N. E. NÖRLUND

Sur l'existence de solutions d'une équation linéaire aux différences finies

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 31 (1914), p. 205-221
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1914_3_31__205_0>

SUR L'EXISTENCE DE SOLUTIONS

D'UNE

ÉQUATION LINÉAIRE AUX DIFFÉRENCES FINIES,

Par M. N.-E. NÖRLUND.

1. Considérons une équation linéaire aux différences finies d'ordre n,

$$\sum_{i=0}^{i=n} \mathrm{P}_i(x)\, u(x+i) = 0, \tag{1}$$

où x est une variable complexe, et où les coefficients $\mathrm{P}_i(x)$ sont des fonctions analytiques de x. L'existence d'une solution $u(x)$ de l'équation (1) est immédiatement évidente. Car soient $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots$ les points singuliers [1] des coefficients $\mathrm{P}_i(x)$ et désignons par (β) l'ensemble des points

$$\beta_i + s \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, 3, \ldots \\ s = n, n+1, n+2, \ldots, 0, -1, -2, \ldots \end{pmatrix}.$$

Soient $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ les zéros de $\mathrm{P}_0(x)$, et soient $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots$ les zéros de $\mathrm{P}_n(x-n)$.

---

(1) Je suppose que les points $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots$ soient des points singuliers essentiels; s'il y avait entre eux des pôles, on pourrait toujours les faire disparaître en multipliant l'équation (1) par une fonction entière convenablement choisie. Je suppose en plus que tout facteur commun des coefficients $\mathrm{P}_i(x)$ a été supprimé, de sorte que ces coefficients ne pourront jamais s'annuler tous à la fois.

Nous désignons par (α) l'ensemble des points

$$\alpha_i - s \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, 3, \ldots \\ s = 0, 1, 2, \ldots \end{pmatrix},$$

et par (γ) l'ensemble des points

$$\gamma_i + s \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, 3, \ldots \\ s = 0, 1, 2, \ldots \end{pmatrix}.$$

J'appelle pour abréger les points β_i, α_i et $\gamma_i (i = 1, 2, 3, \ldots)$ les points singuliers de l'équation aux différences (1). Il faut y ajouter encore, s'il y a lieu, le point à l'infini. Posons $x = \sigma + i\tau$; on peut choisir arbitrairement n fonctions périodiques $\pi_1(x)$, $\pi_2(x)$, ..., $\pi_n(x)$ avec la période $1\,[\pi_i(x) = \pi_i(x+1)]$, et déterminer $u(x)$ de manière qu'on ait dans la bande $c \leqq \sigma < c+1$ (où c est un nombre réel quelconque)

$$u(x+i-1) = \pi_i(x) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Les valeurs de $u(x)$ sont par là fixées d'abord dans la bande $c \leqq \sigma < c+n$, et l'équation (1) les détermine uniquement, par voie récursive, dans tout point x qui n'est pas congruent à un des points singuliers de l'équation (1) (c'est-à-dire qui ne diffère pas d'un de ces points par un entier). La solution générale de l'équation (1) est donc de la forme

$$(2) \qquad u(x) = u_1(x)\,\pi_1(x) + u_2(x)\,\pi_2(x) + \ldots + u_n(x)\,\pi_n(x);$$

$u_1(x)$, ..., $u_n(x)$ s'appellent des solutions particulières. Mais ces solutions sont des fonctions discontinues qui se composent d'une infinité de fonctions analytiques. Soit, pour fixer les idées, m un entier positif. L'une quelconque $u_s(x)$ des solutions particulières est définie dans la bande $c - m - 1 \leqq \sigma < c - m$ comme une fonction rationnelle des coefficients $P_i(x)$, $P_i(x+1)$, ..., $P_i(x+m)$. Mais toutes les fois que la variable x surpasse une des lignes $\sigma = c - m$, la solution $u_s(x)$ passe brusquement d'une fonction analytique à une autre.

Il n'existe donc, en général, aucune solution analytique satisfaisant *à des conditions initiales données* (c'est-à-dire qui est, dans une bande $c \leqq \sigma < c+n$, égale à une fonction donnée).

M. Wallenberg [1] a démontré qu'on pourrait, dans le cas où les coefficients $P_i(x)$ sont des fonctions rationnelles de la variable réelle x, *disposer* des fonctions arbitraires $\pi_i(x)$ de manière à trouver une solution continue [2].

Et, dans le cas général que nous avons en vue ici, on pourrait également choisir [3] les fonctions arbitraires $\pi_i(x)$, de telle sorte que $u_s(x)$ soit une solution analytique. Mais cette manière de déterminer les solutions nous semble peu satisfaisante, parce qu'on trouve pour chaque solution particulière une infinité d'expressions analytiques dont chacune n'est valable que dans une des bandes susnommées, et il n'y a aucun rapport entre les contours de ces bandes et les propriétés essentielles des solutions.

Nous préférons donc suivre une autre voie. Pour les équations à coefficients rationnels [4] et ensuite pour une classe assez générale d'équations aux différences, dont les coefficients se représentent par des séries de facultés [5], j'ai déjà démontré comment on peut former un système fondamental de solutions analytiques. Mais l'objet principal de ces recherches était l'étude des propriétés asymptotiques des solutions [6] et les méthodes appliquées ne se prêtent guère à des

---

(1) G. WALLENBERG et A. GULDBERG, *Theorie der linearen Differenzengleichungen*, p. 26-31. Leipzig, 1911.

(2) Mais il n'y a guère intérêt à considérer ces solutions qui deviennent discontinues quand on donne à x des valeurs complexes et qui se composent encore d'une infinité de fonctions analytiques.

(3) Comparez l'étude intéressante de M. BRODÉN, *Bemerkungen über sogenannte finite Integration* (*Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik*, t. VII, n° 6, 1911).

(4) *C. R. Acad. Sc.*, 5 octobre 1908; *Acta mathematica*, t. XXXIV, 1910, p. 1-19 et 33-38; *Thèse*, Copenhague, 1910, p. 18-56. Des résultats du même ordre ont été obtenus un peu plus tard par M. Galbrun (*Acta mathematica*, t. XXXVI, 1912, p. 1-68) et par M. Birkhoff (*Transactions of the American Mathematical Society*, t. XII, 1911, p. 243-284; *Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences*, 1913.

(5) *C. R. Acad. Sc.*, 15 novembre 1909; *Thèse*, Copenhague, 1910, p. 56-66; *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, t. XXXV, 1913.

(6) M. Horn a appliqué la méthode des approximations successives à la détermination de la valeur asymptotique des solutions de certaines classes d'équations aux différences finies (*Math. Ann.*, t. LIII, 1900, p. 177-192, et *Journ. für Mathematik*, t. CXXXVIII, 1910, p. 159-191). Mais le but que s'est proposé M. Horn est différent du nôtre; il consi-

généralisations. Dans les pages suivantes nous allons faire des hypothèses beaucoup moins restrictives relatives aux coefficients et nous allons démontrer l'existence d'un système fondamental de solutions analytiques, holomorphes au voisinage de tout point qui se trouve à distance finie des points dans les ensembles (β), (α) et (γ).

Nous indiquerons pour chacune de ces solutions une seule expression analytique qui la représente dans tout son domaine d'existence, et qui est d'ailleurs très simple. Ces expressions ont encore l'avantage de faire voir quels sont les points singuliers des solutions et même de mettre en évidence la nature de quelques-unes de ces singularités.

Mais définissons d'abord ce que nous voulons entendre par un système fondamental de solutions.

2. *Soient données n solutions $u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x)$ de l'équation* (1); *nous dirons que celles-ci forment un système fondamental de solutions s'il n'existe aucune relation linéaire de la forme*

$$\sum_{i=1}^{i=n} \pi_i(x)\, u_i(x) = 0,$$

où les $\pi_i(x)$ sont des fonctions périodiques $[\pi_i(x+1) = \pi_i(x)]$ telles qu'il existe une valeur (1) *au moins de x pour laquelle elles sont finies et ne s'annulent pas toutes à la fois.*

Il va sans dire que les $\pi_i(x)$ pourront être des fonctions discontinues. Soit a un point qui n'est pas congruent à aucun des points singuliers de l'équation (1). Il résulte de cette définition qu'une solution $u_i(x)$ appartenant à un système fondamental ne peut pas s'annuler pour les n valeurs consécutives $x = a, a+1, \ldots, a+n-1$, car en ce cas $u_i(x)$ s'annulerait pour toute valeur de x congruente à a et l'on

---

dère la variable x comme un nombre entier; pour nous, x est une variable continue. M. Horn ne démontre donc pas l'existence de solutions analytiques. Dans cet ordre d'idées il faut citer aussi les recherches de M. Pincherle et les travaux plus récents de M. Perron (*Journal für Mathematik*, t. CXXXVI, p. 17-37; *Acta mathematica*, t. XXXIV, p. 109-137).

(1) Cette valeur ne doit pas être congruente à un des points singuliers de l'équation aux différences.

aurait alors

$$\pi_i(x)\, u_i(x) = 0,$$

où la fonction périodique $\pi_i(x)$ possède une valeur finie quelconque pour $x = a$, $a \pm 1$, $a \pm 2$, ... pendant qu'elle est nulle pour toute autre valeur de x; mais l'existence d'une telle égalité est contraire à la définition de $u_i(x)$.

On peut indiquer une autre définition d'un système fondamental de solutions, équivalente à la précédente, mais qui est parfois plus commode.

Considérons le déterminant

$$D(x) = \begin{vmatrix} u_1(x) & u_2(x) & \ldots & u_n(x) \\ u_1(x+1) & u_2(x+1) & \ldots & u_n(x+1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ u_1(x+n-1) & u_2(x+n-1) & \ldots & u_n(x+n-1) \end{vmatrix}.$$

Écrivons dans ce déterminant $x+1$ au lieu de x et joignons à la dernière ligne la première, la deuxième, ... ligne multipliée respectivement par $P_1(x) : P_n(x)$; $P_2(x) : P_n(x)$, ... On trouve l'équation aux différences finies

$$D(x+1) = (-1)^n \frac{P_0(x)}{P_n(x)} D(x). \tag{3}$$

Soit, comme plus haut, a un nombre qui n'est congruent à aucun des points singuliers de l'équation (1), il résulte de cette équation que, si $D(x)$ s'annule pour $x = a$, il s'annule aussi pour $x = a \pm 1$, $a \pm 2$, $a \pm 3$, ... et de même, si $D(x)$ est différent de zéro pour $x = a$, il est différent de zéro pour $x = a \pm 1$, $a \pm 2$, $a \pm 3$, ...

Cela posé, nous pouvons démontrer le théorème suivant :

Si les fonctions $u_1(x)$, ..., $u_n(x)$ forment un système fondamental de solutions de l'équation (1), le déterminant $D(x)$ ne peut pas s'annuler pour aucune valeur de x qui n'est pas congruente à un des points singuliers de l'équation.

Car supposons que $D(x)$ s'annulât par une telle valeur a de x. On pouvait, en ce cas, trouver n fonctions $\varphi_1(a)$, ..., $\varphi_n(a)$ telles que

$$u_1(a+s)\varphi_1(a)+u_2(a+s)\varphi_2(a)+\ldots+u_n(a+s)\varphi_n(a)=0$$
$$(s=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1);$$

il suffit en effet de déterminer $\varphi_1(a)$, ..., $\varphi_n(a)$ comme des mineurs des éléments dans la dernière ligne de $D(a)$. En choisissant au contraire les mineurs des éléments dans la première ligne de $D(a)$, on trouve cet autre système d'équations :

$$u_1(a+s)\varphi_1(a+1)+u_2(a+s)\varphi_2(a+1)+\ldots+u_n(a+s)\varphi_n(a+1)=0$$
$$(s=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1).$$

Les fonctions $\varphi_1(a), \ldots, \varphi_n(a)$ d'une part et $\varphi_1(a+1), \ldots, \varphi_n(a+1)$ d'autre part satisfont donc aux mêmes $(n-1)$ équations linéaires et homogènes. Si l'un au moins de ces mineurs, $\varphi_n(x)$ par exemple, est différent de zéro pour $x=a,\ a+1,\ a+2,\ \ldots$, ces équations permettent de conclure qu'on a

$$\frac{\varphi_i(a)}{\varphi_n(a)}=\frac{\varphi_i(a+1)}{\varphi_n(a+1)} \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1).$$

D'après ce que nous avons dit plus haut, on a de même $D(a+1)=0$. On en conclut que

$$\frac{\varphi_i(a+1)}{\varphi_n(a+1)}=\frac{\varphi_i(a+2)}{\varphi_n(a+2)} \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1),$$

et ainsi de suite. Il existe alors entre les solutions $u_1(x)$, ..., $u_n(x)$ une relation linéaire à coefficients périodiques $\pi_i(x)$ qui ne sont pas tous égaux à zéro; il suffit en effet de prendre les $\pi_i(x)$ proportionnels aux $\varphi_i(a)$ pour les valeurs de x congruentes à a et $\pi_i(x)=0$ pour toute autre valeur de x. Mais une telle relation ne peut pas exister, parce que les $u_i(x)$ forment un système fondamental. Le déterminant $D(x)$ ne s'annule donc pour aucune valeur de x telle que a.

Si le déterminant $\varphi_n(a)$ est nul, on peut reprendre pour ce déterminant le raisonnement que nous venons d'appliquer à $D(x)$ et l'on arrive ainsi finalement à démontrer l'existence d'une relation linéaire entre un nombre de solutions inférieur à n, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Inversement, on démontre aisément le théorème suivant :

Si le déterminant $D(x)$ *des fonctions* $u_1(x), \ldots, u_n(x)$ *est différent de zéro pour toute valeur de* x *telle que* a, *ces fonctions forment un système fondamental de solutions.*

Car s'il existait entre $u_1(x), \ldots, u_n(x)$ une relation linéaire dont les coefficients ne sont pas tous égaux à zéro, il y aurait une valeur de x au moins pour laquelle tous les éléments dans une des colonnes de $D(x)$, ou bien s'annuleraient, ou bien seraient une combinaison linéaire des éléments des autres colonnes.

Pour que les fonctions $u_1(x), \ldots, u_n(x)$ forment un système fondamental, il faut et il suffit donc que le déterminant $D(x)$ dans une bande quelconque $a \leqq \sigma < a+1$ soit différent de zéro pour toute valeur de x qui n'est pas congruente à l'un des points singuliers de l'équation aux différences. Il est essentiel de remarquer qu'il ne suffit pas que le déterminant $D(x)$ ne soit pas identiquement zéro. Considérons par exemple l'équation à coefficients constants

$$u(x+2) - (a_1 + a_2)\, u(x+1) + a_1 a_2\, u(x) = 0. \tag{4}$$

Soit $a_1 \neq a_2$. Les deux solutions a_1^x et a_2^x forment un système fondamental, mais il n'en est pas ainsi pour

$$a_1^x \quad \text{et} \quad a_1^x + a_2^x \sin 2\pi x,$$

parce que ces deux solutions se confondent et que le déterminant s'annule pour les valeurs entières de x.

3. Si les fonctions $u_1(x), \ldots, u_n(x)$ forment un système fondamental de l'équation (1), cette équation admet évidemment comme solution la fonction

$$\sum_{i=1}^{i=n} \pi_i(x)\, u_i(x),$$

les $\pi_i(x)$ étant des fonctions périodiques arbitraires avec la période 1. *Je dis que cette solution est la solution générale de l'équation* (1). En effet, soit $u(x)$ une solution quelconque, on a les $n+1$ équations suivantes :

$$\sum_{i=0}^{i=n} P_i(x)\,u(x+i) = 0,$$

$$\sum_{i=0}^{i=n} P_i(x)\,u_s(x+i) = 0 \qquad (s = 1, 2, \ldots, n).$$

En éliminant les coefficients $P_i(x)$, on trouve l'équation

$$\begin{vmatrix} u(x) & u(x+1) & \ldots & u(x+n) \\ u_1(x) & u_1(x+1) & \ldots & u_1(x+n) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ u_n(x) & u_n(x+1) & \ldots & u_n(x+n) \end{vmatrix} = 0.$$

Le déterminant au premier membre étant identiquement zéro, il existe nécessairement une relation de la forme

$$\pi(x)\,u(x) + \pi_1(x)\,u_1(x) + \ldots + \pi_n(x)\,u_n(x) = 0,$$

$\pi(x)$ étant une fonction qui est différente de zéro pour toute valeur de x qui n'est pas congruente à l'un des points singuliers de l'équation (1), parce que les $u_i(x)$ forment un système fondamental.

C. Q. F. D.

Le problème d'intégration se réduit donc à la détermination d'un système fondamental de solutions.

Si une solution particulière $\overline{u}(x)$

$$\overline{u}(x) = \sum_{i=1}^{i=n} \pi_i(x)\,u_i(x)$$

par définition est égale à une fonction donnée $\varphi(x)$ dans l'intervalle $c \leqq \sigma < c+n$, les fonctions périodiques $\pi_i(x)$ se déterminent dans l'intervalle $c \leqq \sigma < c+1$ par les n équations

$$\sum_{i=1}^{i=n} u_i(x+s)\,\pi_i(x) = \varphi(x+s) \qquad (s = 0, 1, \ldots, n-1), \qquad c \leqq \sigma < c+1$$

dont le déterminant est différent de zéro. On voit que les fonctions

$\pi_i(x)$ sont en général discontinues le long des droites $\sigma = c + m$, où m désigne un entier.

MM. Casorati et Pincherle ont déjà fait voir le rôle que joue le déterminant $D(x)$ dans la théorie des équations aux différences. M. Wallenberg, dans le Livre que nous avons cité plus haut, a exposé en détail les questions que nous venons de traiter. Nous avons pourtant cru utile de les reprendre ici, parce que notre définition d'un système fondamental est différente de celle de M. Wallenberg. D'après M. Wallenberg, les solutions $u_1(x), \ldots, u_n(x)$ forment un système fondamental si le déterminant $D(x)$ n'est *pas identiquement zéro*. Les solutions de M. Wallenberg sont d'ailleurs non analytiques et discontinues dans une infinité de points. On pourrait alors pour l'équation (4) définir un système fondamental $u_1(x)$, $u_2(x)$ par exemple de la manière suivante : $u_i(x) = a_i^x$ $(i = 1, 2)$ pour des valeurs entières de x; $u_i(x) = 0$ pour toute autre valeur de x. Mais il ne convient pas d'attribuer à ces solutions le nom de *système fondamental*, parce qu'elles ne possèdent pas la propriété essentielle des solutions fondamentales d'être telles que la solution générale se compose linéairement d'elles. Il nous semble préférable d'adopter la définition plus restreinte que nous venons de proposer afin d'éviter une telle possibilité.

4. Considérons un domaine fini quelconque limité par exemple par un cercle C avec un rayon très grand. Traçons des cercles avec des rayons très petits autour de ceux des points des ensembles (β), (α) et (γ) qui se trouvent à l'intérieur de C. S'il y a entre les β_i des points critiques nous traçons des coupures rectilignes parallèles à l'axe des nombres réels de β_i à $-\infty$ et de $\beta_i + n$ à $+\infty$. On trouve en général un ou plusieurs domaines connexes limités par le cercle C, les petits cercles et les coupures, s'il y en a. Soit Γ un de ces domaines [1]. Désignons par $f(x)$ une fonction pour le moment arbitraire, mais dont nous disposerons plus tard. Soit $R_0(x)$, $R_1(x)$, $R_2(x)$, ... une suite de fonctions que nous allons choisir de manière que la série

$$u(x) = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} R_\nu(x) f(x+\nu), \tag{5}$$

[1] On suppose donc qu'un tel domaine existe.

à l'intérieur du domaine Γ, représente une solution de l'équation (1). On a évidemment

$$u(x+i) = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} R_{\nu-i}(x+i) f(x+\nu) \qquad (i = 0, 1, \ldots, n).$$

Multiplions ces équations respectivement par $P_0(x)$, $P_1(x)$, ..., $P_n(x)$ et ajoutons ensemble, on trouve

$$\begin{aligned}&\sum_{i=0}^{i=n} P_i(x) u(x+i)\\ &= \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} [P_0(x) R_\nu(x) + P_1(x) R_{\nu-1}(x+1) + \ldots + P_n(x) R_{\nu-n}(x+n)] f(x+\nu).\end{aligned}$$

La série (5) satisfait donc formellement à l'équation (1) si l'on détermine les R_ν, de sorte qu'on ait

$$(6) \quad P_0(x) R_\nu(x) + P_1(x) R_{\nu-1}(x+1) + \ldots + P_n(x) R_{\nu-n}(x+n) = 0,$$

quel que soit l'entier ν. En choisissant arbitrairement n des fonctions R_ν, cette équation détermine les autres par voie récursive. Nous allons faire un choix de ces fonctions arbitraires qui nous conduira à des résultats particulièrement simples. Nous posons

$$(7) \quad P_0(x) R_0(x) + 1 = 0, \qquad R_{-1}(x) = R_{-2}(x) = \ldots = R_{-(n-1)}(x) = 0.$$

On a les équations

$$(8) \quad \left\{\begin{array}{l} P_0(x) R_0(x) + 1 = 0, \\ P_0(x) R_1(x) + P_1(x) R_0(x+1) = 0, \\ P_0(x) R_2(x) + P_1(x) R_1(x+1) + P_2(x) R_0(x+2) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ P_0(x) R_\nu(x) + P_1(x) R_{\nu-1}(x+1) + \ldots + P_n(x) R_{\nu-n}(x+n) = 0. \end{array}\right.$$

On en déduira un autre système d'équations qui est fort remarquable et qui est plus commode pour le calcul des fonctions $R_\nu(x)$. Multiplions la première et la deuxième des équations (8) respectivement par $P_1(x)$ et $P_0(x+1)$ et ajoutons ensemble; on trouve la deuxième des équations (9). Multiplions ensuite la première, la deuxième et la troisième des équations (8) respectivement par $P_2(x)$, $P_1(x+1)$, $P_0(x+2)$ et ajoutons ensemble; on trouve la troisième des équations (9):

$$(9)\quad \begin{cases} P_0(x)\,R_0(x)+1=0, \\ P_0(x+1)\,R_1(x)+P_1(x)\,R_0(x)=0, \\ P_0(x+2)\,R_2(x)+P_1(x+1)\,R_1(x)+P_2(x)\,R_0(x)=0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ P_0(x+\nu)\,R_\nu(x)+P_1(x+\nu-1)\,R_{\nu-1}(x)+\ldots+P_n(x+\nu-n)\,R_{\nu-n}(x)=0, \end{cases}$$

généralement en multipliant la $(\nu+1)^{\text{ième}}$, la $\nu^{\text{ième}}$, ..., la $(\nu-n+1)^{\text{ième}}$ des équations (8) respectivement par $P_0(x+\nu)$, $P_1(x+\nu-1)$, ..., $P_n(x+\nu-n)$ et en ajoutant ensemble, on trouve

$$(10)\quad P_0(x)\,\varphi(\nu, x)+P_1(x)\,\varphi(\nu-1, x+1)+\ldots+P_n(x)\,\varphi(\nu-n, x+n)=0,$$

où nous avons posé

$$\varphi(\nu, x)=\sum_{s=0}^{n} P_s(x+\nu-s)\,R_{\nu-s}(x).$$

Nous pouvons vérifier directement qu'on a

$$\varphi(1, x)=\varphi(2, x)=\ldots=\varphi(n, x)=0.$$

De l'équation (10) résulte donc que $\varphi(\nu, x)$ est égal à zéro quel que soit l'entier positif ou négatif ν. Pour des valeurs négatives de ν on trouve :

$$(9\ bis)\quad \begin{cases} P_n(x-n)\,R_{-n}(x)-1=0, \\ P_n(x-n-1)\,R_{-n-1}(x)+P_{n-1}(x-n)\,R_{-n}(x)=0, \\ P_n(x-n-2)R_{-n-2}(x)+P_{n-1}(x-n-1)R_{-n-1}(x)+P_{n-2}(x-n)R_{-n}(x)=0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ P_n(x+\nu)\,R_\nu(x)+P_{n-1}(x+\nu+1)\,R_{\nu+1}(x)+\ldots+P_0(x+\nu+n)R_{\nu+n}(x)=0. \end{cases}$$

Les équations (9) *et* (9 *bis*) *montrent que les* $R_\nu(x)$ *sont des fonctions rationnelles des coefficients de l'équation* (1) *et de leurs différences successives* [1].

---

[1] Pendant la correction des épreuves, j'ai pris connaissance d'un Mémoire important de M. Perron dans lequel l'identité des équations (8) et (9) a été signalée (*l. c.*, p. 118-119).

5. Relativement à la manière dont se comportent ces coefficients à l'infini, je ferai maintenant l'hypothèse suivante. Je suppose qu'il soit possible de trouver un nombre positif $M > 1$ et un entier non négatif p tel qu'on ait, quel que soit x dans Γ et quel que soit l'entier positif ν :

$$(11) \quad \left|\frac{P_i(x+\nu)}{P_0(x+\nu+i)}\right| < M\, e^{\nu^p}, \qquad \left|\frac{P_{n-i}(x-\nu)}{P_n(x-\nu-i)}\right| < M\, e^{\nu^p} \qquad (i=1, 2, \ldots, n).$$

C'est par exemple toujours possible si les fonctions $P_0(x)$, $P_1(x)$, ..., $P_n(x)$ ne croissent ni ne décroissent plus vite qu'une fonction entière de genre fini, quand x tend vers l'infini le long d'une droite parallèle à l'axe des nombres réels. Ces hypothèses satisfaites, il est facile de choisir la fonction arbitraire $f(x)$ de sorte que la série (5) soit convergente. En posant

$$[\nu]^p = 1^p + 2^p + 3^p + \ldots + \nu^p,$$

on voit en effet qu'on a pour $s > 0$

$$|R_s(x)| < n^s M^s e^{[s-1]^p};$$

car supposons que cette égalité soit vraie pour $s = 1, 2, \ldots, \nu - 1$, on obtient de la dernière des équations (9) l'inégalité

$$|R_\nu(x)| < n^{\nu-1} M^\nu e^{[\nu-1]^p} + n^{\nu-2} M^{\nu-1} e^{[\nu-2]^p} + \ldots + n^{\nu-n} M^{\nu-n+1} e^{[\nu-n]^p} < n^\nu M^\nu e^{[\nu-1]^p}.$$

Des relations (9 *bis*) on déduit de la même manière l'inégalité

$$|R_{-\nu}(x)| < n^\nu M^\nu e^{[\nu-1]^p},$$

valable quel que soit x dans Γ. Mais on a pour $\nu > 1$

$$[\nu]^p < \nu^{p+1}.$$

Si l'on pose

$$f(x) = e^{-x^{2(p+1)}},$$

la série (5) est par conséquent absolument et uniformément convergente dans le domaine Γ. Chaque terme est une fonction analytique holomorphe dans le domaine Γ; de la convergence uniforme on conclut donc que la série représente une solution de l'équation (1) qui est holomorphe dans le domaine Γ.

Pour former un système fondamental de solutions on peut procéder de la manière suivante : Posons

$$(12) \qquad u_i(x) = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} R_\nu(x) f_i(x+\nu) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Soit a un point quelconque qui n'est congruent à aucun des points singuliers de l'équation (1). Posons

$$f_i(x) = \frac{\sin \pi(x-a-i+1)}{\pi(x-a-i+1)} e^{-(x-a-i+1)^{2(p+1)}},$$

et rappelons qu'on a

$$R_{-1}(x) = R_{-2}(x) = \ldots = R_{-(n-1)}(x) = 0.$$

Calculons la valeur du déterminant $D(x)$

$$D(x) = \begin{vmatrix} u_1(x) & u_2(x) & \ldots & u_n(x) \\ u_1(x+1) & u_2(x+1) & \ldots & u_n(x+1) \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ u_1(x+n-1) & u_2(x+n-1) & \ldots & u_n(x+n-1) \end{vmatrix}$$

dans le point $x = a$.

On trouve

$$\begin{array}{ll} u_1(a) = R_0(a), & u_1(a+1) = u_1(a+2) = \ldots = u_1(a+n-1) = 0, \\ u_2(a+1) = R_0(a+1), & u_2(a+2) = u_2(a+3) = \ldots = u_2(a+n-1) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ u_n(a+n-1) = R_0(a+n-1). & \end{array}$$

On a, par conséquent,

$$D(a) = R_0(a) R_0(a+1) \ldots R_0(a+n-1) = \frac{(-1)^n}{P_0(a) P_0(a+1) \ldots P_0(a+n-1)}.$$

Mais cette quantité est différente de zéro. Le déterminant $D(x)$ est une fonction analytique de x, holomorphe dans le domaine Γ, et qui n'est pas identiquement zéro. Deux cas se présentent maintenant :

1° Le déterminant est différent de zéro pour toute valeur de x qui n'est pas congruente à l'un des points singuliers;

2° Le déterminant admet *un nombre fini* de zéros dans le domaine Γ.

Dans le premier cas, les solutions $u_1(x)$, $u_2(x)$, ..., $u_n(x)$ forment un système fondamental. Dans le second cas, soit ε un des zéros de $D(x)$. Il existe n constantes $\varphi_1(\varepsilon)$, $\varphi_2(\varepsilon)$, ..., $\varphi_n(\varepsilon)$ tels que la fonction $\sum_{i=1}^{i=n} \varphi_i(\varepsilon) u_i(x)$ admet les points ε, $\varepsilon \pm 1$, $\varepsilon \pm 2$, ... comme des zéros. Soit φ_m la dernière de ces constantes qui est différente de zéro. Posons

$$u_i^{(1)}(x) = u_i(x), \qquad i \gtrless m; \qquad u_m^{(1)}(x) = \frac{\sum_{i=1}^{i=m} \varphi_i(\varepsilon)\, u_i(x)}{\sin 2\pi(x-\varepsilon)}$$

et considérons, au lieu des $u_i(x)$, les $u_i^{(1)}(x)$. Ces solutions sont holomorphes dans le point $x = \varepsilon$ comme les $u_i(x)$. Le déterminant $D^{(1)}(x)$ des solutions $u_i^{(1)}(x)$ est égal à

$$D^{(1)}(x) = \frac{\varphi_m(\varepsilon)}{\sin 2\pi(x-\varepsilon)} D(x)$$

et $\varphi_m(\varepsilon)$ est par hypothèse $\gtrless 0$. Si ε était un zéro d'ordre de multiplicité r pour $D(x)$, c'est un zéro d'ordre de multiplicité $r-1$ pour $D^{(1)}(x)$. En répétant cette opération un nombre suffisant de fois, d'abord pour le point ε et ensuite pour les autres zéros de $D(x)$ (s'il y en a), on arrive finalement après un nombre *fini* d'opérations à trouver n fonctions qui forment un système fondamental de solutions au sens que nous avons prêté à ce mot plus haut. Autrement dit, *en choisissant convenablement les fonctions $f_i(x)$, les n séries* (12) *représentent un système fondamental de solutions qui sont des fonctions holomorphes dans le domaine Γ. Ces solutions admettent, en général, comme points singuliers les points des ensembles* (β), (α) *et* (γ) *et des ensembles dérivés;* il faut y ajouter, s'il y a lieu, le point à l'infini. Les points des ensembles (α) et (γ) sont des pôles, les autres points singuliers sont en général des points essentiels de nos solutions. Nous ne nous arrêterons pas ici à l'étude de ces derniers points. Nous ajouterons seulement une courte remarque relative aux pôles des solutions.

6. Les racines α_i de $P_0(x) = 0$ se répartissent en différents groupes de sorte que toutes les racines qui sont différentes par des entiers se trouvent dans un même groupe. Soit α_p, α_{p+1}, α_{p+2}, ... un tel groupe et soit $n_0, n_1, n_2, \ldots$ les multiplicités de ces racines. Supposons qu'elles soient numérotées de sorte qu'on ait

$$\mathfrak{R}(\alpha_p) > \mathfrak{R}(\alpha_{p+1}) > \mathfrak{R}(\alpha_{p+2}) > \ldots.$$

Les solutions étant holomorphes dans les points $\alpha_p + 1$, $\alpha_p + 2$, ..., $\alpha_p + n$, on voit que α_p est un pôle d'ordre n_0 au plus, et généralement α_{p+s} est un pôle d'ordre $n_0 + n_1 + \ldots + n_s$ au plus de nos solutions.

De même les racines γ_i se répartissent en différents groupes. Soit $\gamma_p, \gamma_{p+1}, \gamma_{p+2}, \ldots$ un tel groupe, et soit

$$\mathfrak{R}(\gamma_p) < \mathfrak{R}(\gamma_{p+1}) < \mathfrak{R}(\gamma_{p+2}) < \ldots.$$

Désignons par m_s la multiplicité de la racine γ_{p+s}. On voit que nos solutions admettent les points

$$\gamma_p, \quad \gamma_p + 1, \quad \gamma_p + 2, \quad \ldots, \quad \gamma_{p+1} - 1$$

comme des pôles d'ordre m_0 au plus et les points

$$\gamma_{p+s}, \quad \gamma_{p+s} + 1, \quad \gamma_{p+s} + 2, \quad \ldots, \quad \gamma_{p+s+1} - 1$$

comme des pôles d'ordre $(m_0 + m_1 + \ldots + m_s)$ au plus. S'il n'y a dans un groupe qu'un nombre fini de racines, l'ordre de multiplicité des pôles correspondants reste inférieur à un nombre fixe.

Les points des ensembles dérivés des ensembles (α) et (γ) sont des points limites de pôles; ce sont donc des points essentiels de nos solutions.

Si les coefficients $P_i(x)$ de l'équation (1) sont des polynomes en x, tous les points singuliers appartiennent aux ensembles (α) et (γ). *L'équation aux différences admet donc, en ce cas, un système fondamental de solutions méromorphes.*

Si les coefficients $P_i(x)$ sont des fonctions uniformes, il en est de même des solutions. Cette remarque à elle seule montre la différence profonde qu'il y a entre les équations différentielles et les équations aux différences finies. Pour les solutions de ces dernières équations les singularités se trouvent dispersées dans tout le plan; mais dans le cas limite d'une équation différentielle elles se contractent et forment des points critiques.

7. Si l'on se borne à considérer des valeurs réelles de la variable x on peut se débarrasser des conditions (11) relativement à la croissance et décroissance des coefficients $P_i(x)$. En effet, soit M_ν la plus grande valeur que prend les modules

$$|R_\nu(x)| \quad \text{et} \quad |R_{-\nu}(x)|$$

dans le domaine Γ. Soit N un entier positif qui est plus grand qu'un nombre quelconque dans le domaine Γ. Posons

$$f(x) = e^{-F(x^2)},$$

où $F(x)$ désigne une fonction entière qui est positive pour les valeurs réelles de x et qui est toujours croissante quand x croît de o à ∞. On a

$$\left|\sum_{\nu=N}^{\nu=\infty} R_\nu(x) \; f(x+\nu)\right| < \sum_{\nu=N}^{\nu=\infty} M_\nu \, e^{-F[(\nu-N)^2]},$$

$$\left|\sum_{\nu=N}^{\nu=\infty} R_{-\nu}(x) \, f(x-\nu)\right| < \sum_{\nu=N}^{\nu=\infty} M_\nu \, e^{-F[(\nu-N)^2]}.$$

Mais quelque vite que croissent les nombres $M_1, M_2, \ldots, M_\nu, \ldots$ quand ν tend vers l'infini, on peut, en vertu d'un théorème de Poincaré (¹), toujours choisir la fonction entière $F(x)$, de sorte que la série au second membre de ces inégalités soit convergente. On en conclut qu'on peut déterminer n fonctions $f_i(x)$, de sorte que les séries (12)

(¹) *American Journal of Mathematics*, t. XIV, p. 214. Une démonstration très simple de ce théorème a été donnée par M. Borel dans ses *Leçons sur les séries à termes positifs* (Paris, 1902), p. 27.

convergent uniformément dans le domaine Γ. Il en résulte en particulier le théorème suivant :

Si les coefficients $(i = 0, 1, \ldots, n)$ *de l'équation* (1) *sont finis et continus, et si les coefficients* $P_0(x)$ *et* $P_n(x)$ *sont différents de zéro pour toute valeur finie de la variable réelle* x, *il existe un système fondamental de solutions qui sont des fonctions continues de* x *dans tout intervalle fini* Γ. *Ces solutions se représentent par des séries de la forme* (12) *uniformément convergentes dans l'intervalle* Γ.

Le 1er novembre 1912.