

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

HENRI VILLAT

Sur l'écoulement des fluides pesants

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 32 (1915), p. 177-214

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1915_3_32__177_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1915, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR

L'ÉCOULEMENT DES FLUIDES PESANTS;

PAR M. HENRI VILLAT.



On sait les nombreux et importants travaux auxquels a donné naissance la théorie du mouvement uniforme des fluides pesants, depuis G.-G. Stokes jusqu'à M. T. Levi-Civita. (Pour la bibliographie détaillée, nous renverrons à l'article « Développements concernant l'Hydrodynamique », de l'*Encyclopédie des Sciences mathématiques*, édition française, dirigée par M. J. Molk, 4^e série, t. XVIII, p. 173 et suiv.)

Dans le travail actuel, qui a été résumé dans une Note parue aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (t. 156, 6 janvier 1913, p. 58), nous nous sommes proposé de décrire une nouvelle méthode pour aborder ce genre de problèmes. Dans les paragraphes 1 à 7, nous exposons cette méthode, pour fixer les idées, dans le cas d'un liquide s'écoulant entre deux parois fixes, l'une indéfinie, l'autre indéfinie seulement en amont; la méthode à suivre pour les autres problèmes, signalés ensuite, restant presque exactement la même. En dernière analyse, la question se trouve ramenée à la résolution d'une équation intégrale entre deux fonctions inconnues, dont l'une caractérise la forme des parois solides sur lesquelles glisse le liquide, et dont l'autre caractérise le mouvement à la surface libre du même liquide. Cette équation intégrale est fort compliquée par rapport à l'une des deux fonctions. Par rapport à l'autre (celle qui caractérise

les parois fixes), c'est une équation de la forme de Fredholm, de première espèce au sens de M. F. Picard. Mais c'est une équation singulière, à laquelle les procédés classiques de M. Picard ne s'appliquent pas. On peut cependant l'intégrer, et même en expliciter complètement la solution dans des cas très généraux. De sorte qu'un procédé s'offre pour obtenir la figuration de mouvements déterminés à l'avance, en choisissant *a priori* la fonction relative à la surface libre, satisfaisant aux conditions qu'entraînent qualitativement les circonstances données du mouvement. On peut ensuite trouver, parmi les solutions correspondantes, des configurations voisines de celle qu'on désirait étudier.

Dans les paragraphes 8 à 11, on a montré, sur l'exemple du canal à fond indéfini, comment la méthode était effectivement applicable : on a obtenu explicitement des mouvements, dépendant de deux paramètres arbitraires, correspondant à une surface libre qui subit, d'amont en aval, une certaine dénivellation, la vitesse étant horizontale à l'infini dans les deux sens (et, bien entendu, de grandeur supérieure en aval). Parmi les solutions mises en évidence, on en trouve pour lesquelles, comme on pouvait s'y attendre, la surface du fond du canal présente une dénivellation analogue.

La mise en place précise de tous les éléments du mouvement ne dépend plus, une fois résolue l'équation intégrale dont il a été question, que de quadratures. Mais de nombreux renseignements précis peuvent d'ailleurs être obtenus auparavant, indépendamment de ces quadratures, et l'aspect général du phénomène est auparavant complètement déterminé.

Dans le paragraphe 12, nous signalons une manière de poser le problème du mouvement dans un canal à fond rectiligne indéfini, problème que la méthode ci-dessus ne résout pas, puisque la fonction, par rapport à laquelle se résout l'équation intégrale dont il a été parlé, doit précisément dans ce cas être identiquement nulle. On peut alors ramener la question à une autre équation intégrale dont nous disons quelques mots. Une telle équation, non intégrable d'ailleurs en l'état actuel de nos connaissances, joue dans le problème en question le même rôle que l'équation différentielle et aux différences finies, signalée antérieurement par M. T. Levi-Civita.

En terminant, nous signalons le cas où le mouvement à étudier possède une périodicité géométrique, ce qui arrive notamment pour un canal à fond présentant des irrégularités périodiques. Les considérations développées au paragraphe 13 ont pour but, non pas de profiter de cette hypothèse pour apporter au problème une simplification notable, mais d'obtenir, par la comparaison de ce cas avec le cas général, quelques résultats relatifs à une équation intégrale particulière, dont la solution explicite peut être fort utile dans d'autres questions, comme je le montrerai dans un travail ultérieur.

I.

1. Nous considérerons d'abord le problème de l'écoulement de l'eau dans un canal partiellement recouvert en amont, en supposant en première approximation que le mouvement permanent soit irrotationnel, et en nous bornant au cas de deux dimensions, ou, ce qui revient à peu près au même, en admettant que la couche liquide envisagée soit étendue sur une largeur suffisamment grande pour qu'il n'existe pas de différence appréciable entre les circonstances du mouvement dans deux plans verticaux parallèles au courant général.

Dans ces conditions, dans le plan où nous nous plaçons, il existera un potentiel pour les vitesses et une fonction de courant, φ et ψ , définis comme on sait à une constante près, et que nous supposerons nuls en un point O, choisi arbitrairement, du fond. Nous prendrons ce point O comme origine des coordonnées dans le plan xOy du mouvement, en choisissant l'axe Oy vertical ascendant, et l'axe Ox de même sens que le courant général venu de l'infini à gauche. Nous adopterons les notations suivantes : nous désignerons par ϖ_1 la paroi solide qui forme le fond du canal sur lequel coule le liquide, par ϖ la paroi solide supérieure, qui limite le courant en amont, et par λ la ligne de courant qui y fait suite, ou plus précisément la portion de ligne de courant, qui, jointe à ϖ , constitue la limite supérieure du liquide.

Il est clair qu'on a, tout le long de la ligne ϖ_1 ,

$$\psi = 0,$$

et tout le long de $\lambda + \varpi$,

$$\psi = \psi_0,$$

ψ_0 désignant une constante.

Si la vitesse d'une molécule fluide a pour projections u , v et pour grandeur V , la pression étant d'autre part p , les équations générales de l'Hydrodynamique nous apprennent qu'on a dans le liquide

$$(1) \quad \frac{1}{2} V^2 + g y + p = \text{const.}$$

Par conséquent, sur λ , la pression devant être constante, on aura

$$(2) \quad V^2 + 2 g y = \text{const.}$$

Le sens de la constante ψ_0 est bien évident : elle représente la quantité de liquide qui s'écoule par unité de temps à travers une ligne équipotentielle $\varphi = \text{const.}$ En effet, à cause des formules connues

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} - i \frac{\partial \varphi}{\partial y} = u - iv,$$

cette quantité de liquide, c'est-à-dire le débit, est égale à

$$\int u dy - v dx = \int d\psi = \psi_0,$$

les intégrales devant être prises entre les lignes de courant $\psi = 0$ et $\psi = \psi_0$. Par un choix convenable des unités, nous pourrions toujours nous arranger pour faire $\psi_0 = \pi$, ce que nous supposerons dorénavant.

Selon un procédé bien connu, posons maintenant (Cf. T. LEVI-CIVITA, *Circolo di Palermo*, 1907)

$$(3) \quad z = x + iy, \quad w = u - iv, \quad f = \varphi + i\psi,$$

f est une fonction de z régulière dans le champ du plan z occupé par le liquide; la fonction

$$(4) \quad w = \frac{df}{dz}$$

est donc une fonction régulière de z , et par suite de f , définie dans la bande horizontale comprise entre les ordonnées $\psi = 0$, $\psi = \pi$, qui

correspond au domaine du plan z . Ceci posé, convenons d'écrire

$$(5) \quad w = e^{-i\omega}$$

avec

$$(6) \quad \omega = \theta + i\tau,$$

de sorte que

$$(7) \quad \begin{aligned} w &= e^\tau e^{-i\theta}, \\ V &= |w| = e^\tau, \\ \frac{u + iv}{V} &= e^{i\theta}. \end{aligned}$$

On peut alors transformer la condition (2) en une autre relative à la fonction $\omega(f)$. La relation (2) donne en effet

$$\frac{dV^2}{d\varphi} + 2g \frac{dy}{d\varphi} = 0 \quad (\text{sur } \lambda).$$

Or, on a de suite

$$\frac{\partial z}{\partial \varphi} = \frac{\partial x}{\partial \varphi} + i \frac{\partial y}{\partial \varphi} = \frac{1}{w} = e^{-\tau} (\cos \theta + i \sin \theta)$$

et, par conséquent,

$$\frac{\partial y}{\partial \varphi} = e^{-\tau} \sin \theta.$$

Puis on a

$$\frac{dV^2}{d\varphi} = \frac{de^{2\tau}}{d\varphi} = 2e^{2\tau} \frac{d\tau}{d\varphi},$$

de sorte qu'en transportant, il vient la condition

$$(8) \quad \frac{d\tau}{d\varphi} e^{2\tau} + g \sin \theta = 0,$$

qui doit être vérifiée par la fonction ω de f , sur la portion des frontières du domaine indiqué ci-dessus, correspondant à la ligne λ , c'est-à-dire pour $f = i\pi + \varphi$, avec $\varphi > \varphi_0$, en désignant par φ_0 la valeur du potentiel qui correspond au point où le liquide quitte le contact avec la paroi supérieure π . A cause de l'arbitraire laissé dans le choix du point O, il est manifeste qu'on peut toujours supposer $\varphi_0 = 0$: c'est ce que nous ferons dès maintenant.

De tout ceci résulte que, les parois étant supposées données, le

problème de l'écoulement du liquide sera complètement résolu si l'on parvient à déterminer une fonction $\omega(f)$ régulière dans la bande en question, et telle que :

1° Pour f réel (c'est-à-dire sur la paroi ϖ_1) et pour $f = i\pi + \varphi$ avec $\varphi < 0$ (c'est-à-dire sur la paroi ϖ), la partie réelle θ de ω (égale à l'angle que fait le vecteur vitesse avec l'horizontale) soit égale à l'angle que fait avec l'horizontale la tangente à la paroi donnée;

2° Pour $f = i\pi + \varphi$ avec $\varphi > 0$, la condition (8) soit vérifiée.

Nous déterminerons donc une telle fonction.

2. A cet effet, nous commencerons par remplacer la variable f par une autre, telle qu'à la bande horizontale du plan f corresponde, dans le nouveau plan $Z = X + iY$, une bande horizontale identique à la précédente, mais de telle manière que cette fois la frontière supérieure $Y = \pi$ corresponde à la ligne de glissement λ , et que la frontière inférieure $Y = 0$ corresponde aux deux parois ϖ et ϖ_1 (le point de séparation étant situé sur l'axe OY).

Il est aisé de voir que la transformation suivante

$$(9) \quad e^f = e^z - 1$$

remplit le but qu'on vient de dire. C'est ce que je laisse au lecteur le soin de vérifier.

Entre les points des frontières, correspondant à la ligne λ , on a, comme on le constate facilement,

$$e^\varphi = e^x + 1,$$

de sorte qu'il vient

$$(10) \quad \varphi = \log(e^x + 1)$$

et, par suite,

$$(11) \quad d\varphi = \frac{dX}{1 + e^{-X}}.$$

Il en résulte que la condition (8) à réaliser dans le plan de la variable f se transforme, dans le plan Z , en la suivante, qui doit être vérifiée sur la frontière supérieure $Y = \pi$,

$$(12) \quad (1 + e^{-X}) \frac{d\Gamma}{dX} e^{3\Gamma} + g \sin \Theta = 0,$$

en désignant par

$$(13) \quad \Omega(Z) = \Theta + iT,$$

ce qu'est devenue la fonction $\omega(f)$ après le changement de variable précédemment indiqué.

Ceci posé, appelons $F(X)$ la valeur (inconnue pour l'instant) que prend au point d'abscisse X , de la frontière $Y = 0$, la partie réelle de Ω ; cette fonction $F(X)$ est celle dont dépend la forme des parois solides ϖ et ϖ_1 ; sa variation, quand X varie, résulte immédiatement de la variation de la pente de la tangente à ces parois. Appelons encore $G(X)$ la valeur du coefficient T de i , au point d'abscisse X de la frontière $Y = \pi$; à cause de la relation (7), cette fonction $G(X)$ est celle qui détermine l'état des vitesses du liquide le long de la ligne libre λ .

Supposons momentanément données ces fonctions F et G , et déterminons tout d'abord une fonction de Z qui réponde à ces données, de manière qu'en outre la condition (12) soit vérifiée sur la frontière supérieure.

3. Nous commencerons par observer que la fonction

$$(14) \quad \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\alpha) \frac{\operatorname{ch} \frac{Z + \alpha}{2}}{\operatorname{sh} \frac{Z - \alpha}{2} \operatorname{ch} \alpha} d\alpha,$$

régulière dans la bande envisagée du plan Z , a pour partie réelle une fonction harmonique nulle sur la frontière supérieure et égale à $F(X)$ sur la frontière inférieure.

En effet, on constate sans peine que la transformation

$$(15) \quad Z = \frac{i\pi}{2} + \log \frac{1 + \zeta}{1 - \zeta}$$

transforme le domaine du plan Z , en l'intérieur du cercle de rayon 1 et dont le centre est l'origine du plan ζ , les frontières inférieures et supérieures de la bande, correspondant respectivement aux demi-circonférences du cercle, au-dessous et au-dessus de l'axe réel. Sur la demi-circonférence inférieure, la correspondance du point $\zeta = e^{i\theta}$ avec

le point $Z = \alpha$ de l'axe OX est réalisée par la relation

$$(16) \quad \alpha = \log \left(-\cot \frac{s}{2} \right).$$

$\mathfrak{F}(s)$ désignant alors la fonction $F \left[\log \left(-\cot \frac{s}{2} \right) \right]$, la fonction analytique (définie à une constante imaginaire pure près), qui correspond à une partie réelle donnée, égale à zéro ou à $\mathfrak{F}(s)$ sur la frontière du cercle où elle est envisagée, est alors la suivante (*cf.* par exemple SCHWARZ, *Journal de Crelle*, 1872, p. 210; H. VILLAT, *Bull. Soc. mat. Fr.*, 1911, p. 443, etc.) :

$$(17) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{2\pi} \mathfrak{F}(s) \frac{1 + \zeta e^{-is}}{1 - \zeta e^{-is}} ds.$$

Revenons maintenant de là au domaine du plan Z , par la transformation inverse de (15). On a

$$(18) \quad \zeta = \frac{1 + i e^Z}{i e^Z - 1},$$

et, le long de l'axe OX, au moyen d'un calcul simple,

$$(19) \quad ds = \frac{d\alpha}{\operatorname{ch} \alpha}.$$

D'autre part, il vient

$$\frac{1 + \zeta e^{-is}}{1 - \zeta e^{-is}} = \frac{i e^Z - 1 + (1 + i e^Z) e^{-is}}{i e^Z - 1 - (1 + i e^Z) e^{-is}} = i \frac{1 - e^Z \cot \frac{s}{2}}{e^Z + \cot \frac{s}{2}} = i \frac{1 + e^Z e^Z}{e^Z - e^Z} = i \frac{\operatorname{ch} \frac{Z + \alpha}{2}}{\operatorname{sh} \frac{Z - \alpha}{2}};$$

d'où, pour la fonction cherchée, l'expression

$$(20) \quad \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\alpha) \frac{\operatorname{ch} \frac{Z + \alpha}{2}}{\operatorname{sh} \frac{Z - \alpha}{2}} \frac{d\alpha}{\operatorname{ch} \alpha},$$

qui coïncide bien avec celle annoncée plus haut.

Cette fonction est bien déterminée sur la frontière supérieure pour $Z = \beta + i\pi$. A cause des formules

$$\operatorname{ch} \left(u + \frac{i\pi}{2} \right) = i \operatorname{sh} u$$

et

$$\operatorname{sh}\left(u + \frac{i\pi}{2}\right) = i \operatorname{ch} u,$$

sa partie imaginaire y devient égale à

$$(21) \quad \mathbf{H}(\beta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{F}(\alpha) \frac{\operatorname{sh} \frac{\beta + \alpha}{2}}{\operatorname{ch} \frac{\beta - \alpha}{2}} \frac{d\alpha}{\operatorname{ch} \alpha}.$$

4. Ceci posé, formons maintenant une fonction analytique dans le domaine du plan Z , ayant sa partie réelle nulle sur OX , et sa partie imaginaire égale à $L(X)$ au point $Z = X + i\pi$. Si nous désignons par $S(Z)$ une telle fonction, $iS(Z)$ étant réelle sur l'axe réel, sera prolongeable analytiquement dans la bande horizontale symétrique de la bande considérée, par rapport à l'axe OX , les valeurs de la fonction en des points symétriques étant imaginaires conjuguées. La partie réelle de iS prendra donc sur les deux frontières $Z = X \pm i\pi$, du domaine total, la même valeur $-L(X)$. De ce nouveau domaine passons encore à celui d'un cercle de rayon 1 dans le plan Z_1 , par la nouvelle transformation

$$(22) \quad Z = 2 \log \frac{1 + Z_1}{1 - Z_1}$$

qui remplit évidemment le but proposé. Entre les points $Z_1 = e^{is}$ et $Z = \beta \pm i\pi$ des frontières, la correspondance est assurée, comme on le voit sans peine, par la relation

$$(23) \quad \beta = 2 \log \left| \cot \frac{s}{2} \right|.$$

A la fonction $L(\beta)$ correspond par là une fonction $\mathcal{L}(s)$, et à la fonction $iS(Z)$ une fonction analytique dans le cercle, réelle sur l'axe réel, et dont la partie réelle soit $-\mathcal{L}(s)$ aux points e^{is} et e^{-is} . Une telle fonction est donc (*cf.* par exemple H. VILLAT, *Annales de l'École Normale*, 1911, p. 269)

$$(24) \quad \frac{1}{\pi} \int_0^\pi -\mathcal{L}(s) \frac{1 - Z_1^2}{1 - 2Z_1 \cos s + Z_1^2} ds.$$

Il faut ensuite repasser à la variable Z . A cet effet on a, d'après (22),

$$Z_1 = \operatorname{th} \frac{Z}{4},$$

puis, sur la frontière supérieure,

$$d\beta = -\frac{2 ds}{\sin s},$$

et en même temps

$$\sin s = \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{\beta}{2}},$$

$$\cos s = \operatorname{th} \frac{\beta}{2}.$$

Il en résulte immédiatement pour la fonction $iS(Z)$ l'expression suivante :

$$(25) \quad iS(Z) = \frac{i}{\pi} \int_{+\infty}^{-\infty} L(\beta) \frac{1 - \operatorname{th}^2 \frac{Z}{4}}{1 - 2 \operatorname{th} \frac{Z}{4} \operatorname{th} \frac{\beta}{2} + \operatorname{th}^2 \frac{Z}{4}} \frac{d\beta}{2 \operatorname{ch} \frac{\beta}{2}}.$$

Mais on a les formules

$$\operatorname{sh} \frac{Z}{2} = \frac{2 \operatorname{th} \frac{Z}{4}}{1 - \operatorname{th}^2 \frac{Z}{4}}, \quad \operatorname{ch} \frac{Z}{2} = \frac{1 + \operatorname{th}^2 \frac{Z}{4}}{1 - \operatorname{th}^2 \frac{Z}{4}},$$

donc il viendra

$$S(Z) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{L(\beta) d\beta}{\operatorname{ch} \frac{\beta}{2} \left(\operatorname{ch} \frac{Z}{2} - \operatorname{sh} \frac{Z}{2} \operatorname{th} \frac{\beta}{2} \right)}$$

ou bien enfin

$$(26) \quad S(Z) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{L(\beta) d\beta}{\operatorname{ch} \frac{\beta - Z}{2}}.$$

Remplaçons maintenant $L(\beta)$ par $G(\beta) - H(\beta)$, la fonction

$$(27) \quad \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [G(\beta) - H(\beta)] \frac{d\beta}{\operatorname{ch} \frac{\beta - Z}{2}}$$

aura sa partie réelle nulle sur OX , et sa partie imaginaire égale à $G - H$ sur la frontière supérieure du domaine primitif.

5. Il en résulte enfin, en faisant la somme de deux fonctions obtenues précédemment, que la fonction

$$\Omega(Z) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\alpha) \frac{\operatorname{ch} \frac{Z+\alpha}{2}}{\operatorname{sh} \frac{Z-\alpha}{2}} \frac{d\alpha}{\operatorname{ch} \alpha} + \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [G(\beta) - H(\beta)] \frac{d\beta}{\operatorname{ch} \frac{\beta-Z}{2}},$$

c'est-à-dire plus explicitement

$$(28) \quad \Omega(Z) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\alpha) \frac{\operatorname{ch} \frac{Z+\alpha}{2}}{\operatorname{sh} \frac{Z-\alpha}{2}} \frac{d\alpha}{\operatorname{ch} \alpha} + \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\beta}{\operatorname{ch} \frac{\beta-Z}{2}} \left[G(\beta) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\alpha) \frac{\operatorname{sh} \frac{\beta+\alpha}{2}}{\operatorname{ch} \frac{\beta-\alpha}{2}} \frac{d\alpha}{\operatorname{ch} \alpha} \right]$$

répond à la question posée en premier lieu, c'est-à-dire correspond aux données des parties réelle ou imaginaire sur les deux frontières respectivement.

Considérons alors cette fonction sur la droite $Y = \pi$; au point d'abscisse X , sa partie imaginaire est $G(X)$. Quant à sa partie réelle, d'après les constructions mêmes qui ont conduit à la fonction Ω , elle proviendra seulement du second terme de cette fonction. La valeur limite de ce second terme, quand Z tend vers $X + i\pi$, est égale en général à la valeur principale (au sens de Cauchy) de l'intégrale

$$(29) \quad -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\beta}{\operatorname{sh} \frac{\beta-X}{2}} \left[G(\beta) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\alpha) \frac{\operatorname{sh} \frac{\beta+\alpha}{2}}{\operatorname{ch} \frac{\beta-\alpha}{2}} \frac{d\alpha}{\operatorname{ch} \alpha} \right]$$

dans des conditions de validité analogues à celles qu'on a rencontrées et précisées ailleurs [*cf.* notamment H. VILLAT, *Sur la résolution de certaines équations intégrales et sur quelques problèmes qui s'y rattachent* (*Acta mathematica*, 1914)]. D'ailleurs, comme la valeur principale de l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\beta}{\operatorname{sh} \frac{\beta-X}{2}}$$

est nulle, ainsi qu'on s'en assure sans peine, la partie réelle sur la frontière supérieure est, par suite, encore

$$-\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G(\beta) d\beta}{\operatorname{sh} \frac{\beta - X}{2}}$$

$$+ \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\beta}{\operatorname{sh} \frac{\beta - X}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\alpha) \left[\frac{\operatorname{sh} \frac{\beta + \alpha}{2}}{\operatorname{ch} \frac{\beta - \alpha}{2}} - \frac{\operatorname{sh} \frac{X + \alpha}{2}}{\operatorname{ch} \frac{X - \alpha}{2}} \right] \frac{d\alpha}{\operatorname{ch} \alpha}$$

ou encore

$$(30) \quad \Theta(X) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G(\beta) d\beta}{\operatorname{sh} \frac{\beta - X}{2}}$$

$$+ \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\beta}{\operatorname{sh} \frac{\beta - X}{2}} \times \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sh} \frac{\beta + \alpha}{2} \operatorname{ch} \frac{X - \alpha}{2} - \operatorname{sh} \frac{X + \alpha}{2} \operatorname{ch} \frac{\beta - \alpha}{2}}{\operatorname{ch} \frac{\beta - \alpha}{2} \operatorname{ch} \frac{X - \alpha}{2}} F(\alpha) \frac{d\alpha}{\operatorname{ch} \alpha},$$

la première intégrale ayant toujours sa valeur principale.

Dans la seconde intégrale, le numérateur de la fraction qui multiplie $\frac{F(\alpha) d\alpha}{\operatorname{ch} \alpha}$, est égal à

$$\frac{1}{2} \left[\operatorname{sh} \frac{\beta + X}{2} + \operatorname{sh} \left(\alpha + \frac{\beta - X}{2} \right) \right] - \frac{1}{2} \left[\operatorname{sh} \frac{X + \beta}{2} + \operatorname{sh} \left(\alpha + \frac{X - \beta}{2} \right) \right],$$

c'est-à-dire évidemment à

$$\operatorname{ch} \alpha \operatorname{sh} \frac{\beta - X}{2}.$$

Il reste donc pour le second terme de $\Theta(X)$ l'expression suivante, après simplifications faciles,

$$(31) \quad \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\beta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(\alpha) d\alpha}{\operatorname{ch} \frac{\beta - \alpha}{2} \operatorname{ch} \frac{X - \alpha}{2}}.$$

Or, l'interversion de l'ordre des intégrations est ici généralement permise; c'est notamment le cas si $F(\alpha)$ reste finie pour α infini, et cette condition est évidente d'après le sens physique de la question, $F(\alpha)$ étant la valeur de l'angle que fait avec l'horizontale la tangente à

la paroi solide. La quantité envisagée est donc égale à

$$\frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(\alpha) d\alpha}{\operatorname{ch} \frac{X-\alpha}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\beta}{\operatorname{ch} \frac{\beta-\alpha}{2}}.$$

Mais un calcul simple donne

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\beta}{\operatorname{ch} \frac{\beta-\alpha}{2}} = 2\pi;$$

d'où, pour l'expression ci-dessus, la valeur

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(\alpha) d\alpha}{\operatorname{ch} \frac{X-\alpha}{2}},$$

et finalement, pour Θ ,

$$(32) \quad \Theta(X) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G(\beta) d\beta}{\operatorname{sh} \frac{\beta-X}{2}} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(\alpha) d\alpha}{\operatorname{ch} \frac{X-\alpha}{2}}.$$

D'après la condition (12), sur la frontière supérieure, nous devons donc vérifier la relation que voici :

$$(33) \quad (1 + e^{-X}) e^{3G(X)} G'(X) \\ = g \sin \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G(\beta) d\beta}{\operatorname{sh} \frac{\beta-X}{2}} - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(\alpha) d\alpha}{\operatorname{ch} \frac{X-\alpha}{2}} \right].$$

Telle est l'équation fonctionnelle qui lie les deux fonctions $F(X)$ et $G(X)$ pour que la fonction de Z obtenue ci-dessus puisse être une solution de notre problème.

Cette équation, compliquée par rapport à la fonction $G(X)$, se présente au contraire, par rapport à la fonction $F(X)$, sous la forme

$$(34) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(\alpha) d\alpha}{\operatorname{ch} \frac{X-\alpha}{2}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G(\beta) d\beta}{\operatorname{sh} \frac{\beta-X}{2}} \\ - 2\pi \operatorname{arc} \sin \left[\frac{1}{g} (1 + e^{-X}) e^{3G(X)} G'(X) \right] = 2\pi \mathfrak{F}(X),$$

en désignant le second membre par $2\pi \mathfrak{F}(X)$.

Supposons alors que nous nous donnions $G(X)$. La fonction $\mathcal{F}(X)$ est donc considérée comme donnée. Pour connaître $F(X)$, et par suite la fonction analytique qui résout le problème, il suffira de résoudre l'équation fonctionnelle

$$(35) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(\alpha) d\alpha}{\operatorname{ch} \frac{X-\alpha}{2}} = \mathcal{F}(X).$$

Or c'est là une équation de Fredholm, de première espèce, mais *singulière*, les limites de l'intervalle d'intégration n'étant pas finies. On peut cependant l'intégrer, et même en expliciter la solution, dans des circonstances très générales, comme on va l'expliquer.

A cet effet, considérons la fonction, analogue à $S(Z)$ déterminée déjà dans un paragraphe antérieur, et dont la partie imaginaire est $F(X)$ sur la frontière $Y = \pi$, et dont la partie réelle est nulle sur $Y = 0$. Cette fonction est

$$\frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(\alpha) d\alpha}{\operatorname{ch} \frac{\alpha - Zi}{2}}.$$

Pour Z réel, égal à X , elle est imaginaire pure, de la forme $i\mathcal{F}(X)$, et l'on a

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(\alpha) d\alpha}{\operatorname{ch} \frac{X-\alpha}{2}} = \mathcal{F}(X).$$

Résoudre l'équation (35) revient donc à trouver, sur la droite $Y = \pi$, la valeur de la fonction analytique dont la partie réelle est nulle sur OX , et la partie imaginaire égale à $\mathcal{F}(X)$ sur la même droite.

Ce problème ne peut donc avoir plus d'une solution; sans quoi la différence de deux telles solutions formerait une fonction analytique non identiquement nulle, et qui serait nulle tout le long de l'axe OX .

La fonction de Z , $U(Z)$, dont il s'agit, est donc telle que $\frac{1}{i}U(Z)$ se réduise à $\mathcal{F}(X)$ pour Z réel. On peut donc écrire

$$\frac{1}{i}U(Z) = \mathcal{F}(Z),$$

dès que $\mathcal{F}(Z)$ est une fonction analytique régulière dans la bande

définie par $|Y| < \pi$ dans le plan Z . Et pour $Z = X + i\pi$, on aura

$$\frac{1}{i} U(X + i\pi) = \mathfrak{F}(X + i\pi).$$

La partie imaginaire de U sur cette frontière est donc la partie réelle du second membre, et l'on a par suite

$$(36) \quad F(X) = \frac{1}{2} [\mathfrak{F}(X + i\pi) + \mathfrak{F}(X - i\pi)].$$

Il en résulte la marche suivante pour la résolution, au moins théorique, du problème proposé. On se donnera une fonction arbitraire $G(X)$, dont l'allure générale sera déterminée d'ailleurs par la loi de variation de la vitesse le long de la ligne de courant λ . Cette fonction devra satisfaire à l'inégalité

$$(37) \quad \left| \frac{1}{g} (1 + e^{-X}) e^{3G(X)} G'(X) \right| \leq 1,$$

dont la nécessité se lit évidemment sur la relation (34). On connaîtra alors $\mathfrak{F}(X)$, et l'on calculera $F(X)$ comme il vient d'être dit. La fonction $\Omega(Z)$ sera alors complètement connue, et il ne restera plus que des quadratures à effectuer pour obtenir tous les éléments du mouvement correspondant. Ceux-ci se calculeront par des procédés faciles, et qui sont bien connus (*cf.* par exemple LEVI-CIVITA, *Circolo di Palermo*, 1907), en partant de l'équation (4) mise sous la forme

$$dz = e^{i\Omega} \frac{df}{dL} dL,$$

c'est-à-dire, d'après (9),

$$(38) \quad dz = e^{i\Omega} \frac{dZ}{1 - e^{-Z}},$$

équation qui permet de revenir, du plan auxiliaire Z , au plan dans lequel a lieu le mouvement. En intégrant la formule précédente le long des frontières, on placera dans le plan Z les parois solides et les frontières du jet liquide.

6. Il est clair que des considérations analogues s'appliquent à

d'autres cas d'écoulement des fluides pesants; en général, à tout problème d'écoulement pour lequel le domaine occupé par le liquide en mouvement peut être représenté conformément sur un cercle (par exemple), de telle manière que les images de l'ensemble des parois solides limitant le courant, d'une part, et les images de l'ensemble des lignes libres des jets, d'autre part, ne divisent la circonférence frontière qu'en deux arcs distincts. Il faut en outre, bien entendu, qu'on soit dans le cas où l'on puisse appliquer à la fonction qui joue le rôle de $\mathfrak{F}(X)$ les considérations du paragraphe 6. Dans tous les cas, par des représentations conformes appropriées, on sera toujours ramené à trouver, dans un plan Z , une fonction analogue à $\Omega(Z)$ ci-dessus envisagée, la condition à satisfaire dans chaque cas le long de la frontière supérieure étant, au lieu de (12), une condition toujours de la forme

$$(39) \quad A(X) e^{3T} \frac{dT}{dX} + g \sin \Theta = 0.$$

La fonction $A(X)$ peut varier d'un problème à l'autre et ne dépend que des transformations employées. La méthode ultérieure reste exactement la même.

Si, dans le problème explicité ci-dessus, on imagine que la paroi ϖ disparaisse entièrement à l'infini en amont, de sorte que le jet se réduise à un courant liquide coulant sur un fond solide indéfini ϖ_1 et limité supérieurement par une surface libre λ (image très approchée de la section par un plan vertical, d'un canal à fond quelconque, enserré entre deux quais parallèles), les calculs antérieurs s'appliquent intégralement : il suffit d'opérer dans le plan f , sans avoir besoin de la variable auxiliaire Z , ou bien, pour ne pas changer les notations ci-dessus, de remplacer la relation (9) par la relation

$$f = Z.$$

Tout revient alors à trouver une fonction $\Omega(Z)$ vérifiant la condition

$$(40) \quad e^{3T} \frac{dT}{dX} + g \sin \Theta = 0$$

sur la frontière supérieure $Y = \pi$ de la limite horizontale du plan Z . De sorte qu'on rentre dans le cas indiqué auparavant; en désignant

par $F(X)$ et $G(X)$ les valeurs de la partie réelle et de la partie imaginaire sur les droites $Y = 0$ et $Y = \pi$ respectivement, l'équation à satisfaire entre $F(X)$ et $G(X)$ est alors

$$(41) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(\alpha) d\alpha}{\operatorname{ch} \frac{X - \alpha}{2}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G(\alpha) d\alpha}{\operatorname{sh} \frac{\alpha - X}{2}} - 2\pi \operatorname{arc} \sin \left[\frac{1}{e^G} e^{3G(X)} G'(X) \right] = 2\pi \mathfrak{F}(X).$$

Avant de faire voir comment on peut traiter effectivement les applications de ce qui précède, nous ferons une observation au sujet de la fonction $\mathfrak{F}(Z)$, concernant la fonction, qui y figure représentée par l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G(\alpha) d\alpha}{\operatorname{sh} \frac{\alpha - X}{2}},$$

qu'il est évidemment permis d'écrire

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G(\alpha) - G(X)}{\operatorname{sh} \frac{\alpha - X}{2}} d\alpha,$$

puisque la valeur principale (au sens de Cauchy) de

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\alpha}{\operatorname{sh} \frac{\alpha - X}{2}}$$

est nulle, comme on le constate sans peine. L'intégrale qu'on vient d'écrire représentera, en remplaçant X par Z , dans la bande considérée du plan Z , une fonction analytique dans tout le domaine, dès qu'elle sera analytique sur l'axe réel $Z = X$.

En effet, nous l'avons vu plus haut, dès que $G(X)$ est sommable, la fonction

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G(\alpha) d\alpha}{\operatorname{ch} \frac{\alpha - Z}{2}}$$

est analytique dans la bande comprise entre les droites $Y = \pm \pi$ du plan. Donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G(\alpha) d\alpha}{\operatorname{ch}\left(\frac{\alpha - Z}{2} + \frac{i\pi}{2}\right)}$$

jouit de la même propriété dans le domaine compris entre $Y = 0$ et $Y = 2\pi$. Or, à cause de

$$\operatorname{ch}\left(u + \frac{i\pi}{2}\right) = i \operatorname{sh} u,$$

cette fonction n'est autre que

$$-i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G(\alpha) d\alpha}{\operatorname{sh} \frac{\alpha - Z}{2}}.$$

Il suffit donc que cette dernière soit analytique pour Z réel pour qu'on puisse la prolonger, selon un principe connu, du côté des Y négatifs; et la fonction obtenue est bien définie et régulière dans toute la bande $|Y| \leq \pi$, limites comprises.

II.

8. Nous allons maintenant traiter une application. Proposons-nous d'étudier le mouvement de l'eau dans un canal présentant un changement de niveau, de telle sorte que la nappe liquide venant de l'amont coule horizontalement à un certain niveau, pour tomber en aval à un niveau inférieur. La surface libre part horizontalement, s'infléchit en s'abaissant, puis redevient horizontale; la vitesse le long de cette surface libre augmente constamment, depuis une valeur finie jusqu'à une autre valeur finie.

La vitesse le long de la surface libre étant égale, comme il résulte de la théorie développée ci-dessus, à $e^{G(X)}$, cette condition relative à la variation de la vitesse sera satisfaite si l'on choisit pour $G(X)$ une expression de la forme

$$(42) \quad G(X) = A \operatorname{th} \frac{X}{4} + B,$$

dans laquelle A et B sont deux constantes, dont la première est positive.

L'angle avec Ox, de la tangente à la surface libre dans le sens du courant, est, d'après l'équation (40), défini par

$$(43) \quad \sin \Theta = -\frac{1}{g} e^{3A \operatorname{th} \frac{X}{4} + 3B} \frac{A}{4} \left(1 - \operatorname{th}^2 \frac{X}{4}\right),$$

c'est-à-dire

$$(44) \quad \Theta = -\operatorname{arc} \sin \left[\frac{A}{4g} e^{3B} e^{3A \operatorname{th} \frac{X}{4}} \left(1 - \operatorname{th}^2 \frac{X}{4}\right) \right],$$

en choisissant la détermination de l'arc sin qui s'annule avec l'argument. Nous poserons, pour simplifier l'écriture,

$$(45) \quad \begin{cases} A_1 = 3A, \\ B_1 = \frac{A}{4g} e^{3B}, \end{cases}$$

A_1 et B_1 sont tous les deux positifs. Lorsque $t = \operatorname{th} \frac{X}{4}$ varie de -1 à $+1$, la fonction de t

$$-B_1 e^{A_1 t} (1 - t^2),$$

dont la dérivée a le signe de

$$A_1(t^2 - 1) + 2t$$

décroit d'abord à partir de zéro, passe par un minimum et croît ensuite jusqu'à zéro, le minimum étant atteint pour la valeur de t (correspondant à une valeur positive de X) comprise entre 0 et 1, et qui annule le précédent polynôme en t . Il est clair, du reste, que la valeur absolue du minimum est certainement inférieure au produit $B_1 e^{A_1}$ des modules maximums de chaque facteur. Nous supposerons ce module maximum inférieur à 1, et même, plus précisément, nous nous imposerons la condition

$$(46) \quad 2B_1 e^{A_1} \leq 1. \quad (\text{pour que } \Theta \text{ soit analytique})$$

De là résulte que l'allure de la surface libre sera, dans ces conditions, conforme à celle qu'on désirait obtenir.

9. Ceci posé, pour poursuivre l'application de la méthode, nous avons à former la fonction $\mathcal{F}(X)$ définie par (41). Il nous faut donc

$$\left. \begin{array}{l} 2B_1 e^{A_1} \leq 1 \\ A_1 \leq \frac{\pi}{2} \quad (\text{maximum de } \Theta \text{ non nul}) \\ \text{plus loin} \end{array} \right\}$$

commencer par calculer l'intégrale

$$(47) \quad I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G(\alpha) d\alpha}{\operatorname{sh} \frac{\alpha - X}{2}} = A \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{th} \frac{\alpha}{4} d\alpha}{\operatorname{sh} \frac{\alpha}{2} \operatorname{ch} \frac{X}{2} - \operatorname{ch} \frac{\alpha}{2} \operatorname{sh} \frac{X}{2}}.$$

En posant $t' = \operatorname{th} \frac{\alpha}{4}$, on a de suite

$$I = -2A \left(\frac{1-t'^2}{t'} \right) \int_{-1}^{+1} \frac{t' dt'}{(t'-t) \left(t' - \frac{1}{t} \right)},$$

puis

$$I = \left(2A t \log |t' - t| - \frac{2A}{t} \log \left| t' - \frac{1}{t} \right| \right)_{-1}^{+1},$$

d'où, en prenant la valeur principale, comme nous le devons,

$$I = -2A \frac{1-t^2}{t} \log \frac{1-t}{1+t} = -\frac{2}{3} A_1 \frac{1 - \operatorname{th} \frac{X}{4}}{\operatorname{th} \frac{X}{4}} \log \frac{1 - \operatorname{th} \frac{X}{4}}{1 + \operatorname{th} \frac{X}{4}}.$$

Par suite, il vient pour $\mathcal{F}(X)$,

$$(48) \quad \mathcal{F}(X) = -\frac{A_1}{3\pi} \frac{1 - \operatorname{th}^2 \frac{X}{4}}{\operatorname{th} \frac{X}{4}} \log \frac{1 - \operatorname{th} \frac{X}{4}}{1 + \operatorname{th} \frac{X}{4}} - \operatorname{arc} \sin \left[B_1 e^{A_1 \operatorname{th} \frac{X}{4}} \left(1 - \operatorname{th}^2 \frac{X}{4} \right) \right].$$

Si nous remplaçons X par Z , la fonction $\mathcal{F}(Z)$ sera-t-elle analytique dans le domaine considéré du plan Z ?

Cela est à peu près évident en ce qui concerne l'expression

$$(49) \quad J(Z) = \frac{1 - \operatorname{th}^2 \frac{Z}{4}}{\operatorname{th} \frac{Z}{4}} \log \frac{1 - \operatorname{th} \frac{Z}{4}}{1 + \operatorname{th} \frac{Z}{4}},$$

qui intervient dans une partie de $\mathcal{F}(Z)$. Dans la bande définie par $|\operatorname{Im} Z| \leq \pi$, on a

$$\operatorname{th} \frac{Z}{4} = \frac{\operatorname{th} \frac{X}{4} + i \operatorname{tang} \frac{Y}{4}}{1 + i \operatorname{th} \frac{X}{4} \operatorname{tang} \frac{Y}{4}}$$

$$\frac{1 - \operatorname{th}^2 \frac{X}{4}}{\operatorname{th} \frac{X}{4}} = 2 \frac{1 - \operatorname{th} \frac{X}{4}}{\operatorname{th} \frac{X}{4}}$$

$$\log \frac{1 - \operatorname{th} \frac{X}{4}}{\operatorname{th} \frac{X}{4}} = -\frac{X}{2}$$

$$\frac{1 - \operatorname{th}^2 \frac{X}{4}}{\operatorname{th} \frac{X}{4}} = \frac{2}{\operatorname{sh} \frac{X}{2}}$$

De suite que:

$$j(z) = \frac{2}{\operatorname{sh} \frac{z}{2}} \frac{z}{2} = \frac{-z}{\operatorname{sh} \frac{z}{2}}$$

avec

$$\left| \operatorname{tang} \frac{Y}{4} \right| \leq 1.$$

Dans ces conditions, il vient

$$\lambda \left| \operatorname{th} \frac{Z}{4} \right|^2 = \frac{\operatorname{th}^2 \frac{X}{4} + \operatorname{tang}^2 \frac{Y}{4}}{1 + \operatorname{th}^2 \frac{X}{4} \operatorname{tang}^2 \frac{Y}{4}},$$

et cette quantité ne dépasse jamais l'unité, car l'inégalité exprimant ce fait se met immédiatement sous la forme

$$\left(1 - \operatorname{th}^2 \frac{X}{4} \right) \left(1 - \operatorname{tang}^2 \frac{Y}{4} \right) \geq 0,$$

sous laquelle elle est évidente d'après ce qui précède. On en conclut, par un calcul facile, qu'on peut écrire, dans le domaine considéré,

$$J(Z) = \frac{1 - \operatorname{th}^2 \frac{Z}{4}}{\operatorname{th} \frac{Z}{4}} \left(-2 \operatorname{th} \frac{Z}{4} - 2 \frac{\operatorname{th}^3 \frac{Z}{4}}{3} - \dots - \frac{2 \operatorname{th}^{2n+1} \frac{Z}{4}}{2n+1} \dots \right),$$

c'est-à-dire

$$(50) \quad J(Z) = 4 \left[-\frac{1}{2} + \frac{1}{1 \cdot 3} \operatorname{th}^2 \frac{Z}{4} + \frac{1}{3 \cdot 5} \operatorname{th}^4 \frac{Z}{4} + \dots \right. \\ \left. + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \operatorname{th}^{2n} \frac{Z}{4} + \dots \right].$$

C'est bien là une fonction analytique de Z , régulière dans le domaine, y compris pour $Z = 0$, et réelle sur l'axe réel, prenant des valeurs conjuguées aux points symétriques par rapport à l'axe OX .

Passons à la fonction

$$(51) \quad K(Z) = \operatorname{arc} \sin \left[B_1 e^{A_1 \operatorname{th} \frac{Z}{4}} \left(1 - \operatorname{th}^2 \frac{Z}{4} \right) \right],$$

dans laquelle la détermination de l'arc sin choisie est celle qui s'annule pour $\operatorname{th} \frac{Z}{4} = \pm 1$. Cette fonction de Z est régulière tout le long de l'axe réel, d'après le choix des constantes A_1 et B_1 . Pour qu'elle cesse d'être régulière dans le domaine, il faudrait que l'une ou l'autre des deux

équations

$$(52) \quad B_1 e^{A_1 \operatorname{th} \frac{Z}{4}} \left(1 - \operatorname{th}^2 \frac{Z}{4} \right) = \pm 1,$$

y soit quelque part vérifiée. Il suffit évidemment de considérer ce qui se passe pour $0 \leq Y \leq \pi$. En posant pour abrégé

$$t = \operatorname{th} \frac{X}{4}, \quad \mu = \operatorname{tang} \frac{Y}{4},$$

il faut étudier les équations

$$(53) \quad B_1 e^{A_1 \frac{t+i\mu}{1+i\mu}} \left[1 - \left(\frac{t+i\mu}{1+i\mu} \right)^2 \right] = \pm 1.$$

On a

$$\frac{t+i\mu}{1+i\mu} = \alpha + i\beta$$

avec

$$(54) \quad \begin{cases} \alpha = \frac{t(1+\mu^2)}{1+t^2\mu^2} \# \operatorname{sgn} t = \operatorname{sgn} X, \\ \beta = \frac{\mu(1-t^2)}{1+t^2\mu^2} > 0, \end{cases}$$

et les équations (53) reviennent à

$$(55) \quad \begin{cases} (1 - \alpha^2 + \beta^2) \sin A_1 \beta - 2\alpha\beta \cos A_1 \beta = 0, \\ B_1 e^{A_1 \alpha} [(1 - \alpha^2 + \beta^2) \cos A_1 \beta + 2\alpha\beta \sin A_1 \beta] = \pm 1. \end{cases}$$

De la première de celles-ci on tire

$$(56) \quad \frac{\cos A_1 \beta}{1 - \alpha^2 + \beta^2} = \frac{\sin A_1 \beta}{2\alpha\beta} = \frac{1}{\rho}$$

avec

$$(57) \quad \rho^2 = (1 - \alpha^2 + \beta^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2,$$

et la seconde devient alors

$$(58) \quad B_1 \rho e^{A_1 \alpha} = \pm 1.$$

Elle exige évidemment que le signe du second membre soit celui de ρ .

Ceci posé, rien n'est plus facile que de constater que β ne dépasse nulle part l'unité; si donc nous faisons l'hypothèse

$$(59) \quad A_1 \leq \frac{\pi}{2},$$

$\cos A, \beta$ sera constamment positif. D'autre part, un calcul élémentaire donne

$$1 - \alpha^2 + \beta^2 = \frac{(1 + \mu^2)(1 - t^2)(1 - t^2\mu^2)}{(1 + t^2\mu^2)^2};$$

cette quantité est donc aussi positive et il résulte alors de (56) que ρ est positif, et aussi que α est positif. L'équation (58) deviendra donc (en excluant la combinaison impossible fournie par le signe —)

$$(60) \quad B_1 \rho e^{A_1 \alpha} = +1,$$

et il ne pourra y avoir de solution possible que si $\alpha > 0$, c'est-à-dire $X > 0$, ou encore $t > 0$.

Ceci posé, je dis que l'équation (60) est impossible. En effet, si l'on forme le carré du module de son premier membre, on trouve comme résultat

$$(61) \quad B_1^2 e^{2A_1 \frac{t(1+\mu^2)}{1+t^2\mu^2}} \frac{(1+\mu^2)^2(1-t^2)^2}{(1+t^2\mu^2)^2}.$$

Supposons t fixe, et faisons varier μ de 0 à 1; on voit de suite que, pour t positif, la fonction

$$\frac{t(1+\mu^2)}{1+t^2\mu^2}$$

croît; sa plus grande valeur est, par suite, $\frac{2t}{1+t^2}$.

La quantité

$$\frac{1+\mu^2}{1+t^2\mu^2}$$

est aussi une fonction croissante de μ , et sa plus grande valeur est $\frac{2}{1+t^2}$. Le maximum du carré du module est donc, quand t est donné,

$$B_1^2 e^{2A_1 \frac{2t}{1+t^2}} \frac{4(1-t^2)^2}{(1+t^2)^2}.$$

En posant, comme on en a évidemment le droit,

$$t = \operatorname{tang} \frac{\delta}{2} \quad \left(0 < \delta < \frac{\pi}{2}\right),$$

cette expression est le carré de

$$(62) \quad {}_2B_1 e^{\lambda_1 \sin \delta} \cos \delta,$$

laquelle est une fonction de δ manifestement toujours inférieure à

$${}_2B_1 e^{\lambda_1}.$$

Or, d'après (46), cette dernière quantité est par hypothèse inférieure à 1. Il en résulte donc que, dans l'équation (60), le module du premier membre n'atteint jamais l'unité, et par suite cette égalité est impossible. Les équations (53) n'ont donc certainement aucune solution, et la fonction $K(Z)$ reste régulière dans la bande du plan Z , considérée.

10. Ceci posé, nous devons maintenant former l'expression $\mathfrak{F}(X+i\pi)$, dont la partie réelle nous fournira la fonction $F(X)$. Or, par le changement de X en $X+i\pi$,

$$\begin{array}{ll} t = \operatorname{th} \frac{X}{4} & \text{devient} \quad \frac{t+i}{1+it} \\ \text{et, par suite,} & \\ \frac{1-t^2}{t} & \text{devient} \quad -2i \frac{1-t^2}{1+t^2}, \\ \frac{1+t}{1-t} & \text{»} \quad -i \frac{1-t}{1+t}, \\ 1-t^2 & \text{»} \quad \frac{2(1-t^2)}{1-t^2+2it}. \end{array}$$

Voyons de plus près comment se comporte $\log \frac{1-t}{1+t}$. On a, avec des notations déjà employées,

$$\operatorname{th} \frac{Z}{4} = \frac{t+i\mu}{1+i\mu t},$$

de sorte que

$$\log \frac{1-\operatorname{th} \frac{Z}{4}}{1+\operatorname{th} \frac{Z}{4}} = \log \left(\frac{1-i\mu}{1+i\mu} \frac{1-t}{1+t} \right),$$

ou encore

$$\log \frac{1-\operatorname{th} \frac{Z}{4}}{1+\operatorname{th} \frac{Z}{4}} = \log \frac{1-t}{1+t} + \log \frac{1-i\mu}{1+i\mu},$$

le premier logarithme étant réel, et le second nul pour $Y = 0$. Dans ces conditions, on a de suite

$$\log \frac{1 - i\mu}{1 + i\mu} = \log \frac{\cos \frac{Y}{4} - i \sin \frac{Y}{4}}{\cos \frac{Y}{4} + i \sin \frac{Y}{4}} = -i \frac{Y}{2},$$

et quand Y tend vers π ,

$$\log \frac{1 - \operatorname{th} \frac{Z}{4}}{1 + \operatorname{th} \frac{Z}{4}}$$

tend vers

$$\log \frac{1 - t}{1 + t} - i \frac{\pi}{2}.$$

Des deux termes dont se compose $\mathfrak{F}(X + i\pi)$, le premier a donc pour partie réelle

$$(63) \quad \frac{A_1}{3} \frac{1 - t^2}{1 + t^2} = \frac{A_1}{3} \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{X}{2}}.$$

Quant au second terme, il devient, au signe près,

$$(64) \quad \operatorname{arc} \sin \left(2B_1 \frac{1 - t^2}{1 - t^2 + 2it} e^{A_1 \frac{t+i}{1+it}} \right) = \operatorname{arc} \sin \left[\frac{2B_1}{1 + i \operatorname{sh} \frac{X}{2}} e^{A_1 \left(\operatorname{th} \frac{X}{2} + \frac{i}{\operatorname{ch} \frac{X}{2}} \right)} \right],$$

et il est facile de se rendre compte que la détermination à prendre pour l'arc sin doit devenir nulle pour X infini. On a donc, le signe \Re désignant : « partie réelle de »,

$$(65) \quad F(X) = \frac{A_1}{3 \operatorname{ch} \frac{X}{2}} - \Re \operatorname{arc} \sin \left[\frac{2B_1}{1 + i \operatorname{sh} \frac{X}{2}} e^{A_1 \left(\operatorname{th} \frac{X}{2} + \frac{i}{\operatorname{ch} \frac{X}{2}} \right)} \right].$$

Il sera un peu plus commode de remplacer la variable X par une autre, γ , liée à X par les trois relations, que l'on sait être concordantes,

$$(66) \quad \operatorname{ch} \frac{X}{2} = \frac{1}{\cos \gamma}, \quad \operatorname{sh} \frac{X}{2} = \operatorname{tang} \gamma, \quad \operatorname{th} \frac{X}{2} = \sin \gamma.$$

Lorsque X varie de $-\infty$ à $+\infty$, γ varie de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$. Il vient

alors de suite

$$(67) \quad F(X) = \frac{A_1}{3} \cos \gamma - \Re \operatorname{arc} \sin \left[\frac{2B_1}{1 + i \operatorname{tang} \gamma} e^{A_1(\sin \gamma + i \cos \gamma)} \right]$$

ou bien

$$(68) \quad F(X) = P(\gamma) - Q(\gamma),$$

en posant

$$(69) \quad \begin{cases} P(\gamma) = \frac{A_1}{3} \cos \gamma, \\ Q(\gamma) = \Re \operatorname{arc} \sin(2B_1 s) \end{cases}$$

et

$$(70) \quad s := \cos \gamma e^{A_1 \sin \gamma + i(A_1 \cos \gamma - \gamma)}.$$

La variation de $P(\gamma)$ est évidente. Pour nous rendre compte de celle de $Q(\gamma)$, nous commencerons par examiner dans le plan la trajectoire décrite par le point s affixe de l'imaginaire du même nom. En coordonnées polaires, ce point est immédiatement déterminé par le rayon vecteur

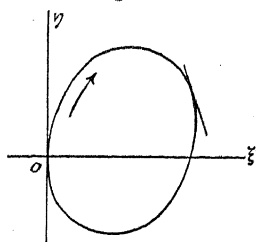
$$e^{A_1 \sin \gamma} \cos \gamma$$

et l'angle polaire

$$A_1 \cos \gamma - \gamma.$$

Bornons-nous au cas où la constante A_1 est au plus égale à 1 (nous verrons d'ailleurs un peu plus loin que cette restriction est entraînée

Fig. 1.



elle-même par le sens physique de la question). Dans ces conditions, on s'assure, sans la moindre difficulté, que le point s décrit une courbe ayant l'allure ci-dessus.

Le point $r = 2B_1 s$ décrit une courbe homothétique de celle-ci par rapport au point O dans le rapport $2B_1$, et tout entière contenue dans

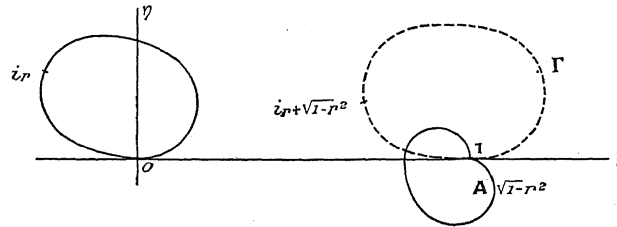
le cercle de rayon 1, de centre O; ce fait résulte de l'inégalité (46) et de ce que le maximum du rayon vecteur correspondant au point r est toujours visiblement inférieur à $2B_1 e^{A_1}$.

Ceci posé, rappelons-nous qu'on a

$$\text{arc sin } r = \frac{1}{i} \log(ir + \sqrt{1 - r^2}).$$

La détermination du radical qui convient dans le cas actuel est celle qui est positive pour $r = 0$; en effet, cette valeur de r correspond à $\gamma = \pm \frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire à $X = \pm \infty$, et l'arc sinus doit y être nul, comme nous l'avons vu; par suite, l'expression sous le signe logarithme doit se réduire à $+1$. Les courbes décrites par les points ir et $\sqrt{1 - r^2}$ sont alors faciles à construire par points et elles ont la forme suivante, d'où la courbe décrite par le point $ir + \sqrt{1 - r^2}$:

Fig. 2.



Il est bien facile de vérifier que cette dernière courbe Γ est tangente à l'axe réel au point d'abscisse 1 (qui correspond à $X = \pm \infty$). Cela résulte des formules

$$\frac{d}{d\gamma}(\text{arc sin } r) = \frac{2B_1}{\sqrt{1 - r^2}} e^{A_1 \sin \gamma + i(A_1 \cos \gamma - 2\gamma)} (A_1 \cos \gamma - i)$$

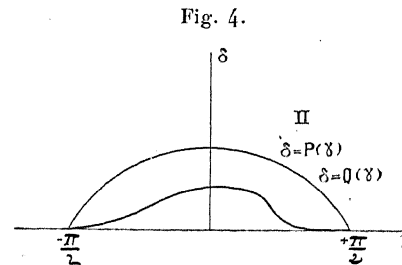
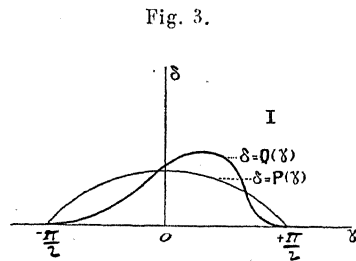
et

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\gamma^2}(\text{arc sin } r) &= \frac{r \left(\frac{dr}{d\gamma}\right)^2}{(1 - r^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2B_1}{\sqrt{1 - r^2}} e^{A_1 \sin \gamma + i(A_1 \cos \gamma - 2\gamma)} \\ &\quad \times \{ (A_1 \cos \gamma - i) [A_1 \cos \gamma - i(A_1 \sin \gamma + 2)] - A_1 \sin \gamma \}, \end{aligned}$$

d'où l'on conclut immédiatement que $\Re \text{ arc sin } r$, quand γ part de $-\frac{\pi}{2}$,

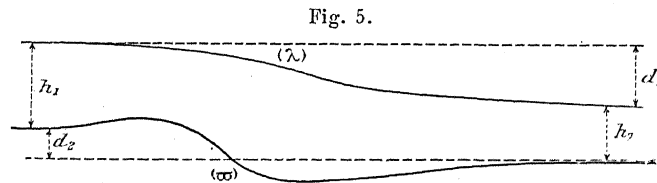
commence par croître à partir de zéro, et qu'il arrive à zéro en décroissant lorsque γ tend vers $+\frac{\pi}{2}$. Comme $\mathcal{R} \text{ arc sin } r$ n'est autre que l'angle polaire (nul en A) du point correspondant à la même valeur de X sur la courbe Γ , on en conclut le fait énoncé.

Il est maintenant bien facile, dans chaque cas, de tracer par points les courbes représentant les variations des fonctions $P(\gamma)$ et $Q(\gamma)$. On constate sans peine l'existence de deux cas généraux distincts, représentés par les deux figures ci-après :



Occupons-nous seulement du premier cas, de beaucoup le plus intéressant du point de vue physique.

L'allure générale du mouvement du liquide coulant dans le plan z est alors représentée par la figure suivante.



Dans ce cas (qui correspond à A_1 petit par rapport à B_1), le profil du fond du canal est d'abord montant, puis descendant, puis le niveau s'élève de nouveau; à l'infini, à droite comme à gauche, la pente est nulle. Il était facile de prévoir à l'avance ce cas, tout en précisant les conditions dans lesquelles on devait s'y trouver.

En effet, désignons par d_1 la différence de niveau de la surface libre en aval et en amont; par h_1 la profondeur de la nappe d'eau en amont, par h_2 sa profondeur en aval (d_1, h_1, h_2 sont positifs). Appelons enfin d_2

la différence de niveau du fond du canal en aval et en amont (positive si le niveau aval est inférieur au niveau amont, négative dans le cas contraire).

Dans ces conditions, l'équation (2) appliquée à la surface libre nous fournit la relation

$$(V_{\text{amont}})^2 - (V_{\text{aval}})^2 + 2gd_1 = 0,$$

c'est-à-dire

$$e^{-2A+2B} - e^{+2A+2B} + 2gd_1 = 0$$

ou bien

$$(71) \quad d_1 = \frac{1}{g} e^{2B} \operatorname{sh} 2A.$$

D'autre part, le débit étant le même en amont et en aval, et égal à π , on a

$$(72) \quad h_1 e^{-A+B} = h_2 e^{A+B} = \pi.$$

Maintenant, on a

$$(73) \quad d_2 = d_1 + h_2 - h_1,$$

et la condition pour que cette quantité soit positive se met facilement sous la forme

$$(74) \quad e^{3B} \operatorname{ch} A > \pi g$$

ou encore [équation (45)]

$$(75) \quad 2B_1 > \frac{A\pi}{2 \operatorname{ch} A}.$$

D'autre part, la condition (46) peut s'écrire

$$(76) \quad 2B_1 < e^{-3A}.$$

Or, ces deux dernières inégalités (75) et (76) ne sont compatibles que si l'on a

$$(77) \quad \frac{A\pi}{2 \operatorname{ch} A} < e^{-3A}.$$

On constate élémentairement que cette dernière condition n'est vérifiée, pour A positif, que si

$$A < A_0,$$

en désignant par A_0 un nombre égal approximativement à $\frac{1}{4}$, et un peu plus grand.

Donc d_2 ne sera positif que pour $A < A_0$, et il faudra en outre choisir B_1 entre les deux limites définies par (75) et (76). On voit de suite qu'il en résulte pour A_1

$$A_1 < 3A_0.$$

Le cas de la figure 5 correspond à cette limitation.

11. Nous connaissons maintenant les grands traits du mouvement dans le plan z : il est facile de préciser davantage en calculant la fonction $\Omega(Z)$ qui permet de placer chaque point du fluide avec la vitesse correspondante. On connaît, en effet, la partie réelle de cette fonction sur les deux frontières du domaine du plan Z , à savoir :

$$\Theta = F(X)$$

sur $Y = 0$, et

$$\Theta = -\text{arc sin} \left[B_1 e^{A_1 \text{th} \frac{X}{4}} \left(1 - \text{th}^2 \frac{X}{4} \right) \right] = F_1(X)$$

fournie par (44) sur $Y = \pi$. Il est alors aisé de montrer qu'on a pour $\Omega(Z)$ l'expression

$$(78) \quad \Omega(Z) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\alpha) \frac{\text{ch} \frac{Z+\alpha}{2}}{\text{sh} \frac{Z-\alpha}{2}} \frac{d\alpha}{\text{ch} \alpha} - \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(\alpha) \frac{\text{sh} \frac{Z+\alpha}{2}}{\text{ch} \frac{Z-\alpha}{2}} \frac{d\alpha}{\text{ch} \alpha} + iC,$$

où C est une constante réelle qu'on déterminera par la condition que la partie imaginaire T soit, en un point quelconque de la frontière supérieure (par exemple pour $X = +\infty$), égale à la valeur correspondante de la donnée $G(X)$.

$\Omega(Z)$ est donc donnée par une quadrature, et l'on sait en déduire la

mise en place précise des éléments du mouvement dans le plan Z, par le moyen de la relation

$$(79) \quad dz = e^{i\Omega} dZ = e^{i\Theta - \tau} dZ.$$

Mais, comme on s'en est déjà aperçu, ceci n'est pas nécessaire pour obtenir de nombreux détails sur les conditions du mouvement. Nous ferons encore observer que, notamment, la surface libre peut se déterminer exactement, et indépendamment du calcul de $\Omega(Z)$. On a, en effet, le long de λ ,

$$dz = e^{-A_1 \operatorname{th} \frac{X}{4} - B} (\cos \Theta + i \sin \Theta) dX$$

avec

$$\sin \Theta = -B_1 e^{A_1 \operatorname{th} \frac{X}{4}} \left(1 - \operatorname{th}^2 \frac{X}{4} \right).$$

On en déduit de suite pour x

$$(80) \quad x = \int e^{-B} e^{-\frac{A_1}{3} \operatorname{th} \frac{X}{4}} \sqrt{1 - B_1^2 e^{2A_1 \operatorname{th} \frac{X}{4}} \left(1 - \operatorname{th}^2 \frac{X}{4} \right)^2} dX,$$

et pour y

$$(81) \quad y = \int -\frac{A_1}{12g} e^{2B} e^{\frac{2A_1}{3} \operatorname{th} \frac{X}{4}} \left(1 - \operatorname{th}^2 \frac{X}{4} \right) dX,$$

c'est-à-dire

$$(82) \quad y = -\frac{1}{2g} \left(e^{\frac{A_1}{3} \operatorname{th} \frac{X}{4} + B} \right)^2 + \text{const.} = -\frac{1}{2g} V^2 + \text{const.},$$

ce dernier point était évident à l'avance à cause de (2).

12. En somme, la méthode indiquée ci-dessus, pour les problèmes d'écoulement des fluides pesants, revient à se donner en quelque sorte la surface libre (ou les surfaces libres) au moins qualitativement, et à en déduire la forme des parois solides. Dans certains cas, le procédé contraire serait assurément souhaitable, notamment pour l'étude du mouvement dans un canal à fond horizontal rectiligne; en ce cas, la fonction que nous avons désignée par $F(X)$ devrait être identiquement nulle. La seule inconnue restante, si l'on envisage toujours le problème comme dans les paragraphes antérieurs, est $G(X)$, et,

d'après (41), cette fonction devra satisfaire à l'équation intégrale

$$(83) \quad \frac{1}{g} e^{3G(X)} G'(X) = \sin \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G(\alpha) d\alpha}{\operatorname{sh} \frac{\alpha - X}{2}} \right].$$

On peut d'ailleurs obtenir plus simplement, pour ce cas particulier, une équation analogue et jouant le même rôle que celle-ci, en transformant la bande du plan f (ou Z) en un demi-cercle par la transformation déjà employée

$$f = 2 \log \frac{1 + \zeta}{1 - \zeta};$$

on ramène facilement la condition (8) à la forme

$$(84) \quad \frac{1}{2g} \sin s e^{3T(s)} \frac{dT}{ds} = \sin \Theta,$$

équation fonctionnelle qu'il faut vérifier sur la demi-circonférence supérieure $|\zeta| = 1$, c'est-à-dire pour

$$0 < s < \pi.$$

Sur le diamètre placé sur l'axe réel, l'angle Θ est nul; la fonction $i\Omega = -T + i\Theta$ est donc réelle sur l'axe réel, donc prolongeable dans la demi-circonférence symétrique de la première par rapport à l'axe susdit, et elle donne naissance à une fonction analytique définie, si l'on veut, par les valeurs $T(s)$ de T sur la circonférence frontière [les valeurs de $T(s)$ aux points symétriques étant les mêmes]. On a donc (cf. par exemple M. VILLAT, *Annales de l'École Normale supérieure*, 1911, p. 269)

$$(85) \quad i\Omega(\zeta) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{T(s)(1 - \zeta^2)}{1 - 2\zeta \cos s + \zeta^2} ds,$$

et, dans ces conditions, il vient sur la circonférence $|\zeta| = 1$ (*Annales de l'École Normale supérieure*, 1911, p. 264)

$$(86) \quad \Theta(s) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi T(\varepsilon) \frac{\sin s}{2 \sin \frac{\varepsilon - s}{2} \sin \frac{\varepsilon + s}{2}} d\varepsilon = \frac{\sin s}{\pi} \int_0^\pi \frac{T(\varepsilon) d\varepsilon}{\cos s - \cos \varepsilon}.$$

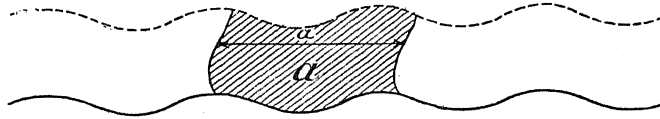
La fonction inconnue $T(s)$ doit donc satisfaire à l'équation intégrale

$$(87) \quad 2g \sin \left[\frac{\sin s}{\pi} \int_0^\pi \frac{T(\varepsilon) d\varepsilon}{\cos s - \cos \varepsilon} \right] = \sin s e^{3T(s)} T'(s),$$

ou bien entendu, comme dans les équations antérieures, l'intégrale a sa valeur principale. Je reviendrai ailleurs sur ces équations.

13. Je terminerai ce travail par quelques remarques concernant le cas où le phénomène d'écoulement considéré présente une périodicité géométrique : c'est, par exemple, le cas pour un canal à fond irrégulier, de direction générale horizontale, et dont les irrégularités se reproduisent périodiquement comme l'indique la figure.

Fig. 6.

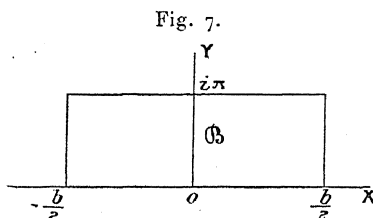


Lorsque le régime permanent est établi, la surface libre présente une périodicité analogue, et il suffira de connaître les circonstances du mouvement sur une portion seulement du canal, sur une certaine largeur a , à savoir une portion dont tout le reste du canal puisse se déduire au moyen de translations successives d'amplitude a . Dans les considérations qui vont suivre, je ne vais pas tirer de la périodicité supposée une simplification pour la recherche du mouvement; je me propose, au contraire, en rapprochant ce cas du cas général qui a déjà été examiné, de montrer comment on peut en déduire indirectement, dans certains cas, la résolution d'une équation intégrale particulière, dont l'intervention peut être fort utile dans d'autres questions, comme je le montrerai dans un travail ultérieur.

Plaçons l'axe des x dans le plan z du mouvement, parallèle à la translation a .

En utilisant les mêmes notations qu'aux paragraphes 3 et suivants, dans le plan auxiliaire f (ou Z) sur lequel est représenté le domaine liquide, la fonction $\Omega(Z)$ qui a été définie plus haut sera nécessairement périodique avec une période réelle b . Il est évidemment possible de faire en sorte que le domaine élémentaire \mathfrak{A} du plan z corresponde

à un rectangle \mathfrak{B} du plan Z , de largeur b et symétrique par rapport à l'axe OY .



Avec les mêmes notations que plus haut, on aura alors

$$(88) \quad G(X + b) = G(X).$$

La fonction $F(X)$ jouira alors de la même périodicité. En effet, dans l'expression (41) de $\mathfrak{F}(X)$, le terme

$$\text{arc sin} \left[\frac{1}{g} e^{3G(X)} G'(X) \right]$$

possède la période b . Quant au terme

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G(\alpha) d\alpha}{\text{sh} \frac{\alpha - X}{2}},$$

il peut évidemment s'écrire

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G(\alpha + b) d(\alpha + b)}{\text{sh} \left(\frac{\alpha + b}{2} - \frac{X + b}{2} \right)},$$

c'est-à-dire, d'après l'hypothèse,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G(\beta) d\beta}{\text{sh} \frac{\beta - (X + b)}{2}}.$$

Il représente donc une fonction de X également périodique avec la même période. Le même fait résulte alors pour la fonction $F(X)$, de la manière même dont on a appris à former cette fonction.

Observons encore ici que, entre a et b , on a la relation

$$a = \int_0^b e^{i\Omega} dZ.$$

Ceci posé, au rectangle de la figure 7, faisons correspondre une couronne circulaire : on sait qu'on y parvient par la transformation (cf. E. PICARD, *Analyse*, t. II, p. 135)

$$(89) \quad \mathfrak{z} = e^{2i\pi \frac{Z}{b}};$$

les rayons extrêmes étant 1 (correspondant à la frontière $Y = 0$) et q (correspondant à la frontière $Y = \pi$), avec

$$(90) \quad q = e^{-\frac{2\pi^2}{b}} < 1.$$

Sur la frontière $Y = \pi$, on devait vérifier la relation

$$e^{3T(X)} \frac{dT}{dX} + g \sin \Theta = 0.$$

Or, à la fonction $\Omega(Z) = \Theta + iT$, correspond une fonction de \mathfrak{z} définie et régulière dans la couronne précédente, à savoir

$$\Omega_1(\mathfrak{z}) = \Theta_1 + iT_1;$$

et comme les points suivants des deux plans : X et e^{is} d'une part, $X + i\pi$ et qe^{is} d'autre part, se correspondent par l'équation

$$(91) \quad X = \frac{bs}{2\pi},$$

on voit que tout revient à trouver $\Omega_1(\mathfrak{z})$ satisfaisant, sur la circonférence $|\mathfrak{z}| = q$, à l'équation

$$(92) \quad e^{3T_1(s)} \frac{dT_1}{ds} + \frac{gb}{2\pi} \sin \Theta_1 = 0.$$

Appelons $G_1(s)$ et $F_1(s)$ les fonctions de s qui, par (91), correspondent aux fonctions $G(X)$ et $F(X)$. Si l'on connaissait les deux fonctions F_1 et G_1 , auxquelles doivent se réduire respectivement la partie réelle de $\Omega_1(\mathfrak{z})$ pour $|\mathfrak{z}| = 1$, et sa partie imaginaire pour $|\mathfrak{z}| = q$, on pourrait immédiatement écrire la fonction $\Omega_1(\mathfrak{z})$ en appliquant un résultat que j'ai démontré dans un autre Mémoire (cf. *Acta mathematica : Sur la résolution de certaines équations intégrales*, etc.). En définissant, à un facteur près, les périodes $2\omega_1$ (réelle)

et $2\omega_3$ (imaginaire pure) par la relation

$$(93) \quad q = e^{-\frac{\pi\omega_3}{2i\omega_1}},$$

et utilisant les fonctions elliptiques construites avec ces périodes, on a

$$(94) \quad \Omega(\xi) = \frac{i}{\pi} \int_0^{2\pi} F_1(\varepsilon) d \log \xi_{30} \left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log \xi - \frac{\omega_1}{\pi} \varepsilon \middle| \omega_1 \omega_3 \right) \\ + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} G_1(\varepsilon) d \log \xi_{30} \left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log \xi - \frac{\omega_1}{\pi} \varepsilon - \frac{\omega_3}{2} \middle| \omega_1 \omega_3 \right)$$

et la valeur que prend la partie réelle de cette fonction, pour $\xi = qe^{is}$, est

$$(95) \quad F_2(s) = \frac{i}{\pi} \int_0^{2\pi} F_1(\varepsilon) d \log \xi_{30} \left[\frac{\omega_1}{\pi} (s - \varepsilon) + \frac{\omega_3}{2} \right] \\ + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} G_1(\varepsilon) d \log \xi_{30} \frac{\omega_1}{\pi} (s - \varepsilon).$$

La seconde intégrale est égale à sa valeur principale.

De ceci résulte que la condition (92) impose, entre F_1 et G_1 , la relation

$$(96) \quad \frac{i}{\pi} \int_0^{2\pi} F_1(\varepsilon) d \log \xi_{30} \left[\frac{\omega_1}{\pi} (s - \varepsilon) + \frac{\omega_3}{2} \right] \\ = - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} G_1(\varepsilon) d \log \xi_{30} \frac{\omega_1}{\pi} (s - \varepsilon) - \text{arc sin} \left[\frac{2\pi}{gb} e^{3G(s)} G'(s) \right].$$

Or on a vu, plus haut, qu'on savait trouver, dans des cas très généraux, la fonction $F(X)$ qui n'est autre que

$$(97) \quad F(X) \equiv F_1 \left(\frac{2\pi X}{b} \right) = F_1(s).$$

On sait donc en même temps résoudre l'équation (96) par rapport à l'inconnue $F_1(s)$.

Cette équation (96) est d'ailleurs une équation de Fredholm, de première espèce, à noyau symétrique. Ce fait résulte de la formule (cf. TANNERY et MOLK, *Fonctions elliptiques*, form. LX, 4)

$$\xi_{30} \left[\frac{\omega_1}{\pi} (s - \varepsilon) + \frac{\omega_3}{2} \right] = - \frac{\sqrt{e_1 - e_3} \sqrt{e_2 - e_3}}{\xi_{30} \left[\frac{\omega_1}{\pi} (s - \varepsilon) - \frac{\omega_3}{2} \right]},$$

d'où l'on conclut immédiatement

$$\frac{i}{\pi} \frac{d}{d\varepsilon} \log \check{\xi}_{30} \left[\frac{\omega_1}{\pi} (s - \varepsilon) + \frac{\omega_3}{2} \right] = - \frac{i}{\pi} \frac{d}{d\varepsilon} \log \check{\xi}_{30} \left[\frac{\omega_1}{\pi} (s - \varepsilon) - \frac{\omega_3}{2} \right]$$

et par suite

$$\frac{i}{\pi} \frac{d}{d\varepsilon} \log \check{\xi}_{30} \left[\frac{\omega_1}{\pi} (s - \varepsilon) + \frac{\omega_3}{2} \right] = \frac{i}{2\pi} \frac{d}{d\varepsilon} \log \frac{\check{\xi}_{30} \left[\frac{\omega_1}{\pi} (s - \varepsilon) + \frac{\omega_3}{2} \right]}{\check{\xi}_{30} \left[\frac{\omega_1}{\pi} (s - \varepsilon) - \frac{\omega_3}{2} \right]},$$

et enfin (*cf.* TANNERY et MOLK, *loc. cit.*, form. LXI, 1)

$$\begin{aligned} & \frac{i}{\pi} \frac{d}{d\varepsilon} \log \check{\xi}_{30} \left[\frac{\omega_1}{\pi} (s - \varepsilon) + \frac{\omega_3}{2} \right] \\ &= \frac{i \omega_1}{2 \pi^2} \left\{ \frac{\check{\xi}_{10} \left[\frac{\omega_1}{\pi} (s - \varepsilon) + \frac{\omega_3}{2} \right] \check{\xi}_{20} \left[\frac{\omega_1}{\pi} (s - \varepsilon) + \frac{\omega_3}{2} \right]}{\check{\xi}_{30} \left[\frac{\omega_1}{\pi} (s - \varepsilon) + \frac{\omega_3}{2} \right]} \right. \\ & \quad \left. - \frac{\check{\xi}_{10} \left[\frac{\omega_1}{\pi} (s - \varepsilon) - \frac{\omega_3}{2} \right] \check{\xi}_{20} \left[\frac{\omega_1}{\pi} (s - \varepsilon) - \frac{\omega_3}{2} \right]}{\check{\xi}_{30} \left[\frac{\omega_1}{\pi} (s - \varepsilon) - \frac{\omega_3}{2} \right]} \right\}. \end{aligned}$$

Cette quantité est, bien entendu, manifestement réelle. Sous cette dernière forme, si l'on observe que les fonctions $\check{\xi}_{\alpha 0}$ sont impaires, on constate aisément que l'échange de s et de ε laisse le noyau invariable.

Le noyau est d'ailleurs fermé. Il n'existe pas de fonction $h_{(\varepsilon)}$ autre que zéro, telle que

$$\frac{i}{\pi} \int_0^{2\pi} h(\varepsilon) d \log \check{\xi}_{30} \left[\frac{\omega_1}{\pi} (s - \varepsilon) + \frac{\omega_3}{2} \right] = 0.$$

Car autrement, si l'on considérait la fonction de \varkappa , analytique dans la couronne,

$$\frac{i}{\pi} \int_0^{2\pi} h(\varepsilon) d \log \check{\xi}_{30} \left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log \varkappa - \frac{\omega_1}{\pi} \varepsilon \right),$$

il résulte facilement des considérations antérieures que cette fonction aurait sa partie imaginaire nulle pour $\varkappa = qe^{i\varepsilon}$, et aussi sa partie réelle; elle serait donc identiquement nulle. L'équation de Fredholm

précédente n'a donc qu'une solution au plus. Le noyau est d'ailleurs régulier, en ce sens qu'on peut appliquer à l'équation en question les méthodes classiques de M. E. Picard (*C. R. Acad. Sc.*, 14 juin et 28 juin 1909; *Rendiconti del Circolo di Palermo*, 1910, t. XXIX). Mais il est clair que la solution explicite, qu'on peut dans certains cas obtenir indirectement par ce qui précède, sera beaucoup plus facilement maniable que celle déduite de la méthode à laquelle on vient de faire allusion.

Rappelons les calculs qui conduisent à la solution de (96). On posera

$$(98) \quad G(X) = G_1\left(\frac{2\pi X}{b}\right) = G_1(s).$$

On considérera l'expression $\mathfrak{F}(X)$ définie par l'équation (41), et si la fonction $\mathfrak{F}(Z)$ est analytique dans la bande du plan Z de largeur 2π , d'axe OX , on aura

$$(99) \quad F(X) = F_1(s) = \frac{1}{2}[\mathfrak{F}(X + i\pi) + \mathfrak{F}(X - i\pi)].$$