C. SOMIGLIANA

Sur une classification des maxima et des minima des fonctions de plusieurs variables

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 31 (1914), p. 87-97
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1914_3_31__87_0>

SUR UNE

CLASSIFICATION DES MAXIMA ET DES MINIMA

DES

FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES;

Par M. le Professeur C. SOMIGLIANA,

à Turin.

I.

Lorsqu'on étudie au point de vue morphologique une région montueuse, par exemple, une partie assez étendue de la chaîne des Alpes, on aperçoit tout de suite que les lignes de division des différents bassins hydrographiques convergent vers les *sommets* de la région. Ces lignes, dont la définition physique est évidente, s'appellent ordinairement *arêtes*. Un fait analogue se présente, quoique moins évident, dans les lignes qu'on peut appeler *lignes de vallées;* ce sont celles que suivent les cours d'eau.

Il s'ensuit que, pour chaque sommet, il y a un nombre bien déterminé de lignes d'*arête* et de lignes de *vallée* qui s'entre-croisent dans ce point. Le nombre des premières est égal au nombre des secondes, parce que chaque arête est comprise entre deux lignes de vallée, et réciproquement. Il y a ainsi des sommets auxquels arrivent une, deux, trois, ... lignes d'arête et un nombre égal de lignes de vallée; et pour cette raison on peut les caractériser au moyen de ce nombre en les appelant respectivement sommets de *premier ordre*, de *second ordre*, etc.

Dans les Alpes est très fréquent le cas des sommets de troisième ordre, ce qu'on peut facilement vérifier en observant soit un modèle en relief, soit une de ces cartes géographiques où les chaînes montueuses sont indiquées au moyen de leurs lignes d'arête.

Maintenant une superficie montueuse peut être considérée comme un modèle grandiose d'une fonction de deux variables, si les verticales, admises parallèles, sont considérées comme ordonnées référées à un même plan horizontal. Les sommets représentent alors les maxima de la fonction. Les exemples de minima ne manquent pas, quoiqu'ils soient plus rares et presque toujours au-dessous des eaux des lacs ou des mers. Il est évident qu'on pourrait établir pour ces points une classification analogue à celle des sommets.

Il se présente alors bien naturellement l'idée d'essayer d'obtenir, avec des moyens mathématiques rigoureux, une classification des maxima et des minima des fonctions de deux variables, qui soit analogue à celle que nous avons sommairement indiquée pour les sommets des montagnes ou pour les points de plus grande profondeur des lacs ou des mers. Il en résulterait alors une plus grande précision aussi pour cette classification topographique.

Avant tout, il est nécessaire de définir avec rigueur et de déterminer analytiquement les lignes que nous avons appelées *lignes d'arête* et de *vallée*. On peut dire aussi que la question est toute dans ce problème, car lorsque ces lignes ont été trouvées analytiquement, la classification indiquée peut être intégralement transportée dans le champ de la théorie des fonctions.

Considérons un point de maximum d'une fonction de deux variables. Alentour de ce point les lignes de niveau, lorsqu'il n'y existe pas de singularités particulières, seront des lignes fermées, ne se coupant pas et qui, à la limite, se réduiront au point de maximum considéré. Sur une de ces lignes, dans les voisinages du maximum, considérons l'angle ω que la normale extérieure à la surface fait avec la verticale dirigée en haut. Cet angle sera en général $< \frac{\pi}{2}$ et variera vers la ligne de niveau avec continuité, passant par un nombre égal de maxima et de minima. Sur les différentes lignes de niveau, ces maxima et minima se suivront avec continuité et constitueront en général sur la surface des lignes, que des considérations très simples font voir être les lignes d'arête et de vallée, que nous avons précédemment considérées.

Soit $z = u(x, y)$ la fonction donnée ; soit s l'arc d'une ligne de niveau. Sur cette ligne les maxima et les minima de ω sont déterminés par les équations

$$u(x, y) = \text{const.}, \qquad \frac{d\omega}{ds} = 0.$$

Par conséquent, sur une ligne quelconque de niveau et dans ces points de maximum et de minimum pour ω, nous aurons, en indiquant par dx, dy les projections de ds sur un plan horizontal,

$$\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = 0, \qquad \frac{\partial \omega}{\partial x} dx + \frac{\partial \omega}{\partial y} dy = 0.$$

En éliminant dx, dy entre ces équations, nous trouvons

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \omega}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial \omega}{\partial x} = 0,$$

et parce que

$$\cos\omega = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}},$$

en posant

$$\Delta_1 u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2,$$

nous pouvons écrire pour l'équation précédente

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \Delta_1 u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial \Delta_1 u}{\partial x} = 0. \tag{1}$$

Cette équation, avec l'équation de la surface

$$z = u(x, y), \tag{2}$$

détermine simultanément les lignes d'arête et de vallée, comme les équations

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

d'une manière parfaitement analogue, déterminent simultanément les points de maximum et de minimum de la fonction.

Il faut observer que l'équation (1) n'étant pas une équation différentielle, la détermination des lignes d'arête et de vallée n'exige aucune intégration. Cette équation montre que le système des lignes d'arête et de vallée passe pour tous les points de maximum et de minimum et aussi pour tous les points qui, n'étant ni des maxima ni des minima, ont un plan tangent horizontal. Dans les voisinages d'un point de maximum ou de minimum, le premier membre de l'équation (1) se décomposera généralement en plusieurs facteurs et par le nombre de ces facteurs on pourra décider l'ordre de maximum ou de minimum considéré.

Cette théorie des lignes d'arête et de vallée peut être aussi considérée comme une extension de la théorie ordinaire des maxima et minima. En effet, suivant ces lignes, à partir d'un maximum ou d'un minimum, la fonction décroît ou croît avec la plus grande rapidité en comparaison des lignes voisines. Ainsi, comme les maxima et minima ordinaires sont des lieux à dimension *zéro*, caractérisés par la supériorité, ou le défaut, des valeurs de la fonction, ces lignes sont des lieux géométriques à dimension *un*, qui sont pareillement caractérisés par une certaine supériorité, ou par un certain défaut, des valeurs de la fonction. A ce même point de vue, la théorie de ces lignes peut être utile dans l'étude de la manière de se comporter d'une fonction de deux variables dans le champ où elle est donnée.

II.

La question peut être envisagée à un autre point de vue plus convenable pour l'extension au cas des fonctions d'un nombre quelconque de variables indépendantes.

Imaginons la projection orthogonale des lignes de niveau vers le plan horizontal xy. Soient du l'incrément de la fonction u dans le passage d'une ligne de niveau à une autre infiniment voisine et dn la distance normale entre ces deux lignes en un point quelconque. On a alors, par une formule élémentaire bien connue,

$$dn = \frac{du}{\sqrt{\Delta_1 u}}. \tag{3}$$

En conséquence, si nous cherchons les points d'une ligne de niveau auxquels correspondent des maxima ou des minima pour la distance dn, nous sommes conduits à chercher les maxima ou les minima de la fonction $\Delta_1 u$ avec la condition $u = \text{const.}$ C'est-à-dire nous sommes conduits au même problème analytique que nous avons déjà considéré. L'équation

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \Delta_1 u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial \Delta_1 u}{\partial x} = 0$$

représente ainsi dans le plan xy les lieux des points de maximum ou de minimum pour la distance entre les projections des lignes de niveau successifs.

Ces lieux sont les projections dans le plan xy des lignes d'arête et de vallée.

Pour passer au cas des fonctions de trois variables, imaginons construites dans l'espace dans les entourages d'un point de maximum ou de minimum les surfaces de niveau

$$u(x, y, z) = \text{const.}$$

Ces surfaces contiendront toutes dans leur intérieur le point de maximum ou de minimum et, en général, ne se couperont pas. Nous pouvons alors définir les lignes d'arête et de vallée comme les lieux des points de maximum ou de minimum pour la distance normale entre deux surfaces de niveaux successifs. Puisque la formule (3) peut être étendue à l'espace de trois dimensions, nous sommes alors conduits à la recherche de maxima et minima de la fonction

$$\Delta_1 u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2,$$

avec la condition $u = \text{const.}$, où la constante peut être quelconque. Avec la méthode des multiplicateurs, nous trouvons alors les équations

$$\frac{\partial \Delta_1 u}{\partial x} + \lambda \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial \Delta_1 u}{\partial y} + \lambda \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial \Delta_1 u}{\partial z} + \lambda \frac{\partial u}{\partial z} = 0,$$

d'où, en éliminant le multiplicateur λ, on a les deux équations

$$\frac{\dfrac{\partial u}{\partial x}}{\dfrac{\partial \Delta_1 u}{\partial x}} = \frac{\dfrac{\partial u}{\partial y}}{\dfrac{\partial \Delta_1 u}{\partial y}} = \frac{\dfrac{\partial u}{\partial z}}{\dfrac{\partial \Delta_1 u}{\partial z}},$$

qui représentent dans l'espace des variables x, y, z les équations simultanées des lignes d'arête et de vallée de la fonction u.

La formule (3) est valide aussi dans un espace à un nombre quelconque de dimensions (¹). Les définitions précédentes peuvent être ainsi étendues aux fonctions d'un nombre quelconque de variables indépendantes. Les équations des lignes d'arête et de vallée dans l'espace à n dimensions dans laquelle est donnée une fonction u des n variables x_1, x_2, ..., x_n seront

$$\frac{\dfrac{\partial u}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial \Delta_1 u}{\partial x_1}} = \frac{\dfrac{\partial u}{\partial x_2}}{\dfrac{\partial \Delta_1 u}{\partial x_2}} = \ldots = \frac{\dfrac{\partial u}{\partial x_n}}{\dfrac{\partial \Delta_1 u}{\partial x_n}},$$

où

$$\Delta_1 u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)^2.$$

Ces lignes d'arête et de vallée pourront être particulièrement utilisées pour étudier la manière de se comporter des fonctions de plusieurs variables qui représentent des faits physiques, puisqu'il est évident que, lorsqu'il s'agit des fonctions de plus d'une variable, la seule considération des maxima et minima ordinaires n'est pas suffisante pour donner une idée complète de la manière de varier des fonctions. Si, pour donner un exemple de ces applications, on prend en considération la fonction potentielle d'une ellipsoïde homogène, on trouve que le grand axe de l'ellipsoïde est une ligne d'arête et le petit axe une ligne de vallée.

La classification des maxima et des minima des fonctions de plus de deux variables par le nombre des lignes d'arête et de vallée, qui en sortent, est moins simple que dans le cas de deux. En effet, on ne peut

(¹) Beltrami, *Sulla teorica generale dei parametri differenziali* (*Mem. Acc. di Bologna*, 1867).

plus affirmer en général que le nombre des lignes d'arête est égal au nombre des lignes de vallée. Il faudrait alors indiquer séparément ces deux nombres, en appelant, par exemple, *ordre* le nombre des arêtes et *genre* le nombre des vallées. Un point de maximum, ou de minimum, pourra être ainsi d'ordre p et de genre q, p et q étant deux nombres entiers.

On peut trouver des considérations géométriques intéressantes sur la configuration des lignes de niveau et des lignes de plus grande pente sur une superficie montueuse dans les Mémoires suivants :

Cayley, *On Contour and Slope Lines* (*Phil. Mag.*, 1859; *Math. Pap.*, Vol. IV);

Maxwell, *On Hills and Dales* (*Phil. Mag.*, 1870; *Scient. Pap.*, Vol. II).

III.

Quelques exemples seront peut-être utiles pour donner une idée plus complète des résultats précédents.

Considérons la fonction très simple

$$z = u(x, y) = c - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2},$$

où a, b, c sont des constantes. Elle a un maximum pour $x = 0$, $y = 0$, $z = c$. La surface correspondante est un paraboloïde. On a ensuite

$$\Delta_1 u = 4\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}\right).$$

L'équation (1, I), dans ce cas, prend la forme

$$\frac{\partial(u, \Delta_1 u)}{\partial(x, y)} = \frac{xy}{a^2 b^2}\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right) = 0.$$

Les lignes d'arête et de vallée sont donc représentées dans le plan xy par les axes des x et des y, et sur la surface par les deux paraboles d'intersection avec les plans $x = 0$, $y = 0$.

Sur une ligne de niveau quelconque $z = k$, on peut écrire

$$\frac{1}{4}\Delta_1 u = \frac{c - k}{b^2} - \frac{x^2}{a^2}\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right),$$

et, si l'on suppose $a > b$, on voit tout de suite que $\Delta_1 u$ a un maximum pour $x = 0$ et un minimum pour $x = \pm a$. Il s'ensuit que la parabole qui se projette sur l'axe des x est une ligne d'arête et celle qui se projette sur l'axe des y est une ligne de vallée.

Le point de maximum de la fonction considérée est de *second ordre*.

Il est intéressant de voir qu'il existe effectivement des maxima de premier ordre.

Considérons pour cela la fonction

$$z = u(x, y) = p - r - ex,$$

où p, e sont des constantes, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Les lignes de niveau projetées dans le plan xy sont des ellipses, ayant un foyer commun dans l'origine, et toutes comprises à l'intérieur de l'ellipse

$$r + ex = p.$$

Leurs axes pour la valeur k de z sont

$$a = \frac{p - k}{1 - e^2}, \qquad b = \frac{p - k}{\sqrt{1 - e^2}}.$$

La surface est un cône; la fonction z a un maximum dans le sommet $x = y = 0$, $z = p$, et l'on trouve facilement

$$\frac{\partial(u, \Delta_1 u)}{\partial(x, y)} = \frac{2e}{r^3}(ex + r)y = 0.$$

Les lignes d'arête et de vallée, si elles existent, doivent se trouver sur l'axe des x, $y = 0$.

Mais en introduisant des coordonnées polaires

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta,$$

on trouve

$$\Delta_1 u = 1 + e^2 + 2e\cos\theta.$$

Donc $\Delta_1 u$ est minimum pour $\theta = \pi$ et il est maximum pour $\theta = 0$. La partie positive de l'axe des x correspond à une ligne de vallée, la partie négative à une ligne d'arête. Le maximum considéré est de *premier ordre*.

Enfin, pour donner un exemple relatif aux fonctions de trois variables, considérons la fonction potentielle de l'ellipsoïde homogène

$$V = D - Ax^2 - By^2 - Cz^2, \tag{1}$$

où, pour l'espace intérieur à l'ellipsoïde, A, B, C, D sont des constantes définies par les équations

$$A = \pi abc \int_0^\infty \frac{ds}{(a^2+s)\sqrt{R(s)}}, \qquad B = \pi abc \int_0^\infty \frac{ds}{(b^2+s)\sqrt{R(s)}},$$

$$C = \pi abc \int_0^\infty \frac{ds}{(c^2+s)\sqrt{R(s)}}, \qquad D = \pi abc \int_0^\infty \frac{ds}{\sqrt{R(s)}},$$

$$R(s) = \sqrt{(a^2+s)(b^2+s)(c^2+s)}.$$

La fonction a un maximum dans l'origine des coordonnées et, en supposant $a > b > c$, on a

$$A < B < C < D. \tag{2}$$

En dérivant, on trouve

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -2Ax, \qquad \frac{\partial V}{\partial y} = -2By, \qquad \frac{\partial V}{\partial z} = -2Cz, \tag{3}$$

$$\Delta_1 U = 4(A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2). \tag{4}$$

On a ainsi, pour l'équation des lignes d'arête et de vallée,

$$\frac{\partial(V, \Delta_1 V)}{\partial(y, z)} = -16BC(C - B)yz = 0,$$

$$\frac{\partial(V, \Delta_1 V)}{\partial(z, x)} = -16CA(A - C)zx = 0,$$

$$\frac{\partial(V, \Delta_1 V)}{\partial(x, y)} = -16AB(B - A)xy = 0.$$

Ces lignes sont donc représentées dans l'espace par les axes des coordonnées. Pour distinguer les unes des autres, on peut étudier directement l'expression de $\Delta_1 V$ sur les superficies équipotentielles.

Soit $V = c$ une de ces superficies. Au moyen de cette équation, on peut éliminer x^2 de l'expression de $\Delta_1 V$ et l'on trouve

$$\frac{1}{4}\Delta_1 V = A(D - c) + B(B - A)y^2 + C(C - A)z^2. \tag{5}$$

Puisque les différences $B - A$, $C - A$ sont positives, il s'ensuit que $\Delta_1 V$ est minimum pour $y = 0$, $z = 0$. Cela arrive quel que soit c; donc le grand axe de l'ellipsoïde est une ligne d'arête pour la fonction potentielle.

L'élimination de y^2 et de z^2 donne pareillement pour $\Delta_1 V$ les deux expressions suivantes :

$$\frac{1}{4}\Delta_1 V = B(D - c) + A(A - B)x^2 + C(C - B)z^2, \tag{6}$$

$$\frac{1}{4}\Delta_1 V = C(D - c) + A(A - C)x^2 + B(B - C)y^2. \tag{7}$$

Les différences $A - C$, $B - C$ étant négatives, nous pouvons démontrer, par un raisonnement analogue au précédent et au moyen de la seconde de ces formules, que l'axe des z représente une ligne de vallée.

Au contraire, l'axe des y n'est ni une arête, ni une vallée. En effet, les différences $A - B$, $C - B$ ont un signe différent; dans le point où la superficie est rencontrée par cet axe, $\Delta_1 V$ a un maximum pour la ligne $z = 0$ et un minimum pour la ligne $x = 0$. Il est pour $\Delta_1 V$ un point qu'on peut appeler *selle*. Cette propriété existe pour tous les points de l'axe des y ; cet axe est donc une ligne *lieu de point de selle*.

Il serait peut-être intéressant d'étudier en général, avec les lignes d'arête et de vallée, aussi ces lignes de selle.

Au centre de l'ellipsoïde attrayant s'entre-croisent donc deux lignes d'arête, deux lignes de vallée et deux lignes de selle.

Au dehors de l'ellipsoïde, ces propriétés se conservent. En effet, dans cet espace, la fonction V garde sa forme (1); toutefois les coefficients A, B, C, D ne sont plus des constantes, mais des fonctions de la racine positive λ de l'équation

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} + \frac{z^2}{c^2+\lambda} = 1,$$

déterminées par les formules

$$A = \pi abc \int_\lambda^\infty \frac{ds}{(a^2+s)\sqrt{R(s)}}, \qquad B = \ldots$$

Les dérivées de V conservent aussi leur forme (3), et pour cela l'expression (4) de $\Delta_1 V$ est encore formellement le même. Le calcul des équations des lignes d'arête et de vallée est au contraire bien plus compliqué; mais nous pouvons nous en passer en observant que les relations (2) sont encore valides et pareillement les expressions (5), (6), (7) de $\Delta_1 V$. On peut donc faire sur les maxima et minima de cette fonction des raisonnements identiques à ceux que nous venons de faire dans le cas précédent. L'axe des x est encore une arête et l'axe des z une vallée comme à l'intérieur de l'ellipsoïde.

Note historique. — Après la rédaction de ce travail, mon collègue professeur G. Fano m'a indiqué une ancienne Communication de Saint-Venant à la Société philomathique de Paris (*Procès-verbaux*, 1852) dans laquelle il a donné l'équation des lignes d'arête et de vallée d'une surface sous la forme

$$pq(r-t)-s(p^2-q^2)=0,$$

p, q, r, s, t étant les notations habituelles des dérivées premières et secondes de la fonction. De Saint-Venant les appelle *lignes de faîte* et *de thalweg*.

Cette équation ne diffère pas de celle que nous avons trouvée et, à ce qu'il semble, elle a également échappé à Cayley et à Maxwell.

Après de Saint-Venant, MM. Boussinesq et Jordan ont aussi publié, dans les *Comptes rendus* de l'Académie des Sciences (1871-1872, t. LXXIII, LXXIV, LXXV), des Notes très intéressantes sur quelques questions relatives à ces lignes.

Je crois devoir signaler ces travaux, tout en remarquant qu'ils ont un but purement géométrique.

(*Voir* BOUSSINESQ, *Cours d'Analyse infinitésimale*, t. I, p. II.)