficients q_1, q_2, q_3, q_4 sont égaux aux conjugués de p_1, p_2, p_3, p_4 multipliés par un même nombre μ. Donc $(nq)_{13} + (nq)_{24}$ est égal au conjugué de $(mp)_{13} + (mp)_{24}$ multiplié par μ; mais ces deux nombres sont égaux à *un;* donc $\mu = 1$.

Posons

$$\begin{aligned} r_1 &= r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi),\\ r_2 &= r\,(\cos\varphi - i\sin\varphi),\\ r_3 &= r'(\cos\varphi - i\sin\varphi),\\ r_4 &= r'(\cos\varphi + i\sin\varphi), \end{aligned}$$

r et r' étant deux nombres positifs tels que rr' soit égal à *un*.

Transformons de nouveau par

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ \frac{-i}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{-i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix};$$

la substitution par laquelle nous avons transformé la substitution donnée est maintenant réelle; la transformée est

$$(12)\qquad \begin{pmatrix} r\cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 & 0 \\ r\sin\varphi & r\cos\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r'\cos\varphi & -r'\sin\varphi \\ 0 & 0 & r'\sin\varphi & r'\cos\varphi \end{pmatrix};$$

c'est la *forme canonique des substitutions du quatrième type*.

2. En appliquant la méthode donnée au commencement du Chapitre, nous trouvons les quatre points doubles :

$$\begin{aligned} &x_1 = 0, \quad x_2 = i, \quad x_3 = 1, \quad x_4 = i, \quad x_5 = 0;\\ &x_1 = 0, \quad x_2 = -i, \quad x_3 = 1, \quad x_4 = -i, \quad x_5 = 0;\\ &x_1 = 1, \quad x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0;\\ &x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0, \quad x_5 = 1. \end{aligned}$$

Deux d'entre eux sont réels; les deux autres sont imaginaires conjugués et situés dans le domaine (II).

3. La puissance n de la transformation (T) qui correspond à la substitution (12) est

$$\frac{X_1}{r^{2n}x_1} = \frac{X_2}{x_2\cos^2 n\varphi + 2x_3\sin n\varphi\cos n\varphi - x_4\sin^2 n\varphi}$$
$$= \frac{X_3}{-x_2\sin n\varphi\cos n\varphi + x_3\cos 2n\varphi - x_4\sin n\varphi\cos n\varphi}$$
$$= \frac{X_4}{-x_2\sin^2 n\varphi + 2x_3\sin n\varphi\cos n\varphi + x_4\cos^2 n\varphi} = \frac{X_5}{r'^{2n}x_5}.$$

Supposons $r > 1$. Si n augmente indéfiniment par valeurs positives, et si x_1 n'est pas nul, le point limite est le troisième point double. Si $x_1 = 0$, et si x_2, x_3 et x_4 ne sont pas nuls ensemble, les points X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 se rapprochent indéfiniment de la variété $x_1 = x_5 = 0$, qui porte les deux premiers points doubles. Pour savoir de quels points de cette variété ils se rapprochent, remarquons que l'on a

$$x_2x_4 + x_3^2 = 0;$$

par suite, il y a des nombres z et t tels que

$$x_2 = z^2, \qquad x_3 = -zt, \qquad x_4 = -t^2;$$

si Z et T sont les transformés de z et t, on aura

$$\frac{Z}{z\cos n\varphi - t\sin n\varphi} = \frac{T}{z\sin n\varphi + t\cos n\varphi}.$$

Si donc l'un des points limites de X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, pour un point initial donné, est un des deux premiers points doubles, il n'y a pas d'autre point limite; dans le cas contraire, il y a un nombre fini de points limites si φ est commensurable avec π, et une infinité dépendant d'un paramètre si φ est incommensurable avec π.

Si enfin $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$, nous sommes au quatrième point double.

Pour les puissances négatives, on a un résultat analogue, mais les rôles des deux points doubles réels sont échangés, et la variété $x_1 = 0$ est remplacée par la variété $x_5 = 0$.

Les variétés $x_1 = 0$ et $x_5 = 0$ sont situées dans les domaines (II), (III), (III′) et (IV); leur intersection $x_1 = x_5 = 0$ est située dans les domaines (II) et (IV).

Le groupe est donc discontinu, sauf pour les points de la variété $x_1 = x_5 = 0$ et pour les points doubles.

VI. — Cinquième type.

1. Dans ce type, r_1 et r_2 sont égaux et réels; r_3 et r_4, qui sont aussi égaux et réels, sont distincts de r_1. Il en résulte que la valeur absolue d'aucun de ces nombres n'est égale à *un*.

Nous pouvons d'abord, comme pour le premier type, ramener toute substitution de ce type à la forme

$$\left(\begin{matrix} r_1 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_1 & \beta_2 & 0 & \beta_4 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & r_3 & \gamma_4 \\ \delta_1 & \delta_2 & 0 & \delta_4 \end{matrix}\right). \tag{13}$$

Il existe quatre nombres réels m, n, p, q tels que cette substitution (13) donne lieu à l'identité

$$m\Omega_1 + n\Omega_2 + p\Omega_3 + q\Omega_4 = r_3(m\omega_1 + n\omega_2 + p\omega_3 + q\omega_4).$$

On peut supposer que p ou q n'est pas nul; car, s'ils étaient nuls tous deux, n ne le serait pas, et, en transformant par

$$\left(\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{matrix}\right),$$

on aurait encore une transformée de la forme (13), mais q ne serait pas nul.

Supposons d'abord $p \neq 0$; alors le raisonnement fait pour le premier type est de tout point applicable; nous pouvons mettre notre substitution sous la forme

$$(14)\qquad \begin{Bmatrix} r_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_3 \end{Bmatrix},$$

qui est la *première forme canonique des substitutions du cinquième type*.

Si maintenant nous supposons $p=0$, $q\neq 0$, nous pouvons trouver une substitution (S) dont les coefficients de la quatrième ligne sont m, n, p, q, ceux de la première étant $\frac{1}{q}$, $0, 0, 0$; ce sera

$$(15)\qquad \begin{Bmatrix} \frac{1}{q} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{q} & 0 & 0 \\ 0 & m & q & 0 \\ m & n & 0 & q \end{Bmatrix};$$

transformons la substitution (13) par la substitution (15); en tenant compte des relations eutre les coefficients, nous trouvons pour transformée une substitution de la forme

$$\begin{Bmatrix} r_1 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_1 & r_1 & 0 & \beta_4 \\ \gamma_1 & 0 & r_3 & \gamma_4 \\ 0 & 0 & 0 & r_3 \end{Bmatrix}.$$

Transformons encore par

$$\begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{\beta_4}{r_1-r_3} \\ \frac{\gamma_1}{r_3-r_1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix},$$

nous parvenons à la forme

$$\begin{Bmatrix} r_1 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_1 & r_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_3 & \gamma_4 \\ 0 & 0 & 0 & r_3 \end{Bmatrix},$$

où β_1 et γ_4 sont liés par la relation

$$\beta_1 r_3 + r_1 \gamma_4 = 0.$$

Si l'un des nombres β_1 ou γ_4 est nul, l'autre l'est aussi, et nous retrouvons la première forme canonique.

Si β_1 n'est pas nul, nous transformons de nouveau par

$$\begin{pmatrix} \beta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{\beta_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_3 \end{pmatrix},$$

et nous aboutissons à la forme

$$(16) \qquad \begin{pmatrix} r_1 & 0 & 0 & 0 \\ r_1 & r_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_3 & -r_3 \\ 0 & 0 & 0 & r_3 \end{pmatrix},$$

qui est la *deuxième forme canonique des substitutions du cinquième type.*

Il est visible qu'une substitution du cinquième type ne peut se mettre que sous une seule des deux formes canoniques. Nous dirons, par abréviation, *substitution de la première* (ou *deuxième*) *forme canonique*, au lieu de *substitution qui peut se mettre sous la première* (ou *la deuxième*) *forme canonique*. Il ne pourra pas en résulter de confusion. Nous emploierons le même langage pour les types suivants.

2. La transformation (T) correspondant à la substitution (14) est

$$X_1 = r_1^2 x_1, \qquad X_2 = x_2, \qquad X_3 = x_3, \qquad X_4 = x_4, \qquad X_5 = r_3^2 x_5.$$

Comme points doubles, nous avons d'abord tous les points de la variété à deux dimensions

$$x_1 = x_5 = 0,$$

située dans les domaines (II) et (IV); de plus nous avons les deux points doubles isolés réels

$$x_1 = 1, \qquad x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0;$$
$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0, \qquad x_5 = 1.$$

3. La puissance n de la transformation est

$$\frac{X_1}{r_1^{2n} x_1} = \frac{X_2}{x_2} = \frac{X_3}{x_3} = \frac{X_4}{x_4} = \frac{X_5}{r_3^{2n} x_5}.$$

Supposons $|r_1| > 1$. Si n augmente indéfiniment par valeurs positives, le point limite est le premier point double isolé, à moins que le point x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 ne soit sur la variété $x_1 = 0$, entièrement située dans les domaines (II), (III), (III') et (IV). Si $x_1 = 0$, x_2, x_3 et x_4 n'étant pas nuls ensemble, on a comme point limite un point de la variété double. Enfin, si $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$, c'est qu'on est au deuxième point double isolé.

Pour les puissances négatives, le résultat est analogue.

Le groupe des puissances de la transformation est donc discontinu, sauf pour les points doubles.

4. Passons maintenant à la transformatiou (T) correspondant à la substitution (16); c'est

$$X_1 = r_1^2 x_1, \qquad X_2 = x_2 + 2x_3 - x_4, \qquad X_3 = x_3 - x_4, \qquad X_4 = x_4, \qquad X_5 = r_3^2 x_5.$$

Comme premier point double, nous avons le point réel

$$x_2 = 1, \qquad x_1 = x_3 = x_4 = x_5 = 0,$$

qui correspond aux deux couples de racines confondus r_2, r_3 et r_1, r_4; ensuite, nous avons les deux points réels

$$x_1 = 1, \qquad x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0;$$
$$x_5 = 1, \qquad x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0;$$

en tout, trois points doubles.

5. Le groupe des puissances de la transformation a pour transformation générale

$$\frac{X_1}{r_1^{2n} x_1} = \frac{X_2}{x_2 + 2n x_3 - n^2 x_4} = \frac{X_3}{x_3 - n x_4} = \frac{X_4}{x_4} = \frac{X_5}{r_3^{2n} x_5}.$$

Supposons encore $|r_1| > 1$; si n augmente indéfiniment par valeurs positives, le point limite est le deuxième point double si $x_1 \neq 0$; le premier, si $x_1 = 0$, x_2, x_3 et x_4 n'étant pas nuls ensemble; le troisième point double, enfin, est son propre point limite. Pour les puissances négatives, le résultat est analogue. Ce groupe est donc discontinu, sauf pour les point doubles.

VII. — Sixième type.

1. Les nombres r_1 et r_2 sont ici égaux et imaginaires; r_3 et r_4 sont alors aussi égaux et imaginaires conjugués des précédents, et tous ces nombres ont l'unité pour valeur absolue.

Ce que nous avons vu pour le cinquième type nous prouve que, par une transformation (S) imaginaire, nous pouvons mettre la substitution donnée sous l'une des formes

$$\begin{Bmatrix} r_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_3 \end{Bmatrix}, \qquad \begin{Bmatrix} r_1 & 0 & 0 & 0 \\ r_1 & r_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_3 & -r_3 \\ 0 & 0 & 0 & r_3 \end{Bmatrix}.$$

Occupons-nous d'abord de la première. Soit

$$\begin{Bmatrix} m_1 & m_2 & m_3 & m_4 \\ n_1 & n_2 & n_3 & n_4 \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \\ q_1 & q_2 & q_3 & q_4 \end{Bmatrix}$$

la substitution par laquelle nous avons transformé la substitution donnée pour l'obtenir. Soient m_{i0} et n_{i0} les conjugués de m_i et n_i; il existe quatre nombres λ, μ, λ', μ' tels que l'on ait

$$\begin{aligned} p_i &= \lambda\, m_{i0} + \mu\, n_{i0} \\ q_i &= \lambda' m_{i0} + \mu' n_{i0} \end{aligned} \qquad (i = 1, 2, 3, 4);$$

le déterminant $\lambda\mu' - \lambda'\mu$ n'est d'ailleurs pas nul. Mais les relations

$$\begin{aligned} (mp)_{13} + (mp)_{24} &= 1, & (mq)_{13} + (mq)_{24} &= 0, \\ (np)_{13} + (np)_{24} &= 0, & (nq)_{13} + (nq)_{24} &= 1, \end{aligned}$$

nous prouvent immédiatement que λ et μ' sont purement imaginaires.

Transformons de nouveau par

$$\begin{Bmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & -c \\ 0 & 0 & -b & a \end{Bmatrix},$$

où a, b, c, d sont assujettis à la condition

$$ad - bc = 1;$$

la transformée n'est pas changée. Mais, si c et d sont pris tels que

$$\mu d - \mu' c = 0,$$

le nombre μ est, dans la nouvelle substitution de transformation, remplacé par zéro. Alors, comme

$$(np)_{13} + (np)_{24} = 0,$$

nous voyons que

$$n_1 m_{30} - n_3 m_{10} + n_2 m_{40} - n_4 m_{20} = n_{10} m_3 - n_{30} m_1 + n_{20} m_4 - n_{40} m_2 = 0;$$

alors

$$(mq)_{13} + (mq)_{24} = \frac{\lambda'}{\lambda};$$

donc

$$\lambda' = 0.$$

Nous pouvons alors traiter cette substitution comme nous avons fait pour le troisième type. Posons

$$r_1 = \cos\varphi + i \sin\varphi, \qquad r_3 = \cos\varphi - i \sin\varphi;$$

nous arrivons à l'une des deux formes

$$(17) \qquad \begin{Bmatrix} \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi & 0 \\ 0 & \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & 0 & \cos\varphi & 0 \\ 0 & \sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{Bmatrix},$$

$$(18) \qquad \begin{Bmatrix} \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi & 0 \\ 0 & \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ \sin\varphi & 0 & \cos\varphi & 0 \\ 0 & -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{Bmatrix};$$

la forme (17) est la *première forme canonique du sixième type*, la forme (18) est la *deuxième*.

Dans la forme (17), on ne peut pas changer φ en $-\varphi$: on n'aurait plus une transformée de la substitution donnée. Dans la forme (18), ce changement est possible.

2. Cherchons les points doubles des transformations (T) correspondantes. Pour la première forme, nous trouvons les points

$$x_1 = 1, \quad x_2 = i, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = -i, \quad x_5 = -1;$$
$$x_1 = 1, \quad x_2 = -i, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = i, \quad x_5 = -1;$$

ils sont imaginaires conjugués et situés l'un dans le domaine (I), l'autre dans le domaine (I′); de plus, nous avons tous les points de la variété à deux dimensions

$$x_1 = x_5, \quad x_2 = x_4,$$

qui est tout entière dans le domaine (II).

Pour la deuxième forme, nous trouvons les points

$$x_1 = 1, \quad x_2 = i, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = i, \quad x_5 = 1,$$

et

$$x_1 = 1, \quad x_2 = -i, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = -i, \quad x_5 = 1,$$

qui sont imaginaires conjugués et situés dans le domaine (II); et de plus, les points de la variété à deux dimensions

$$x_1 = -x_5, \quad x_2 = -x_4,$$

située dans les domaines (I), (I′) et (IV).

3. Les groupes formés par les puissances d'une de ces substitutions sont formés d'un nombre fini de substitutions si φ est commensurable avec π; dans le cas contraire, ils ne sont discontinus pour aucun point de l'espace.

4. Supposons maintenant que, par une transformation imaginaire,

on ait mis la transformation donnée sous la forme

$$\begin{Bmatrix} r_1 & 0 & 0 & 0 \\ r_1 & r_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_3 & -r_3 \\ 0 & 0 & 0 & r_3 \end{Bmatrix};$$

nous conserverons la même notation que tout à l'heure pour la substitution de transformation. Il existe deux nombres λ et μ tels que

$$q_i = \lambda m_{i0}, \qquad p_i = -\lambda n_{i0} + \mu m_{i0} \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Or on a

$$(mq)_{13} + (mq)_{24} = 0;$$

donc

$$m_1 m_{30} - m_{10} m_3 + m_2 m_{40} - m_{20} m_4 = 0. \tag{19}$$

On a ensuite

$$(mp)_{13} + (mp)_{24} = 1;$$

ceci nous donne, en tenant compte de l'équation (19),

$$-\lambda(m_1 n_{30} - m_3 n_{10} + m_2 n_{40} - m_4 n_{20}) = 1. \tag{20}$$

De plus,

$$(nq)_{13} + (nq)_{24} = 1;$$

par suite

$$-\lambda(m_{10} n_3 - m_{30} n_1 + m_{20} n_4 - m_{40} n_2) = 1. \tag{21}$$

Nous voyons donc que λ est égal à son conjugué; donc λ est réel. Transformons de nouveau par

$$\begin{Bmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\alpha} \end{Bmatrix};$$

la transformée n'est pas changée; mais, dans la nouvelle substitution de transformation, le coefficient qui remplace λ est égal au quotient de λ par $\alpha\alpha_0$; nous pouvons donc faire en sorte que λ soit remplacé par ± 1. Supposons donc $\lambda = \pm 1$.

Nous avons aussi la relation

$$(np)_{13} + (np)_{24} = 0;$$

elle peut s'écrire

$$-\lambda(n_1 n_{30} - n_3 n_{10} + n_2 n_{40} - n_4 n_{20}) - \mu(m_{10} n_3 - m_{30} n_1 + m_{20} n_4 - m_{40} n_2) = 0;$$

et comme, d'après l'équation (21), le coefficient de μ est réel, nous voyons que μ est purement imaginaire. Nous pouvons donc trouver un nombre β, dont le conjugué sera désigné par β_0, tel que

$$\lambda(\beta - \beta_0) = \mu.$$

Transformons alors par

$$\begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \beta & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\beta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix};$$

la forme transformée n'est encore pas changée; mais, dans la nouvelle substitution de transformation que nous désignerons toujours par la même notation, on a

$$\begin{aligned} q_i &= \lambda m_{i0} \\ p_i &= -\lambda n_{i0} \\ \lambda &= \pm 1. \end{aligned} \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

Transformons de nouveau par

$$\begin{Bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{i\lambda}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{-\lambda}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{i\lambda}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{-i}{\sqrt{2}} \end{Bmatrix};$$

la substitution de transformation est maintenant réelle, et la transformée prend la forme

$$(22) \qquad \begin{Bmatrix} \cos\varphi & 0 & 0 & \lambda\sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & \lambda\sin\varphi & \lambda\cos\varphi \\ -\lambda\cos\varphi & -\lambda\sin\varphi & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ -\lambda\sin\varphi & 0 & 0 & \cos\varphi \end{Bmatrix},$$

où l'on a posé

$$r_1 = \cos\varphi + i\sin\varphi, \qquad r_3 = \cos\varphi - i\sin\varphi.$$

Pour $\lambda = -1$, ce sera la *troisième forme canonique du sixième type, sens direct;* pour $\lambda = 1$, ce sera la *troisième forme canonique*, *sens indirect*. Les substitutions représentées sont inverses l'une de l'autre. Une substitution de cette sorte ne peut pas prendre à volonté la forme de sens direct ou la forme de sens indirect, car la démonstration met en évidence que le nombre λ ne peut prendre qu'une seule des valeurs *un* et *moins un*.

5. Les points doubles sont évidemment ici au nombre de trois, comme pour les substitutions analogues du cinquième type.

Pour les trouver, on peut employer une méthode analogue à celle qui a été indiquée au commencement du Chapitre. Introduisons les nombres $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$, de transformés $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4$, tels que

$$\Omega_i = r_1\omega_i \qquad (i = 1, 2, 3, 4);$$

soient encore $\omega'_1, \omega'_2, \omega'_3, \omega'_4$ des nombres de transformés $\Omega'_1, \Omega'_2, \Omega'_3, \Omega'_4$, tels que

$$\Omega'_i = r_1\omega'_i + k\omega_i,$$

k étant une constante. Nous aurons

$$(\Omega\Omega')_{13} + (\Omega\Omega')_{24} = [(\omega\omega')_{13} + (\omega\omega')_{24}]\, r_1^2;$$

comme r_1^2 n'est pas égal à *un*, il en résulte que

$$(\omega\omega')_{13} + (\omega\omega')_{24} = 0.$$

On constate alors que le point de coordonnées

$$x_1 = (\omega\omega')_{12}, \qquad x_2 = (\omega\omega')_{23}, \qquad x_3 = (\omega\omega')_{13}, \qquad x_4 = (\omega\omega')_{14}, \qquad x_5 = (\omega\omega')_{34}$$

est un point double de la transformation.

La racine r_3 fournira de même un second point double.

Enfin, pour le troisième point double, supposons que le point $\upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_3, \upsilon_4$ soit tel que l'on ait

$$\Upsilon_i = r_3\upsilon_i \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

$\Upsilon_1, \Upsilon_2, \Upsilon_3, \Upsilon_4$ étant son transformé; on vérifie alors sur le cinquième type, deuxième forme, auquel tout ceci s'applique aussi, que

$$(\omega\upsilon)_{13} + (\omega\upsilon)_{24} = 0;$$

cette relation a lieu aussi ici, puisque, si l'on emploie des substitutions imaginaires, ce cas ne diffère pas de celui du cinquième type, deuxième forme; alors le point x_1, x_2, x_3, x_4 correspondant est aussi un point double.

Nous trouvons ainsi les trois points doubles

$$\begin{array}{lllll} & x_2 = 1, & x_1 = x_3 = x_4 = x_5 = 0; & & \\ x_1 = 1, & x_2 = 0, & x_3 = i, & x_4 = 0, & x_5 = 1; \\ x_1 = 1, & x_2 = 0, & x_3 = -i, & x_4 = 0, & x_5 = 1. \end{array}$$

Le premier est réel, les deux derniers sont imaginaires conjugués et situés dans le domaine (II).

6. Considérons maintenant le groupe des puissances de l'une de ces substitutions. La puissance n de la transformation directe, ou la puissance $-n$ de la transformation indirecte, est

$$\begin{pmatrix} \cos n\varphi & 0 & 0 & -\sin n\varphi \\ -n\sin n\varphi & \cos n\varphi & -\sin n\varphi & -n\cos n\varphi \\ n\cos n\varphi & \sin n\varphi & \cos n\varphi & -n\sin n\varphi \\ \sin n\varphi & 0 & 0 & \cos n\varphi \end{pmatrix}.$$

La transformation (T) s'écrit

$$\begin{aligned} &\frac{X_1}{x_1\cos^2 n\varphi - 2x_3\sin n\varphi\cos n\varphi - nx_4 - x_5\sin^2 n\varphi} \\ &= \frac{X_2}{-nx_1 + x_2 + n^2x_4 + nx_5} \\ &= \frac{X_3}{x_1\sin n\varphi\cos n\varphi + x_3\cos 2n\varphi + x_5\sin n\varphi\cos n\varphi} \\ &= \frac{X_4}{x_4} = \frac{X_5}{-x_1\sin^2 n\varphi - 2x_3\sin n\varphi\cos n\varphi + nx_4 + x_5\cos^2 n\varphi}. \end{aligned}$$

On voit que, si x_4 et $x_1 - x_5$ ne sont pas nuls ensemble, le point limite est le point double réel, que n croisse indéfiniment par valeurs positives ou par valeurs négatives. Si l'on a simultanément

$$x_4 = 0, \qquad x_1 = x_3,$$

on a aussi $X_4 = 0$ et $X_1 = X_3$: les points transformés occupent un nombre fini de positions si φ est commensurable avec π, une infinité dense sur une variété à un paramètre dans le cas contraire; il n'y a exception que pour les trois points doubles, qui sont tous sur la variété

$$x_4 = 0, \qquad x_1 = x_3.$$

Ce groupe est donc discontinu sauf pour les points de la variété à deux dimensions $x_4 = 0, x_1 = x_3$. Ces équations entraînent $x_1^2 + x_3^2 = 0$; donc $x_3 = \pm i x_1$. A l'exception du point double réel, tous ces points sont dans le domaine (II).

VIII. — Septième type.

1. Ici, r_1 et r_3 sont égaux; r_2 et r_4 sont réels et distincts. Comme $r_1 r_3 = 1$, la valeur commune de r_1 et de r_3 est *un* ou *moins un*.

En opérant comme pour le premier type, nous mettons notre substitution sous la forme

$$\begin{Bmatrix} r_1 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_1 & \beta_2 & 0 & \beta_4 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & r_1 & \gamma_4 \\ \delta_1 & \delta_2 & 0 & \delta_4 \end{Bmatrix}.$$

Il existe trois nombres m_2, m_3, m_4 non tous nuls, tels qu'on ait l'identité

$$m_2 \Omega_2 + m_3 \Omega_3 + m_4 \Omega_4 = r_1 (m_2 \omega_2 + m_3 \omega_3 + m_4 \omega_4) + k \omega_1,$$

k étant une certaine constante; d'ailleurs m_3 n'est pas nul, car sans cela r_2 ou r_4 serait égal à r_1, ce qui est contre l'hypothèse.

Il y a donc une substitution (S) dont les coefficients de la troisième ligne sont

$$0 \quad m_2 \quad m_3 \quad m_4,$$

tandis que ceux de la première sont

$$\frac{1}{m_3} \quad 0 \quad 0 \quad 0.$$

En transformant par cette substitution, la transformée prend la forme

$$\begin{vmatrix} r_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 & \beta_4 \\ \gamma_1 & 0 & r_1 & 0 \\ 0 & \delta_2 & 0 & \delta_4 \end{vmatrix};$$

en opérant alors comme pour le premier type, on la met sous la forme

$$\begin{vmatrix} r_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & 0 & 0 \\ \gamma_1 & 0 & r_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_4 \end{vmatrix};$$

si $\gamma_1 = 0$, on a la substitution

$$\begin{vmatrix} r_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_4 \end{vmatrix}, \tag{23}$$

qui est la *première forme canonique du septième type*.

Si γ_1 n'est pas nul, en transformant par

$$\begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

on constate qu'on a une transformée de même forme, mais où γ_1 est remplacé par son quotient par λ^2. On peut donc choisir λ de façon à obtenir pour transformée l'une des substitutions

$$\begin{vmatrix} r_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & 0 & 0 \\ r_1 & 0 & r_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_4 \end{vmatrix}, \tag{24}$$

$$\begin{vmatrix} r_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & 0 & 0 \\ -r_1 & 0 & r_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_4 \end{vmatrix}; \tag{25}$$

ces deux substitutions sont inverses l'une de l'autre, à condition de permuter dans la seconde r_2 et r_4, ce qui revient à la transformer par $S_5 S_4 S_5$ (Chap. I, § I, 3). La première se nommera *deuxième forme canonique des substitutions du septième type, sens direct;* la substitution (25) sera la *deuxième forme canonique, sens indirect.*

2. Quels sont les points doubles de la substitution (23), première forme canonique? Ce sont tous les points des deux variétés

$$x_3 = x_4 = x_5 = 0,$$
$$x_1 = x_2 = x_3 = 0.$$

Ces variétés à deux dimensions ne se rencontrent pas et sont toutes deux situées dans les domaines (III), (III') et (IV).

3. La puissance n de cette transformation est

$$\frac{X_1}{r_1^n r_2^n x_1} = \frac{X_2}{r_1^n r_2^n x_2} = \frac{X_3}{x_3} = \frac{X_4}{r_1^n r_4^n x_4} = \frac{X_5}{r_1^n r_4^n x_5}.$$

Si n augmente indéfiniment par valeurs positives, et si $|r_2| > 1$, le point limite est un point de la première variété de points doubles, à moins que le point initial n'appartienne à la deuxième variété. Si n augmente indéfiniment par valeurs négatives, les rôles des deux variétés sont échangés. Le groupe est encore discontinu, sauf pour ces deux variétés.

4. Cherchons les points doubles de la deuxième forme canonique; ce sont les deux points réels

$$x_2 = 1, \qquad x_1 = x_3 = x_4 = x_5 = 0;$$
$$x_5 = 1, \qquad x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0.$$

5. La puissance n de la transformation (T) correspondant à la substitution (24) est

$$\frac{X_1}{r_1^n r_2^n x_1} = \frac{X_2}{-n r_1^n r_2^n x_1 + r_1^n r_2^n x_2} = \frac{X_3}{x_3} = \frac{X_4}{r_1^n r_4^n x_4} = \frac{X_5}{n r_1^n r_4^n x_4 + r_1^n r_4^n x_5}.$$

Soit $|r_2| > 1$. Si n augmente indéfiniment par valeurs positives, le point limite est le premier point double, à moins que le point initial n'appartienne à la variété $x_1 = x_2 = x_3 = 0$; les points de cette variété tendent vers le second point double. Pour les puissances négatives, les rôles des points doubles sont échangés, et la variété exceptionnelle devient $x_3 = x_4 = x_5 = 0$; cette variété est, comme l'autre située dans les domaines (III), (III') et (IV). Le groupe est discontinu, sauf pour les points doubles.

Pour la substitution (25), les résultats sont naturellement semblables.

IX. — Huitième type.

1. Dans ce type, r_1 et r_3 sont égaux : leur valeur commune est alors ± 1; r_2 et r_4 sont imaginaires conjugués : leur valeur absolue commune est *un*.

En opérant comme pour le type précédent pour les racines r_1 et r_3, et comme dans le deuxième type pour r_2 et r_4, on voit tout de suite qu'on parvient à l'une des formes

$$(26)\qquad \begin{pmatrix} r_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi \\ 0 & 0 & r_1 & 0 \\ 0 & \sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix},$$

$$(27)\qquad \begin{pmatrix} r_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi \\ r_1 & 0 & r_1 & 0 \\ 0 & \sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix},$$

$$(28)\qquad \begin{pmatrix} r_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi \\ -r_1 & 0 & r_1 & 0 \\ 0 & \sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix};$$

la forme (26) sera la *première forme canonique du huitième type*; la forme (27) sera la *deuxième, sens direct*, et la forme (28) *la deuxième, sens indirect*. Ces deux dernières substitutions (S), après changement de φ en $-\varphi$ dans l'une d'elles, sont inverses l'une de l'autre.

2. Pour la première forme canonique, les points doubles sont ceux

des variétés à deux dimensions imaginaires conjuguées

$$x_4 = \quad ix_1, \qquad x_5 = -ix_2, \qquad x_3 = 0$$

et

$$x_4 = -ix_1, \qquad x_5 = \quad ix_2, \qquad x_3 = 0;$$

la première variété est située dans les domaines (I), (II) et (III), la deuxième dans les domaines (I′), (II) et (III′). Ces deux variétés ne se rencontrent pas.

Le groupe des puissances de la transformation est fini si φ est commensurable avec π; dans le cas contraire, il est infini et discontinu pour tous les points de l'espace.

3. La deuxième forme a comme points doubles

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = 1, \qquad x_3 = 0, \qquad x_4 = 0, \qquad x_5 = -i;$$
$$x_1 = 0, \qquad x_2 = 1, \qquad x_3 = 0, \qquad x_4 = 0, \qquad x_5 = \quad i.$$

Le premier est dans le domaine (III), le second dans le domaine (III′).

4. La puissance n de la substitution (27) s'écrit

$$\begin{aligned}
&\frac{X_1}{r_1^n x_1 \cos n\varphi - r_1^n x_4 \sin n\varphi}\\
&\quad = \frac{X_2}{-nr_1^n x_1 \cos n\varphi + r_1^n x_2 \cos n\varphi + nr_1^n x_4 \sin n\varphi + r_1^n x_5 \sin n\varphi}\\
&\quad = \frac{X_3}{x_3} = \frac{X_4}{r_1^n x_1 \sin n\varphi + r_1^n x_4 \cos n\varphi}\\
&\quad = \frac{X_5}{nr_1^n x_1 \sin n\varphi - r_1^n x_2 \sin n\varphi + nr_1^n x_4 \cos n\varphi + r_1^n x_5 \cos n\varphi}.
\end{aligned}$$

Les transformés d'un point quelconque peuvent tendre vers l'un des points doubles, ou en tout cas se rapprocher de la variété $x_1 = x_3 = x_4 = 0$: pour les points qui ne tendent pas vers l'un des points doubles, le nombre des points limites est fini si φ est commensurable avec π; si φ est incommensurable avec π, les points limites sont tous les points d'une variété à un paramètre. Ce groupe est donc discontinu, sauf pour les points de la variété $x_1 = x_3 = x_4 = 0$, située dans les domaines (III), (III′) et (IV).

X. — Neuvième type.

1. Ici r_1 et r_3 sont égaux; r_2 et r_4 le sont aussi, mais sont différents de r_1 et r_3. L'un de ces couples est composé de racines égales à *un*, l'autre de racines égales à *moins un*. Nous désignerons par r la valeur commune de r_1 et de r_3; $-r$ sera celle de r_2 et de r_4.

En opérant comme pour les deux types précédents, on voit tout de suite qu'on peut, en la transformant par une substitution (S) réelle, mettre toute substitution de ce type sous l'une des formes

$$(29) \qquad \begin{pmatrix} r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -r & 0 & 0 \\ \varepsilon r & 0 & r & 0 \\ 0 & -\eta r & 0 & -r \end{pmatrix},$$

où ε et η peuvent prendre chacun l'une des trois valeurs *zéro*, *un* ou *moins un*. D'ailleurs, si l'on transforme une de ces formes par la substitution S_5 (Chap. I, § I, 3), et qu'on change ensuite r en $-r$, on arrive à une forme analogue à (29), mais où ε et η sont échangés. On peut donc réduire à six le nombre des formes obtenues :

$\varepsilon = \eta = 0$, *première forme canonique ;*

$\varepsilon = 1$, $\eta = 0$, *deuxième forme canonique, sens direct ;*

$\varepsilon = -1$, $\eta = 0$, *deuxième forme canonique, sens indirect;* cette substitution est l'inverse de la précédente;

$\varepsilon = \eta = 1$, *troisième forme canonique, sens direct;*

$\varepsilon = \eta = -1$, *troisième forme canonique, sens indirect*; cette substitution est l'inverse de la précédente;

$\varepsilon = 1$, $\eta = -1$, *quatrième forme canonique.*

2. La transformation (T) correspondant à la *première forme* est

$$X_1 = -x_1, \qquad X_2 = -x_2, \qquad X_3 = x_3, \qquad X_4 = -x_4, \qquad X_5 = -x_5.$$

Les points doubles sont ceux de la variété à *quatre* dimensions

$$x_3 = 0;$$

cette variété pénètre dans tous les domaines (I), (I′), (II), (III), (III′) et (IV).

Le carré de cette transformation est la transformation unité.

3. Pour la *deuxième forme*, les points doubles sont ceux de la variété

$$x_1 = x_3 = x_4 = 0,$$

située dans les domaines (III), (III') et (IV).

La puissance n de la substitution de sens direct donne lieu à la transformation (T)

$$\frac{X_1}{(-1)^n x_1} = \frac{X_2}{n(-1)^{n+1} x_1 + (-1)^n x_2}$$
$$= \frac{X_3}{x_3} = \frac{X_4}{(-1)^n x_4} = \frac{X_5}{n(-1)^n x_4 + (-1)^n x_5}.$$

Si n augmente indéfiniment, le point limite est un point double; le groupe est discontinu, sauf pour les points doubles.

4. Pour la *troisième forme*, l'unique point double est

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0, \qquad x_5 = 1;$$

il est réel.

La puissance n de la transformation (T) de sens direct est

$$\frac{X_1}{(-1)^n x_1} = \frac{X_2}{n(-1)^{n+1} x_1 + (-1)^n x_2} = \frac{X_3}{x_3} = \frac{X_4}{n(-1)^n x_1 + (-1)^n x_4}$$
$$= \frac{X_5}{n^2(-1)^n x_1 + n(-1)^{n+1} x_2 + n(-1)^n x_4 + (-1)^n x_5}.$$

Les transformés de n'importe quel point tendent vers le point double; il n'y a d'exception que pour les points de la variété à deux dimensions

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = x_4,$$

ce qui entraîne

$$x_3 = \pm i x_2;$$

les points de cette variété autres que le point double occupent seulement deux positions, l'une pour laquelle $x_3 = ix_2$, l'autre pour laquelle $x_3 = -ix_2$.

Le groupe est donc discontinu, sauf pour les points de la variété $x_1 = 0$, $x_2 = x_4$. A l'exception du point double, qui est réel, ces points sont tous dans le domaine (II).

5. La *quatrième forme canonique* a aussi l'unique point double

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0, \qquad x_5 = 1,$$

qui est réel.

La puissance n de la transformation (T) est

$$\frac{X_1}{(-1)^n x_1} = \frac{X_2}{n(-1)^{n+1}x_1 + (-1)^n x_2} = \frac{X_3}{x_3} = \frac{X_4}{n(-1)^{n+1}x_1 + (-1)^n x_4}$$
$$= \frac{X_5}{n^2(-1)^{n+1}x_1 + n(-1)^n x_2 + n(-1)^n x_4 + (-1)^n x_5}.$$

Les transformés de n'importe quel point tendent vers le point double. Il n'y a d'exception que pour les points de la variété à deux dimensions

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = -x_4,$$

ce qui entraîne $x_3 = \pm x_2$: les transformés de ces points, autres que le point double, n'occupent que deux positions distinctes, une pour laquelle $x_3 = x_2$, l'autre pour laquelle $x_3 = -x_2$.

Le groupe est discontinu, sauf pour les points de la variété à deux dimensions $x_1 = 0$, $x_2 = -x_4$, qui est située dans les domaines (III), (III') et (IV).

XI. — Dixième type.

1. Dans ce type, r_1, r_2, r_3 et r_4 sont égaux ; leur valeur commune est ± 1; nous la désignerons par r.

Nous pouvons d'abord mettre toute substitution de ce type sous la forme

$$\left\{\begin{matrix} r & 0 & 0 & 0 \\ \beta_1 & \beta_2 & 0 & \beta_4 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & r & \gamma_4 \\ \delta_1 & \delta_2 & 0 & \delta_4 \end{matrix}\right\}. \tag{30}$$

Il existe alors trois nombres m_2, m_3, m_4 non tous nuls tels qu'on ait l'identité

$$m_2\Omega_2 + m_3\Omega_3 + m_4\Omega_4 = r(m_2\omega_2 + m_3\omega_3 + m_4\omega_4) + k\omega_1,$$

k étant une certaine constante. Comme pour le cinquième type, on peut supposer que m_3 ou m_4 *n'est pas nul*.

Si d'abord m_3 n'est pas nul, on peut raisonner comme pour le neuvième type, et arriver ainsi à l'une des formes

$$(3_1)\qquad \begin{vmatrix} r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 & 0 \\ \varepsilon r & 0 & r & 0 \\ 0 & \eta r & 0 & r \end{vmatrix},$$

où ε et η peuvent prendre chacun l'une des trois valeurs *zéro*, *un* et *moins un*. Comme dans le neuvième type, on peut, en transformant par S_5 (Chap. I, § I, 3), échanger ε et η. On obtient donc ainsi six formes canoniques :

$\varepsilon = \eta = 0$, *première forme canonique* ;

$\varepsilon = 1$, $\eta = 0$, *deuxième forme canonique, sens direct ;*

$\varepsilon = -1$, $\eta = 0$, *deuxième forme canonique, sens indirect ;* cette substitution est l'inverse de la précédente ;

$\varepsilon = \eta = 1$, *troisième forme canonique, sens direct ;*

$\varepsilon = \eta = -1$, *troisième forme canonique, sens indirect ;* cette substitution est l'inverse de la précédente ;

$\varepsilon = 1$, $\eta = -1$, *quatrième forme canonique.*

Supposons maintenant

$$m_3 = 0, \qquad m_4 \neq 0.$$

Nous pouvons transformer par

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_2 & 0 & n_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & m_4 \end{vmatrix},$$

où n_2 et n_4 sont tels que $(mn)_{24} = -1$. La transformée est alors

$$\begin{vmatrix} r & 0 & 0 & 0 \\ \beta_1 & r & 0 & \beta_4 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & r & \gamma_4 \\ \gamma_2 & 0 & 0 & r \end{vmatrix},$$

avec la relation

$$r(\gamma_4 + \beta_1) - \gamma_2\beta_4 = 0.$$

Supposons d'abord que l'on ait

$$\gamma_2 = \gamma_1 = \beta_4 = \beta_1 = \gamma_4 = 0;$$

alors on retrouve la première forme canonique.

Supposons maintenant que l'on ait

$$\gamma_2 = \gamma_1 = \beta_4 = 0,$$

β_1 et γ_4 n'étant pas nuls ensemble : ils sont alors opposés. Transformons cette substitution par

$$\begin{Bmatrix} \frac{r}{\beta_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\beta_1}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix},$$

la transformée est

$$\begin{Bmatrix} r & 0 & 0 & 0 \\ r & r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r & -r \\ 0 & 0 & 0 & r \end{Bmatrix};$$

en la transformant de nouveau par

$$\begin{Bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{Bmatrix},$$

nous retrouvons la quatrième forme canonique.

Supposons maintenant que γ_2 *soit nul*, γ_1 ou β_4 ne l'étant pas ; on a encore $\gamma_4 = -\beta_1$. En transformant par

$$\begin{Bmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{Bmatrix},$$

où $ad - bc = 1$, on ne changera pas cette forme, mais *on pourra annuler* β_1; si γ_1 n'est pas nul, on prendra par exemple pour cela $a = d = 1$, $c = 0$ et $b = -\frac{\beta_1}{\gamma_1}$; si γ_1 est nul, on prendra $a = d = 1$, $b = 0$, $c = \frac{\beta_1}{\beta_4}$. En transformant alors par

$$\begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{Bmatrix},$$

puis en opérant comme pour le neuvième type, on retrouvera les formes déjà rencontrées.

Supposons enfin

$$\gamma_2 \neq 0.$$

En transformant alors par

$$\begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & m \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix},$$

on conserve cette forme de transformée; mais si $m = -\frac{\beta_1}{\gamma_2}$, β_1 est remplacé par *zéro*. Ainsi, on est ramené au cas de

$$\beta_1 = 0.$$

En transformant maintenant par

$$\begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ n & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix},$$

on a une transformée de même forme; mais, si

$$n = \frac{\gamma_1}{\gamma_2},$$

γ_1 est remplacé par *zéro*. Transformons alors par

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r\gamma_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{r}{\gamma_2} \end{Vmatrix},$$

et nous obtenons comme transformée

$$(32) \qquad \begin{Vmatrix} r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 & \beta_4 \\ 0 & r & r & \beta_4 \\ r & 0 & 0 & r \end{Vmatrix}.$$

Si alors $\beta_4 = 0$, en transformant de nouveau par

$$\begin{Vmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{Vmatrix},$$

nous retrouvons la quatrième forme canonique.

Si $\beta_4 \neq 0$, une transformation

$$\begin{Vmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{Vmatrix}$$

ramène β_4 à la valeur εr, ε étant égal à ± 1. Pour $\varepsilon = 1$, on a la substitution

$$(33) \qquad \begin{Vmatrix} r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 & r \\ 0 & r & r & r \\ r & 0 & 0 & r \end{Vmatrix},$$

cinquième forme canonique du dixième type, sens direct. Si $\varepsilon = -1$, nous transformons encore par

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix},$$

et nous trouvons la substitution

$$\begin{Vmatrix} r & 0 & 0 & 0 \\ r & r & 0 & -r \\ 0 & -r & r & 0 \\ -r & 0 & 0 & r \end{Vmatrix}, \tag{34}$$

qui est l'inverse de la substitution (33); c'est la *cinquième forme canonique, sens indirect.*

2. La transformation (T) correspondant à la première forme canonique est la substitution unité. Cette première forme n'est pas altérée quand on la transforme par une substitution quelconque. Nous avons ainsi *deux substitutions* (S) *correspondant à la transformation* (T) *unité :* ce résultat était d'ailleurs facile à voir directement.

3. Pour la deuxième forme canonique, les points doubles sont tous les points de la variété

$$x_1 = x_3 = x_4 = 0,$$

située dans les domaines (III), (III′) et (IV).

Le groupe des puissances de la transformation fait tendre les transformés de n'importe quel point vers un point double; ce groupe est discontinu, sauf pour les points doubles.

4. Dans la troisième forme canonique, les points doubles sont tous ceux de la variété

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = x_4;$$

ces équations entraînent $x_3 = \pm i x_2$; ces points sont tous dans le domaine (II), sauf le point

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0, \qquad x_5 = 1,$$

qui est réel.

Les puissances de la transformation font tendre tout point autre qu'un point double vers le point double réel. Ce groupe est discontinu, sauf pour les points doubles.

5. Les points doubles de la quatrième forme canonique sont tous les points de la variété

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = -x_4;$$

ces équations entraînent

$$x_3 = \pm x_2;$$

ces points sont situés dans les domaines (III), (III') et (IV).

Par les puissances de la transformation, les transformés de tout point autre qu'un point double tendent vers le point double réel

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0, \qquad x_5 = 1.$$

Ce groupe est discontinu, sauf pour les points doubles.

6. La cinquième forme canonique n'a qu'un point double

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = 1, \qquad x_3 = x_4 = x_5 = 0;$$

il est réel.

La puissance n de la substitution de sens direct est

$$\begin{pmatrix} r^n & 0 & 0 & 0 \\ \frac{n(n-1)}{2} r^n & r^n & 0 & n r^n \\ \frac{(n+1)n(n-1)}{6} r^n & n r^n & r^n & \frac{n(n+1)}{2} r^n \\ n r^n & 0 & 0 & r^n \end{pmatrix};$$

la transformation (T) correspondante est

$$\frac{X_1}{x_1 + n x_4} = \frac{X_2}{\frac{n(n-1)(2n-1)}{6} x_1 + x_2 + n(n-1)x_3 + \frac{(n+1)n^2(n-1)}{12} x_4 - n x_5}$$
$$= \frac{X_3}{n x_1 + x_3 + \frac{n(n+1)}{2} x_4} = \frac{X_4}{x_4}$$
$$= \frac{X_5}{-n^2 x_1 - 2n x_3 - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} x_4 + x_5}.$$

Par les puissances de la transformation, les transformés de n'importe quel point tendent vers le point double.

XII. — Conséquences.

1. Prenons deux des formes canoniques que nous avons énumérées : nous constatons qu'elles diffèrent soit par le nombre ou la nature des points doubles, soit par les effets des puissances de la substitution sur un point quelconque. Il est donc certain qu'aucune substitution (S) ne permet de transformer ces formes l'une dans l'autre, même si r_1, r_2, r_3, r_4 sont les mêmes pour les deux transformations.

Nous avons ainsi *vingt-deux formes canoniques* distinctes, sans tenir compte de la distinction qui se présente à huit endroits différents entre les substitutions de sens direct et celles de sens indirect. Ces huit endroits se trouvent : un dans chacun des sixième, septième et huitième types, deux dans le neuvième type, trois dans le dixième type.

2. Considérons à part les substitutions qui ont au moins un point double dans le domaine (I), et par suite dans le domaine (I'). De l'étude que nous avons faite il résulte qu'il est nécessaire pour cela que r_1 et r_3 soient imaginaires conjugués, ainsi que r_2 et r_4; si deux de ces quatre racines sont égales, leur valeur commune doit encore annuler les mineurs du déterminant premier membre de l'équation (1) en s; enfin, les quatre racines ne peuvent être égales que pour la substitution unité. Si toutes ces conditions sont remplies, on a dans le

domaine (I) un point double unique (troisième type; sixième type, première forme), ou une infinité, tous les points d'une variété algébrique pénétrant dans ce domaine, et dont les points dépendent d'un paramètre complexe (sixième type, deuxième forme; huitième type, première forme), ou même de deux (neuvième type, première forme).

Le groupe formé par les puissances d'une de ces transformations n'est discontinu que si les arguments de r_1, r_2, r_3, r_4 sont commensurables avec π; il est alors fini.

Les autres sortes de groupes de puissances sont toujours discontinus (sauf pour des points exceptionnels) et infinis.

CHAPITRE III.

FORMATION DU POLYÈDRE FONDAMENTAL D'UN GROUPE DISCONTINU.

Nous voulons donner une méthode de formation du polyèdre fondamental d'un groupe discontinu de transformations (T). Dans cette méthode, les variétés à cinq dimensions invariantes par les transformations (T) qui ont un point double donné dans le domaine (I) joueront un rôle fondamental. Cela nous entraîne à étudier d'abord ces transformations.

I. — Transformations de point double $g = g' = i$, $h = 0$.

1. Quelles sont les transformations ayant pour point double le point $g = g' = i$, $h = 0$? C'est un point du domaine (I); donc, en dehors de la transformation unité, ces transformations appartiennent toutes soit au troisième type, soit au sixième type, première ou deuxième forme, soit au huitième type, première forme, soit enfin au neuvième type, première forme. Or, pour toutes ces sortes de transformations, on se rend compte, sur les formes canoniques, que tous les points doubles peuvent être trouvés par la méthode que nous

exposions au commencement du Chapitre précédent. La présence de racines multiples pour l'équation (1) en s (Chap. II) appelle seulement les observations suivantes :

Pour le sixième type, première ou deuxième forme, on associera r_1 à lui-même, puis r_3 à lui-même, enfin r_1 à r_3, en faisant attention pour ce dernier couple à la condition

$$(\omega\upsilon)_{13} + (\omega\upsilon)_{24} = 0.$$

Pour le huitième type, première forme, on associera la racine double à l'une ou l'autre des autres.

Pour le neuvième type, première forme, on associera la racine *un* à la racine *moins un*.

2. Considérons donc une transformation ayant le point double

$$g = g' = i, \qquad h = 0;$$

soient r et r' les racines de l'équation en s auxquelles correspond ce point double.

Si

$$\begin{Vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{Vmatrix}$$

est notre substitution (S), l'équation en s

$$(1) \qquad (a_1 + ia_3 - s)(b_2 + ib_4 - s) - (a_2 + ia_4)(b_1 + ib_3) = 0$$

admet les racines r et r'. Nous supposerons d'abord que r n'est pas égal à r', c'est-à-dire que nous n'avons pas une substitution du sixième type, première forme. Nous voyons alors que l'on a

$$(2) \qquad \begin{cases} (ab)_{12} - (ab)_{34} = \cos(\varphi + \psi), \\ (ab)_{14} - (ab)_{23} = \sin(\varphi + \psi), \end{cases}$$

en posant

$$r = \cos\varphi + i\sin\varphi,$$
$$r' = \cos\psi + i\sin\psi.$$

Une solution quelconque des équations en ω_1 et ω_2

$$(3)\qquad \begin{cases} (a_1+ia_3-s)\omega_1+(a_2+ia_4)\omega_2=0,\\ (b_1+ib_3)\omega_1+(b_2+ib_4-s)\omega_2=0, \end{cases}$$

qui se réduisent à une si s égale r ou r', vérifie aussi les équations

$$(4)\qquad \begin{cases} is\omega_1=(c_1+ic_3)\omega_1+(c_2+ic_4)\omega_2,\\ is\omega_2=(d_1+id_3)\omega_1+(d_2+id_4)\omega_2. \end{cases}$$

Supposons d'abord a_2+ia_4 différent de zéro; nous pouvons prendre

$$\omega_1=a_2+ia_4,\qquad \omega_2=s-a_1-ia_3;$$

donc, pour s égal à r ou à r',

$$is(a_2+ia_4)=(c_1+ic_3)(a_2+ia_4)+(c_2+ic_4)(s-a_1-ia_3);$$

donc

$$c_2+ic_4=i(a_2+ia_4);$$

puis

$$c_1+ic_3=i(a_1+ia_3);$$

ainsi

$$c_1=-a_3,\qquad c_2=-a_4,\qquad c_3=a_1,\qquad c_4=a_2;$$

mais

$$(ac)_{13}+(ac)_{24}=1;$$

donc

$$a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2=1.$$

Mais alors, les équations (2), jointes aux équations

$$(ab)_{13}+(ab)_{24}=(bc)_{13}+(bc)_{24}=0,$$

permettent de déterminer b_1, b_2, b_3 et b_4; on trouve ainsi

$$\begin{aligned} b_1&=-a_2\cos(\varphi+\psi)-a_4\sin(\varphi+\psi),\\ b_2&=a_1\cos(\varphi+\psi)+a_3\sin(\varphi+\psi),\\ b_3&=a_4\cos(\varphi+\psi)-a_2\sin(\varphi+\psi),\\ b_4&=-a_3\cos(\varphi+\psi)+a_1\sin(\varphi+\psi). \end{aligned}$$

Nous remarquons alors que

$$b_1+ib_3=(-a_2+ia_4)[\cos(\varphi+\psi)+i\sin(\varphi+\psi)];$$

donc $b_1 + ib_3$ n'est pas nul; un calcul pareil à celui qui nous a donné c_1, c_2, c_3 et c_4 nous donne

$$d_1 = -b_3, \qquad d_2 = -b_4, \qquad d_3 = b_1, \qquad d_4 = b_2.$$

En posant $\varphi + \psi = \theta$, nous parvenons à la substitution

$$\left\{\begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ -a_2\cos\theta - a_4\sin\theta & a_1\cos\theta + a_3\sin\theta & a_4\cos\theta - a_2\sin\theta & -a_3\cos\theta + a_1\sin\theta \\ -a_3 & -a_4 & a_1 & a_2 \\ -a_4\cos\theta + a_2\sin\theta & a_3\cos\theta - a_1\sin\theta & -a_2\cos\theta - a_4\sin\theta & a_1\cos\theta + a_3\sin\theta \end{array}\right\},$$

qui est bien réellement une substitution (S) répondant à la question si

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 = 1.$$

Nous avons supposé $a_2 + ia_4 \neq 0$; supposons maintenant $a_2 + ia_4 = 0$. Les équations (4) sont alors vérifiées pour $\omega_1 = 0$ et pour $\omega_2 = 0$, ce qui donne

$$c_2 + ic_4 = d_1 + id_3 = 0;$$

alors les équations

$$(ab)_{13} = (bc)_{13} = 0, \qquad (ac)_{13} = 1$$

montrent que $b_1 = b_3 = 0$. Les équations (4) donnent ensuite

$$c_1 + ic_3 = i(a_1 + ia_3),$$
$$d_2 + id_4 = i(b_2 + ib_4);$$

enfin les équations (2) deviennent

$$a_1 b_2 - a_3 b_4 = \cos(\varphi + \psi),$$
$$a_3 b_2 + a_1 b_4 = \sin(\varphi + \psi);$$

on retrouve alors la substitution (5), où l'on a fait $a_2 = a_4 = 0$.

Quand on a la substitution (5), on peut calculer facilement φ et ψ. On a d'abord la relation

$$\varphi + \psi = \theta;$$

de plus, l'équation (1) nous montre que

$$a_1 + b_2 = \cos\varphi + \cos\psi,$$
$$a_3 + b_4 = \sin\varphi + \sin\psi;$$

ces deux dernières conditions se réduisent à celle-ci :

$$(6) \qquad a_1 \cos\frac{\theta}{2} + a_3 \sin\frac{\theta}{2} = \cos\frac{\varphi - \psi}{2}.$$

Nous avons donc φ et ψ, en grandeur et en signe.

Nous avons, dans le calcul précédent, supposé que nous n'avions pas affaire à une substitution du sixième type, première forme, et que, par suite, r n'était pas égal à r'. Supposons maintenant que l'on ait

$$r = r'.$$

On voit tout de suite sur la forme canonique du sixième type, première forme, que les conditions

$$\omega_3 = i\omega_1, \qquad \omega_4 = i\omega_2,$$

le point double étant $g = g' = i$, $h = 0$, entraînent les égalités

$$\frac{\Omega_1}{\omega_1} = \frac{\Omega_2}{\omega_2} = \frac{\Omega_3}{\omega_3} = \frac{\Omega_4}{\omega_4} = r.$$

De là résultent ici les équations

$$\begin{aligned} &a_1 + ia_3 = \cos\varphi + i\sin\varphi, && a_2 + ia_4 = 0, \\ &b_1 + ib_3 = 0, && b_2 + ib_4 = \cos\varphi + i\sin\varphi, \\ &c_1 + ic_3 = i(\cos\varphi + i\sin\varphi), && c_2 + ic_4 = 0, \\ &d_1 + id_3 = 0, && d_2 + id_4 = i(\cos\varphi + i\sin\varphi); \end{aligned}$$

on arrive ainsi à la substitution

$$\left\{\begin{array}{cccc} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi & 0 \\ 0 & \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi & 0 \\ 0 & -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{array}\right\}.$$

Or si, dans la substitution (5), on veut avoir

$$\varphi = \psi,$$

la condition (6) montre que

$$a_1 \cos\varphi + a_3 \sin\varphi = 1.$$

Mais, comme $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 = 1$, on a aussi

$$(a_1 \cos\varphi + a_3 \sin\varphi)^2 + (-a_1 \sin\varphi + a_3 \cos\varphi)^2 + a_2^2 + a_4^2 = 1;$$

donc

$$a_1 \sin\varphi - a_3 \cos\varphi = 0, \qquad a_2 = a_4 = 0;$$

par suite

$$a_1 = \cos\varphi, \qquad a_3 = \sin\varphi.$$

Nous retrouvons ainsi notre substitution du sixième type, première forme.

La substitution (5) peut donc, pour des valeurs convenables des paramètres, représenter n'importe quelle substitution (S) de point double

$$g = g' = i, \qquad h = 0.$$

3. Le produit de deux substitutions (5) est donc une substitution (5). Si, dans les deux facteurs, l'angle $\theta = \varphi + \psi$ a les valeurs respectives θ et θ', sa valeur Θ dans le produit est

$$\Theta = \theta + \theta'.$$

Ceci nous prouve que les substitutions (5) du sixième type, deuxième forme, et celles du neuvième type, première forme, forment aussi un groupe.

En écrivant les valeurs de a_1, a_2, a_3, a_4 dans le produit, on retrouve l'identité d'Euler sur le produit de deux sommes de quatre carrés.

II. — Variétés à cinq dimensions invariantes par les transformations qui ont un point double donné dans le domaine (I).

1. Les transformations de point double

$$g = g' = i, \qquad h = 0$$

dépendent, on vient de le voir, de quatre paramètres seulement. Donc, par un point donné, passent *une infinité* de variétés à cinq dimensions invariantes par toutes ces transformations. Nous nous proposons de voir s'il en existe dont l'équation s'obtienne en égalant à zéro une forme quadratique à indéterminées conjuguées en x_1, x_2, x_3, x_4 et x_5, et de les découvrir.

Parmi les substitutions qui ont le point double donné se trouvent les suivantes :

$$(6)\qquad \begin{Bmatrix} \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi & 0 \\ 0 & \cos\psi & 0 & -\sin\psi \\ \sin\varphi & 0 & \cos\varphi & 0 \\ 0 & \sin\psi & 0 & \cos\psi \end{Bmatrix};$$

transformons par la substitution (S) imaginaire

$$(7)\qquad \begin{Bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{Bmatrix};$$

nos substitutions prennent la forme plus commode

$$(8)\qquad \begin{Bmatrix} r_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_4 \end{Bmatrix},$$

où l'on a posé

$$r_1 = \cos\varphi + i\sin\varphi, \qquad r_2 = \cos\psi + i\sin\psi.$$

Nos formes quadratiques à indéterminées conjuguées restent, par cette transformation, des formes quadratiques à indéterminées conjuguées. Or on constate immédiatement que, par suite de l'invariance imposée, ces formes quadratiques doivent être du type

$$(9)\qquad \alpha_1 x_1 x_{10} + \alpha_2 x_2 x_{20} + \alpha_3 x_3 x_{30} + \alpha_4 x_4 x_{40} + \alpha_5 x_5 x_{50};$$

en effet, la présence d'un autre terme appellerait celle du terme imaginaire conjugué, et, par la transformation, ces deux termes seraient multipliés par des facteurs différents.

De plus, ces formes doivent être invariantes par toutes les autres transformations qui ont le point double donné ; il suffit de considérer les suivantes :

$$(10) \qquad \begin{Bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ -a_2 & a_1 & a_4 & -a_3 \\ -a_3 & -a_4 & a_1 & a_2 \\ -a_4 & a_3 & -a_2 & a_1 \end{Bmatrix},$$

c'est-à-dire celles du sixième type, deuxième forme ; car, en les multipliant par celles qu'on a déjà employées, on peut reproduire toutes les substitutions (5). Par la transformation déjà indiquée, les transformations (T) correspondantes deviennent

$$(11) \quad \begin{cases} X_1 = x_1, \\ X_2 = (a_1 + a_3 i)^2 x_2 - 2(a_1 + a_3 i)(a_2 + a_4 i) x_3 - (a_2 + a_4 i)^2 x_4, \\ X_3 = (a_1 + a_3 i)(a_2 - a_4 i) x_2 + (a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 - a_4^2) x_3 + (a_1 - a_3 i)(a_2 + a_4 i) x_4, \\ X_4 = -(a_2 - a_4 i)^2 x_2 - 2(a_1 - a_3 i)(a_2 - a_4 i) x_3 + (a_1 - a_3 i)^2 x_4, \\ X_5 = x_5. \end{cases}$$

Dans la forme (9), cette transformation ne change pas le coefficient de $x_1 x_{10}$, ni celui de $x_5 x_{50}$; celui de $x_2 x_{20}$ devient

$$\alpha_2 (a_1^2 + a_3^2)^2 + \alpha_3 (a_1^2 + a_3^2)(a_2^2 + a_4^2) + \alpha_4 (a_2^2 + a_4^2)^2 ;$$

or il doit rester égal à α_2, pourvu que

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 = 1 ;$$

posons

$$a_1^2 + a_3^2 = x,$$

ce qui entraîne

$$a_2^2 + a_4^2 = 1 - x ;$$

on doit avoir, quel que soit x, la relation

$$\alpha_2 x^2 + \alpha_3 x(1 - x) + \alpha_4 (1 - x)^2 = \alpha_2 ;$$

donc

$$\alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4 = 0,$$
$$\alpha_3 - 2\alpha_4 = 0,$$
$$\alpha_4 = \alpha_2 ;$$

ces trois conditions reviennent à deux :

$$\alpha_2 = \frac{1}{2} \alpha_3 = \alpha_4.$$

On voit immédiatement que ces conditions sont suffisantes. Nos variétés sont donc

$$\alpha_1 x_1 x_{10} + \alpha_2 (x_2 x_{20} + 2 x_3 x_{30} + x_4 x_{40}) + \alpha_5 x_5 x_{50} = 0.$$

Ces variétés dépendent de deux paramètres.

Il nous reste à les soumettre à la transformation inverse de celle que nous avions faite; elles prennent alors la forme

$$\begin{aligned}(12)\quad & \lambda(x_1 x_{10} + x_2 x_{20} + 2 x_3 x_{30} + x_4 x_{40} + x_5 x_{50}) \\ & + i\nu(x_1 x_{20} - x_{10} x_2 - x_1 x_{40} + x_{10} x_4 + x_2 x_{50} - x_{20} x_5 - x_4 x_{50} + x_{40} x_5) \\ & \qquad + \mu(x_1 x_{50} + x_{10} x_5 + x_2 x_{40} + x_{20} x_4 + 2 x_3 x_{30}) = 0;\end{aligned}$$

on a posé

$$\begin{aligned}\lambda &= \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_5, \\ \nu &= -\alpha_1 + \alpha_5, \\ \mu &= -\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_5.\end{aligned}$$

2. Nous pouvons facilement en déduire les variétés dont l'équation s'obtient en égalant à zéro une forme quadratique à indéterminées conjuguées, et qui sont invariantes par les transformations (T) qui ont un point double donné dans le domaine (I). Si P est ce point double, nous dirons pour abréger que ces variétés *ont comme centre le point* P. Il suffit d'appliquer aux variétés (12) une transformation (T) amenant en P le point $g = g' = i$, $h = 0$.

Or on démontre, comme au Chapitre I (§ II, 3), que, si x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 et ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4, ξ_5 sont deux groupes de variables subissant la même transformation (T), la forme

$$\begin{aligned}(13)\quad & \alpha(x_1 \xi_{50} + x_2 \xi_{40} + 2 x_3 \xi_{30} + x_4 \xi_{20} + x_5 \xi_{10}) \\ \times\; & (x_{10} \xi_5 + x_{20} \xi_4 + 2 x_{30} \xi_3 + x_{40} \xi_2 + x_{50} \xi_1) \\ & + \beta(x_1 \xi_5 + x_2 \xi_4 + 2 x_3 \xi_3 + x_4 \xi_2 + x_5 \xi_1) \\ \times\; & (x_{10} \xi_{50} + x_{20} \xi_{40} + 2 x_{30} \xi_{30} + x_{40} \xi_{20} + x_{50} \xi_{10}) \\ & + \gamma(x_1 x_{50} + x_{10} x_5 + x_2 x_{40} + x_{20} x_4 + 2 x_3 x_{30}) \\ \times\; & (\xi_1 \xi_{50} + \xi_{10} \xi_5 + \xi_2 \xi_{40} + \xi_{20} \xi_4 + 2 \xi_3 \xi_{30})\end{aligned}$$

ne change pas de valeur. Mais si l'on fait

$$\xi_1 = 1, \qquad \xi_2 = -i, \qquad \xi_3 = 0, \qquad \xi_4 = i, \qquad \xi_5 = -1$$

et si l'on pose

$$(14) \qquad \alpha = \frac{\lambda - \nu}{2}, \qquad \beta = \frac{\lambda + \nu}{2}, \qquad \gamma = -\frac{\lambda + \mu}{4},$$

on retrouve le premier membre de l'équation (12).

Donc, la forme (13) égalée à zéro représente les variétés invariantes de centre $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5$.

Nous voyons immédiatement que, si une variété qui a pour centre le point $P(\xi_1, \xi_2, \xi_2, \xi_4, \xi_5)$ passe par le point $M(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, celle qui a pour centre le point M et qui correspond aux mêmes valeurs des paramètres λ, μ, ν passe par le point P. L'équation

$$(15) \qquad \begin{aligned} &\alpha \text{ norme}(x_1\xi_{50} + x_2\xi_{40} + 2x_3\xi_{30} + x_4\xi_{20} + x_5\xi_{10}) \\ &+ \beta \text{ norme}(x_1\xi_5 + x_2\xi_4 + 2x_3\xi_3 + x_4\xi_2 + x_5\xi_1) \\ &+ \gamma(x_1x_{50} + x_{10}x_5 + x_2x_{40} + x_{20}x_4 + 2x_3x_{30}) \\ \times &\quad (\xi_1\xi_{50} + \xi_{10}\xi_5 + \xi_2\xi_{40} + \xi_{20}\xi_4 + 2\xi_3\xi_{30}) = 0, \end{aligned}$$

qui représente la première variété si l'on y regarde x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 comme variables, ne cesse pas, en effet, d'être vérifiée si l'on échange x_i avec ξ_i $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$.

3. Supposons que, dans l'équation (15), on prenne la même valeur pour α et pour β : *les coefficients de cette équation en x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 sont alors réels*. Proposons-nous d'étudier la disposition des variétés représentées par cette équation.

Nous nous contenterons de faire cette étude pour les variétés dont le centre est le point $g = g' = i$, $h = 0$; les résultats s'étendent immédiatement à toutes les autres variétés. Nous prendrons donc l'équation (12), où nous ferons

$$\nu = 0;$$

cette équation devient ainsi

$$(16) \qquad \begin{aligned} &\lambda(x_1x_{10} + x_2x_{20} + 2x_3x_{30} + x_4x_{40} + x_5x_{50}) \\ &+ \mu(x_1x_{50} + x_{10}x_5 + x_2x_{40} + x_{20}x_4 + 2x_3x_{30}) = 0. \end{aligned}$$

Nous voyons que deux variétés (16) ne se rencontrent pas : car leurs points d'intersection devraient annuler

$$x_1x_{10} + x_2x_{20} + 2x_3x_{30} + x_4x_{40} + x_5x_{50},$$

ce qui est impossible. Donc, deux variétés de même centre et à coefficients réels ne se rencontrent pas.

En particulier, *aucune de ces variétés ne rencontre la variété*

$$x_1 x_{50} + x_{10} x_5 + x_2 x_{40} + x_{20} x_4 + 2 x_3 x_{30} = 0,$$

qui est la variété qui correspond à $\lambda = 0$.

Écrivons maintenant l'équation (16) en coordonnées non homogènes; elle prend ainsi la forme

$$(17) \quad \lambda[1 + g g_0 + 2 h h_0 + g' g'_0 + (g g' - h^2)(g_0 g'_0 - h_0^2)] - 4\mu(\mathcal{G}\mathcal{G}' - \mathcal{H}^2) = 0.$$

Cette équation peut encore s'écrire ainsi :

$$(18) \quad \begin{aligned} &\mu[(g g' - h^2 + 1)(g_0 g'_0 - h_0^2 + 1) + (g - g')(g_0 - g'_0) + 4 h h_0] \\ &\quad + (\lambda - \mu)[1 + g g_0 + 2 h h_0 + g' g'_0 + (g g' - h^2)(g_0 g'_0 - h_0^2)] = 0. \end{aligned}$$

Faisons dans cette équation $\mu = \lambda$: l'équation entraîne

$$h = 0, \qquad g = g', \qquad g g' - h^2 = -1,$$

et par suite

$$g = g' = \pm i.$$

La variété ne comprend donc alors aucun autre point que les deux points conjugués

$$g = g' = i, \qquad h = 0,$$

et

$$g = g' = -i, \qquad h = 0.$$

Si $\mu(\lambda - \mu)$ est positif, c'est-à-dire si μ est compris entre *zéro* et λ, l'équation (18), ou (17), est impossible.

L'équation (17) s'écrit aussi

$$(19) \quad \begin{aligned} &\lambda[(g g' - h^2 + 1)(g_0 g'_0 - h_0^2 + 1) + (g - g')(g_0 - g'_0) + 4 h h_0] \\ &\quad = 4(\mu - \lambda)(\mathcal{G}\mathcal{G}' - \mathcal{H}^2). \end{aligned}$$

Donc, si λ est, par exemple, positif et si

$$\mu > \lambda,$$

la variété (17) *est tout entière dans les domaines* (I) *et* (I'). Cette variété existe dans ce cas, car le premier membre de l'équation (17) est alors positif pour les points réels, et négatif pour le point $g=g'=i$, $h=0$: donc il s'annule quelque part. Comme les coefficients sont réels, cette variété se compose donc de points situés dans le domaine (I) et des points conjugués des précédents, qui sont dans le domaine (I'). Pour les points d'une de ces variétés, $\mathcal{G}\mathcal{G}'-\mathcal{H}^2$ est borné. Si l'on a deux de ces variétés telles que, pour la première, λ et μ aient les valeurs λ_1 et μ_1, et pour la seconde les valeurs λ_2 et μ_2, et si

$$\frac{\mu_1}{\lambda_1}>\frac{\mu_2}{\lambda_2}, \qquad \lambda_1>0,$$

tous les points de la deuxième variété rendent négatif le premier membre de l'équation de la première : nous dirons que la deuxième variété est *à l'intérieur* de la première. Si $\mathcal{G}\mathcal{G}'-\mathcal{H}^2$ reste inférieur à M sur la première variété, cette quantité est aussi inférieure à M sur la seconde. L'équation (19) montre alors que, si $\frac{\mu}{\lambda}$ est très peu supérieur à *un*, tous les points de la variété sont très voisins de l'un des points $g=g'=i$, $h=0$ et $g=g'=-i$, $h=0$, qui sont les *centres* de la variété.

4. La variété (17) partage, si $\frac{\mu}{\lambda}$ est supérieur à *un*, le domaine (I) en deux parties : celle pour laquelle son premier membre est positif, et celle pour laquelle il est négatif; *ces deux parties sont linéairement connexes*. Il suffit de le montrer dans le cas où λ est positif.

Prenons d'abord celle de ces parties pour laquelle le premier membre de l'équation (17) est positif. Posons

$$g=\rho\, e^{i\varphi},$$

ρ étant positif : le premier membre de l'équation (17) est un trinome du second degré en ρ, dont le terme de plus haut degré est positif. Pour certaines valeurs de g' et de h, ce trinome n'a pas de racines : car il est certain que la valeur absolue de g', par exemple, ne peut, sur la variété, tomber au-dessous d'une certaine limite. Or, le premier membre de l'équation (17) est alors positif quel que soit ρ; dans les autres cas, il est positif quand ρ est extérieur aux racines : la région où il est positif est donc évidemment linéairement connexe.

Prenons maintenant la région du domaine (I) où ce premier membre est négatif. Nous allons montrer qu'on peut, sans sortir de la région, faire décrire à un point mobile un chemin continu, partant d'un point quelconque de la région, et aboutissant au point $g = g' = i$, $h = 0$. Posons

$$g = k\frac{2tu}{t-u},$$

$$g' = k\frac{2}{t-u},$$

$$h = k\frac{t+u}{t-u},$$

k, t, u étant de nouvelles variables remplaçant g, h, g'; elles s'expriment au moyen des anciennes variables par les relations

$$k^2 = -(gg' - h^2), \qquad t = \frac{g}{h-k}, \qquad u = \frac{g}{h+k}.$$

Le premier membre de l'équation (17) devient, en appelant k_0, t_0 et u_0 les conjugués de k, t, u,

$$(20) \quad \lambda\left\{1 + k^2 k_0^2 + \frac{2kk_0}{(t-u)(t_0-u_0)}[2tut_0u_0 + (t+u)(t_0+u_0) + 2]\right\}$$
$$+ \mu\left[-k^2 - k_0^2 - 2kk_0\frac{2tu + 2t_0u_0 - (t+u)(t_0+u_0)}{(t-u)(t_0-u_0)}\right].$$

Pour les valeurs initiales de k, t, u, cette expression est négative. Sans changer t, ni u, ni la valeur absolue de k, rendons k réel : cela peut se faire d'une façon continue sans que $k^2 + k_0^2$ décroisse jamais, et sans que, par conséquent, l'expression (20) soit à aucun instant positive. Le nombre k est donc maintenant réel; l'expression (20) devient

$$(21) \quad \lambda\left[1 + k^4 + 2k^2\frac{2tut_0u_0 + (t+u)(t_0+u_0) + 2}{(t-u)(t_0-u_0)}\right] - 4\mu k^2\frac{(t-t_0)(u-u_0)}{(t-u)(t_0-u_0)}.$$

Diminuons maintenant d'une façon continue les valeurs absolues des parties réelles de t et de u, de manière que leur rapport reste constant, et, en même temps, diminuons, s'il y a lieu, le nombre réel k de manière que $\frac{k^2}{(t-u)(t_0-u_0)}$ ne change pas; ne touchons pas aux parties imaginaires de t et de u: dans cette opération, l'expression (21) diminue constamment, elle reste donc négative; nous arrivons ainsi à rendre t et u purement imaginaires. Posons

$$t = i\alpha, \qquad u = -i\beta,$$

et remplaçons t et u par ces valeurs dans l'expression (21); nous trouvons l'expression

$$\lambda\left[1 + k^4 + 2k^2\frac{2\alpha^2\beta^2 + (\alpha-\beta)^2 + 2}{(\alpha+\beta)^2}\right] - 16\mu k^2\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2}. \tag{22}$$

Comme cette expression est négative, c'est que α et β ont le même signe. Amenons-les d'une façon continue à être égaux, sans changer $\alpha\beta$; nous pouvons le faire sans que $\alpha^2 + \beta^2$ cesse de décroître; diminuons en même temps k, de façon que le coefficient de μ ne change pas; alors l'expression (22) décroît et reste par suite négative.

Nous sommes maintenant en un point où g et g' sont purement imaginaires, et où h est nul; posons

$$g = i\mathcal{G}, \qquad g' = i\mathcal{G}';$$

le premier membre de l'équation (17) devient

$$\lambda(1 + \mathcal{G}^2 + \mathcal{G}'^2 + \mathcal{G}^2\mathcal{G}'^2) - 4\mu\mathcal{G}\mathcal{G}'; \tag{23}$$

on peut faire varier $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}'$ d'une façon continue de manière à les rendre égaux, sans changer leur produit, et sans que l'expression (23) cesse de décroître; elle devient alors

$$\lambda(1 + \mathcal{G}^2)^2 - 4\mu\mathcal{G}^2. \tag{24}$$

Si nous égalons cette expression à zéro, nous avons une équation bicarrée qui a deux racines positives; la valeur considérée de $\mathcal{G}$ et la valeur $\mathcal{G} = i$ sont toutes deux entre ces racines; on peut donc aller de l'une à l'autre sans rencontrer les racines. Nous sommes ainsi parvenus d'une façon continue au centre $g = g' = i$, $h = 0$, de la variété. Notre proposition est démontrée.

L'*intérieur* de la variété (17) se compose donc de deux régions, l'une dans le domaine (I), l'autre dans le domaine (I'); chacune de ces régions est linéairement connexe. L'*extérieur* se compose d'une seule région linéairement connexe.

5. Reprenons l'étude de la variété (17), en prenant maintenant les valeurs *négatives* de $\frac{\mu}{\lambda}$.

L'équation (17) s'écrit encore sous les formes

$$(25)\quad \begin{aligned} -\mu[(gg'-h^2-1)(g_0g'_0-h_0^2-1)+(g+g')(g_0+g'_0)]\\ +(\lambda+\mu)[1+gg_0+2hh_0+g'g'_0+(gg'-h^2)(g_0g'_0-h_0^2)]=0,\end{aligned}$$

$$(26)\quad \lambda[(gg'-h^2-1)(g_0g'_0-h_0^2-1)+(g+g')(g_0+g'_0)]=4(\mu+\lambda)(\mathcal{G}\mathcal{G}'-\mathcal{H}^2).$$

Donc, si μ est compris entre *zéro* et $-\lambda$, l'équation (17) est encore impossible. Pour $\mu=-\lambda$, la variété se réduit à

$$g=-g',\qquad h^2=-g^2-1,$$

elle a seulement deux dimensions; ses équations en coordonnées homogènes sont

$$x_3=x_1,\qquad x_4=x_2;$$

elle est tout entière dans le domaine (II). Si $\frac{\mu}{\lambda}$ est inférieur à -1, la variété existe et est tout entière dans le domaine (II).

III. — Application à une propriété des groupes de transformations (T).

1. Théorème. — *Si les transformés d'un point* M *du domaine* (I) *par les transformations* (T) *d'un groupe n'ont pas ce point pour point d'accumulation, ils n'ont aucun point d'accumulation dans le domaine* (I), *et le groupe est discontinu pour ce domaine.*

Supposons, pour nous placer dans le cas le plus général, que le point M soit transformé en lui-même par un certain nombre p de transformations du groupe. Ce nombre p, qui est au moins égal à *un*, est nécessairement fini, puisque M n'est pas un point d'accumulation de ses transformés.

Nous pouvons prendre pour $\frac{\mu}{\lambda}$ une valeur assez peu supérieure à *un* pour qu'à l'intérieur de la variété correspondante de centre M il n'y ait pas d'autre transformé de M que M lui-même (on fait toujours $\nu = 0$). Soit Σ cette variété. Prenons pour $\frac{\mu}{\lambda}$ une valeur $\frac{\mu_1}{\lambda_1}$ plus voisine de *un* que la précédente : les variétés Σ_1 de paramètres λ_1 et μ_1 qui ont leurs centres à l'extérieur de Σ ont toutes le point M à leur extérieur ; on peut donc trouver des valeurs λ_2 et μ_2 des paramètres telles que $\frac{\mu_2}{\lambda_2}$ soit supérieur à *un* et que la variété de centre M correspondant à ces valeurs soit tout entière extérieure à toutes les variétés Σ_1. Prenons alors pour $\frac{\mu}{\lambda}$ la plus petite des valeurs $\frac{\mu_1}{\lambda_1}$ et $\frac{\mu_2}{\lambda_2}$; les variétés qui ont pour centres deux transformés distincts de M et qui correspondent à ces valeurs de λ et μ sont tout entières extérieures l'une à l'autre.

Soit R une région du domaine (I), sans point commun avec la frontière. Les variétés de paramètres λ et μ qui ont leur centre dans la région R sont intérieures à une certaine région R' du domaine (I), obtenue en ajoutant à R tous les points du domaine (I) intérieurs à une variété quelconque de mêmes paramètres ayant son centre dans R.

Or, l'intégrale

$$\varphi = \int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int \frac{d\mathcal{G}_0\, d\mathcal{G}\, d\mathcal{H}_0\, d\mathcal{H}\, d\mathcal{G}'_0\, d\mathcal{G}'}{(\mathcal{G}\mathcal{G}' - \mathcal{H}^2)^3}$$

a la même valeur φ_0 pour toutes les variétés de paramètres λ et μ. Soit φ_1 sa valeur pour la région R'. Le nombre des conjugués distincts de M intérieurs à R est au plus $\frac{\varphi_1}{\varphi_0}$; il est donc fini : chacun de ces conjugués compte d'ailleurs pour p, comme M lui-même ; mais ces conjugués n'ont pas de point d'accumulation dans R, ce qui est conforme à l'énoncé.

Soit maintenant N un point quelconque du domaine (I) ; nous voulons démontrer que les transformés de N n'ont pas non plus de point d'accumulation dans le domaine (I). Donnons aux paramètres des valeurs λ', μ' telles que la variété de paramètres λ', μ' et de centre N ait le point M à son intérieur. Si une transformation du groupe change N en N_1 et M en M_1, M_1 sera à l'intérieur de la variété de centre N_1 et de paramètres λ', μ'. Adjoignons à la région R tous les points intérieurs aux variétés de paramètres λ', μ' et de centre intérieur à R; nous trouvons ainsi une région R″, intérieure au domaine (I). A tout transformé de N intérieur à R correspond un transformé de M intérieur à R″; comme le nombre de ces transformés de M est fini, il en est de même du nombre des transformés de N intérieurs à R. Le théorème est complètement démontré.

2. *Remarque.* — Dans l'énoncé du théorème, on aurait pu évidemment remplacer le domaine (I) par le domaine (I′).

On n'aurait pas pu le remplacer par un des domaines (II), (III), (III′) et (IV) : les groupes formés des puissances d'une substitution montrent que le résultat ne serait pas vrai pour ces domaines.

IV. — Polyèdre fondamental d'un groupe discontinu.

1. Soient A, B, C trois points du domaine (I) : nous dirons que C est plus près de A que de B si, λ et μ étant choisis de façon que la variété de centre C correspondante passe par A, le point B est extérieur à cette variété. Si la variété qui passe par A passe aussi par B, C sera dit équidistant de A et de B.

2. Soit A_0 un point du domaine (I) qui ne soit pas un point double d'une des transformations d'un groupe Γ discontinu dans le domaine (I). Soient A_1, A_2, ..., A_n, ... les transformés de A_0 par les substitutions du groupe : ces points sont tous distincts.

Soit maintenant M un point quelconque du domaine (I). Prenons une variété de centre M, ayant à son intérieur le point A_0 : cette variété aura à son intérieur un nombre fini des points A_0, A_1, A_2, ..., A_n, ... Il y a donc un nombre fini de ces points dont M est plus rapproché que de tous les autres; si ces points sont A_0, A_1, A_2, ..., A_r, nous dirons que M fait partie des *polyèdres fondamentaux* qui ont pour centres A_0, A_1, A_2, ..., A_r. En général, M ne fait partie que d'un seul polyèdre; s'il fait partie de plusieurs, c'est qu'il est sur leurs frontières à tous.

3. Si l'on considère le polyèdre fondamental de centre A_0, et qu'on

lui applique la transformation qui amène A_0 en A_1, on obtient le polyèdre fondamental de centre A_1.

Tout point du domaine (I) fait donc partie du polyèdre de centre A_0, ou de l'un de ses transformés.

4. Supposons que les polyèdres de centres A_0 et A_1 se touchent : quelle est leur surface de séparation ? Tous les points de cette surface sont équidistants de A_0 et de A_1. Si le point A_0 a pour coordonnées ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4, ξ_5, et si, par la transformation qui amène A_0 en A_1, ces quantités deviennent ξ'_1, ξ'_2, ξ'_3, ξ'_4 ξ'_5, les points cherchés satisfont à l'équation

$$(27)\quad \begin{aligned} &\text{norme}\,(x_1\xi_{50}+x_2\xi_{40}+2x_3\xi_{30}+x_4\xi_{20}+x_5\xi_{10})\\ &+\text{norme}\,(x_1\xi_5+x_2\xi_4+2x_3\xi_3+x_4\xi_2+x_5\xi_1)\\ =\;&\text{norme}\,(x_1\xi'_{50}+x_2\xi'_{40}+2x_3\xi'_{30}+x_4\xi'_{20}+x_5\xi'_{10})\\ &+\text{norme}\,(x_1\xi'_5+x_2\xi'_4+2x_3\xi'_3+x_4\xi'_2+x_5\xi'_1). \end{aligned}$$

Pour les points M plus voisins de A_0 que de A_1, le premier membre est plus petit que le second, comme le montre immédiatement la considération des valeurs de $\frac{\mu}{\lambda}$ pour les variétés de centres A_0 et A_1 qui passent par M.

Si l'on admet que ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4, ξ_5 représentent successivement les coordonnées des divers transformés de A_0, de sorte que

$$\xi_1\xi_{50}+\xi_{10}\xi_5+\xi_2\xi_{40}+\xi_{20}\xi_4+2\xi_3\xi_{30}$$

garde une valeur constante, le problème de trouver à quel polyèdre appartient M revient donc à trouver le minimum de l'expression

$$(28)\quad \begin{aligned} &\text{norme}\,(x_1\xi_{50}+x_2\xi_{40}+2x_3\xi_{30}+x_4\xi_{20}+x_5\xi_{10})\\ &+\text{norme}\,(x_1\xi_5+x_2\xi_4+2x_3\xi_3+x_4\xi_2+x_5\xi_1). \end{aligned}$$

5. Ce que nous venons de faire pour le domaine (I) peut se répéter pour le domaine (I'). D'ailleurs, on peut prendre le centre du polyèdre indifféremment dans (I) ou dans (I') : car une variété qui a pour centre un point a aussi pour centre le point imaginaire conjugué.

6. Pour le domaine (II) et pour les autres domaines, il n'est pas évident que le groupe soit encore discontinu pour certains points.

Même s'il l'est, il n'est pas certain qu'un de ces points soit plus rapproché de l'un des points A_0, A_1, A_2, ..., A_n, ... que des autres. Mais, si cela arrive, notre procédé permet de prolonger le polyèdre fondamental dans le domaine (II) et les autres domaines.

Pour les domaines (III), (III′) et (IV), on dira qu'un point est plus près de A_0 que de A_1 si, pour ce point, le premier membre de l'équation (27) est plus petit que l'autre.

Un point d'un de ces domaines pourra ne faire partie d'aucun polyèdre : cela arrivera si l'expression (28) n'a pas de minimum.

Un point peut aussi faire partie d'une infinité de polyèdres si l'expression (28) atteint une infinité de fois son minimum.

7. Le polyèdre fondamental est limité par des *faces* dont l'équation est de la forme (27). Ce polyèdre est convexe, c'est-à-dire situé d'un même côté d'une de ses faces prolongée indéfiniment.

Ces faces se coupent deux à deux suivant des *arêtes*, qui sont des variétés à quatre dimensions.

8. Supposons ces faces en nombre fini. On démontre, comme pour les groupes fuchsiens et hyperabéliens, que ces faces se distribuent en paires de faces transformées l'une de l'autre par une transformation du groupe.

Considérons maintenant les arêtes du polyèdre fondamental; on peut les répartir en cycles, comme pour les groupes cités. Pour cela, on prend une face F_1 et une arête A_1 de cette face; en traversant cette face, on entre dans un autre polyèdre : une transformation T_1 du groupe ramène dans le polyèdre fondamental et transforme F_1 dans la face conjuguée F'_1, et A_1 dans A_2; A_2 sépare F'_1 d'une face F_2; on recommence sur F_2 et A_2 ce qu'on a fait sur F_1 et A_1, ce qui introduit une transformation T_2, et ainsi de suite. Le nombre d'arêtes qu'on trouvera est fini, car il y en a un nombre fini dans le polyèdre. On sera arrêté quand une opération de plus redonnerait l'arête initiale, ou bien quand on sera arrivé à une arête adjacente à une région de la surface

$$\mathcal{G}\mathcal{G}' + \mathcal{H}^2 = 0$$

faisant partie de la frontière du polyèdre fondamental.

Supposons qu'on retombe sur l'arête initiale A_1 ; soient $T_1, T_2, \ldots, T_n$ les transformations introduites; alors $T_1, T_2, \ldots, T_n$ transforme cette arête en elle-même. Supposons que A_1 ne soit pas tout entière sur la surface

$$\mathcal{G}\mathcal{G}' - \mathcal{H}^2 = 0;$$

alors *une certaine puissance de* $T_1 T_2 \ldots T_n$ *est la transformation unité*. En effet, soient C_0 le centre du polyèdre fondamental et C_h son transformé par $(T_1 T_2 \ldots T_n)^h$. Soit P un point de A_1, non situé sur $\mathcal{G}\mathcal{G}' - \mathcal{H}^2 = 0$; soit Σ la variété de centre P passant par C_0; les points $C_1, C_2, \ldots, C_h$ sont tous situés sur Σ; leur nombre est donc fini, ce qui démontre la proposition.

Le polyèdre dont on est parti étant fondamental, aucun des polyèdres transformés par les substitutions $(T_1 T_2 \ldots T_n)^h \, T_1 T_2 \ldots T_i$, $i \leqq n$, ne doit empiéter sur lui; c'est une condition à laquelle satisfait le cycle.

Si cette condition est remplie pour tous les cycles, le polyèdre est le polyèdre fondamental d'un groupe discontinu. Les transformations fondamentales du groupe sont $T_1, T_2, \ldots, T_n$ et les transformations analogues des autres cycles.

CHAPITRE IV.

POLYÈDRE FONDAMENTAL DU GROUPE DES PUISSANCES D'UNE TRANSFORMATION (T).

1. Nous nous proposons d'appliquer au groupe formé par les puissances d'une transformation (T) la méthode exposée dans le Chapitre précédent pour former le polyèdre fondamental. Nous pouvons au préalable supposer que, par une transformation (T) convenable appliquée à l'espace à six dimensions, on a mis la substitution génératrice du groupe sous une des formes canoniques. Les résultats différeront suivant la forme canonique que l'on considérera.

2. *Premier type*. — Ayant mis la transformation sous la forme cano-

nique (7) (Chap. II), nous prendrons d'abord comme centre du premier polyèdre fondamental le point

$$g = g' = i, \qquad h = 0,$$

dont le transformé par la puissance $-n$ de la transformation a pour coordonnées homogènes

$$(1)\quad \xi_1 = r_1^{-n} r_2^{-n}, \quad \xi_2 = -i r_2^{-n} r_3^{-n}, \quad \xi_3 = 0, \quad \xi_4 = i r_1^{-n} r_4^{-n}, \quad \xi_5 = -r_3^{-n} r_4^{-n};$$

l'expression (28) (Chap. III) devient alors, en la divisant par *deux*,

$$(2)\qquad \begin{aligned} & r_1^{2n} r_2^{2n} x_1 x_{10} + r_2^{2n} r_3^{2n} x_2 x_{20} + r_1^{2n} r_4^{2n} x_4 x_{40} + r_3^{2n} r_4^{2n} x_5 x_{50} \\ & \qquad - x_1 x_{50} - x_{10} x_5 - x_2 x_{40} - x_{20} x_4. \end{aligned}$$

Nous voulons que son minimum ait lieu pour $n = 0$. Il est *nécessaire* pour cela qu'on ait

$$\left\{ \begin{aligned} &(r_1^2\, r_2^2\, - 1) x_1 x_{10} + (r_2^2\, r_3^2\, - 1) x_2 x_{20} + (r_1^2\, r_4^2\, - 1) x_4 x_{40} + (r_3^2\, r_4^2\, - 1) x_5 x_{50} \geqq 0, \\ &(r_1^{-2} r_2^{-2} - 1) x_1 x_{10} + (r_2^{-2} r_3^{-2} - 1) x_2 x_{20} + (r_1^{-2} r_4^{-2} - 1) x_4 x_{40} + (r_3^{-2} r_4^{-2} - 1) x_5 x_{50} \geqq 0. \end{aligned} \right.$$

Ces conditions sont aussi *suffisantes : elles définissent le polyèdre fondamental*, qui a ici deux faces. Pour le démontrer, il nous suffit d'établir qu'on aura, quel que soit n, sous les conditions (3),

$$(4)\qquad \begin{aligned} & (r_1^{2n} r_2^{2n} - 1) x_1 x_{10} + (r_2^{2n} r_3^{2n} - 1) x_2 x_{20} \\ & \qquad + (r_1^{2n} r_4^{2n} - 1) x_4 x_{40} + (r_3^{2n} r_4^{2n} - 1) x_5 x_{50} \geqq 0. \end{aligned}$$

Or, posons

$$r_1^{2n} r_2^{2n} = y,$$

et

$$\frac{\log r_2^2 r_3^2}{\log r_1^2 r_2^2} = \alpha, \qquad \frac{\log r_1^2 r_4^2}{\log r_1^2 r_2^2} = \beta, \qquad \frac{\log r_3^2 r_4^2}{\log r_1^2 r_2^2} = \gamma.$$

Le premier membre de l'inégalité (4) devient

$$(5)\qquad (y - 1) x_1 x_{10} + (y^\alpha - 1) x_2 x_{20} + (y^\beta - 1) x_4 x_{40} + (y^\gamma - 1) x_5 x_{50}.$$

Ceci suppose, ce qui est toujours permis, que $r_1^2 r_2^2$ n'est pas égal à *un*. Supposons que les valeurs absolues de r_1, r_2, r_3, r_4 soient toutes distinctes et que

$$(6)\qquad |r_1| > |r_2| > 1 > |r_4| > |r_3|.$$

Ces inégalités entraînent celles-ci :

$$1 > \beta > 0 > \alpha > \gamma.$$

L'expression (5) présente donc *deux variations*, au sens qu'on donne à ce mot dans le théorème de Descartes, qui, on le sait, s'applique même si les exposants sont irrationnels. Si y est considéré comme une variable continue, l'expression (5) admet donc zéro ou deux racines positives. Or, elle admet la racine $y = 1$. Donc elle admet une autre racine positive. Le premier membre de l'inégalité (4) est donc nul si l'on y remplace n par zéro ou par une autre valeur, qui n'est pas forcément entière; cette autre valeur est nécessairement comprise entre *moins un* et *plus un*, à cause des inégalités (3). Donc l'inégalité (4) est remplie pour toute valeur entière de n.

On peut se demander si ce raisonnement ne tombe pas en défaut pour $x_1 = x_4 = 0$, ou pour $x_2 = x_5 = 0$: l'expression (5) ne présente alors qu'une variation; mais, pour ces points, les inégalités (3) sont impossibles.

Supposons maintenant qu'on ait

$$(7) \qquad r_1 = -r_2, \qquad r_3 = -r_4, \qquad |r_1| > 1.$$

Alors α et β sont nuls, γ est négatif. L'expression (5) a encore deux variations, et l'on peut reprendre le raisonnement précédent : on arrive à la même conclusion, sauf que, pour $x_1 = x_5 = 0$, l'expression (2) est constante.

3. Y a-t-il des points qui n'appartiennent à aucun polyèdre, ou qui appartiennent à tous les polyèdres transformés du précédent, ou du moins à une infinité d'entre eux ? Ce que nous venons de voir prouve qu'un point ne peut certainement pas appartenir à plus de *deux* polyèdres, sauf dans le cas des relations (7).

Pour qu'un point n'appartienne à aucun polyèdre, il faut et il suffit que l'expression (2) n'ait pas de minimum. Or, cette expression tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$, à moins qu'on n'ait $x_1 = x_4 = 0$ [en supposant remplies les conditions (6)]; elle tend vers $+\infty$ quand n tend vers $-\infty$, à moins qu'on n'ait $x_2 = x_5 = 0$. Donc, si l'on n'a pas $x_1 = x_4 = 0$ ou $x_2 = x_5 = 0$, elle présente un minimum, et le point correspondant appartient à un polyèdre. Mais si

$$x_1 = x_4 = 0,$$

cette expression, qui est toujours positive, tend vers *zéro* quand n tend vers $+\infty$: elle n'a donc pas de minimum; ces points ne font donc partie d'aucun polyèdre. De même les points de la variété

$$x_2 = x_5 = 0$$

ne font partie d'aucun polyèdre. Ces deux variétés à deux dimensions contiennent à elles deux les quatre points doubles, et sont situées dans les domaines (III), (III') et (IV).

Si l'on se place dans le cas où les conditions (7) sont remplies, les points qui ne sont dans aucun polyèdre sont ceux des deux variétés à quatre dimensions

$$x_1 = 0, \qquad x_5 = 0,$$

situées dans les domaines (II), (III), (III') et (IV). Les points $x_1 = x_5 = 0$ font partie de tous les polyèdres.

4. Supposons qu'on prenne, comme centre du premier polyèdre, un autre point que $g = g' = i$, $h = 0$. Nous ne pouvons plus affirmer que le polyèdre fondamental a encore deux faces seulement, mais nous pouvons démontrer que les points qui ne font partie d'aucun polyèdre sont les mêmes que précédemment, sauf dans le cas des conditions (7).

L'expression (28) (Chap. III) devient en effet ici

$$(8) \qquad \begin{aligned} &\text{norme}(r_1^n r_2^n x_1 \xi_{50} + r_2^n r_3^n x_2 \xi_{40} + 2 x_3 \xi_{30} + r_1^n r_4^n x_4 \xi_{20} + r_3^n r_4^n x_5 \xi_{10}) \\ &+ \text{norme}(r_1^n r_2^n x_1 \xi_5 + r_2^n r_3^n x_2 \xi_4 + 2 x_3 \xi_3 + r_1^n r_4^n x_4 \xi_2 + r_3^n r_4^n x_5 \xi_1). \end{aligned}$$

Plaçons-nous d'abord dans le cas des inégalités (6). Cette expression tend vers $+\infty$ avec n, sauf peut-être si

$$x_1 = 0;$$

même dans ce cas, on a la même conclusion, à moins que

$$x_4 = 0.$$

De même, quand n tend vers $-\infty$, cette expression tend vers $+\infty$ sauf si

$$x_2 = x_5 = 0.$$

Il n'y a donc pas d'autres points en dehors de tous les polyèdres que ceux que nous avons déjà trouvés; ceux-ci ne font d'ailleurs partie d'aucun polyèdre, car, pour $x_1 = x_4 = 0$, ce qui entraîne $x_3 = 0$, l'expression (8) tend vers *zéro* quand n tend vers $+\infty$; de même, pour $x_2 = x_5 = x_3 = 0$, elle tend vers *zéro* quand n tend vers $-\infty$.

Dans le cas des conditions (7), les points qui ne font partie d'aucun polyèdre, ou qui font partie d'une infinité de polyèdres, sont, comme précédemment, parmi les points des variétés

$$x_1 = 0, \qquad x_5 = 0.$$

Mais il peut y avoir de ces points pour lesquels l'expression (8) ait encore un minimum. Par exemple, si $x_1 = 0$, cette expression reste finie quand n tend vers $+\infty$; mais l'expression (8) devient alors

$$\begin{aligned} & 2 r_3^{2n} r_4^{2n} x_5 x_{50} \xi_1 \xi_{10} \\ & \quad + r_3^n r_4^n \left[2(x_3 x_{50} + x_{30} x_5)(\xi_1 \xi_{30} + \xi_{10}\xi_3) \right. \\ & \qquad\qquad + (-1)^n (x_2 x_{50} + x_{20} x_5)(\xi_1 \xi_{40} + \xi_{10} \xi_4) \\ & \qquad\qquad \left. + (-1)^n (x_4 x_{50} + x_{40} x_5)(\xi_1 \xi_{20} + \xi_{10} \xi_2) \right] \\ & \quad + \text{norme}\left[(-1)^n (x_2 \xi_{40} + x_4 \xi_{20}) + 2 x_3 \xi_{30}\right] \\ & \quad + \text{norme}\left[(-1)^n (x_2 \xi_4 + x_4 \xi_2) + 2 x_3 \xi_3\right]. \end{aligned}$$

Nous voyons que cette expression a une limite quand n tend vers $+\infty$ par valeurs paires et une autre limite quand n tend vers $+\infty$ par valeurs impaires. Pour que les points appartiennent à une infinité de polyèdres, il est nécessaire et suffisant que cette expression devienne une infinité de fois égale à sa plus petite limite, et ne tombe pas au-dessous : on retrouve ainsi les points $x_1 = x_5 = 0$, comme pour le centre $g = g' = i$, $h = 0$. Les points qui n'appartiennent à aucun polyèdre sont ceux pour lesquels cette expression reste toujours *supérieure* à sa plus petite limite. Si cette plus petite limite est celle qui correspond à n pair, il est nécessaire que, pour n pair, le terme en $r_3^n r_4^n$ soit positif; de plus, pour n impair, l'expression ne doit jamais tomber au-dessous de sa plus petite limite. Quoi qu'il en soit, les points des deux variétés

$$x_1 = x_3 = x_4 = 0, \qquad x_2 = x_3 = x_5 = 0$$

ne font, dans ce cas encore, partie d'aucun polyèdre, sauf si l'on a aussi $x_1 = x_5 = 0$. Les points $x_1 = x_5 = 0$ font partie d'une infinité de polyèdres; mais, dans le cas général où les deux limites de l'expression (8) sont différentes, ils ne font partie que des polyèdres correspondant à n pair, ou que des polyèdres correspondant à n impair.

5. *Deuxième type.* — Prenons d'abord comme centre du polyèdre le point $g = g' = i$, $h = 0$, la transformation étant mise sous la forme canonique. Pour la puissance $-n$ de la transformation, l'expression (28) (Chap. III) devient

$$r_1^{2n} x_1 x_{10} + r_3^{2n} x_2 x_{20} + r_1^{2n} x_4 x_{40} + r_3^{2n} x_5 x_{50} - x_1 x_{50} - x_{10} x_5 - x_2 x_{40} - x_{20} x_4.$$

Nous voulons qu'elle soit minimum pour $n = 0$; il est nécessaire et suffisant pour cela que l'on ait

$$\begin{aligned}
&(r_1^2 - 1) x_1 x_{10} + (r_3^2 - 1) x_2 x_{20} + (r_1^2 - 1) x_4 x_{40} + (r_3^2 - 1) x_5 x_{50} \geqq 0,\\
&(r_1^{-2} - 1) x_1 x_{10} + (r_3^{-2} - 1) x_2 x_{20} + (r_1^{-2} - 1) x_4 x_{40} + (r_3^{-2} - 1) x_5 x_{50} \geqq 0;
\end{aligned}$$

cela se démontre comme pour le type précédent; ces inégalités définissent le polyèdre fondamental.

Les points qui ne sont intérieurs à aucun polyèdre sont les points des deux variétés

$$x_1 = x_3 = x_4 = 0, \qquad x_2 = x_3 = x_5 = 0;$$

ces points ne font non plus partie du contour d'aucun polyèdre.

Si l'on prend comme centre du polyèdre fondamental un point quelconque, l'expression (28) (Chap. III) contient l'angle φ : le nombre de faces du polyèdre fondamental n'est peut-être plus de deux. On trouve que les points des deux variétés que nous venons de trouver ne font encore partie d'aucun polyèdre; aucun autre point ne jouit de la même propriété.

6. *Troisième type, et autres transformations ayant un point double dans le domaine* (I). — Les groupes engendrés par ces transformations

ne sont discontinus que s'ils sont finis. Il y a donc, dans ce cas, un nombre fini de polyèdres fondamentaux qui remplissent tout l'espace.

7. *Quatrième type*. — Prenons encore comme centre le point $g=g'=i,\ h=0$; pour la puissance $-n$ de la transformation, l'expression (28) (Chap. III) devient

$$r^{4n}x_1x_{10}+x_2x_{20}+x_4x_{40}+r'^{4n}x_5x_{50}-x_1x_{50}-x_{10}x_5-x_2x_{40}-x_{20}x_4.$$

On voit, comme dans les cas précédents, que le polyèdre fondamental est défini par les inégalités

$$\begin{aligned}(r^4\ -1)x_1x_{10}+(r'^4\ -1)x_5x_{50}&\geqq 0,\\(r^{-4}-1)x_1x_{10}+(r'^{-4}-1)x_5x_{50}&\geqq 0.\end{aligned}$$

Les points des deux variétés

$$x_1=0,\qquad x_5=0$$

ne font partie d'aucun polyèdre : il y a exception pour l'intersection de ces variétés; aucun point ne fait partie d'une infinité de polyèdres, en dehors de l'intersection

$$x_1=x_5=0$$

des deux variétés précédentes, qui fait partie de tous les polyèdres.

Si le centre n'est pas $g=g'=i, h=0$, on trouve que les points qui ne font partie d'aucun polyèdre, ou qui font partie d'une infinité, sont encore sur les deux variétés précédentes; mais il n'est pas sûr que tous les points de ces deux variétés satisfassent à cette condition.

8. *Cinquième type, première forme*. — Si l'on met le centre en $g=g'=i,\ h=0$, on trouve que l'expression (28) (Chap. III) est, pour la puissance $-n$ de la transformation,

$$r_1^{4n}x_1x_{10}+x_2x_{20}+x_4x_{40}+r_3^{4n}x_5x_{50}-x_1x_{50}-x_{10}x_5-x_2x_{40}-x_{20}x_4.$$

Le polyèdre fondamental est donc défini par les inégalités

$$\begin{aligned}(r_1^4\ -1)x_1x_{10}+(r_3^4\ -1)x_5x_{50}&\geqq 0,\\(r_1^{-4}-1)x_1x_{10}+(r_3^{-4}-1)x_5x_{50}&\geqq 0.\end{aligned}$$

Les points qui ne font partie d'aucun polyèdre sont tous les points des deux variétés

$$x_1 = 0, \qquad x_5 = 0,$$

sauf ceux de leur intersection, qui font partie de tous les polyèdres.

Pour un centre quelconque, l'expression (28) (Chap. III) devient

$$\begin{aligned}&\text{norme}(r_1^{2n} x_1 \xi_{50} + x_2 \xi_{40} + 2 x_3 \xi_{30} + x_4 \xi_{20} + r_3^{2n} x_5 \xi_{10})\\ &+ \text{norme}(r_1^{2n} x_1 \xi_5 + x_2 \xi_4 + 2 x_3 \xi_3 + x_4 \xi_2 + r_3^{2n} x_5 \xi_1).\end{aligned}$$

Les points qui ne font partie d'aucun polyèdre sont, d'une part, les points satisfaisant aux conditions

$$x_1 = 0,$$

$$\begin{aligned}&x_5 \xi_{10}(x_{20}\xi_4 + 2x_{30}\xi_3 + x_{40}\xi_2) + x_{50}\xi_1(x_2\xi_{40} + 2x_3\xi_{30} + x_4\xi_{20})\\ &+ x_5\xi_1(x_{20}\xi_{40} + 2x_{30}\xi_{30} + x_{40}\xi_{20}) + x_{50}\xi_{10}(x_2\xi_4 + 2x_3\xi_3 + x_4\xi_2) \geqq 0;\end{aligned}$$

d'autre part, les points satisfaisant aux conditions

$$x_5 = 0,$$

$$\begin{aligned}&x_1 \xi_{50}(x_{20}\xi_4 + 2x_{30}\xi_3 + x_{40}\xi_2) + x_{10}\xi_5(x_2\xi_{40} + 2x_3\xi_{30} + x_4\xi_{20})\\ &+ x_1\xi_5(x_{20}\xi_{40} + 2x_{30}\xi_{30} + x_{40}\xi_{20}) + x_{10}\xi_{50}(x_2\xi_4 + 2x_3\xi_3 + x_4\xi_2) \geqq 0;\end{aligned}$$

il n'y a d'exception que pour les points de la variété

$$x_1 = x_5 = 0,$$

qui font partie de tous les polyèdres.

9. *Cinquième type, deuxième forme.* — Prenons un centre quelconque, et cherchons les points qui n'appartiennent à aucun polyèdre, ou qui appartiennent à une infinité. La fonction qui ne doit pas avoir de minimum est

$$\begin{aligned}&\text{norme}[r_1^{2n} x_1 \xi_{50} + (x_2 + 2n x_3 - n^2 x_4)\xi_{40} + 2(x_3 - n x_4)\xi_{30} + x_4 \xi_{20} + r_3^{2n} x_5 \xi_{10}]\\ &+ \text{norme}[r_1^{2n} x_1 \xi_5 + (x_2 + 2n x_3 - n^2 x_4)\xi_4 + 2(x_3 - n x_4)\xi_3 + x_4 \xi_2 + r_3^{2n} x_5 \xi_1].\end{aligned}$$

On voit que, si $|r_1| > 1$, cette fonction tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$, sauf si

$$x_1 = x_4 = x_3 = 0;$$

de même elle tend vers $+\infty$ quand n tend vers $-\infty$, sauf si

$$x_5 = x_4 = x_3 = 0.$$

Les points cherchés sont donc sur l'une ou sur l'autre de ces variétés. On reconnaît que ce sont, d'une part, les points satisfaisant aux conditions

$$x_1 = x_4 = x_3 = 0, \qquad (x_2 x_{50} + x_{20} x_5)(\xi_1 \xi_{40} + \xi_{10} \xi_4) \gtreqless 0$$

et, d'autre part, les points satisfaisant aux conditions

$$x_5 = x_4 = x_3 = 0, \qquad (x_1 x_{20} + x_{10} x_2)(\xi_4 \xi_{50} + \xi_{40} \xi_5) \gtreqless 0.$$

Parmi ces points, un seul fait partie d'une infinité de polyèdres : c'est le point $x_1 = x_3 = x_4 = x_5 = 0$, qui est un point double de la transformation, et qui fait partie de tous les polyèdres.

10. *Sixième type, troisième forme.* — Cherchons encore les points qui ne font partie d'aucun polyèdre, ou qui font partie d'une infinité. L'expression (28) (Chap. III) est ici

$$\begin{aligned}
\text{norme}[&(x_1 \cos^2 n\varphi - 2x_3 \sin n\varphi \cos n\varphi - n x_4 - x_5 \sin^2 n\varphi)\xi_{50} \\
&+ (-n x_1 + x_2 + n^2 x_4 + n x_5)\xi_{40} \\
&+ (x_1 \sin n\varphi \cos n\varphi + x_3 \cos 2n\varphi + x_5 \sin n\varphi \cos n\varphi)\xi_{30} + x_4 \xi_{20} \\
&+ (-x_1 \sin^2 n\varphi - 2x_3 \sin n\varphi \cos n\varphi + n x_4 + x_5 \cos^2 n\varphi)\xi_{10}] \\
+ \text{norme}[&(x_1 \cos^2 n\varphi - 2x_3 \sin n\varphi \cos n\varphi - n x_4 - x_5 \sin^2 n\varphi)\xi_5 \\
&+ (-n x_1 + x_2 + n^2 x_4 + n x_5)\xi_4 \\
&+ (x_1 \sin n\varphi \cos n\varphi + x_3 \cos 2n\varphi + x_5 \sin n\varphi \cos n\varphi)\xi_3 + x_4 \xi_2 \\
&+ (-x_1 \sin^2 n\varphi - 2x_3 \sin n\varphi \cos n\varphi + n x_4 + x_5 \cos^2 n\varphi)\xi_1].
\end{aligned}$$

Si l'on n'a pas à la fois $x_4 = 0$, $x_1 = x_5$, cette fonction de n tend vers $+\infty$ quand n augmente indéfiniment par valeurs positives ou négatives; par suite, elle a alors un minimum atteint un nombre fini de fois. Les points cherchés sont donc sur la variété

$$x_4 = 0, \qquad x_1 = x_5.$$

Pour ces points, l'expression précédente se réduit à un polynome en $\sin n\varphi$ et $\cos n\varphi$; remplaçons-y $n\varphi$ par θ : on a une fonction qui est minimum pour une certaine valeur θ_0 de θ; ou bien θ_0 est de la forme $n\varphi + 2k\pi$, n et k étant entiers, ou bien θ_0 n'est pas de cette forme. Dans le premier cas, si φ est incommensurable avec π, le point n'appartient qu'à un polyèdre; si φ est commensurable avec π, le point appartient à une infinité de polyèdres, correspondant à des valeurs de n en progression arithmétique. Dans le deuxième cas, le point n'appartient à aucun polyèdre si φ est incommensurable avec π, et à une infinité si φ est commensurable avec π.

11. *Septième type, première forme.* — Nous pourrions donner, comme nous l'avons fait pour le premier type, le polyèdre fondamental correspondant au centre $g = g' = i$, $h = 0$: le calcul et les résultats sont les mêmes.

Cherchons les points qui n'appartiennent à aucun polyèdre, ou qui appartiennent à une infinité, le centre étant quelconque. L'expression (28) (Chap. III) devient, en faisant $x_1 = 1$,

$$\begin{aligned}&\text{norme}(r_2^n x_1 \xi_{50} + r_2^n x_2 \xi_{40} + 2x_3\xi_{30} + r_4^n x_4 \xi_{20} + r_4^n x_5 \xi_{10})\\ &+ \text{norme}(r_2^n x_1 \xi_5 + r_2^n x_2 \xi_4 + 2x_3\xi_3 + r_4^n x_4 \xi_2 + r_4^n x_5 \xi_1).\end{aligned}$$

Le coefficient de r_2^{2n} est

$$\text{norme}(x_1\xi_{50} + x_2\xi_{40}) + \text{norme}(x_1\xi_5 + x_2\xi_4),$$

et celui de r_4^{2n} est

$$\text{norme}(x_4\xi_{20} + x_5\xi_{10}) + \text{norme}(x_4\xi_2 + x_5\xi_1).$$

Pour les points cherchés, l'un ou l'autre de ces coefficients doit être nul. Prenons celui de r_2^{2n}, nous trouvons

$$\begin{aligned}x_1\xi_{50} + x_2\xi_{40} &= 0,\\ x_1\xi_5 + x_2\xi_4 &= 0;\end{aligned}$$

mais, le centre appartenant au domaine (I), $\xi_4\xi_{50} - \xi_{40}\xi_5$ ne peut pas être nul; car la transformation

$$\begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

montrerait que, dans le cas contraire, $\xi_1\xi_{40}-\xi_{10}\xi_4$, c'est-à-dire la partie imaginaire de g', pourrait s'annuler dans le domaine (I), ce qui est absurde. Donc

$$x_1 = x_2 = 0,$$

et par suite x_3 est nul aussi. La nullité du coefficient de r_4^{2n} entraîne de même

$$x_3 = x_4 = x_5 = 0.$$

On voit immédiatement que tous ces points sont en dehors de tous les polyèdres. Ce sont les points doubles de la transformation.

12. *Septième type, deuxième forme.* — Cherchons encore les points qui n'appartiennent à aucun polyèdre, ou qui appartiennent à une infinité. L'expression (28) (Chap. III) est ici, en faisant $r_1 = 1$,

$$\begin{aligned}&\text{norme}[r_2^n x_1\xi_{50} + (-nr_2^n x_1 + r_2^n x_2)\xi_{40} + 2x_3\xi_{30} + r_4^n x_4\xi_{20} + (nr_4^n x_4 + r_4^n x_5)\xi_{10}]\\ &+\text{norme}[r_2^n x_1\xi_5 + (-nr_2^n x_1 + r_2^n x_2)\xi_4 + 2x_3\xi_3 + r_4^n x_4\xi_2 + (nr_4^n x_4 + r_4^n x_5)\xi_1\ ].\end{aligned}$$

Cette fonction de n tend vers $+\infty$ avec n, à moins que l'on n'ait à la fois

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0 \qquad (\text{si } |r_2| > 1);$$

elle tend vers $+\infty$ quand n tend vers $-\infty$, à moins que l'on n'ait

$$x_3 = x_4 = x_5 = 0.$$

On voit immédiatement que les points de ces deux variétés n'appartiennent à aucun polyèdre.

13. *Huitième type, deuxième forme.* — Posons-nous la même question que pour la forme précédente. L'expression (28) (Chap. III) est ici, en faisant encore $r_1 = 1$,

$$\begin{aligned}\text{norme}[&(x_1\cos n\varphi - x_4\sin n\varphi)\xi_{50}\\ &+(-nx_1\cos n\varphi + x_2\cos n\varphi + nx_4\sin n\varphi + x_5\sin n\varphi)\xi_{40}\\ &+2x_3\xi_{30} + (x_1\sin n\varphi + x_4\cos n\varphi)\xi_{20}\\ &\qquad+(nx_1\sin n\varphi - x_2\sin n\varphi + nx_4\cos n\varphi + x_5\cos n\varphi)\xi_{10}]\\ +\text{norme}[&(x_1\cos n\varphi - x_4\sin n\varphi)\xi_5\\ &+(-nx_1\cos n\varphi + x_2\cos n\varphi + nx_4\sin n\varphi + x_5\sin n\varphi)\xi_4\\ &+2x_3\xi_3 + (x_1\sin n\varphi + x_4\cos n\varphi)\xi_2\\ &\qquad+(nx_1\sin n\varphi - x_2\sin n\varphi + nx_4\cos n\varphi + x_5\cos n\varphi)\xi_1].\end{aligned}$$

On reconnaît immédiatement que, si l'on n'a pas à la fois pour une certaine valeur de θ

$$(-x_1\cos\theta+x_4\sin\theta)\xi_{40}+(x_1\sin\theta+x_4\cos\theta)\xi_{10}=0,$$
$$(-x_1\cos\theta+x_4\sin\theta)\xi_4\ +(x_1\sin\theta+x_4\cos\theta)\xi_1\ =0,$$

la fonction de n précédente a un terme en n^2 multiplié par une fonction de n qui reste supérieure à un minimum *positif;* donc cette fonction de n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $\pm\infty$, et par suite elle a un minimum atteint un nombre fini de fois. Pour les points que nous cherchons, les deux équations précédentes en θ doivent donc être compatibles; or, elles entraînent les équations

$$-x_1\cos\theta+x_4\sin\theta=0,$$
$$x_1\sin\theta+x_4\cos\theta=0;$$

par suite, on aura

$$x_1=x_4=x_3=0.$$

Pour ces points notre fonction de n se réduit à

$$\text{norme}[(x_2\cos n\varphi+x_5\sin n\varphi)\xi_{40}+(-x_2\sin n\varphi+x_5\cos n\varphi)\xi_{10}]$$
$$+\text{norme}[(x_2\cos n\varphi+x_5\sin n\varphi)\xi_4\ +(-x_2\sin n\varphi+x_5\cos n\varphi)\xi_1\ ].$$

C'est un polynome homogène et du second degré en $\cos n\varphi$ et $\sin n\varphi$. Si φ est commensurable avec π, tous ces points appartiendront à une infinité de polyèdres. Si φ est incommensurable avec π, deux cas pourront se présenter; remplaçons $n\varphi$ par θ : on a une fonction de θ qui est minimum pour une certaine valeur θ_0 de θ, définie à un multiple près de π; ou bien il y aura des entiers n et k tels que

$$\theta_0=n\varphi+k\pi,$$

ou bien il n'y en aura pas; dans le premier cas, le point appartiendra à un polyèdre et à un seul; dans le second, il n'appartiendra à aucun.

14. *Neuvième type.* — On peut encore se poser la même question pour ce type, et la résoudre par le même procédé.

Pour la *deuxième forme* de ce type, les points doubles font partie de tous les polyèdres; aucun autre point n'est dans le même cas, ni ne fait partie d'aucun polyèdre.

Pour la *troisième forme*, on n'a pas d'autres points que ceux de la variété

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = x_4;$$

ces points peuvent soit appartenir à tous les polyèdres (le point double est toujours dans ce cas), soit appartenir aux polyèdres correspondant aux valeurs paires de n, ou à ceux qui correspondent aux valeurs impaires de n. Pourtant, si $\xi_3 = 0$, tous ces points appartiennent à tous les polyèdres.

Pour la *quatrième forme*, on n'a pas d'autres points que ceux de la variété

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = -x_4;$$

en particulier, le point double appartient à tous les polyèdres; les autres points peuvent présenter les mêmes particularités que pour la forme précédente.

15. *Dixième type*. — On peut résumer ainsi les résultats concernant les formes de ce type autres que la première : aucun point ne fait partie d'aucun polyèdre; les points doubles font partie de tous les polyèdres; les autres points font partie d'un nombre fini de polyèdres (*un*, en général).

CHAPITRE V.

FONCTIONS DE g, h, g' INVARIANTES PAR UN GROUPE DISCONTINU DE TRANSFORMATIONS (T).

1. Considérons la fonction de g, h, g'

$$(1) \qquad \alpha_1 - \alpha_2 g + 2\alpha_3 h + \alpha_4 g' + \alpha_5(gg' - h^2),$$

où α_1, α_2, α_3, α_4, α_5 sont des nombres complexes liés par la relation

$$\alpha_1\alpha_5 + \alpha_2\alpha_4 + \alpha_3^2 = 0,$$

de sorte que ces cinq coefficients peuvent être considérés comme les coordonnées homogènes d'un point de l'espace à six dimensions

Considérons d'autre part la substitution (S) dont les coefficients sont

$$(2) \qquad \begin{Bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{Bmatrix};$$

appliquons à g, h, g' la transformation inverse de la transformation (T) qui correspond à cette substitution; que devient la fonction (1)? Elle devient une fraction rationnelle, dont le dénominateur est

$$(3) \qquad (ab)_{12} - (ab)_{23}g + 2(ab)_{13}h + (ab)_{14}g' + (ab)_{34}(gg' - h^2),$$

et dont le numérateur est

$$(4) \qquad \beta_1 - \beta_2 g + 2\beta_3 h + \beta_4 g' + \beta_5(gg' - h^2),$$

$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5$ étant les coordonnées homogènes du point transformé de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ par la transformation (T) correspondant au tableau

$$(5) \qquad \begin{Bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{Bmatrix}.$$

2. Prenons en particulier la fonction

$$g + i.$$

On a ici

$$\alpha_1 = i, \qquad \alpha_2 = -1, \qquad \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = 0;$$

ce sont les coordonnées d'un point du domaine (III'). Alors $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5$ seront ici les coordonnées d'un point du domaine (III'); ce point pourra être quelconque si la transformation (2) est convenablement choisie. Or, la fonction $g + i$ ne peut devenir ni nulle ni infinie dans le domaine (I); il en est de même de la fonction (4). Donc, *si* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ *est un point du domaine* (III'), *la fonction* (1) *ne peut devenir ni nulle ni infinie dans le domaine* (I).

3. Considérons la transformation birationnelle

$$(6)\qquad \begin{cases} x = \dfrac{1}{g+i}, \\ y = \dfrac{1}{g'+i}, \\ z = \dfrac{1}{g+g'+2h+i}. \end{cases}$$

Supposons que (g, h, g') soit un point du domaine (I). Alors les coefficients de i dans g, dans g' et dans $g+g'+2h$ sont positifs ou nuls. Donc x, y et z sont inférieurs à *un* en valeur absolue. Si, dans un espace à six dimensions, un point a pour coordonnées les nombres complexes x, y et z, un domaine (D) de cet espace entièrement situé à distance finie correspond au domaine (I).

4. Donnons-nous une transformation (T) quelconque; soient X, Y, Z les transformés de x, y, z par cette transformation. Formons le déterminant fonctionnel

$$\frac{D(X, Y, Z)}{D(x, y, z)}.$$

Si G, H, G′ sont les transformés de g, h, g', ce déterminant fonctionnel a pour expression

$$(7)\qquad \frac{D(X, Y, Z)}{D(x, y, z)} = \frac{D(X, Y, Z)}{D(G, H, G')} \cdot \frac{D(G, H, G')}{D(g, h, g')} \cdot \frac{D(g, h, g')}{D(x, y, z)}.$$

Or, nous avons déjà calculé $\dfrac{D(G, H, G')}{D(g, h, g')}$ (Chap. I, § II, 6) : c'est une fonction *qui ne peut devenir ni nulle ni infinie dans le domaine* (I).

Calculons maintenant $\dfrac{D(x, y, z)}{D(g, h, g')}$; nous trouvons

$$(8)\qquad \frac{D(x, y, z)}{D(g, h, g')} = \frac{-2}{(g+i)^2(g'+i)^2(g+g'+2h+i)^2};$$

ce déterminant *ne devient non plus ni nul ni infini dans le domaine* (I).

Or $g+i$, $g'+i$, $g+g'+2h+i$ sont trois fonctions de la forme (1), $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)$ étant un point du domaine (III′). Donc $\dfrac{D(X, Y, Z)}{D(G, H, G')}$ ne devient non plus ni nul ni infini dans le domaine (I).

Donc $\dfrac{D(X, Y, Z)}{D(x, y, z)}$ *ne devient ni nul ni infini dans le domaine* (I).

Si l'on considère une région R intérieure au domaine (I), la frontière de la région R étant aussi intérieure à ce domaine, la valeur absolue du déterminant fonctionnel précédent restera, dans cette région, comprise entre deux nombres positifs fixes.

5. Démontrons maintenant que *le rapport des valeurs absolues de ce déterminant en deux points de la région* R *reste compris entre deux nombres positifs indépendants des deux points choisis et de la substitution* (S) *considérée.*

La formule (7) met ce déterminant sous la forme d'un produit de trois facteurs. Il suffit de démontrer que le rapport des valeurs absolues de chacun de ces facteurs en deux points de la région R reste compris entre deux nombres positifs fixes.

Pour le troisième facteur, $\dfrac{D(g, h, g')}{D(x, y, z)}$, il n'y a pas besoin de nouvelle démonstration.

Prenons maintenant le second facteur

$$\frac{D(G, H, G')}{D(g, h, g')} = \frac{1}{[(ab)_{12} - (ab)_{23}g + 2(ab)_{13}h + (ab)_{14}g' + (ab)_{34}(gg' - h^2)]^3}.$$

Soient (g_1, h_1, g'_1) et (g_2, h_2, g'_2) deux points de la région R. Posons

$$(ab)_{12} = \alpha_1, \qquad (ab)_{23} = \alpha_2, \qquad (ab)_{13} = \alpha_3, \qquad (ab)_{14} = \alpha_4, \qquad (ab)_{34} = \alpha_5;$$

nous aurons

$$\alpha_1\alpha_5 + \alpha_2\alpha_4 + \alpha_3^2 = 0.$$

Nous avons à considérer la fonction

$$\frac{\alpha_1 - \alpha_2 g_1 + 2\alpha_3 h_1 + \alpha_4 g'_1 + \alpha_5(g_1 g'_1 - h_1^2)}{\alpha_1 - \alpha_2 g_2 + 2\alpha_3 h_2 + \alpha_4 g'_2 + \alpha_5(g_2 g'_2 - h_2^2)}.$$

Or α_1, α_2, α_4 et α_5 ne peuvent être nuls ensemble; nous distinguerons quatre cas, suivant que la plus grande des valeurs absolues de ces quatre nombres sera $|\alpha_1|$, $|\alpha_2|$, $|\alpha_4|$ ou $|\alpha_5|$. Supposons d'abord que ce soit $|\alpha_1|$; nous avons alors une fonction continue de neuf variables : $g_1, h_1, g'_1, g_2, h_2, g'_1, \dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}, \dfrac{\alpha_4}{\alpha_1}, \dfrac{\alpha_5}{\alpha_1}$; $\dfrac{\alpha_3}{\alpha_1}$ peut en effet se tirer de la formule

$$\left(\frac{\alpha_3}{\alpha_1}\right)^2 = -\frac{\alpha_5}{\alpha_1} - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\frac{\alpha_4}{\alpha_1}.$$

Ces neuf variables restent dans une région bornée, et la fonction ne peut devenir ni nulle ni infinie : sa valeur absolue reste donc comprise entre deux nombres positifs fixes. On peut répéter la même démonstration dans chacun des trois autres cas; ainsi ce second facteur reste, en valeur absolue, compris entre deux nombres positifs fixes.

On peut faire une démonstration analogue pour le rapport des valeurs absolues de $G + i$, ou de $G' + i$, ou de $G + G' + 2H + i$ en deux points de la région R. Et comme

$$\frac{D(X, Y, Z)}{D(G, H, G')} = \frac{-2}{(G+i)^2(G'+i)^2(G+G'+2H+i)^2},$$

le rapport des valeurs absolues de ce facteur en deux points de la région R reste compris entre deux nombres positifs fixes.

La propriété énoncée pour le déterminant $\dfrac{D(X, Y, Z)}{D(x, y, z)}$ est donc exacte.

6. Considérons un groupe discontinu de transformations (T), c'est-à-dire un groupe discontinu dans le domaine (I); soient $T_1, T_2, \ldots, T_n, \ldots$ les transformations de ce groupe. Soit (x_n, y_n, z_n) le point transformé de (x, y, z) par la transformation T_n.

Considérons la série

$$\sum_{n=1}^{n=+\infty} \left[\frac{D(x_n, y_n, z_n)}{D(x, y, z)}\right]^k, \tag{9}$$

où k est un entier au moins égal à *deux*. Cette série est absolument convergente pour tout point du domaine (I); de plus, la convergence est uniforme dans une région R intérieure à ce domaine.

Soit, en effet, A un point de ce domaine. Il peut y avoir p transformés de A qui soient confondus avec A; en général, $p = 1$. Traçons une variété invariante de centre A, à coefficients réels (Chap. III), et choisie de telle façon qu'elle soit tout entière extérieure à toutes ses variétés transformées par le groupe différentes d'elle-même; soient S cette variété, S_n sa transformée par T_n. Posons

$$\begin{aligned} x &= x' + i x'', & x_n &= x'_n + i x''_n, \\ y &= y' + i y'', & y_n &= y'_n + i y''_n, \\ z &= z' + i z'', & z_n &= z'_n + i z''_n; \end{aligned}$$

considérons l'intégrale

$$\int\int\int\int\int\int dx'\, dx''\, dy'\, dy''\, dz'\, dz'' \tag{10}$$

étendue à l'intérieur de S_n, du moins à la portion de cet intérieur qui est dans le domaine (I). Cette intégrale est égale à

$$\int\int\int\int\int\int \left| \frac{D(x'_n, x''_n, y'_n, y''_n, z'_n, z''_n)}{D(x', x'', y', y'', z', z'')} \right| dx'\, dx''\, dy'\, dy''\, dz'\, dz''$$

étendue à la portion de l'intérieur de S qui est dans le domaine (I). Or

$$\frac{D(x'_n, x''_n, y'_n, y''_n, z'_n, z''_n)}{D(x', x'', y', y'', z', z'')} = \left| \frac{D(x_n, y_n, z_n)}{D(x, y, z)} \right|^2. \tag{11}$$

Mais, tant que le point (x, y, z) reste dans S, nous savons que

$$\left| \frac{D(x_n, y_n, z_n)}{D(x, y, z)} \right| \geqq k \left| \frac{D(x_n, y_n, z_n)}{D(x, y, z)} \right|_{(A)}, \tag{12}$$

k étant un nombre positif indépendant de n. Or, la série des intégrales (10) étendues aux variétés S_n successives est convergente, puisque la somme d'un nombre quelconque de termes est inférieure au produit par p de la même intégrale étendue au domaine (D) qui correspond au domaine (I) dans l'espace où les coordonnées sont x, y et z. Donc, pour le point A, la série

$$\sum \left| \frac{D(x_n, y_n, z_n)}{D(x, y, z)} \right|^2$$

est convergente.

Le théorème sur le rapport des valeurs du déterminant $\frac{D(X, Y, Z)}{D(x, y, z)}$ en deux points d'une région R intérieure au domaine (I) montre que cette série est uniformément convergente dans toute région R intérieure au domaine (I).

Il suit de là que la proposition énoncée sur la série (9) est exacte.

7. Soit $R(x, y, z)$ une fonction rationnelle n'ayant aucun point singulier dans (D) ni sur sa frontière : la valeur absolue de cette fonction est bornée dans (D), c'est-à-dire dans le domaine (I) quand on revient à g, h, g'. La série

$$\sum_{n=1}^{n=+\infty} R(x_n, y_n, z_n)\left[\frac{D(x_n, y_n, z_n)}{D(x, y, z)}\right]^k \qquad (k \geqq 2) \tag{13}$$

est *uniformément* convergente dans toute la région intérieure au domaine (D); sa somme est donc une fonction *holomorphe* de x, y, z dans le domaine (D), ou de g, h, g' dans le domaine (I). Nous la désignerons par $\Theta(g, h, g')$:

$$\Theta(g, h, g') = \sum_{n=1}^{n=+\infty} R(x_n, y_n, z_n)\left[\frac{D(x_n, y_n, z_n)}{D(x, y, z)}\right]^k. \tag{14}$$

Soit (g_n, h_n, g'_n) le point transformé de (g, h, g') par la transformation T_n. Nous aurons

$$\Theta(g_n, h_n, g'_n) = \Theta(g, h, g')\left[\frac{D(x_n, y_n, z_n)}{D(x, y, z)}\right]^{-k}. \tag{15}$$

Des considérations toutes pareilles à celles que M. Picard a employées pour les fonctions hyperfuchsiennes et hyperabéliennes permettent de voir que, si k est assez grand, la fonction Θ n'est pas identiquement nulle.

8. Le quotient de deux fonctions Θ correspondant au même entier k fournira une fonction invariante par les transformations du groupe discontinu considéré et se comportant dans le domaine (I) comme une fonction rationnelle. Des considérations du même genre qu'il y a un instant démontrent qu'on peut toujours s'arranger pour que cette fonction ne soit pas constante.

9. Les termes de la série (13) ne peuvent pas devenir infinis dans le domaine (I), mais ils peuvent devenir infinis en dehors de ce domaine. Le facteur $\frac{D(x_n, y_n, z_n)}{D(x, y, z)}$, en particulier, a des singularités en dehors de ce domaine.

Soit P un point situé en dehors du domaine (I); nous supposerons que le groupe est tel qu'on puisse enfermer P dans une région R assez petite pour que les quantités $\frac{D(x_n, y_n, z_n)}{D(x, y, z)}$ qui ont des singularités dans cette région soient en nombre fini. Nous allons voir que la série (9) est absolument et uniformément convergente dans toute région intérieure à la région R, abstraction faite des termes qui ont des singularités dans cette région.

Tout d'abord, nous pouvons remarquer que les termes qui ont des singularités dans la région R étant en nombre fini, leur somme est une fonction rationnelle.

Passons aux autres termes. Soient X, Y, Z les transformés de x, y, z par une transformation (T) quelconque : je suppose les coefficients a_1, a_2, ..., d_4 choisis de manière que $\frac{D(X, Y, Z)}{D(x, y, z)}$ n'ait pas de singularité *à l'intérieur* de R, mais puisse en avoir sur la frontière : l'ensemble des valeurs possibles de a_1, a_2, ..., d_4 est un *ensemble fermé*. Soit alors A un point quelconque du domaine (I); le rapport

$$\left|\frac{\left[\frac{D(X, Y, Z)}{D(x, y, z)}\right]_{(P)}}{\left[\frac{D(X, Y, Z)}{D(x, y, z)}\right]_{(A)}}\right|,$$

qui ne peut devenir infini, reste inférieur à un nombre fixe M. On peut même remplacer le point P par un point P′ variable dans une région intérieure à R : la conclusion subsiste. Donc, en particulier,

$$\left|\frac{D(x_n, y_n, z_n)}{D(x, y, z)}\right|_{(P')} < M\left|\frac{D(x_n, y_n, z_n)}{D(x, y, z)}\right|_{(A)};$$

la série (9) est donc absolument et uniformément convergente pour les points P′.

10. On peut alors choisir la fonction rationnelle $R(x, y, z)$, de manière que le nombre des valeurs de n pour lesquelles la fonction $R(x_n, y_n, z_n)$ a des singularités dans une région suffisamment petite entourant le point P soit fini, et pour que, pour les autres valeurs de n, cette fonction reste, en valeur absolue, inférieure à un

nombre fixe. Alors la série (13) est absolument et uniformément convergente dans une région suffisamment petite entourant le point P, abstraction faite des termes qui y deviennent infinis : la somme de cette série se comporte, dans cette région, comme une fonction rationnelle.

11. Si la région qu'on vient de définir pénètre dans le domaine (I), la fonction $\Theta(g, h, g')$ est prolongeable analytiquement dans cette région et est uniforme tant que le point g, h, g' reste dans cette région et dans le domaine (I). On peut en dire autant du quotient de deux fonctions Θ de cette sorte, qui est une fonction invariante par les substitutions du groupe : cette fonction invariante se comporte comme une fonction rationnelle dans tout le domaine ainsi défini.

Dans tous les cas les fonctions Θ et les fonctions invariantes que nous en avons déduites sont toujours uniformes dans le domaine (I), où les fonctions $\Theta(g, h, g')$ sont holomorphes, et où les fonctions invariantes se comportent comme des fonctions rationnelles.

12. Dans tout ce que nous avons dit, nous n'avons pas parlé des points à l'infini. Soit $f(g, h, g')$ une fonction des trois variables g, h, g'; quand dirons-nous qu'elle est régulière en un point à l'infini de coordonnées homogènes $0, x_2, x_3, x_4, x_5$? Soit T une transformation (T) amenant ce point à distance finie; soient G, H, G′ les transformés de g, h, g', la fonction $f(g, h, g')$ devient une fonction $F(G, H, G')$; nous dirons que la fonction f est régulière au point à l'infini considéré si la fonction F est régulière au point transformé de ce point à l'infini. De même, nous dirons que la fonction f a une singularité essentielle ou non essentielle en ce point à l'infini, suivant que F aura elle-même une singularité essentielle ou non essentielle au point correspondant. Il est clair que cette définition n'est pas contradictoire avec elle-même; l'arbitraire laissé dans la transformation T n'influe pas sur le comportement de la fonction F au point transformé du point à l'infini donné.

Si le point à l'infini est tel que, dans une région ayant ce point à son intérieur, il n'y ait qu'un nombre fini de termes de la série (9) qui présentent des singularités, on pourra construire des fonctions Θ

et des fonctions invariantes par le groupe qui se comportent dans cette région comme des fonctions rationnelles.

13. Comme première application, considérons le groupe des puissances d'une transformation du premier type. Nous pourrons supposer que cette transformation est de la forme canonique; nous supposerons encore qu'on a

$$|r_1| > |r_2| > 1.$$

Cherchons la distribution des infinis des expressions $\frac{D(x_n, y_n, z_n)}{D(x, y, z)}$. Au lieu de prendre pour x, y et z les valeurs données plus haut, nous prendrons toutefois

$$x = \frac{1}{G + i},$$

$$y = \frac{1}{G' + i},$$

$$z = \frac{1}{G + G' + 2H + i};$$

G, H, G′ sont les transformés de g, h, g' par une transformation T telle que les expressions de x, y, z en fonction de g, h, g' aient toutes au dénominateur un terme constant et un terme en $gg' - h^2$ non nuls. Alors, on constate que les infinis s'accumulent seulement au voisinage des variétés $x_1 = 0$ et $x_5 = 0$, en employant les coordonnées homogènes. On peut, en choisissant convenablement la fonction rationnelle $R(x, y, z)$, faire en sorte qu'il en soit de même pour ces infinis, et que la condition relative à la valeur absolue de cette fonction soit aussi remplie; il suffit de prendre, par exemple,

$$R(x, y, z) = \frac{P(x, y, z)[\beta_1 - \beta_2 g + 2\beta_3 h + \beta_4 g' + \beta_5(gg' - h^2)]}{\alpha_1 - \alpha_2 g + 2\alpha_3 h + \alpha_4 g' + \alpha_5(gg' - h^2)},$$

la fonction P étant un polynome en x, y, z et le dénominateur étant une fonction de la forme (1), le point α_1, α_2, α_3, α_4, α_5 appartenant au domaine (III′), et α_1 et α_5 étant tous deux différents de zéro; β_1, β_2, β_3, β_4, β_5 sont des nombres réels, satisfaisant à la condition

$$\beta_1\beta_5 + \beta_2\beta_4 + \beta_3^2 = 0$$

et tels que la fonction

$$\frac{\beta_1 - \beta_2 g + 2\beta_3 h + \beta_4 g' + \beta_5 (gg' - h^2)}{\alpha_1 - \alpha_2 g + 2\alpha_3 h + \alpha_4 g' + \alpha_5 (gg' - h^2)}$$

est la transformée de $\frac{1}{g+i}$ par une certaine transformation (T). On peut d'ailleurs prendre R d'une façon différente. Les fonctions $\Theta(g, h, g')$ ainsi obtenues n'auront pas d'autres singularités essentielles que les variétés $x_1 = 0$ et $x_5 = 0$; les fonctions invariantes non plus : ces fonctions seront uniformes partout où elles existent. Les variétés précédentes seront bien effectivement des singularités essentielles pour ces fonctions, par exemple si les fonctions R sont choisies de manière que les points où les fonctions Θ du numérateur et du dénominateur deviennent infinis ne soient pas les mêmes.

Il importe de remarquer que ces singularités essentielles dépendent dans une certaine mesure de la façon d'opérer. Ainsi, si l'on avait pris pour x, y et z les valeurs données par la formule (6), les points où les déterminants $\frac{D(x_n, y_n, z_n)}{D(x, y, z)}$ deviennent infinis se seraient accumulés au voisinage des variétés $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ et $x_4 = 0$. De même, le choix de la fonction $R(x, y, z)$ a une influence sur la position de ces singularités.

On remarque aussi que les singularités essentielles pénètrent nécessairement dans le polyèdre fondamental, puisque les points qui ne font partie d'aucun polyèdre sont les points de deux variétés à deux dimensions seulement.

14. Comme autre application, prenons le groupe des puissances d'une transformation du quatrième type, que nous mettrons sous la forme canonique. En prenant x, y et z comme dans l'exemple précédent, et en choisissant $R(x, y, z)$ convenablement, on constate que les singularités essentielles des fonctions Θ et des fonctions invariantes sont encore les points des deux variétés

$$x_1 = 0 \qquad \text{et} \qquad x_5 = 0.$$

Si l'on a pris pour centre du premier polyèdre fondamental le point

$$g = g' = i, \qquad h = 0,$$

ces points ne font partie d'aucun polyèdre; il y a seulement exception pour les points de la variété

$$x_1 = x_5 = 0,$$

qui font partie du contour de tous les polyèdres.

15. Nous venons de voir que, pour le groupe formé des puissances d'une transformation du premier type, les singularités essentielles ne sont pas les mêmes pour toutes nos fonctions Θ, ni par suite pour toutes les fonctions invariantes que nous en déduisons. Supposons la transformation du premier type mise sous forme canonique, et plaçons-nous dans le cas où

$$|r_1| > |r_2| > 1.$$

Considérons une fonction $f(g, h, g')$, obtenue par n'importe quel moyen, et qui ne change pas quand on fait sur g, h, g' la transformation donnée : nous supposerons cette fonction uniforme dans le domaine (I), où elle se comporte de plus comme une fonction rationnelle. Nous allons voir qu'alors : ou bien tous les points de la variété

$$x_1 = 0$$

qui sont dans le domaine (III) sont des points singuliers de la fonction; ou bien tous les points de la variété

$$x_2 = x_5 = 0$$

qui sont dans le domaine (III) sont des points singuliers de la fonction; ou bien la fonction prend la même valeur en tous les points de ces deux variétés situés dans le domaine (III) et où elle est holomorphe.

Supposons en effet qu'il y ait à la fois, dans le domaine (III), un point de chacune de ces variétés pour lequel la fonction soit holomorphe. Soient 0, ξ_2, ξ_3, ξ_4, ξ_5 les coordonnées de celui qui est sur la variété $x_1 = 0$; on peut supposer que ξ_4 n'est pas nul, car, si en un point la fonction est homolorphe, elle est holomorphe en tous les points voisins : nous prendrons donc $\xi_4 = 1$; les coordonnés du point seront donc $(0, \xi_2, \xi_3, 1, \xi_5)$. Pour le point de la variété $x_2 = x_5 = 0$, ni x_1, ni x_4 ne sont nuls; nous appellerons $(\lambda, 0, 0, 1, 0)$ ses coordonnées. Nous allons démontrer qu'en ces deux points la fonction prend la même valeur.

Soit ε un nombre positif donné à l'avance; nous allons faire voir qu'il existe un point de coordonnées $(x_1, x_2, x_3, 1, x_5)$ du domaine (I) et un entier n tels qu'on ait les inégalités

$$(16)\qquad |x_1|<\varepsilon, \qquad |x_2-\xi_2|<\varepsilon, \qquad |x_3-\xi_3|<\varepsilon, \qquad |x_5-\xi_5|<\varepsilon,$$

et les inégalités

$$(17)\qquad |r_2^{2n}x_1-\lambda|<\varepsilon, \qquad \left|\frac{r_2^{2n}x_2}{r_1^{2n}}\right|<\varepsilon, \qquad \left|\frac{r_2^{n}x_3}{r_1^{n}}\right|<\varepsilon, \qquad \left|\frac{x_5}{r_1^{2n}}\right|<\varepsilon.$$

Tout d'abord, le point $(0, \xi_2, \xi_3, 1, \xi_5)$ étant dans le domaine (III), on a

$$\xi_2+\xi_{20}+2\xi_3\xi_{30}=0;$$

mais on a déjà

$$\xi_2+\xi_3^2=0;$$

donc

$$-(\xi_3-\xi_{30})^2=0;$$

donc ξ_2 et ξ_3 sont réels. De plus, le coefficient de i dans ξ_5 est positif : car, s'il était nul, le point serait réel; et s'il était négatif, on voit facilement que le point serait dans le domaine (III′). Pour la même raison, le coefficient de i dans λ est négatif.

Or, si les inégalités (16) sont satisfaites, il existe un entier n_0, déterminé quand on connaît ε, et tel que si n est supérieur à n_0, les trois dernières inégalités (17) sont satisfaites. D'autre part, on peut prendre n_0 assez grand pour que l'inégalité $n \geqq n_0$ entraîne que $\frac{\lambda}{r_2^{2n}}$ est, en valeur absolue, inférieur au plus petit des nombres ε et $\frac{\varepsilon}{|\xi_5|}$. Alors, n étant un entier supérieur à n_0, nous prendrons

$$x_1=\frac{\lambda}{r_2^{2n}};$$

puis

$$x_3=\xi_3, \qquad x_5=\xi_5;$$

enfin

$$x_2=\xi_2-\frac{\lambda\xi_5}{r_2^{2n}}.$$

On constate immédiatement que les inégalités (16) et (17) sont toutes satisfaites. De plus, on a, comme il le faut,

$$x_1 x_5 + x_2 + x_3^2 = 0;$$

enfin, calculons $x_1 x_{50} + x_{10} x_5 + x_2 + x_{20} + 2 x_3 x_{30}$; nous trouvons

$$-\frac{\lambda - \lambda_0}{r_2^{2n}}(\xi_5 - \xi_{50}),$$

qui est négatif. Le point $(x_1, x_2, x_3, 1, x_5)$ appartient donc à l'un des domaines (I) et (I'); comme, d'après les inégalités (16), il est très voisin d'un point du domaine (III), il appartient au domaine (I); on peut d'ailleurs le vérifier directement.

Or, la fonction $f(g, h, g')$ prend la même valeur aux points de coordonnées homogènes

$$(x_1, x_2, x_3, 1, x_5) \quad \text{et} \quad (r_1^n r_2^n x_1, r_2^n r_3^n x_2, x_3, r_1^n r_4^n, r_3^n r_4^n x_5),$$

qui sont tous deux dans le domaine (I). Or, si ε est assez petit, cette valeur commune est, d'après les inégalités (16), aussi voisine qu'on veut de la valeur de la fonction au point $(0, \xi_2, \xi_3, 1, \xi_5)$; d'après les inégalités (17), elle est aussi voisine qu'on veut de la valeur de la fonction au point $(\lambda, 0, 0, 1, 0)$; donc, en ces deux points, la fonction prend la même valeur.

Comme ces deux points sont quelconques sur les variétés $x_1 = 0$ et $x_2 = x_5 = 0$, pourvu que la fonction y soit holomorphe, la proposition énoncée en résulte immédiatement.

CHAPITRE VI.

LE GROUPE ARITHMÉTIQUE.

I. — Définition et premières propriétés.

1. Le groupe arithmétique est le groupe des transformations (T) pour lesquelles les éléments du tableau

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix}$$

sont tous des nombres entiers.

Il est évident que l'ensemble de ces transformations est bien un groupe.

2. Nous allons montrer que les substitutions fondamentales du groupe, c'est-à-dire celles qui par leurs produits engendrent toutes les autres, sont les quatre suivantes :

$$S_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \qquad S_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

$$S_4 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \qquad S_5 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Les substitutions S_2 et S_3 sont des cas particuliers de celles que nous avons désignées sous ce nom (Chap. I, § I, 3); les substitutions S_4 et S_5 sont les mêmes.

Pour la commodité de la démonstration, nous introduirons encore les substitutions suivantes :

$$= \quad S_5 S_4 S_5 = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{Bmatrix}; \qquad S_7 = S_5\ S_2\ S_5 = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{Bmatrix}$$

$$= S_5 S_4 S_5 S_4 S_5 = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}; \qquad S_9 = S_5\ S_4^2\ S_5 = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{Bmatrix}$$

$$= \quad S_4^{-1} S_3 S_4 = \begin{Bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{Bmatrix}; \qquad S_{11} = S_4^{-1} S_2^{-1} S_4 = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix}$$

$$= \quad S_5 S_{11} S_5 = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix}; \qquad S_{13} = S_8^{-1} S_3^{-1} S_8 = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix}$$

On peut remarquer encore la substitution

$$S_4^2 S_5 S_4^2 S_5 = \begin{Bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{Bmatrix},$$

qui permet de changer à la fois les signes de tous les éléments a_1, a_2, a_3, ..., d_4 ; cette opération ne change d'ailleurs pas la transformation (T) correspondante.

Nous nous donnons une substitution (S) quelconque :

$$S = \begin{Bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{Bmatrix};$$

nous voulons montrer qu'elle peut être obtenue comme produit de substitutions S_2, S_3, S_4, S_5. Pour cela, nous la multiplierons à droite par certaines de ces substitutions; nous désignerons les résultats par la même notation que la substitution S, mais en indiquant les particularités que présentent alors les coefficients $a_1, a_2, \ldots, d_4$; finalement, nous obtiendrons la substitution unité.

Nous voulons d'abord annuler c_1; si ce coefficient est nul de lui-même, il n'y a rien à faire; s'il n'est pas nul, nous pouvons supposer qu'on a

$$|a_1| \leqq |c_1|;$$

car, dans le cas contraire, nous multiplierions à droite par S_4, et nous serions ainsi ramenés au cas de l'hypothèse. Si a_1 est nul, nous multiplions par S_4, ce qui ramène au cas où c_1 est nul. Si a_1 n'est pas nul, nous multiplions par S_2^α, α étant un entier : cela revient à ajouter aux éléments de la troisième ligne les produits par α des éléments correspondants de la première; on choisira α de manière qu'on ait

$$|c_1 + \alpha a_1| \leqq \frac{|a_1|}{2};$$

si $c_1 + \alpha a_1 = 0$, le but est atteint; sinon on multipliera par S_4 et, dans la substitution obtenue, on aura encore $|a_1| < |c_1|$; nous avons remplacé ainsi a_1 et c_1 par des nombres plus petits en valeur absolue. Alors, on recommence les mêmes opérations : on voit que a_1 et c_1 subissent les opérations de la recherche du plus grand commun diviseur; au bout d'un certain nombre d'opérations, l'un d'eux divise l'autre; alors, à l'opération suivante, c_1 est annulé, et a_1 est égal au plus grand commun diviseur des éléments a_1 et c_1 de la substitution primitive.

Ces opérations n'ont changé ni la seconde, ni la quatrième ligne. Nous opérons maintenant sur celles-ci avec S_6 et S_7 comme tout à l'heure sur les deux autres avec S_4 et S_2; nous arrivons ainsi à remplacer b_1 par le plus grand commun diviseur de b_1 et de d_1, et d_1 par zéro. Multiplions alors par S_6 : nous avons une substitution où b_1 et c_1 sont nuls; a_1 et d_1 ne sont pas nuls ensemble.

Nous opérons alors sur la première et la quatrième ligne avec les substitutions S_8 et S_3, de façon à annuler d_1; cela change bien les deuxième et troisième lignes, mais b_1 et c_1 restent nuls. Quand d_1 est nul, a_1 est égal à ± 1, puisque le déterminant des coefficients est égal à *un;* en changeant au besoin tous les signes, comme c'est permis, nous arrivons à une substitution de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & b_2 & b_3 & b_4 \\ 0 & c_2 & c_3 & c_4 \\ 0 & d_2 & d_3 & d_4 \end{pmatrix};$$

d'ailleurs, les relations entre ces éléments prouvent que

$$c_2 = c_4 = 0, \qquad c_3 = 1;$$

la substitution s'écrit donc

$$\begin{pmatrix} 1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & b_2 & b_3 & b_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & d_2 & d_3 & d_4 \end{pmatrix}.$$

En nous servant de S_6 et de S_7, nous pouvons maintenant annuler d_2; alors on a

$$b_2 d_4 = 1;$$

en multipliant au besoin par S_9, on a donc

$$b_2 = d_4 = 1;$$

de plus

$$a_2 + d_3 = 0.$$

Multiplions alors par $S_{10}^{a_2}$; nous annulons a_2 et nous parvenons ainsi à la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a_3 & a_4 \\ 0 & 1 & a_4 & b_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = S_{11}^{a_3} S_{12}^{b_4} S_{13}^{a_4}.$$

Notre proposition est donc démontrée; les quatre substitutions indiquées sont bien fondamentales.

3. Toute transformation T du groupe arithmétique est une transfor-

mation à coefficients entiers de la forme quadratique

$$x_1 x_5 + x_2 x_4 + x_3^2$$

en elle-même. Nous voulons nous demander si toute transformation à coefficients entiers de cette forme quadratique en elle-même est une transformation du groupe arithmétique. Avant de répondre à cette question, nous établirons le lemme suivant :

Étant donnés six nombres entiers premiers entre eux, A_{12}, A_{13}, A_{14}, A_{23}, A_{24}, A_{34}, *satisfaisant à la relation*

$$A_{12}A_{34} + A_{23}A_{14} - A_{13}A_{24} = 0,$$

il existe deux systèmes de quatre nombres entiers

$$\begin{array}{cccc} m_1, & m_2, & m_3, & m_4, \\ n_1, & n_2, & n_3, & n_4, \end{array}$$

tels qu'on ait les six relations

$$m_i n_j - m_j n_i = A_{ij} \qquad (i, j = 1, 2, 3, 4;\ i \neq j).$$

Pour le démontrer, nons allons résoudre le problème de la recherche de ces huit entiers. Supposons d'abord le problème résolu : nous connaissons un système de huit entiers répondant à la question. Si a, b, c, d sont quatre entiers tels que

$$ad - bc = 1,$$

les huit entiers suivants représentent une autre solution :

$$\begin{array}{cccc} am_1 + bn_1, & am_2 + bn_2, & am_3 + bn_3, & am_4 + bn_4, \\ cm_1 + dn_1, & cm_2 + dn_2, & cm_3 + dn_3, & cm_4 + dn_4. \end{array}$$

Soit δ le plus grand commun diviseur de m_1 et de n_1 ; posons

$$m_1 = m'_1 \delta, \qquad n_1 = n'_1 \delta.$$

On peut prendre a et b tels que

$$am'_1 + bn'_1 = 1 ;$$

on posera alors

$$c = -n'_1, \qquad d = m'_1.$$

Alors
$$am_1 + bn_1 = \delta, \qquad cm_1 + dn_1 = 0.$$

Ainsi, pour avoir la solution générale du problème, on peut se borner au cas particulier où $n_1 = 0$, m_1 n'étant pas nul. Dans ceci, nous avons supposé que m_1 et n_1 ne sont pas nuls ensemble; si cela arrivait, les trois entiers donnés A_{12}, A_{13}, A_{14} seraient nuls. Réciproquement, si ces trois entiers sont nuls, comme l'un au moins des entiers A_{23}, A_{24}, A_{34} n'est pas nul, m_1 et n_1 sont forcément tous deux nuls. Nous reviendrons plus loin sur ce cas.

Supposons donc A_{12}, A_{13}, A_{14} non nuls ensemble, et
$$n_1 = 0.$$

Alors m_1 est visiblement un diviseur commun des entiers A_{12}, A_{13}, A_{14}; c'est même leur plus grand commmun diviseur, car si ce plus grand commun diviseur était $m_1 p$, l'entier p serait un diviseur commun à n_2, à n_3 et à n_4, donc à A_{23}, à A_{24} et à A_{34} : les six entiers A_{12}, A_{13}, A_{14}, A_{23}, A_{24}, A_{34} ne seraient pas premiers entre eux, sauf dans le cas où $p = 1$.

Donc m_1 est le plus grand nombre commun diviseur de A_{12}, de A_{13} et de A_{14}; on a alors
$$n_2 = \frac{A_{12}}{m_1}, \qquad n_3 = \frac{A_{13}}{m_1}, \qquad n_4 = \frac{A_{14}}{m_1}.$$

Restent à déterminer m_2, m_3, m_4; pour cela, nous avons les trois équations :
$$\begin{aligned}
n_3 m_2 - n_2 m_3 &= A_{23},\\
n_4 m_2 - n_2 m_4 &= A_{24},\\
n_4 m_3 - n_3 m_4 &= A_{34}.
\end{aligned}$$

Ces trois équations reviennent à deux seulement; car, en multipliant les deux membres de la première par A_{14}, ceux de la seconde par $-A_{13}$, ceux de la troisième par A_{12}, et en ajoutant, on trouve une identité. Si donc n_2, par exemple, n'est pas nul, on peut se borner à garder les deux premières équations. On arrive ainsi à un problème connu d'analyse diophantine. Les trois déterminants de ces deux équations sont
$$-n_2 n_3, \quad n_2 n_4, \quad n_2^2;$$

leur plus grand commun diviseur est n_2. Les déterminants caractéristiques sont

$$n_3 A_{24} - n_4 A_{23}, \quad - n_2 A_{14}, \quad n_2 A_{23};$$

les deux derniers sont divisibles par n_2; le premier aussi, car il s'écrit encore

$$\frac{1}{m_1}(A_{13} A_{24} - A_{14} A_{23}) = \frac{1}{m_1} A_{12} A_{34} = n_2 A_{34}.$$

Donc, il existe trois entiers m_2, m_3, m_4 satisfaisant à ces équations. Si l'on a une solution, la solution la plus générale est formée des nombres

$$m_2 + \lambda n_2, \qquad m_3 + \lambda n_3, \qquad m_4 + \lambda n_4,$$

λ étant un entier arbitraire.

Le système le plus général de huit entiers satisfaisant à la question sera alors

$$\begin{array}{cccc} am_1, & am_2 + bn_2, & am_3 + bn_3, & am_4 + bn_4, \\ cm_1, & cm_2 + dn_2, & cm_3 + dn_3, & cm_4 + dn_4, \end{array}$$

avec la condition $ad - bc = 1$; on n'augmente pas la généralité en introduisant l'entier λ.

Si A_{12}, A_{13}, A_{14} étaient tous les trois nuls, il faudrait, nous l'avons vu, prendre

$$m_1 = n_1 = 0.$$

Mais l'un des entiers A_{23}, A_{24}, A_{34} n'est pas nul; supposons que ce soit A_{23} : alors m_2 et n_2 ne sont pas nuls ensemble; l'analyse précédente s'applique quand on a permuté les indices 1 et 2.

Notre lemme est donc démontré.

On trouverait de la même façon p systèmes de r entiers

$$m_j^i \quad (i = 1, 2, \ldots, p; \; j = 1, 2, \ldots, r; \; r > p),$$

quand on donne les déterminants d'ordre p formés avec les éléments où j a p valeurs distinctes quelconques, les valeurs données des déterminants étant liées par les relations qui existent nécessairement entre ces déterminants.

4. Soit donc

$$
(1)\qquad \begin{cases} X_1 = \Sigma\, \alpha_i x_i \\ X_2 = \Sigma\, \beta_i x_i \\ X_3 = \Sigma\, \gamma_i x_i \\ X_4 = \Sigma\, \delta_i x_i \\ X_5 = \Sigma\, \varepsilon_i x_i \end{cases} \qquad (i = 1, 2, 3, 4, 5)
$$

une transformation de déterminant *un* à coefficients entiers de la forme quadratique $x_1 x_5 + x_2 x_4 + x_3^2$ en elle-même.

On a la relation

$$\alpha_1 \varepsilon_1 + \beta_1 \delta_1 + \gamma_1^2 = 0;$$

d'ailleurs α_1, β_1, γ_1, δ_1 ε_1 sont premiers entre eux. Il existe donc deux systèmes de quatre entiers

$$
\begin{array}{cccc} a_1, & b_1, & c_1, & d_1, \\ a_2, & b_2, & c_2, & d_2, \end{array}
$$

tels que

$$(ab)_{12} = \alpha_1, \quad (bc)_{12} = \beta_1, \quad (ac)_{12} = -(bd)_{12} = \gamma_1, \quad (ad)_{12} = \delta_1, \quad (cd)_{12} = \varepsilon_1.$$

Il existe alors une substitution (S) telle que les deux premières colonnes du tableau des coefficients soient formées des nombres entiers ainsi trouvés. Pour le démontrer, il n'y a qu'à remplacer les nombres des deux autres colonnes par des indéterminées, et à procéder comme quand on a démontré que toute substitution (S) est un produit des substitutions S_2, S_3, S_4, S_5 : quand on aura annulé b_1, c_1, d_1, le nombre a_1 sera nécessairement égal à ± 1, car les quatre entiers dont on est parti étaient premiers entre eux; on peut donc faire que ce soit *un*; quand, ensuite, on aura annulé d_2, on aura aussi $b_2 = \pm 1$, puisque les six déterminants formés avec les deux premières colonnes sont premiers entre eux. Enfin, on annule a_2. Nous avons donc ramené les deux premières colonnes à être

$$
\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0; \end{array}
$$

nous prenons alors, pour les deux dernières, tous les éléments nuls, sauf que $c_3 = d_4 = 1$ (la solution la plus générale consisterait à prendre $c_3 = d_4 = 1$, $c_4 = d_3 = 0$, a_3 et b_4 quelconques, et $a_4 = b_3 =$ un entier quelconque); nous répétons alors les mêmes opérations en sens inverse, et nous obtenons une substitution (S) ayant les deux premières colonnes indiquées. Soit T la transformation (T) correspondante; multiplions la transformation (1) par T^{-1}; nous arrivons à une transformation où

$$\beta_1 = \gamma_1 = \delta_1 = \varepsilon_1 = 0, \qquad \alpha_1 = 1.$$

Comme c'est toujours une transformation en elle-même de la forme $x_1 x_5 + x_2 x_4 + x_3^2$, on a aussi

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = 0, \qquad \varepsilon_5 = 1.$$

Considérons alors la substitution (S) correspondant au tableau

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \delta_5 & -\gamma_5 \\ 0 & 1 & -\gamma_5 & -\beta_5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

et multiplions la transformation à laquelle nous sommes parvenus par l'inverse de la transformation (T) correspondante; nous arrivons à une transformation telle que

$$\begin{aligned} X_1 &= x_1, \\ X_2 &= \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_4 x_4, \\ X_3 &= \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3 + \gamma_4 x_4, \\ X_4 &= \delta_2 x_2 + \delta_3 x_3 + \delta_4 x_4, \\ X_5 &= x_5. \end{aligned}$$

Ainsi x_2, x_3 et x_4 sont seuls changés; ils subissent une transformation changeant en elle-même la forme $x_2 x_4 + x_3^2$. Donc, *si* β_2 *est positif*, cette transformation est de la forme

$$\begin{aligned} X_2 &= a^2 x_2 + 2ab\, x_3 - b^2 x_4, \\ X_3 &= ac x_2 + (ad + bc) x_3 - bd x_4, \\ X_4 &= -c^2 x_2 - 2cd\, x_3 + d^2 x_4, \end{aligned}$$

a, b, c, d étant des entiers tels que

$$ad - bc = 1;$$

ceci est la substitution (T) correspondant au tableau

$$\begin{Vmatrix} d & c & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & -b \\ 0 & 0 & -c & d \end{Vmatrix};$$

dans ce cas, la substitution (1) appartenait donc au groupe arithmétique. *Si β_2 est négatif*, on voit de même que la solution (1) est le produit d'une transformation (T) du groupe arithmétique par la transformation

$$(2) \qquad X_1 = x_1, \qquad X_2 = -x_2, \qquad X_3 = x_3, \qquad X_4 = -x_4, \qquad X_5 = x_5,$$

qui n'est pas une transformation (T).

Ainsi, *la transformation* (1) *appartient au groupe arithmétique si c'est une transformation* (T).

II. — Polyèdre fondamental.

Nous nous proposons de trouver le polyèdre fondamental du groupe arithmétique; nous démontrerons en chemin que ce groupe est effectivement discontinu dans le domaine (I).

Le polyèdre fondamental que nous trouverons n'est pas celui dont l'existence a été démontrée (Chap. III); nous l'obtiendrons par une méthode un peu différente.

1. Lemme. — Considérons la variété invariante de centre $g = g' = i$, $h = 0$,

$$(3) \qquad 1 + gg_0 + 2hh_0 + g'g'_0 + (gg' - h^2)(g_0g'_0 - h_0^2) - 4\mu(\mathcal{G}\mathcal{G}' - \mathcal{H}^2) = 0,$$

où μ est plus grand que *un*. *Les points du domaine* (I) *pour lesquels $\mathcal{G}\mathcal{G}' - \mathcal{H}^2$ est maximum ou minimum sur cette variété sont les deux points pour lesquels h est nul, g et g' étant égaux et purement imaginaires.*

Pour le voir, nous poserons

$$(4)\qquad \begin{cases} g = k\dfrac{2tu}{t-u}, \\ g' = k\dfrac{2}{t-u}, \\ h = k\dfrac{t+u}{t-u}; \end{cases}$$

k, t, u sont de nouvelles variables destinées à remplacer g, h, g' ; elles s'expriment d'ailleurs au moyen de ces anciennes variables par les relations

$$(5)\qquad k^2 = -(gg' - h^2), \qquad t = \frac{g}{h-k}, \qquad u = \frac{g}{h+k}.$$

L'équation de la variété devient

$$(6)\qquad 1 + k^2 k_0^2 + \frac{2kk_0}{(t-u)(t_0-u_0)}[2tut_0u_0 + (t+u)(t_0+u_0) + 2]$$
$$+\mu\left[-k^2 - k_0^2 - 2kk_0\frac{2tu + 2t_0u_0 - (t+u)(t_0+u_0)}{(t-u)(t_0-u_0)}\right] = 0.$$

Nous savons déjà que cette variété est tout entière située dans le domaine (I), et à distance finie : donc, sur cette variété, $\mathcal{G}\mathcal{G}' - \mathcal{H}^2$ atteint effectivement un maximum et un minimum.

Tout d'abord, pour ce maximum et ce minimum, k est réel ; en effet, supposons que, sans changer ni t, ni u, ni $|k|$, on rende k réel ; $\mathcal{G}\mathcal{G}' - \mathcal{H}^2$ augmente ; d'autre part, le premier membre de l'équation de la variété devient négatif, c'est-à-dire que nous sommes en un point intérieur à la variété : si nous faisons alors croître le nombre réel k, qu'on peut supposer positif, $\mathcal{G}\mathcal{G}' - \mathcal{H}^2$ croîtra encore, et le premier membre de l'équation finira par s'annuler : donc, si k est imaginaire, nous savons trouver sur la variété un point où $\mathcal{G}\mathcal{G}' - \mathcal{H}^2$ est plus grand ; donc nous ne sommes pas à l'endroit du maximum.

Pour voir qu'il en est de même pour le minimum, il suffit, après avoir rendu k positif, de le diminuer de manière à ramener $\mathcal{G}\mathcal{G}' - \mathcal{H}^2$ à sa valeur initiale ; on constate encore qu'on est à l'intérieur de la variété, et l'on achève comme pour le maximum.

Supposons donc k réel; l'équation (6) devient

$$(7)\qquad 1+k^4+2k^2\frac{tu\,t_0u_0+(t+u)(t_0+u_0)+2}{(t-u)(t_0-u_0)}-4\mu\frac{k^2(t-t_0)(u-u_0)}{(t-u)(t_0-u_0)}=0.$$

Je dis maintenant que, pour le maximum et le minimum, t et u sont purement imaginaires. En effet, sans toucher à leurs parties imaginaires, supprimons leurs parties réelles, s'il y en a : $(t-u)(t_0-u_0)$ diminue ou reste constant; diminuons k^2 de manière que $\mathcal{G}\mathcal{G}'-\mathcal{H}^2$ ne change pas; on constate que le premier membre de l'équation (7) devient négatif (et non nul, car tut_0u_0 a *diminué*); nous sommes donc entrés à l'intérieur de la variété; on voit alors comme plus haut qu'il y a sur la variété des points pour lesquels $\mathcal{G}\mathcal{G}'-\mathcal{H}^2$ est soit plus grand, soit plus petit qu'au point de départ.

Supposons donc t et u purement imaginaires, et posons

$$t=i\alpha,\qquad u=-i\beta,$$

α et β étant réels. L'équation (7) devient

$$(8)\qquad 1+k^4+2k^2\frac{2\alpha^2\beta^2+(\alpha-\beta)^2+2}{(\alpha+\beta)^2}-16\mu k^2\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2}=0.$$

Je dis maintenant que α et β doivent être égaux. En effet, l'équation (8) elle-même montre qu'ils sont de même signe : nous pouvons les rendre égaux, s'ils ne l'étaient déjà, sans changer $\alpha\beta$; cela diminue $\alpha^2+\beta^2$; diminuons k^2, pour ne pas changer $\mathcal{G}\mathcal{G}'-\mathcal{H}^2$: on voit alors qu'on pénètre à l'intérieur de la variété : il n'y a donc ni maximum ni minimum pour $\alpha\neq\beta$; donc $\alpha=\beta$.

Les résultats obtenus jusqu'ici montrent que g et g' doivent être purement imaginaires, et que h doit être nul. L'équation de la variété devient alors

$$1+\mathcal{G}^2+\mathcal{G}'^2+\mathcal{G}^2\mathcal{G}'^2-4\mu\mathcal{G}\mathcal{G}'=0.$$

Ceci peut s'écrire des deux façons suivantes :

$$(\mathcal{G}+\mathcal{G}')^2=-\mathcal{G}^2\mathcal{G}'^2+2(2\mu+1)\mathcal{G}\mathcal{G}'-1,$$
$$(\mathcal{G}-\mathcal{G}')^2=-\mathcal{G}^2\mathcal{G}'^2+2(2\mu-1)\mathcal{G}\mathcal{G}'-1.$$

Si l'on se donne $\mathcal{G}\mathcal{G}'$, on a ainsi $\mathcal{G}+\mathcal{G}'$ et $\mathcal{G}-\mathcal{G}'$, donc $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}'$; pour que le problème soit possible, il est nécessaire et suffisant que la valeur de $(\mathcal{G}-\mathcal{G}')^2$ soit positive; donc, la plus grande et la plus petite valeur de $\mathcal{G}\mathcal{G}'$ sont les deux racines de l'équation

$$-\mathcal{G}^2\mathcal{G}'^2+2(2\mu-1)\mathcal{G}\mathcal{G}'-1=0;$$

elles rendent $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}'$ égaux; c'est ce que nous voulions démontrer.

2. Il résulte de là que, pour que la variété (3) ait au moins un point de sa surface ou de son intérieur sur la variété

$$\mathcal{G}\mathcal{G}'-\mathcal{H}^2=k^2,$$

il est nécessaire et suffisant qu'on ait

$$\mu \geqq \frac{(1+k^2)^2}{4k^2}. \tag{9}$$

Considérons maintenant la variété

$$\begin{aligned} &|x_1\xi_5+x_2\xi_4+2x_3\xi_3+x_4\xi_2+x_5\xi_1|^2 \\ +&|x_1\xi_{50}+x_2\xi_{40}+2x_3\xi_{30}+x_4\xi_{20}+x_5\xi_{10}|^2 \\ -&\frac{\mu+1}{4}(x_1x_{50}+x_{10}x_5+x_2x_{40}+x_{20}x_4+2x_3x_{30}) \\ &\times(\xi_1\xi_{50}+\xi_{10}\xi_5+\xi_2\xi_{40}+\xi_{20}\xi_4+2\xi_3\xi_{30})=0, \end{aligned} \tag{10}$$

et supposons que pour le centre $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5)$ on ait

$$\xi_1\xi_{50}+\xi_{10}\xi_5+\xi_2\xi_{40}+\xi_{20}\xi_4+2\xi_3\xi_{30}=-4\xi_1\xi_{10}.$$

Comment doit être choisi μ pour que cette variété ait à son intérieur ou sur son contour un point où

$$\mathcal{G}\mathcal{G}'-\mathcal{H}^2=k^2\,?$$

Remarquons que la transformation (T) correspondant au tableau

$$\left\{\begin{matrix} d & c & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 0 \\ d\alpha+b\gamma & c\alpha+a\gamma & a & -b \\ d\gamma+b\beta & c\gamma+a\beta & -c & d \end{matrix}\right\} \quad (ad-bc=1) \tag{11}$$

permet de transformer le point $g=g'=i$, $h=0$ en un point quelconque de $\mathcal{G}\mathcal{G}' - \mathcal{H}^2 = 1$; en effet, le transformé de ce point est

$$\begin{aligned} G &= i(a^2 + b^2) + \alpha, \\ H &= -i(ac + bd) + \gamma, \\ G' &= i(c^2 + d^2) + \beta. \end{aligned}$$

De plus, cette transformation conserve $\mathcal{G}\mathcal{G}' - \mathcal{H}^2$. Donc, la variété (10) pouvant être changée par la transformation (11) dans la variété (3), elle atteindra la variété $\mathcal{G}\mathcal{G}' - \mathcal{H}^2 = k^2$ pour les mêmes valeurs de μ, données par la relation (9).

Supposons maintenant que le centre de la variété (10) soit sur la variété

$$\mathcal{G}\mathcal{G}' - \mathcal{H}^2 = \alpha^2.$$

Par la transformation

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\alpha} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

on ramène le centre sur $\mathcal{G}\mathcal{G}' - \mathcal{H}^2 = 1$; d'ailleurs, pour tous les points, $\mathcal{G}\mathcal{G}' - \mathcal{H}^2$ est divisé par α^2. Donc, pour que la variété (10), de centre sur $\mathcal{G}\mathcal{G}' - \mathcal{H}^2 = \alpha^2$, atteigne la variété $\mathcal{G}\mathcal{G}' - \mathcal{H}^2 = k^2$, il est nécessaire et suffisant qu'on ait

$$\mu \geqq \frac{\left(1 + \frac{k^2}{\alpha^2}\right)^2}{4\frac{k^2}{\alpha^2}} = \frac{(\alpha^2 + k^2)^2}{4k^2\alpha^2}. \tag{12}$$

3. Cherchons les transformations les plus générales qui changent identiquement l'expression $\mathcal{G}\mathcal{G}' - \mathcal{H}^2$ en elle-même. Il est nécessaire et suffisant qu'on ait, en désignant toujours les coefficients par la même notation,

$$(ab)_{12} = \pm 1, \qquad (ab)_{13} = (ab)_{14} = (ab)_{23} = (ab)_{24} = (ab)_{34} = 0.$$

Par suite

$$a_3 = a_4 = b_3 = b_4 = 0.$$

Supposons d'abord qu'on ait

$$(ab)_{12} = 1;$$

alors la transformation la plus générale est la transformation (11), c'est-à-dire

$$(13)\qquad \begin{Bmatrix} d & c & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & -b \\ 0 & 0 & -c & d \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \alpha & \gamma & 1 & 0 \\ \gamma & \beta & 0 & 1 \end{Bmatrix}.$$

Supposons maintenant qu'on ait

$$(ab)_{12} = -1;$$

on posera alors

$$a_1 = d, \qquad a_2 = c, \qquad b_1 = -b, \qquad b_2 = -a,$$

avec la condition

$$ad - bc = 1;$$

on trouvera alors comme transformation la plus générale jouissant de la propriété demandée

$$(14)\qquad \begin{Bmatrix} d & c & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & -b \\ 0 & 0 & -c & d \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \alpha & \gamma & 1 & 0 \\ \gamma & \beta & 0 & 1 \end{Bmatrix}.$$

En résumé, la transformation la plus générale jouissant de la propriété de conserver $\mathcal{G}\mathcal{G}' - \mathcal{H}^2$ s'obtient en prenant la transformation

$$(15)\qquad \begin{Bmatrix} d & c & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & -b \\ 0 & 0 & -c & d \end{Bmatrix} \qquad (ad - bc = 1),$$

en la faisant ou non suivre de

$$(16)\qquad \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{Bmatrix}$$

et enfin de

$$(17)\qquad \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \alpha & \gamma & 1 & 0 \\ \gamma & \beta & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Ces transformations donnent respectivement pour G, H, G′ les valeurs suivantes :

$$(15')\qquad \begin{cases} G = a^2 g - 2abh + b^2 g', \\ H = -acg + (ad+bc)h - bdg', \\ G' = c^2 g - 2cdh + d^2 g'; \end{cases}$$

$$(16')\qquad \begin{cases} G = g, \\ H = -h, \\ G' = g'; \end{cases}$$

$$(17')\qquad \begin{cases} G = g + \alpha, \\ H = h + \gamma, \\ G' = g' + \beta. \end{cases}$$

Pour que le produit appartienne au groupe arithmétique, il est nécessaire et suffisant que $a, b, c, d, \alpha, \beta, \gamma$ soient entiers.

4. Quelle est la valeur de $\mathcal{G}\mathcal{G}' - \mathcal{H}^2$ pour le transformé du point $g = g' = i$, $h = 0$ par une substitution (T)? On trouve que c'est

$$(18)\qquad \mathcal{G}\mathcal{G}' - \mathcal{H}^2 = \frac{1}{[(ab)_{12} - (ab)_{34}]^2 + [(ab)_{14} - (ab)_{23}]^2}.$$

Posons

$$(19)\qquad (ab)_{12} = \alpha_1, \quad (ab)_{23} = \alpha_2, \quad (ab)_{13} = \alpha_3, \quad (ab)_{14} = \alpha_4, \quad (ab)_{34} = \alpha_5;$$

la valeur précédente devient

$$(20)\qquad \mathcal{G}\mathcal{G}' - \mathcal{H}^2 = \frac{1}{(\alpha_1 - \alpha_5)^2 + (\alpha_2 - \alpha_4)^2} = \frac{1}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + 2\alpha_3^2 + \alpha_4^2 + \alpha_5^2}.$$

Si la transformation (T) appartient au groupe arithmétique, la valeur trouvée est l'inverse d'un nombre entier positif; *elle a donc un maxi-*

mum, qui est *un;* la plus grande valeur au-dessous de celle-ci est $\frac{1}{2}$, et ainsi de suite.

Pour que $\mathcal{G}\mathcal{G}' - \mathcal{H}^2$ soit égal à *un*, il est nécessaire et suffisant que trois des nombres α_1, α_2, α_4, α_5 soient nuls, le dernier étant égal à ± 1; α_3 doit aussi être nul. On trouve comme substitution correspondante l'une des suivantes :

$$\begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix},$$

$$\begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix},$$

suivie de la transformation la plus générale qui conserve $\mathcal{G}\mathcal{G}' - \mathcal{H}^2$. On remarque tout de suite que le point $g = g' = i$, $h = 0$ est changé ainsi en un point à coordonnées entières complexes, c'est-à-dire en un point qui n'en est pas aussi voisin qu'on veut; d'autre part, les transformations qui l'amènent en dehors de $\mathcal{G}\mathcal{G}' - \mathcal{H}^2 = 1$ ne le changent pas non plus en un point aussi voisin qu'on veut; donc (Chap. III, § III), *le groupe arithmétique est discontinu dans le domaine* (I).

Cherchons maintenant la transformation la plus générale pour laquelle le transformé du point $g = g' = i$, $h = 0$ est sur la variété

$$\mathcal{G}\mathcal{G}' - \mathcal{H}^2 = \frac{1}{n},$$

n étant entier. On doit avoir

$$(\alpha_1 - \alpha_5)^2 + (\alpha_2 - \alpha_4)^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + 2\alpha_3^2 + \alpha_4^2 + \alpha_5^2 = n,$$

ce qui donne un nombre *limité* de systèmes de valeurs de α_1, α_2, α_3, α_4, α_5 (d'ailleurs n doit être une somme de deux carrés); on trouve alors un nombre *limité* de substitutions, qu'il faut faire suivre de la transformation la plus générale conservant $\mathcal{G}\mathcal{G}' - \mathcal{H}^2$.

5. Nous allons voir maintenant que, *pour les transformés par le groupe arithmétique d'un point* P *quelconque du domaine* (I), $\mathcal{G}\mathcal{G}' - \mathcal{H}^2$ *ne peut pas dépasser un certain maximum qu'il atteint effectivement.*

En effet, considérons la variété V, de centre $g = g' = i$, $h = 0$, qui passe par P. Les transformés de P se trouvent sur les variétés transformées de celle-ci. Mais, pour la variété V, $\mathcal{G}\mathcal{G}' - \mathcal{H}^2$ a un maximum que nous avons appris à calculer; pour les variétés transformées, $\mathcal{G}\mathcal{G}' - \mathcal{H}^2$ reste inférieur ou égal à ce maximum; donc, nous voyons déjà que, pour les transformés de P, $\mathcal{G}\mathcal{G}' - \mathcal{H}^2$ est borné.

Supposons maintenant que, au point P, on ait

$$\mathcal{G}\mathcal{G}' - \mathcal{H}^2 = k^2.$$

Cherchons toutes les valeurs supérieures à k^2 que peut prendre $\mathcal{G}\mathcal{G}' - \mathcal{H}^2$ pour les transformés de P. Soient 1 et μ les valeurs des paramètres λ et μ auxquelles correspond la variété V. Pour qu'une transformation amenant $g = g' = i$, $h = 0$ sur la variété

$$\mathcal{G}\mathcal{G}' - \mathcal{H}^2 = \frac{1}{n}\cdot$$

permette à la variété transformée de V d'atteindre et de dépasser la variété

$$\mathcal{G}\mathcal{G}' - \mathcal{H}^2 = k^2,$$

il est nécessaire et suffisant que l'on ait

$$(1 + k^2 n)^2 < 4 k^2 n\mu.$$

Cela fait un nombre *limité* de valeurs de n, par suite un nombre *limité* de transformations à faire suivre de la transformation la plus générale conservant identiquement $\mathcal{G}\mathcal{G}' - \mathcal{H}^2$; donc les transformés de P ne donneront par ces transformations qu'un nombre *limité* de valeurs à $\mathcal{G}\mathcal{G}' - \mathcal{H}^2$: celles qui seront supérieures à k^2 seront elles-mêmes en nombre limité. Donc, il y en a une qui est plus grande que toutes les autres. Notre assertion est ainsi démontrée.

Nous voyons de plus : 1° que la suite des valeurs de $\mathcal{G}\mathcal{G}' - \mathcal{H}^2$ pour les transformés de P est discontinue; 2° qu'en général, si $\mathcal{G}\mathcal{G}' - \mathcal{H}^2$ a pour le point P une valeur au moins aussi grande que pour ses transformés, cette valeur n'est conservée que par les substitutions conservant identiquement $\mathcal{G}\mathcal{G}' - \mathcal{H}^2$; il n'y a exception que pour les points P d'une infinité dénombrable de variétés.

6. Supposons que, pour le point P, $\mathcal{G}\mathcal{G}' - \mathcal{H}^2$ soit au moins aussi grand que pour tous ses transformés. Cela veut dire que, quels que soient les entiers α_1, α_2, α_3, α_4, α_5 premiers entre eux, et satisfaisant à la relation

$$\alpha_1\alpha_5 + \alpha_2\alpha_4 + \alpha_3^2 = 0, \tag{21}$$

on aura, en appelant g, h, g' les coordonnées de P,

$$|\alpha_1 - \alpha_2 g + 2\alpha_3 h + \alpha_4 g' + \alpha_5(gg' - h^2)| \geqq 1; \tag{22}$$

et, sauf pour des points P exceptionnels, l'égalité n'a lieu que pour

$$\alpha_1 = \pm 1, \qquad \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = 0.$$

Ainsi, tout point a un transformé P satisfaisant à ces inégalités.

Nous pouvons imposer à ce transformé P les conditions suivantes, qui, dans la plupart des cas, le déterminent d'une manière unique :

$$0 \leqq 2\mathcal{H} \leqq \mathcal{G} \leqq \mathcal{G}', \qquad |\mathcal{G}_0| \leqq \frac{1}{2}, \qquad |\mathcal{G}'_0| \leqq \frac{1}{2}, \qquad |\mathcal{H}_0| \leqq \frac{1}{2}. \tag{23}$$

En effet, on a en général tous les points tels que P en appliquant successivement à l'un d'eux les transformations (15), (16) ou la transformation unité, et (17). Or, les transformations (16) et (17) n'altèrent pas $\mathcal{G}$, ni $|\mathcal{H}|$, ni $\mathcal{G}'$. Pour satisfaire aux inégalités (23), il est donc nécessaire de choisir la transformation (15) de façon à avoir

$$2|\mathcal{H}| \leqq \mathcal{G} \leqq \mathcal{G}',$$

ce qui est possible d'une façon et d'une seule, sauf quand une des égalités a lieu. S'il y a lieu, on fera suivre cette transformation de la transformation (16), de manière que $\mathcal{H}$ ne soit pas négatif; enfin, on choisira la transformation (17) de manière à ramener $\mathcal{G}_0$, $\mathcal{H}_0$, $\mathcal{G}'_0$ dans les limites imposées. On voit que l'opération est possible, et ordinairement d'une seule façon.

Les inégalités (22) *et* (23) *déterminent le polyèdre fondamental du groupe arithmétique.*

7. Les inégalités (22) sont en nombre infini; *mais on peut n'en garder qu'un nombre limité,* les autres étant des conséquences de celles que l'on conserve et des inégalités (23).

En effet, supposons que, pour le point P satisfaisant à toutes ces inégalités, on ait

$$\mathcal{G}\mathcal{G}' - \mathcal{H}^2 = k^2.$$

On tire de là et des inégalités (23)

$$\mathcal{G} \leqq k\sqrt{\frac{4}{3}}, \qquad \mathcal{H} \leqq k\sqrt{\frac{1}{3}},$$
$$\mathcal{G}' \leqq \frac{4k^2}{3\mathcal{G}}.$$

Mais on a, d'après les inégalités (22),

$$|g| \geqq 1, \qquad |g'| \geqq 1;$$

en comparant avec les inégalités (23), on en tire

$$\mathcal{G} \geqq \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \mathcal{G}' \geqq \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Par suite, on aura

$$\mathcal{G}' \leqq \frac{8k^2}{3\sqrt{3}}.$$

De plus

$$k^2 = \mathcal{G}\mathcal{G}' - \mathcal{H}^2 \geqq \frac{3}{4}\mathcal{G}\mathcal{G}' \geqq \frac{9}{16}$$

ou

$$k \geqq \frac{3}{4}.$$

Pour $gg' - h^2$, nous avons

$$|gg' - h^2|^2 = (\mathcal{G}_0\mathcal{G}'_0 - \mathcal{H}_0^2 - \mathcal{G}\mathcal{G}' + \mathcal{H}^2)^2 + (\mathcal{G}\mathcal{G}'_0 + \mathcal{G}_0\mathcal{G}' - 2\mathcal{H}\mathcal{H}_0)^2;$$

cela nous montre que

$$|gg' - h^2|^2 \leqq \left(k^2 + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{2k}{\sqrt{3}} + \frac{4k^2}{3\sqrt{3}}\right)^2$$

ou bien

$$|gg' - h^2|^2 \leqq \frac{43}{27}k^4 + \frac{16}{9}k^3 + \frac{7}{3}k^2 + \frac{1}{4}.$$

Le paramètre μ de la variété V de centre $g = g' = i$, $h = 0$ qui passe par P a pour valeur

$$\mu = \frac{1 + gg_0 + 2hh_0 + g'g'_0 + (gg' - h^2)(g_0g'_0 - h_0^2)}{4k^2};$$

les inégalités écrites plus haut nous montrent que

$$\mu \leqq \frac{\dfrac{107}{27}k^4 + \dfrac{16}{9}k^3 + \dfrac{13}{3}k^2 + \dfrac{9}{4}}{4k^2}.$$

Si nous transformons cette variété V par une transformation qui amène son centre $g = g' = i, h = 0$ sur la variété $\mathcal{G}\mathcal{G}' - \mathcal{H}^2 = \frac{1}{n}$, la variété transformée n'a de point sur $\mathcal{G}\mathcal{G}' - \mathcal{H}^2 = k^2$ que si

$$\frac{(1 + k^2 n)^2}{4k^2 n} \leqq \frac{\dfrac{107}{27}k^4 + \dfrac{16}{9}k^3 + \dfrac{13}{3}k^2 + \dfrac{9}{4}}{4k^2};$$

en multipliant par $4k^2 n$ les deux membres, cette condition devient

$$(24) \qquad (1 + k^2 n)^2 \leqq \left(\frac{107}{27}k^4 + \frac{16}{9}k^3 + \frac{13}{3}k^2 + \frac{9}{4}\right)n.$$

Si, pour une certaine valeur de n, l'égalité contraire a lieu pour $k \geqq \frac{3}{4}$, l'inégalité (22) sera une conséquence des inégalités dont nous venons de nous servir quand $(\alpha_1 - \alpha_3)^2 + (\alpha_2 - \alpha_4)^2$ sera égal à cette valeur de n.

Or, l'inégalité contraire à l'inégalité (24) s'écrit

$$(25) \qquad \left(n^2 - \frac{107}{27}n\right)k^4 - \frac{16}{9}nk^3 - \frac{7}{3}nk^2 + 1 - \frac{9}{4}n > 0.$$

Si nous considérons le premier membre comme un polynome en k, ce polynome admet une racine positive, et une seule, d'après le théorème de Descartes, dès que n est un entier au moins égal à *quatre*. Pour que l'inégalité ait lieu pour $k \geqq \frac{3}{4}$, n étant au moins égal à *quatre*, il est nécessaire et suffisant qu'elle ait lieu pour $k = \frac{3}{4}$, c'est-à-dire qu'on ait

$$81 n^2 - 1425 n + 256 > 0,$$

ou bien

$$n > \frac{1425 + \sqrt{1947681}}{162},$$

ou bien, n devant être entier,

$$n \geqq 18.$$

Par suite, il suffit d'écrire celles des inégalités (22) pour lesquelles on a

$$(26) \qquad (\alpha_1 - \alpha_5)^2 + (\alpha_2 - \alpha_4)^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + 2\alpha_3^2 + \alpha_4^2 + \alpha_5^2 \leqq 17.$$

Toutes les autres inégalités (22) sont des conséquences des inégalités conservées et des inégalités (23).

D'ailleurs, parmi les inégalités conservées, il y en a encore d'inutiles. Ainsi, par exemple, on peut supprimer encore toutes celles de ces inégalités où $\alpha_5 = 0$, à l'exception seulement de

$$|g| \geqq 1, \qquad |g'| \geqq 1$$

et de

$$|\alpha_1 + g - 2h + g'| \geqq 1 \qquad (\alpha_1 = 0, \pm 1, \pm 2).$$

Cela résulte immédiatement des inégalités (23) et des inégalités

$$\mathcal{G} \geqq \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \mathcal{G}' \geqq \frac{\sqrt{3}}{2},$$

que nous avons établies plus haut. Il n'est d'ailleurs pas certain qu'on ne puisse supprimer encore d'autres inégalités.

En résumé, *le polyèdre fondamental est défini par les inégalités*

$$(22) \qquad |\alpha_1 - \alpha_2 g + 2\alpha_3 h + \alpha_4 g' + \alpha_5 (gg' - h^2)| \geqq 1,$$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ *étant des nombres entiers premiers entre eux et tels que*

$$(21) \qquad \alpha_1\alpha_5 + \alpha_2\alpha_4 + \alpha_3^2 = 0,$$

$$(26) \qquad \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + 2\alpha_3^2 + \alpha_4^2 + \alpha_5^2 \leqq 17,$$

jointes aux inégalités

$$(23) \qquad |\mathcal{G}_0| \leqq \frac{1}{2}, \qquad |\mathcal{G}'_0| \leqq \frac{1}{2}, \qquad |\mathcal{H}_0| \leqq \frac{1}{2} \qquad 0 \leqq 2\mathcal{H} \leqq \mathcal{G} \leqq \mathcal{G}'.$$

Un certain nombre des inégalités (22) peuvent être supprimées.

8. Quels sont les points de ce polyèdre qui sont sur la surface $\mathcal{G}\mathcal{G}' - \mathcal{H}^2 = 0$? Il n'y en a pas à distance finie, car il faudrait pour cela que $\mathcal{G}$ soit nul, puisque, dans les domaines (I), (III) et (IV), on a pour les points du polyèdre l'inégalité

$$\mathcal{G}\mathcal{G}' - \mathcal{H}^2 \geqq \frac{3}{4}\mathcal{G}\mathcal{G}' \geqq 0,$$

et que, d'autre part, $\mathcal{G}'$ est supérieur ou égal à $\mathcal{G}$; mais on sait que $\mathcal{G}$ est au moins égal à $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Il faut donc chercher ces points à l'infini; il est par conséquent nécessaire de faire croître $\mathcal{G}'$ indéfiniment. Supposons d'abord que g reste fini; alors h reste aussi fini; dès que $\mathcal{G}'$ est assez grand, $\frac{gg'-h^2}{g'}$ est aussi voisin qu'on veut de g; pour que ce rapport ait une limite, il est nécessaire et suffisant que g en ait une; alors ce rapport tend vers la limite de g, limite nécessairement imaginaire puisque

$$\mathcal{G} \geqq \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ainsi, nous trouvons certains points *imaginaires* de la variété

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0.$$

Si maintenant g et, par suite, $\mathcal{G}$ augmentent indéfiniment, nous pouvons écrire

$$\left|\frac{gg'-h^2}{g'}\right| \geqq \frac{|\mathcal{G}_0\mathcal{G}'_0 - \mathcal{H}_0^2 - \mathcal{G}\mathcal{G}' + \mathcal{H}^2|}{|g'|},$$

ou, pour $\mathcal{G}'$ assez grand,

$$\left|\frac{gg'-h^2}{g'}\right| \geqq \frac{\mathcal{G}\mathcal{G}' - \mathcal{H}^2}{\mathcal{G}'}(1+\varepsilon),$$

ε étant un nombre aussi voisin de zéro qu'on veut; ceci s'écrit encore

$$\left|\frac{gg' - h^2}{g'}\right| \geqq \frac{3}{4}\mathcal{G}(1 + \varepsilon);$$

par suite, ce rapport augmente indéfiniment; on trouve le point réel

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0, \qquad x_5 = 1;$$

c'est le seul point réel du polyèdre.

On voit que les points du polyèdre qui sont sur la surface $\mathcal{G}\mathcal{G}' - \mathcal{H}^2 = 0$ appartiennent tous à la variété

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0,$$

qui a seulement deux dimensions.

III. — Fonctions invariantes.

1. Nous savons former des fonctions invariantes par le groupe arithmétique, et se comportant comme des fonctions rationnelles dans le domaine (I). Ces fonctions n'auront pas de singularités essentielles à l'intérieur du polyèdre fondamental qu'on vient de trouver, qui est tout entier dans le domaine (I); mais elles peuvent en avoir aux points du contour du polyèdre qui appartiennent à la surface

$$\mathcal{G}\mathcal{G}' - \mathcal{H}^2 = 0,$$

savoir : des points imaginaires de la variété

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0,$$

et le point réel

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0, \qquad x_5 = 1.$$

Nous allons voir d'abord que ces points sont bien des singularités essentielles; ensuite nous étudierons la nature de ces singularités.

2. D'abord, tout point réel est une singularité essentielle pour toutes ces fonctions, sauf pour celles qui se réduisent à des constantes. Il nous suffit pour le prouver de faire voir qu'un point réel

quelconque peut être changé, par le groupe arithmétique, en un point aussi voisin qu'on veut de tout point réel donné à l'avance.

Or, prenons par exemple l'origine des coordonnées

$$x_1 = 1, \qquad x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0;$$

son transformé sera, en employant les notations du paragraphe I du présent Chapitre, le point

$$x_1 = \alpha_1, \qquad x_2 = \beta_1, \qquad x_3 = \gamma_1, \qquad x_4 = \delta_1, \qquad x_5 = \varepsilon_1,$$

$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1, \varepsilon_1$ étant des entiers quelconques premiers entre eux et satisfaisant à la relation

$$\alpha_1\varepsilon_1 + \beta_1\delta_1 + \gamma_1^2 = 0;$$

cela donne comme coordonnées non homogènes

$$g = -\frac{\beta_1}{\alpha_1}, \qquad h = \frac{\gamma_1}{\alpha_1}, \qquad g' = \frac{\delta_1}{\alpha_1},$$

en supposant $\alpha_1 \neq 0$. Or, soit n un entier donné; un point réel g, h, g' quelconque étant donné, on peut choisir quatre entiers $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ premiers entre eux et tels que

$$\left| g + \frac{\beta}{\alpha} \right| \leqq \frac{1}{n\alpha},$$
$$\left| h - \frac{\gamma}{\alpha} \right| \leqq \frac{1}{n\alpha},$$
$$\left| g' - \frac{\delta}{\alpha} \right| \leqq \frac{1}{n\alpha},$$
$$0 < \alpha \leqq n^3.$$

On approche ainsi de g, h, g' autant qu'on veut; comme valeur approchée de $gg' - h^2$, on a $-\frac{\beta\delta + \gamma^2}{\alpha^2}$. On réduira la fraction $\frac{\beta\delta + \gamma^2}{\alpha}$ à sa plus simple expression; soit alors λ son dénominateur; on pourra prendre

$$\frac{\alpha_1}{\alpha} = \frac{\beta_1}{\beta} = \frac{\gamma_1}{\gamma} = \frac{\delta_1}{\delta} = \frac{\varepsilon_1}{-\frac{\beta\delta + \gamma^2}{\alpha}} = \lambda;$$

l'origine des coordonnées est ainsi transformée en un point aussi voisin qu'on veut du point g, h, g'; cela suppose que ce point est à distance finie, mais le résultat s'étend immédiatement aux points à l'infini.

Donc, si une fonction invariante par le groupe arithmétique et uniforme dans le domaine (I) n'est pas une constante, tous les points réels en sont des singularités essentielles.

Les autres points réels ont aussi comme transformés des points aussi voisins qu'on veut de n'importe quel point donné à l'avance. Pour le démontrer, nous pouvons remarquer que la substitution

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

qui est la cinquième forme canonique du dixième type, est une substitution du groupe arithmétique; or, par les puissances de cette transformation, n'importe quel point a des transformés qui tendent vers le point

$$x_1 = x_3 = x_4 = x_5 = 0, \qquad x_2 = 1;$$

or, ce point est un des transformés de l'origine des coordonnées; notre proposition en résulte immédiatement.

3. Prenons maintenant un point imaginaire de la variété

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0.$$

Supposons que ce ne soit pas une singularité pour une certaine fonction invariante par le groupe arithmétique. Les points voisins ne sont donc pas non plus des singularités pour cette fonction. Je remarque alors que la substitution

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

du groupe arithmétique, répétée indéfiniment, fait tendre le point g,

h, g' vers le point

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0, \qquad \frac{x_5}{x_4} = g;$$

il résulte alors de l'hypothèse faite que, si g est dans une certaine région du plan de la variable complexe, la fonction considérée ne dépend que de g; donc, quels que soient g, h, g', cette fonction ne dépend que de g. Mais le groupe arithmétique contient aussi la substitution

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix},$$

qui échange g et g'. Donc la fonction considérée ne dépend que de g'. Donc c'est une constante.

Ainsi, pour toute fonction invariante par le groupe arithmétique et uniforme dans le domaine (I) qui n'est pas une constante, tous les points de la variété

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0$$

sont des points singuliers.

4. On peut déduire de là que, pour les mêmes fonctions, *tout point de la surface* $\mathcal{G}\mathcal{G}' - \mathcal{H}^2 = 0$ *est une singularité essentielle*. En effet, la substitution

$$\begin{vmatrix} d & c & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & -b \\ 0 & 0 & -c & d \end{vmatrix},$$

où a, b, c, d sont des entiers tels que $ad - bc = 1$, change le point

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0, \qquad x_4 = \xi_4, \qquad x_5 = \xi_5,$$

dans le point

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = -b^2\xi_4, \qquad x_3 = -bd\xi_4, \qquad x_4 = d^2\xi_4, \qquad x_5 = \xi_5;$$

en choisissant convenablement ξ_4 et ξ_5 et les entiers b et d, qui sont assujettis seulement à être premiers entre eux, on a ainsi un point aussi voisin qu'on veut de n'importe quel point à l'infini du domaine (III); donc, tous ces points à l'infini sont des singularités des fonctions considérées.

Mais, par une transformation quelconque du groupe arithmétique, la variété à l'infini se change en la variété

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + 2\alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 + \alpha_5 x_5 = 0,$$

α_1, α_2, α_3, α_4, α_5 étant des entiers assujettis seulement à être premiers entre eux et à vérifier la relation

$$\alpha_1 \alpha_5 + \alpha_2 \alpha_4 + \alpha_3^2 = 0.$$

Or, cette variété passe aussi près que l'on veut de n'importe quel point du domaine (III). Donc, pour toutes les fonctions considérées, *les points du domaine* (III) *sont des singularités*, nécessairement *essentielles;* c'est ce que nous voulions démontrer.

Ces fonctions sont donc toutes uniformes partout où elles existent.

5. Étudions d'abord la nature de la singularité essentielle que présente la fonction sur la partie imaginaire de la variété $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Ce que nous allons dire peut se présenter d'une façon plus générale : cela s'applique à toutes les fonctions invariantes par des groupes discontinus comprenant une transformation du dixième type, deuxième forme. En transformant convenablement le groupe, et en prenant au besoin l'inverse de la transformation considérée, on peut admettre que cette transformation est de la forme canonique

$$S = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix}.$$

Cette transformation S fait en particulier partie du groupe arithmétique. La transformation S ne change aucune des quantités $e^{2\pi i g}$, h, g'.

Nous pouvons choisir dans le groupe une suite de substitutions

$$\sigma_1, \quad \sigma_2, \quad \sigma_3, \quad \ldots, \quad \sigma_n, \quad \ldots,$$

telle que toute substitution du groupe puisse être mise d'une façon et d'une seule sous la forme $S^p\sigma_n$, p étant un entier quelconque, positif, nul ou négatif.

Considérons une série Θ correspondant au groupe; nous pouvons la regarder comme une série double, le terme général dépendant des entiers n et p.

Faisons d'abord varier p tout seul. Nous désignerons d'une façon générale par $R\tau$ ce que devient la fonction R sur les variables g, h, g' de laquelle on a effectué la substitution τ. Si k est l'exposant du déterminant fonctionnel qui figure dans le terme général de la série Θ, en faisant varier p seul on a manifestement une série de la forme

$$\Sigma_p \mathrm{R}S^p \left[\frac{D(g, h, g')}{D(x, y, z)}\right]^k,$$

R étant une certaine fonction rationnelle. La somme de cette série est donc égale à $\left[\frac{D(g, h, g')}{D(x, y, z)}\right]^k$ multiplié par une fonction rationnelle de $e^{2\pi i g}$, dont les coefficients sont des fonctions de h et de g'. Cette fonction rationnelle tend vers zéro quand $e^{2\pi i g}$ tend vers zéro ou vers l'infini.

Faisons maintenant varier n. En mettant $\left[\frac{D(g, h, g')}{D(x, y, z)}\right]^k$ en facteur, les termes de la série sont des fonctions de $e^{2\pi i g}$, h, g', nulles pour $e^{2\pi i g} = 0$. Quels que soient h et g', pourvu que $\mathcal{G}'$ soit positif, il existe un membre positif λ tel que ces fonctions soient holomorphes en $e^{2\pi i g}$, h et g' pour

$$0 \leqq |e^{2\pi i g}| \leqq \lambda;$$

enfin, la série est convergente pour $|e^{2\pi i g}| = \lambda$. La convergence est même uniforme tant que g' et h restent assez voisins d'un système quelconque de valeurs données et que $|e^{2\pi i g}|$ reste égal à λ; car on peut supposer, sans altérer la valeur du terme général, que $\mathcal{G}_0$ reste compris entre $-\frac{1}{2}$ et $+\frac{1}{2}$; le point g, h, g' est donc dans une région intérieure au domaine (I); donc la convergence est aussi uniforme pour

$$0 \leqq |e^{2\pi i g}| \leqq \lambda.$$

Donc, la somme de la série est une fonction de $e^{2\pi i g}$, de h et de g', holomorphe pour $e^{2\pi i g}=0$, h et g' ayant des valeurs finies quelconques; la fonction est, de plus, nulle pour $e^{2\pi i g}=0$. Pour avoir la fonction Θ, il suffit de multiplier ce résultat par le facteur

$$\left[\frac{D(g, h, g')}{D(x, y, z)}\right]^k.$$

Les fonctions invariantes par le groupe arithmétique qu'on obtient comme quotients de fonctions Θ se comportent donc comme des fonctions rationnelles de $e^{2\pi i g}$, h et g', tant que h et g' restent finis et qu'on est dans le domaine d'existence de ces fonctions.

Appliquons ceci au groupe arithmétique : nous connaissons la nature de la singularité de la fonction aux points imaginaires de la variété $x_1=x_3=x_4=0$. En échangeant g et g', comme c'est permis, on passe à la variété $x_1=x_2=x_3=0$; les fonctions Θ sont égales au produit de $\left[\frac{D(g, h, g')}{D(x, y, z)}\right]^k$ par une fonction de $e^{2\pi i g'}$, h et g, holomorphe pour h et g finis et $e^{2\pi i g'}$ assez petit, et nulle pour $e^{2\pi i g'}=0$.

6. Étudions maintenant la singularité qui se présente au point réel

$$x_1=x_2=x_3=x_4=0, \qquad x_5=1.$$

En divisant la fonction Θ par $\left[\frac{D(g, h, g')}{D(x, y, z)}\right]^k$, le quotient, que nous appellerons $f(g, h, g')$, est invariant par toutes les substitutions de la forme

$$\begin{Bmatrix} d & c & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & -b \\ 0 & 0 & -c & d \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \alpha & \gamma & 1 & 0 \\ \gamma & \beta & 0 & 1 \end{Bmatrix} \qquad (ad-bc=1).$$

Donc $f(g, h, g')$ est une fonction uniforme de $e^{2\pi i g}$, $e^{2\pi i g'}$, $e^{2\pi i h}$. Cette fonction est d'ailleurs holomorphe dans le domaine (I), et nulle pour $e^{2\pi i g}=0$ et pour $e^{2\pi i g'}=0$. Or, la condition $\mathcal{G}\mathcal{G}'-\mathcal{H}^2>0$ peut s'écrire

$$-\sqrt{\mathcal{G}\mathcal{G}'}<\mathcal{H}<+\sqrt{\mathcal{G}\mathcal{G}'}$$

ou

$$e^{-2\pi\sqrt{\mathcal{G}\mathcal{G}'}}<|e^{2\pi i h}|<e^{2\pi\sqrt{\mathcal{G}\mathcal{G}'}}.$$

Donc, γ et γ' étant deux nombres positifs quelconques, la fonction $f(g, h, g')$ est holomorphe en $e^{2\pi i g}$, $e^{2\pi i g'}$ et $e^{2\pi i h}$ pour

$$|e^{2\pi i g}| < e^{-2\pi\gamma},$$
$$|e^{2\pi i g'}| < e^{-2\pi\gamma'},$$
$$e^{-2\pi\sqrt{\gamma\gamma'}} < |e^{2\pi i h}| < e^{2\pi\sqrt{\gamma\gamma'}}.$$

Donc, on peut développer la fonction $f(g, h, g')$ en série de Laurent procédant suivant les puissances positives de $e^{2\pi i g}$ et de $e^{2\pi i g'}$, et suivant les puissances positives et négatives de $e^{2\pi i h}$:

(27) $$f(g, h, g') = \Sigma A_{\alpha,\beta,\gamma} e^{2\pi i(\alpha g+\beta h+\gamma g')}.$$

Cette fonction est nulle pour $e^{2\pi i g} = 0$: donc, α n'est jamais nul ; de même γ n'est jamais nul. On a donc

$$\alpha > 0, \qquad \gamma > 0.$$

Or, $f(g, h, g')$ ne change pas par la transformation

$$G = a^2 g - 2abh + b^2 g'$$
$$H = -acg + (ad+bc)a - bdg'$$
$$G' = c^2 g - 2cdh + d^2 g'.$$

Cette transformation échange donc entre eux les termes de la série (27). Or, cette transformation change $e^{2\pi i(\alpha' g+\beta' h+\gamma' g)}$ en $e^{2\pi i(\alpha g+\beta h+\gamma g)}$ si l'on pose

$$\alpha' = a^2\alpha - ac\beta + c^2\gamma,$$
$$\beta' = -2ab\alpha + (ad+bc)\beta - 2cd\gamma,$$
$$\gamma' = b^2\alpha - bd\beta + d^2\gamma.$$

Or, si $\beta^2 - 4\alpha\gamma$ est positif ou nul, on peut choisir les entiers a et c de manière qu'on ait

$$\alpha' \leqq 0;$$

donc, si

$$\beta^2 - 4\alpha\gamma \geqq 0,$$

on a

$$A_{\alpha,\beta,\gamma} = 0.$$

Pour tous les termes non nuls, on a donc

$$\beta^2 < 4\alpha\gamma \leqq (\alpha+\gamma)^2$$

ou

$$|\beta| < \alpha + \gamma.$$

Or, le terme général de la série peut s'écrire

$$A_{\alpha,\beta,\gamma} e^{2\pi i[\alpha(g-h)+(\alpha+\beta+\gamma)h+\gamma(g'-h)]}.$$

Donc $f(g, h, g')$ *est dans tout le polyèdre fondamental, limites comprises, une fonction holomorphe de*

$$e^{2\pi i(g-h)}, \quad e^{2\pi i h}, \quad e^{2\pi i(g'-h)}.$$

La fonction invariante qu'on obtient comme quotient de deux fonctions Θ se comporte, dans ce polyèdre, comme une fonction rationnelle des mêmes variables.

7. Soient

$$\begin{aligned} X &= F_1(g, h, g'), \\ Y &= F_2(g, h, g'), \\ Z &= F_3(g, h, g') \end{aligned}$$

trois de ces fonctions invariantes. Si l'on considère X, Y, Z comme donnés, ces trois équations n'ont qu'un nombre fini de solutions à l'intérieur du polyèdre fondamental ; ce nombre ne dépend d'ailleurs pas du système considéré de valeurs de X, Y, Z, car si, X, Y, Z variant, un point (g, h, g') sort du polyèdre fondamental, un autre y rentre par la face conjuguée.

Considérons maintenant une quatrième fonction invariante

$$T = F_4(g, h, g');$$

si l'on se donne les valeurs de X, Y, Z, on aura un nombre fini et fixe de valeurs de T correspondantes. Les fonctions symétriques de ces valeurs de T, exprimées au moyen de X, Y, Z, seront uniformes dans tout l'espace, et s'y comporteront comme des fonctions rationnelles; ce seront donc des fonctions rationnelles de X, Y, Z, comme cela résulte des travaux de M. Cousin. Donc les fonctions X, Y, Z, T sont liées par une relation algébrique.

Par suite, toutes les fonctions invariantes par les transformations du groupe arithmétique et qui sont obtenues à l'aide des fonctions Θ

peuvent s'exprimer rationnellement à l'aide de quatre d'entre elles. Peut-être ce nombre de quatre peut-il être réduit à trois; ce qui précède n'indique rien à cet égard.

8. Les quotients de deux fonctions des $\Theta_{\mu,\nu,p,q}(x,y)$ que l'on rencontre dans la théorie des fonctions abéliennes fournissent un exemple de fonctions invariantes pour le groupe arithmétique. En effet ces quotients, quand on y fait $x=y=0$, ne prennent qu'un nombre fini de valeurs quand on effectue sur g, h, g' les substitutions du groupe arithmétique; les fonctions symétriques de ces valeurs sont donc invariantes par les substitutions du groupe arithmétique.

D'autre part, en désignant par $\varphi(x,y)$ la fonction

$$\varphi(x,y) = gx^2 + 2hxy + g'y^2,$$

on a

$$\Theta_{\mu,\nu,p,q}(x,y;g,h,g') = \Sigma_{m,n}(-1)^{mq+np} e^{i\pi\left[(2m+\mu)x+(2n+\nu)y+\frac{1}{4}\varphi(2m+\mu,\,2n+\nu)\right]};$$

on peut donc écrire aussi

$$\begin{aligned}&\Theta_{\mu,\nu,p,q}(0,0;g,h,g')\\&\quad = \Sigma_{m,n}(-1)^{mq+np} e^{\frac{i\pi}{4}[(2m+\mu)^2(g-h)+(2m+2n+\mu+\nu)^2h+(2n+\nu)^2(g'-h)]}.\end{aligned}$$

On voit donc que les quotients de deux de ces fonctions, supposées non identiquement nulles, sont aussi, dans le polyèdre fondamental, des fonctions sans singularités essentielles de $e^{\frac{i\pi}{4}(g-h)}$, de $e^{\frac{i\pi}{4}h}$ et de $e^{\frac{i\pi}{4}(g'-h)}$; on constate aussi qu'il en est de même pour les différentes valeurs que prennent ces quotients par les diverses substitutions du groupe arithmétique et par suite de leurs fonctions symétriques; ces fonctions symétriques seront alors, nécessairement, dans le même polyèdre, des fonctions sans singularités essentielles de $e^{2i\pi(g-h)}$ de $e^{2i\pi h}$ et de $e^{2i\pi(g'-h)}$. Donc, une quelconque de ces fonctions symétriques est une fonction algébrique de trois de nos fonctions invariantes.

CHAPITRE VII.

GROUPES ANALOGUES AU GROUPE ARITHMÉTIQUE.

1. Considérons une forme quadratique à cinq variables, du type

$$(1) \qquad f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 - u_4^2 - u_5^2,$$

u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 étant cinq formes linéaires indépendantes à coefficients réels en x_1, x_2, x_3, x_4, x_5. Nous supposerons que la forme f soit à coefficients entiers : il existe alors des substitutions à coefficients entiers, de déterminant *un*, qui changent cette forme en elle-même.

Par une certaine substitution réelle, changeant x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 en z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, on peut mettre f sous la forme $z_1 z_5 + z_2 z_4 + z_3^2$. A toute transformation en elle-même à coefficients entiers de la forme f, ayant comme déterminant *un*, correspond une transformation en elle-même, de déterminant *un*, la forme $z_1 z_5 + z_2 z_4 + z_3^2$; si, parmi ces transformations, nous ne retenons que les transformations (T), il est évident que nous obtenons un *groupe* de transformations (T). Nous allons voir que ce groupe est discontinu dans les domaines (I) et (I').

2. Soient X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 ce que deviennent x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 par une substitution de déterminant *un* changeant la forme f en elle-même; soient U_1, U_2, U_3, U_4, U_5 ce que deviennent u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 quand on y remplace x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 par X_1, X_2, X_3, X_4, X_5. Nous avons alors

$$(2) \qquad U_i = L_i u_1 + M_i u_2 + N_i u_3 + P_i u_4 + Q_i u_5 \qquad (i = 1, 2, 3, 4, 5);$$

L_i, M_i, N_i, P_i, Q_i sont des coefficients qui satisfont à certaines relations, parmi lesquelles celles-ci :

$$(3) \qquad \left\{ \begin{array}{l} L_4^2 + M_4^2 + N_4^2 - P_4^2 - Q_4^2 = -1, \\ L_5^2 + M_5^2 + N_5^2 - P_5^2 - Q_5^2 = -1, \\ L_4 L_5 + M_4 M_5 + N_4 N_5 - P_4 P_5 - Q_4 Q_5 = 0. \end{array} \right.$$

En même temps que f, je considère la forme définie

$$(4)\qquad \varphi(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + U_4^2 + U_5^2 = f + 2(U_4^2 + U_5^2),$$

qui dépend des dix paramètres L_4, M_4, N_4, P_4, Q_4, L_5, M_5, N_5, P_5, Q_5, liés par les trois relations (3).

Nous dirons que la forme φ est réduite si elle est de la forme

$$(5)\qquad \begin{aligned} &\mu_1(x_1 + \varepsilon_{12}x_2 + \varepsilon_{13}x_3 + \varepsilon_{14}x_4 + \varepsilon_{15}x_5)^2 + \mu_2(x_2 + \varepsilon_{23}x_3 + \varepsilon_{24}x_4 + \varepsilon_{25}x_5)^2 \\ &+ \mu_3(x_3 + \varepsilon_{34}x_4 + \varepsilon_{35}x_5)^2 + \mu_4(x_4 + \varepsilon_{45}x_5)^2 + \mu_5 x_5^2, \end{aligned}$$

les coefficients satisfaisant aux inégalités

$$(6)\qquad \mu_2 \geqq \frac{3}{4}\mu_1, \qquad \mu_3 \geqq \frac{3}{4}\mu_2, \qquad \mu_4 \geqq \frac{3}{4}\mu_3, \qquad \mu_5 \geqq \frac{3}{4}\mu_4, \qquad -\frac{1}{2} < \varepsilon_{i,j} \leqq \frac{1}{2}$$

(quels que soient i et j) (¹).

Nous supposerons de plus que f est à coefficients entiers, ainsi que la forme

$$(7)\qquad u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 + u_5^2,$$

et que cette dernière est réduite. Si d'ailleurs la forme (7) n'avait pas ses coefficients entiers, on pourrait en tout cas s'arranger pour qu'ils soient rationnels : en multipliant la forme f par un entier, on peut donc les rendre entiers. Si maintenant la forme (7) n'est pas réduite, on peut la réduire arithmétiquement : la substitution de réduction changera f en une autre forme par laquelle nous remplacerons la forme f; cela ne change pas le groupe de transformations (T) que nous considérerons.

Si L_4, M_4, N_4, P_4, Q_4, L_5, M_5, N_5, P_5, Q_5 correspondent à une transformation à coefficients entiers de la forme f en elle-même, la forme φ correspondante sera à coefficients entiers.

Posons

$$\begin{aligned} L_4 + iL_5 &= \lambda, & P_4 + iP_5 &= -\pi, \\ M_4 + iM_5 &= \mu, & Q_4 + iQ_5 &= -\varkappa; \\ N_4 + iN_5 &= \nu, \end{aligned}$$

(¹) Définition due à MM. Korkine et Zolotareff, *Sur les formes quadratiques* (*Mathematische Annalen*, t. VI, 1873, p. 366).

les paramètres λ, μ, ν, π, $\varkappa$ sont assujettis aux conditions

$$(8) \qquad \begin{cases} \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 - \pi^2 - \varkappa^2 = 0, \\ \lambda\lambda_0 + \mu\mu_0 + \nu\nu_0 - \pi\pi_0 - \varkappa\varkappa_0 = -2, \end{cases}$$

en désignant par λ_0, μ_0, ν_0, π_0, $\varkappa_0$ les conjugués de λ, μ, ν, π, $\varkappa$. La forme φ peut maintenant s'écrire

$$\varphi = -\frac{1}{2}(\lambda\lambda_0 + \mu\mu_0 + \nu\nu_0 - \pi\pi_0 - \varkappa\varkappa_0)f + 2 \operatorname{norme}(\lambda u_1 + \mu u_2 + \nu u_3 - \pi u_4 - \varkappa u_5).$$

Si la forme f éprouve une transformation en elle-même, on constate que les nombres complexes λ, μ, ν, π, $\varkappa$ éprouvent la transformation *inverse* de celle que subissent u_1, u_2, u_3, u_4, u_5; cette transformation conserve la forme

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 - \pi^2 - \varkappa^2.$$

La forme φ est réduite pour

$$\lambda = \mu = \nu = 0, \qquad \pi = -1, \qquad \varkappa = -i.$$

Or le nombre des formes φ réduites à coefficients entiers est fini, puisque ces formes ont toutes le même discriminant; on peut même en dire autant des formes φ qui peuvent se mettre sous la forme (5) où les coefficients satisfont aux conditions

$$(9) \quad \mu_2 > \frac{1}{2}\mu_1, \qquad \mu_3 > \frac{1}{2}\mu_2, \qquad \mu_4 > \frac{1}{2}\mu_3, \qquad \mu_5 > \frac{1}{2}\mu_4, \qquad -1 < \varepsilon_{i,j} < 1,$$

qui ne renferment plus de signes d'égalité.

Donc, il n'y a qu'un nombre *fini* de transformations en elle-même de la forme f qui changent φ en une forme satisfaisant aux conditions (9); le nombre des transformations en elle-même de la forme f, pour lesquelles la forme φ qui correspond à $\lambda = \mu = \nu = 0$, $\pi = -1$, $\varkappa = -i$ est aussi changée en elle-même, est en effet fini.

Mais les conditions (9), étant remplies pour $\lambda = \mu = \nu = 0$, $\pi = -1$, $\varkappa = -i$, le sont encore pour tous les systèmes suffisamment voisins de valeurs de ces paramètres. Donc, les systèmes de valeurs qu'on déduit de $\lambda = \mu = \nu = 0$, $\pi = -1$, $\varkappa = -i$ par une transformation en elle-même de la forme f ne sont pas aussi voisins qu'on veut de ce système initial de valeurs, à moins d'être confondus avec lui, ce qui ne peut se produire qn'un nombre fini de fois.

Or, si nous posons

$$\lambda - \pi = z_1, \qquad \mu + \varkappa = z_2, \qquad \nu = z_3,$$
$$\lambda + \pi = z_5, \qquad \mu - \varkappa = z_4,$$

on a

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 - \pi^2 - \varkappa^2 = z_1 z_5 + z_2 z_4 + z_3^2,$$

de sorte que le groupe des transformations subies par z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 est précisément celui que nous avions en vue. D'autre part, pour $\lambda = \mu = \nu = 0$, $\pi = -1$, $\varkappa = -i$, on a

$$z_1 = 1, \qquad z_2 = -i, \qquad z_3 = 0, \qquad z_4 = i, \qquad z_5 = -1,$$

c'est-à-dire qu'on est au point $g = g' = i$, $h = 0$.

Donc, d'après ce qui précède, et d'après ce que nous avions déjà vu (Chap. III, § III), le groupe considéré de transformations (T) est discontinu dans les domaines (I) et (I'), comme nous voulions le démontrer.

3. Pour toute transformation d'un de ces groupes, l'équation (2) en s (Chap. II) est à coefficients entiers; il en est par suite de même du quotient de son premier membre par $s - 1$. Il en résulte que les racines de cette équation ne sont pas quelconques.

Cherchons quelles peuvent être ces racines pour les transformations (T) de ces groupes qui ont un point double au moins dans le domaine (I). Nous savons déjà que la substitution (S) correspondante peut se transformer algébriquement en la substitution

$$(10) \qquad \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi & 0 \\ 0 & \cos\psi & 0 & -\sin\psi \\ \sin\varphi & 0 & \cos\varphi & 0 \\ 0 & \sin\psi & 0 & \cos\psi \end{pmatrix},$$

les angles φ et ψ étant quelconques. Les racines de l'équation en s considérée sont alors

$$(11) \qquad e^{\pm i(\varphi+\psi)}, \quad e^{\pm i(\varphi-\psi)}.$$

Or cette équation est de la forme

$$s^4 + as^3 + bs^2 + as + 1 = 0, \tag{12}$$

a et b étant des entiers. Pour que ces racines soient de la forme (11), il est nécessaire et suffisant que l'on ait

$$-4 \leqq a \leqq 4,$$
$$2|a| - 2 \leqq b \leqq \frac{a^2+8}{4}.$$

On trouve ainsi un nombre limité de systèmes de valeurs pour les entiers a et b. En remplaçant au besoin la substitution correspondante par son inverse, et en observant qu'on peut échanger les angles φ et ψ, on trouve ainsi les systèmes suivants de valeurs de φ et de ψ :

1°	$a = -4,$	$b = 6$	$: \varphi = 0,$	$\psi = 0;$
2°	$a = -3,$	$b = 4$	$: \varphi = \frac{\pi}{6},$	$\psi = \pm\frac{\pi}{6};$
3°	$a = -2,$	$b = 3$	$: \varphi = \frac{\pi}{3},$	$\psi = 0;$
4°	$a = -2,$	$b = 2$	$: \varphi = \frac{\pi}{4},$	$\psi = \pm\frac{\pi}{4};$
5°	$a = -1,$	$b = 2$	$: \varphi = \frac{5\pi}{12},$	$\psi = \pm\frac{\pi}{12};$
6°	$a = -1,$	$b = 1$	$: \varphi = \frac{2\pi}{5},$	$\psi = \pm\frac{\pi}{5};$
7°	$a = -1,$	$b = 0$	$: \varphi = \frac{\pi}{3},$	$\psi = \pm\frac{\pi}{3};$
8°	$a = 0,$	$b = 2$	$: \varphi = \frac{\pi}{2},$	$\psi = 0;$
9°	$a = 0,$	$b = 1$	$: \varphi = \frac{\pi}{2},$	$\psi = \pm\frac{\pi}{6};$
10°	$a = 0,$	$b = 0$	$: \varphi = \frac{\pi}{2},$	$\psi = \pm\frac{\pi}{4};$
11°	$a = 0,$	$b = -1$	$: \varphi = \frac{\pi}{2},$	$\psi = \pm\frac{\pi}{3};$
12°	$a = 0,$	$b = -2$	$: \varphi = \frac{\pi}{2},$	$\psi = \pm\frac{\pi}{2};$
13°	$a = 1,$	$b = 2$	$: \varphi = \frac{7\pi}{12},$	$\psi = \pm\frac{\pi}{12};$

14°	$a=1$,	$b=1$	$:\varphi=\frac{3\pi}{5}$,	$\psi=\pm\frac{\pi}{5}$;
15°	$a=1$,	$b=0$	$:\varphi=\frac{2\pi}{3}$,	$\psi=\pm\frac{\pi}{3}$;
16°	$a=2$,	$b=3$	$:\varphi=\frac{2\pi}{3}$,	$\psi=0$;
17°	$a=2$,	$b=2$	$:\varphi=\frac{3\pi}{4}$,	$\psi=\pm\frac{\pi}{4}$;
18°	$a=3$,	$b=4$	$:\varphi=\frac{5\pi}{6}$,	$\psi=\pm\frac{\pi}{6}$;
19°	$a=4$,	$b=6$	$:\varphi=\pi$,	$\psi=0$.

Le même calcul s'applique aussi aux transformations de ces groupes qui seraient du sixième type, troisième forme, ou du huitième type, deuxième forme. On trouve ainsi que l'argument des racines imaginaires de l'équation en s (1) (Chap. II) sera, pour les premières, au signe près, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{4}$ ou $\frac{\pi}{6}$, et pour les deuxièmes $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$ ou $\frac{\pi}{3}$.

4. Nous allons montrer maintenant que les transformés par un de ces groupes d'un point du domaine réel peuvent être aussi voisins qu'on veut d'un point réel quelconque.

Soient ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4, ξ_5 des nombres réels tels que

$$f(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5) = 0. \tag{13}$$

Il nous suffit évidemment de prouver que, par une transformation en elle-même de la forme f, ayant le déterminant *un*, et correspondant à une transformation (T), les transformés d'un système quelconque de nombres réels x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 tels que

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 0 \tag{14}$$

ont des rapports mutuels aussi voisins qu'on veut de ceux de ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4, ξ_5.

Nous parlerons encore de points ayant pour coordonnées x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, en entendant par là un système de cinq nombres satisfaisant à l'équation (14).

Il existe des points dont les coordonnées font partie d'un même corps quadratique et qui sont aussi voisins que l'on veut de

$$(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5).$$

Il suffit pour le voir de remarquer que l'on peut trouver quatre entiers naturels x_2, x_3, x_4, x_5 dont les rapports mutuels soient aussi voisins que l'on veut de ceux de ξ_2, ξ_3, ξ_4, ξ_5; alors l'équation en x_1

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 0$$

aura deux racines réelles : l'une d'elles complétera avec x_2, x_3, x_4, x_5 un système de cinq nombres, faisant partie d'un même corps quadratique, et dont les rapports mutuels sont aussi voisins qu'on veut de ceux de ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4, ξ_5.

Nous pouvons donc nous borner à démontrer la proposition dans le cas où ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 et ξ_5 font partie d'un même corps quadratique.

Nous désignerons par ξ'_1, ξ'_2, ξ'_3, ξ'_4, ξ'_5 les conjugués de ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4, ξ_5 dans ce corps quadratique. On aura aussi

$$f(\xi'_1, \xi'_2, \xi'_3, \xi'_4, \xi'_5) = 0.$$

Nous pouvons trouver quinze entiers naturels $a_i, b_i, c_i (i = 1, 2, 3, 4, 5)$, tels que

$$\sum_{i=1}^{5} a_i\xi_i = \sum_{i=1}^{5} b_i\xi_i = \sum_{i=1}^{5} c_i\xi_i = 0,$$

et tels que les dix déterminants :

$$\begin{vmatrix} a_i & a_j & a_k \\ b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{vmatrix} \qquad (i, j, k = 1, 2, 3, 4, 5)$$

soient premiers entre eux.

On peut alors trouver dix autres entiers d_i, e_i tels que le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{vmatrix}$$

soit égal à *un*. Posons alors

$$\Sigma_i a_i x_i = y_1,$$
$$\Sigma_i b_i x_i = y_2,$$
$$\Sigma_i c_i x_i = y_3,$$
$$\Sigma_i d_i x_i = y_4.$$
$$\Sigma_i e_i x_i = y_5;$$

on aura

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \mathrm{F}(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5),$$

F étant comme f une forme quadratique à coefficients entiers. La forme $\mathrm{F}(0, 0, 0, y_4, y_5)$ est d'ailleurs nulle pour

$$y_4 = \Sigma d_i \xi_i, \qquad y_5 = \Sigma e_i \xi_i,$$

ainsi que pour

$$y_4 = \Sigma d_i \xi'_i, \qquad y_5 = \Sigma e_i \xi'_i;$$

c'est donc une différence de deux carrés.

Nous voyons par là qu'il suffit de se borner au cas où

$$\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0,$$

les nombres ξ_4 et ξ_5 faisant partie d'un même corps quadratique, et la forme quadratique $f(0, 0, 0, x_4, x_5)$ étant une différence de deux carrés.

Or, dans ce cas, la forme admet une infinité de transformations propres en elle-même, qui sont toutes des puissances de l'une d'entre elles. Soit

$$\begin{aligned} \mathrm{X}_4 &= \alpha x_4 + \beta x_5 \\ \mathrm{X}_5 &= \gamma x_4 + \delta x_5 \end{aligned} \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1)$$

cette transformation : par les puissances positives de cette transformation, le rapport transformé de $\frac{x_4}{x_5}$ tendra par exemple vers $\frac{\xi_4}{\xi_5}$; par les puissances négatives, il tendra vers $\frac{\xi'_4}{\xi'_5}$.

Or, nous pouvons écrire

$$(15) \quad \begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \varphi(x_1, x_2, x_3) &+ \mathrm{A}(l x_1 + m x_2 + n x_3 + p x_4 + q x_5)^2 \\ &- \mathrm{B}(l' x_1 + m' x_2 + n' x_3 + p' x_4 + q' x_5)^2; \end{aligned}$$

nous désignons ici par $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ une forme quadratique à coefficients rationnels, par A et B deux nombres rationnels positifs, par l, m, n, p, q, l', m', n', p', q' des nombres entiers quelconques.

Il existe des nombres rationnels α', β', γ', δ' tels que

$$\begin{aligned} p\,X_4 + q\,X_5 &= \alpha'(px_4 + qx_5) + \beta'(p'x_4 + q'x_5), \\ p'X_4 + q'X_5 &= \gamma'(px_4 + qx_5) + \delta'(p'x_4 + q'x_5); \end{aligned}$$

mais, $pq' - p'q$ n'étant pas nul, il existe des nombres rationnels a, b, c, a', b', c', tels que, si l'on pose

$$\begin{aligned} X'_4 &= ax_1 + bx_2 + cx_3 + \alpha x_4 + \beta x_5, \\ X'_5 &= a'x_1 + b'x_2 + c'x_3 + \gamma x_4 + \delta x_5, \end{aligned}$$

on ait les identités

$$\begin{aligned} lx_1 + mx_2 + nx_3 + pX'_4 + qX'_5 = {} & \alpha'(lx_1 + mx_2 + nx_3 + px_4 + qx_5) \\ & + \beta'(l'x_1 + m'x_2 + n'x_3 + p'x_4 + q'x_5), \\ l'x_1 + m'x_2 + n'x_3 + p'X'_4 + q'X'_5 = {} & \gamma'(lx_1 + mx_2 + nx_3 + px_4 + qx_5) \\ & + \delta'(l'x_1 + m'x_2 + n'x_3 + p'x_4 + q'x_5). \end{aligned}$$

Si l'on pose encore

$$X'_1 = x_1, \qquad X'_2 = x_2, \qquad X'_3 = x_3,$$

on aura donc

$$f(X'_1, X'_2, X'_3, X'_4, X'_5) = f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5).$$

Si, en particulier, x_2 et x_3 sont nuls, il en est de même de X'_2 et X'_3, et l'on aura

$$f(X'_1, 0, 0, X'_4, X'_5) = f(x_1, 0, 0, x_4, x_5),$$

en admettant qu'on ait, dans X'_4 et X'_5, remplacé x_2 et x_3 par zéro. Mais Hermite a démontré ([1]) qu'une certaine puissance de cette transformation, qui porte sur x_1, x_4, x_5, est à coefficients entiers. De même, en annulant x_1 et x_3 ou x_1 et x_2, on obtient des transformations portant sur x_2, x_4, x_5 ou sur x_3, x_4, x_5, dont certaines puissances sont à coefficients entiers. De là, il résulte qu'une certaine puissance de la transformation qui change x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 en X'_1, X'_2, X'_3, X'_4, X'_5 est à coefficients entiers. Peut-être que cette transformation de f en elle-

([1]) HERMITE, *Œuvres*, t. I, p. 193 et suiv.

même, qui a pour déterminant *un*, ne correspond pas à une transformation (T), mais alors son carré y correspond quand même.

Nous avons donc une transformation à coefficients entiers de la forme en elle-même, qui correspond à une transformation (T), et qui est de la forme

$$(16)\qquad \left\{\begin{aligned} X_1 &= x_1,\\ X_2 &= x_2,\\ X_3 &= x_3,\\ X_4 &= a x_1 + b x_2 + c x_3 + \alpha x_4 + \beta x_5,\\ X_5 &= a' x_1 + b' x_2 + c' x_3 + \alpha' x_4 + \beta' x_5;\end{aligned}\right.$$

par les puissances positives de cette transformation, les transformés de $\frac{x_1}{x_5}, \frac{x_2}{x_5}, \frac{x_3}{x_5}, \frac{x_4}{x_5}$ tendent respectivement vers o, o, o, $\frac{\xi_4}{\xi_5}$: *notre proposition est donc démontrée.*

A la vérité, la démonstration n'est pas bonne pour les points de la variété

$$\xi'_4 f'_{x_4}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) + \xi'_5 f'_{x_5}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 0,$$

ou, en revenant au cas général où ξ_1, ξ_2, ξ_3 ne sont pas forcément nuls, pour les points de la variété

$$\xi'_1 f'_{x_1} + \xi'_2 f'_{x_2} + \xi'_3 f'_{x_3} + \xi'_4 f'_{x_4} + \xi'_5 f'_{x_5} = 0;$$

mais il est évidemment très facile de trouver dans le groupe une transformation qui amène le point initial en dehors de cette variété; il ne reste plus alors qu'à lui appliquer les puissances de la transformation (16), comme nous l'avons vu.

5. Nous voudrions maintenant montrer qu'il existe dans le groupe une transformation correspondant à une transformation (T) du premier type, ayant comme points doubles :

1° Un point réel quelconque, dont les coordonnées $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5$ font partie d'un même corps quadratique ;

2° Le point $(\xi'_1, \xi'_2, \xi'_3, \xi'_4, \xi'_5)$ dont les coordonnées sont les conjuguées de celles du premier point;

3° Un autre point réel quelconque $(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5)$, dont les coordonnées sont seulement assujetties à faire partie d'un même corps quadratique (non nécessairement le même que le précédent), et à vérifier les deux conditions

$$(17)\qquad \begin{cases} \xi_1 f'_{\eta_1} + \xi_2 f'_{\eta_2} + \xi_3 f'_{\eta_3} + \xi_4 f'_{\eta_4} + \xi_5 f'_{\eta_5} = 0, \\ \xi'_1 f'_{\eta_1} + \xi'_2 f'_{\eta_2} + \xi'_3 f'_{\eta_3} + \xi'_4 f'_{\eta_4} + \xi'_5 f'_{\eta_5} = 0; \end{cases}$$

4° Le point $(\eta'_1, \eta'_2, \eta'_3, \eta'_4, \eta'_5)$, dont les coordonnées sont les conjuguées de celles du précédent.

Nous pouvons, comme précédemment, supposer que ξ_1, ξ_2 et ξ_3 sont nuls. La transformation (16) a alors les points doubles indiqués, mais elle est du cinquième type, première forme.

Les deux conditions (17) deviennent ici, en reprenant la notation de la relation (15),

$$(18)\qquad \begin{cases} l\eta_1 + m\eta_2 + n\eta_3 + p\eta_4 + q\eta_5 = 0, \\ l'\eta_1 + m'\eta_2 + n'\eta_3 + p'\eta_4 + q'\eta_5 = 0; \end{cases}$$

comme, de plus, on doit avoir

$$f(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5) = 0,$$

on aura

$$(19)\qquad \varphi(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = 0.$$

Il nous suffira donc de prendre pour η_1, η_2, η_3 des nombres faisant partie d'un même corps quadratique et satisfaisant à la relation (19); les relations (18) serviront alors à calculer η_4 et η_5.

D'une façon de procéder analogue à celle qui nous a servi pour $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5)$, on déduit qu'on peut, sans nuire à la généralité, se borner au cas où

$$\eta_1 = 0.$$

Il existe alors une transformation à coefficients entiers et de déterminant *un* de la forme

$$(20)\qquad \begin{cases} X_1 = x_1, \\ X_2 = \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3, \\ X_3 = \alpha' x_1 + \beta' x_2 + \gamma' x_3, \end{cases}$$

et qui change les nombres

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = \eta_2 \qquad x_3 = \eta_3$$

en

$$X_1 = 0, \qquad X_2 = \eta_2, \qquad X_3 = \eta_3,$$

à un facteur près. Posons alors

$$(21) \qquad \begin{cases} X_4 = \alpha'' x_1 + \beta'' x_2 + \gamma'' x_3 + x_4, \\ X_5 = \alpha''' x_1 + \beta''' x_2 + \gamma''' x_3 + x_5, \end{cases}$$

α'', β'', γ'', α''', β''', γ''' étant des nombres que nous déterminons par les relations

$$(22) \quad \begin{cases} l X_1 + m X_2 + n X_3 + p X_4 + q X_5 = l x_1 + m x_2 + n x_3 + p x_4 + q x_5, \\ l' X_1 + m' X_2 + n' X_3 + p' X_4 + q' X_5 = l' x_1 + m' x_2 + n' x_3 + p' x_4 + q' x_5. \end{cases}$$

Les formules (20) et (21) définissent une transformation de la forme f en elle-même. Les coefficients α'', β'', γ'', α''', β''', γ''' sont rationnels, mais pas forcément entiers; mais la considération de la forme adjointe de $f(0, x_2, x_3, x_4, x_5)$ prouve que, pour une certaine puissance de la transformation, β'', γ'', β''' et γ''' sont remplacés par des entiers; si alors α'' et α''' sont des fractions dont le plus petit commun multiple des dénominateurs est μ, la puissance μ de cette nouvelle transformation sera à coefficients entiers.

Nous avons ainsi une transformation à coefficients entiers

$$(23) \qquad \begin{cases} X_1 = x_1, \\ X_2 = \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3, \\ X_3 = \alpha' x_1 + \beta' x_2 + \gamma' x_3, \\ X_4 = \alpha'' x_1 + \beta'' x_2 + \gamma'' x_3 + x_4, \\ X_5 = \alpha''' x_1 + \beta''' x_2 + \gamma''' x_3 + x_5, \end{cases}$$

qui a comme points doubles $(0, 0, 0, \xi_4, \xi_5)$, $(0, 0, 0, \xi'_4, \xi'_5)$, $(0, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5)$ et $(0, \eta'_2, \eta'_3, \eta'_4, \eta'_5)$, et qui donne lieu aux identités

$$(24) \quad \begin{cases} \xi_4 f'_{X_4} + \xi_5 f'_{X_5} = \xi_4 f'_{x_4} + \xi_5 f'_{x_5}, \\ \xi'_4 f'_{X_4} + \xi'_5 f'_{X_5} = \xi'_4 f'_{x_4} + \xi'_5 f'_{x_5}, \\ \eta_2 f'_{X_2} + \eta_3 f'_{X_3} + \eta_4 f'_{X_4} + \eta_5 f'_{X_5} = r(\eta_2 f'_{x_2} + \eta_3 f'_{x_3} + \eta_4 f'_{x_4} + \eta_5 f'_{x_5}), \\ \eta'_2 f'_{X_2} + \eta'_3 f'_{X_3} + \eta'_4 f'_{X_4} + \eta'_5 f'_{X_5} = r'(\eta'_2 f'_{x_2} + \eta'_3 f'_{x_3} + \eta'_4 f'_{x_4} + \eta'_5 f'_{x_5}); \end{cases}$$

r' est l'inverse de r; ces deux nombres font partie du même corps quadratique que η_2, η_3, η_4, η_5; en remplaçant au besoin la substitution (23) par son carré, on peut supposer qu'ils sont positifs. De même, on peut supposer que la transformation (23) correspond à une transformation (T).

La transformation (16), de son côté, donne lieu aux identités

$$(25)\quad \left\{\begin{aligned} \xi_4 f'_{X_4} + \xi_5 f'_{X_5} &= R\,(\xi_4 f'_{x_4} + \xi_5 f'_{x_5}),\\ \xi'_4 f'_{X_4} + \xi'_5 f'_{X_5} &= R'\,(\xi_4 f'_{x_4} + \xi'_5 f'_{x_5}),\\ \eta_2 f'_{X_2} + \eta_3 f'_{X_3} + \eta_4 f'_{X_4} + \eta_5 f'_{X_5} &= \eta_2 f'_{x_2} + \eta_3 f'_{x_3} + \eta_4 f'_{x_4} + \eta_5 f'_{x_5},\\ \eta'_2 f'_{X_2} + \eta'_3 f'_{X_3} + \eta'_4 f'_{X_4} + \eta'_5 f'_{X_5} &= \eta'_3 f'_{x_2} + \eta'_3 f'_{x_3} + \eta'_4 f'_{x_4} + \eta'_5 f'_{x_5}; \end{aligned}\right.$$

R et R′ sont deux nombres, qu'on peut supposer positifs, et qui appartiennent au même corps quadratique que ξ_4 et ξ_5; ils sont inverses l'un de l'autre.

On peut toujours trouver deux nombres entiers α et β tels que les nombres

$$R^\alpha,\quad R'^\alpha,\quad r^\beta,\quad r'^\beta$$

soient tous différents. Alors *le produit de la puissance α de la transformation* (16) *par la puissance β de la transformation* (23) *correspond à une transformation* (T) *du premier type satisfaisant aux conditions imposées.* Les nombres r_1, r_2, r_3, r_4, dans cette transformation, seront égaux respectivement à R^α, r^β, R'^α, r'^β.

6. Notre groupe de transformations (T) étant discontinu, il existe des fonctions invariantes par les transformations du groupe, et se comportant comme des fonctions rationnelles dans le domaine (I).

Or, d'après ce que nous venons de voir, les variétés qui correspondent pour ce groupe à celles que nous avons considérées (Chap. V, 15) passent aussi près qu'on veut de n'importe quel point du domaine (III); il en est ainsi d'ailleurs, même si l'on se borne aux transformées d'une des substitutions du premier type que nous venons de déterminer par les autres substitutions du groupe. Il en résulte qu'en tout point du domaine (III), qui ne serait pas un point singulier, une de nos fonctions invariantes devrait prendre la même valeur, ce qui est absurde.

Donc, pour les fonctions invariantes par ce groupe, non constantes, et se comportant comme des fonctions rationnelles dans le domaine (I), les points du domaine (III) sont des singularités essentielles.

Ces fonctions ne peuvent donc pas se prolonger hors du domaine (I). Elles sont donc uniformes partout où elles existent.

7. Si nous formons le polyèdre fondamental d'après la méthode générale que nous avons étudiée (Chap. III), il résulte de ce que nous avons établi (Chap. IV) sur les transformations du premier type que ce polyèdre n'aura pas dans le domaine (III) de variétés à plus de quatre dimensions; dans le domaine réel, à cause des substitutions du cinquième type que nous avons rencontrées, il ne pourra avoir que des points isolés, c'est-à-dire des sommets.