

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

J. BOUSSINESQ

Contribution à la théorie de l'action capillaire, avec extension des forces de viscosité aux couches superficielles des liquides et application notamment au lent mouvement vertical, devenu uniforme, d'une goutte fluide sphérique, dans un autre fluide indéfini et d'un poids spécifique différent

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 31 (1914), p. 15-85

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1914_3_31__15_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1914, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CONTRIBUTION

A LA

THÉORIE DE L'ACTION CAPILLAIRE,

AVEC

EXTENSION DES FORCES DE VISCOSITÉ
AUX COUCHES SUPERFICIELLES DES LIQUIDES

ET

APPLICATION NOTAMMENT AU LENT MOUVEMENT VERTICAL, DEVENU UNIFORME,
D'UNE GOUTTE FLUIDE SPHÉRIQUE,
DANS UN AUTRE FLUIDE, INDÉFINI ET D'UN POIDS SPÉCIFIQUE DIFFÉRENT ;

PAR M. J. BOUSSINESQ.



SOMMAIRE. — I. Fondements de la notion de tension superficielle, à la surface libre d'un liquide ou à la surface séparative de deux liquides. — II. Existence d'une viscosité superficielle, dans la mince couche de transition séparant un liquide d'un autre fluide. — III. Passage au cas de couches superficielles courbes et équations de leur équilibre dynamique. — IV. Cas particulier d'une couche de révolution. — V. Application aux nappes liquides *rétractiles* de Savart. — VI. Démonstration nouvelle de la formule des énergies potentielles de surface, dans les liquides parfaits; application aux volumes fluides pesants déprimés ou soulevés, dans les tubes cylindriques de section quelconque. — VII. Équations du problème du lent mouvement vertical, régularisé ou devenu uniforme, d'une goutte liquide ou gazeuse, au sein d'une masse fluide indéfinie en repos, visqueuse aussi, mais d'une autre espèce et d'un poids spécifique différent. — VIII. Calcul effectif, pour une goutte liquide sphérique tombant ainsi au milieu d'une masse fluide en repos moins dense qu'elle, de la vitesse verticale de sa chute. — IX. Courants permanents qui existent alors dans la goutte. — X. Évaluation approximative de l'accroissement qu'éprouve la résistance à une telle chute, quand celle-ci se fait au sein d'une masse fluide non plus indéfinie, mais remplissant un grand ballon fixe.

I. — *Fondements de la notion de tension superficielle, à la surface libre d'un liquide ou à la surface séparative de deux liquides.*

1. Tous les physiciens savent qu'au contact soit de deux liquides, soit d'un liquide et d'un gaz, il existe une mince couche séparative,

dite *superficielle*, autrement constituée suivant son épaisseur que suivant les directions parallèles à son plan tangent, couche qui ne saurait, par conséquent, être *fluide*, c'est-à-dire isotrope à l'état d'équilibre, comme l'est la matière voisine. En effet, toute particule fluide est caractérisée par la propriété de refaire sans cesse son *isotropie*, sa parité de constitution en tous sens, à mesure qu'on lui imprime du dehors des mouvements visibles la déformant. Car une imperceptible évolution des groupes moléculaires les uns autour des autres, causée par l'agitation calorifique (toujours notable aux températures suffisantes pour produire la fusion), y égalise plus ou moins vite les distances intermoléculaires moyennes autour de chaque point, à peu près, sans doute, comme se tasse rapidement une masse de sable, dans un vase soumis à des secousses multipliées.

Or, il est clair que la même évolution aura lieu, dans la couche de transition séparant les deux fluides, autant que le comportera sa figure à deux dimensions sensibles, susceptible d'être confondue, en chaque endroit, avec celle d'un mince feuillet *plan*; et que, tout autour d'une normale au feuillet, elle y égalisera les distances moléculaires moyennes suivant les sens *tangentiels*, amenant ainsi et reconstituant sans cesse une isotropie non pas *absolue*, mais de *révolution* autour de la normale. Par suite, de même que l'isotropie complète, à l'intérieur de chaque particule fluide, y assure la normalité et l'égalité des pressions sur tous les éléments plans qui s'y croisent, de même aussi l'isotropie, autour de chaque normale, de la couche superficielle, avec symétrie de celle-ci de part et d'autre de la *coupe* qu'y fera tout plan très petit mené suivant la même normale, entraînera la perpendicularité, à ce plan, des deux *tensions* égales et opposées, *f*, exercées par unité de longueur sur les deux étroites faces de la coupe, ainsi que leur égalité pour les coupes normales orientées dans tous les azimuts. Donc, ces tensions normales et égales, *f*, tangentes à la couche superficielle, ne dépendront que des deux variables (densité et température) définissant l'état physique dans le voisinage là où il est bien continu, c'est-à-dire à l'intérieur du liquide.

2. D'ailleurs, à température constante et aux pressions modérées où la densité ρ du liquide intérieur reste peu supérieure à ce qu'elle

est dans le vide, les actions individuelles de molécule à molécule, les unes répulsives, les autres attractives, qui constituent la pression élastique sur tout élément plan intérieur, et qui y sont à peu près aussi nombreuses qu'à l'état solide où la densité se trouve du même ordre, ne doivent varier avec ρ que de très petites fractions de leurs valeurs dans le vide, à l'exception peut-être des répulsions exercées aux plus petites distances et très rapidement croissantes par de minimes rapprochements ; en sorte que la pression élastique y est la somme algébrique, *relativement presque nulle*, d'énormes répulsions et d'énormes attractions, constituant séparément deux *très fortes sommes de signes contraires*.

Effectivement, la densité naturelle, dans le vide, du liquide (supposé non volatil, pour fixer les idées) se règle d'elle-même, abstraction faite du poids des particules, de manière à laisser en équilibre les éléments des feuillets superposés qui composent la couche superficielle libre, c'est-à-dire par la condition de donner, près de la surface (censée peu courbe), une pression nulle sur tous les éléments plans qui lui sont parallèles et, par suite, nulle aussi, à l'intérieur, sur les éléments plans de toute orientation.

Sur les éléments plans menés dans la couche superficielle parallèlement à ses faces, la densité prend donc les valeurs ρ nécessaires pour y amener partout la neutralisation ou exacte (dans le vide), ou approchée (aux pressions ordinaires), des attractions et des répulsions exercées à travers ces éléments.

Or on a ainsi autant d'équations que d'éléments plans parallèles à la surface, ou que d'inconnues ρ correspondantes ; ce qui doit déterminer celles-ci. Dès lors, rien n'est disposé (ni ne reste disponible) dans les feuillets de la couche superficielle *libre* ou, de même, des autres couches analogues de transition, pour produire une neutralisation ou une quasi-neutralisation pareilles des attractions et des répulsions, à travers les *autres* éléments plans de ces couches, notamment à travers les coupes normales considérées ci-dessus, ou de part et d'autre desquelles il y a très sensiblement symétrie à la fois géométrique et physique des couches superficielles.

Ainsi s'expliquent les énormes valeurs, *par unité d'aire*, de la tension superficielle, qui est sensible, égale à f , sur l'unité de lon-

gueur d'une coupe, malgré sa largeur et sa surface extrêmement faibles.

3. Cette tension f sera *positive* ou ne pourra qu'être une *traction*, non une *pression proprement dite*. Car si les répulsions dominaient, par exemple, entre les divers éléments constituant la surface *libre* d'un liquide, ceux-ci se dissiperaient dans le vide, ou même dans le milieu gazeux ambiant qui ne serait généralement pas constitué par leur propre vapeur à l'état de saturation : cas exceptionnel où, peut-être, le milieu gazeux se trouverait apte à contenir le liquide. La couche superficielle ferait donc généralement explosion ou entrerait, du moins, en ébullition et se dissiperait rapidement.

Aussi, l'expérience montre-t-elle que la tension superficielle, à la surface libre d'un liquide et même dans les autres couches liquides de transition, est, pour chaque nature donnée des fluides en présence, une fonction positive de la densité et de la température dans le voisinage, c'est-à-dire à l'intérieur du liquide considéré où l'état physique est bien continu. Et comme, dans les circonstances ordinaires, c'est-à-dire aux pressions modérées, cette densité ne varie un peu notablement qu'avec la température, c'est, en définitive, presque exclusivement de celle-ci seule que f dépendra, s'affaiblissant à mesure que la température, en augmentant, rapprochera l'état liquide de l'état gazeux où disparaîtraient presque les attractions intermoléculaires et où s'évanouirait, par suite, la tension f elle-même.

II. — *Existence d'une viscosité superficielle, dans la mince couche de transition séparant un liquide d'un autre fluide.*

4. Mais ce qui précède ne concerne, en toute rigueur, que les fluides parvenus, avec leurs couches de transition, à l'état *statique*, après cessation de toute déformation visible des particules. Or l'évolution interne qui y rétablit alors soit l'isotropie en tous sens, soit l'isotropie autour d'une normale, demande toujours pour se faire *un certain temps*, très court chez les fluides peu visqueux, plus long chez les autres. D'où il suit que, à l'état *dynamique*, c'est-à-dire quand

chaque particule est soumise sans cesse, du dehors, à de nouvelles déformations visibles, sa configuration interne diffère de ce qu'elle serait, *sous sa figure apparente actuelle*, si l'isotropie s'y trouvait rétablie.

Bornons-nous au cas de fluides assez peu visqueux, ou soumis à des déformations visibles assez lentes, pour que l'évolution productrice de l'isotropie y soit, à tout instant, fort avancée. Alors les écarts existant entre la configuration interne réelle de chaque particule et sa configuration isotrope ou élastique, pour ses densité et température effectives, sont, évidemment, d'autant plus faibles, qu'elle est en train de se déformer avec plus de lenteur; et ils deviendraient négligeables, si la *vitesse* avec laquelle s'y font les déformations visibles s'annulait. Or, les actions moléculaires dépendant justement de la configuration réelle, c'est dire que des éléments plans, bien définis en situation dans une particule de l'*intérieur*, éprouveront, outre la *tension élastique* (pression changée de signe), $-p$, normale et égale sur tous les éléments plans se croisant en un même point, de petites composantes de pression, appelées maintenant *forces de viscosité*, fonctions des trois *vitesse de dilatation* et des trois *vitesse de glissement* (bien connues de tous les géomètres par la théorie usuelle des déformations continues de la matière) qui définissent la rapidité actuelle de déformation de la particule, et dont l'annulation entraînerait celle des petites pressions supplémentaires considérées.

5. Les forces de viscosité pourront, dès lors, vu la lenteur admise de déformation, en être supposées très vraisemblablement fonctions linéaires et homogènes, ou comprendront, au plus, *six* termes, proportionnels respectivement aux *six vitesse élémentaires* mentionnées, mais avec coefficients réductibles à ceux que laissera subsister la parité de constitution en tous sens de la particule, dans l'état type, *élastique*, à partir duquel se comptent ces petits termes.

En considérant spécialement, dans la particule, les trois éléments plans *principaux*, rectangulaires, de part et d'autre desquels les vitesses actuelles de déformation se font symétriquement, celles-ci se réduiront, comme on sait, aux trois vitesses (*principales*) de dilatation D_1, D_2, D_3 , qui exprimeront les rapidités de l'allongement relatif des

lignes matérielles respectivement normales à ces éléments plans; et les *tractions* (par unité d'aire) sur les mêmes éléments plans, tractions P_1, P_2, P_3 , dès lors de mêmes sens, ou *normales*, dites aussi *forces* (ou *pressions*) *principales*, contiendront *deux* coefficients seulement de *viscosité*, que nous appellerons ε et ε' . Car il est visible que, dans P_1 , par exemple, D_2 et D_3 auront rôle pareil ou seront affectés d'un même coefficient, ε' . Si donc on y appelle $2\varepsilon + \varepsilon'$ le coefficient de D_1 , les *deux* vitesses, D_1 , de dilatation *linéaire*, et $D_1 + D_2 + D_3$, de dilatation *cubique*, entreront *seules* dans P_1 .

Bref, l'on aura, pour exprimer, dans la particule, les trois *pressions principales*, dont on sait que dépendent toutes les composantes de pression, la formule triple

$$(1) \quad (P_1, P_2, P_3) = -p + \varepsilon'(D_1 + D_2 + D_3) + 2\varepsilon(D_1, D_2, D_3).$$

Et il résultera de là des expressions explicites simples pour les diverses composantes de pression exercées dans la particule. En se bornant aux *six* composantes *principales de pression relatives aux axes coordonnés* des x, y, z , et au cas habituel de conservation approchée des volumes fluides, où la vitesse $D_1 + D_2 + D_3$ de dilatation cubique peut être censée nulle, ces expressions, à un seul coefficient de viscosité ε , s'écriront en deux formules triples, comme je le fais ordinairement dans mon Cours de la Sorbonne,

$$(2) \quad \begin{cases} (N_x, N_y, N_z) = -p + 2\varepsilon \left(\frac{du}{dx}, \frac{dv}{dy}, \frac{dw}{dz} \right), \\ (T_x, T_y, T_z) = \varepsilon \left(\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}, \frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz}, \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} \right). \end{cases}$$

Elles sont familières à tous les physiciens-géomètres, et ont été données en premier lieu par Navier : il les déduisit de l'hypothèse d'une force répulsive née du mouvement, entre molécules très voisines, et proportionnelle à leur vitesse actuelle de rapprochement (1).

(1) On peut voir une manière simple et naturelle de passer des formules (1) aux formules (2), vers le commencement de ma *Théorie de l'écoulement tourbillonnant et tumultueux des liquides dans les lits rectilignes à grande section* (Paris, Gauthier-Villars, 1897, nos 10 et 14, p. 10 et 12).

6. Considérons maintenant, à ce point de vue de la viscosité, les couches de transition d'un liquide.

La condition de quasi-neutralisation des attractions et des répulsions qui s'exercent aux distances imperceptibles, à travers tout élément plan parallèle aux feuillets de ces couches, est imposée par des actions tellement grandes, qu'elle doit se réaliser même durant le mouvement; et, comme elle détermine la densité de chacun des feuillets, elle assure partout la conservation des volumes, maintenant ainsi égale à zéro, pendant le mouvement, la somme algébrique des trois vitesses de dilatation, en chaque point, suivant trois axes rectangulaires quelconques, ou réduisant à *cinq* distinctes, même dans l'épaisseur des couches de transition, les *six* variables qui y définissent les vitesses de déformation. Ce seront, dès lors, pour toute particule des feuillets, les vitesses respectives de dilatation linéaire suivant *deux* directions rectangulaires quelconques *tangentes aux feuillets*, plus les *trois* vitesses de glissement, suivant ces directions et leur normale prises deux à deux.

D'ailleurs, nous n'avons à compter, dans les tensions superficielles à étudier ici, que les forces *extrêmement grandes par unité de surface*, les autres s'y trouvant insignifiantes sur les *étroites coupes*, d'aire presque infiniment petite, qui les supportent.

Cela posé, les deux seules vitesses élémentaires de déformation, d'une particule appartenant à un feuillet, qui ne soient pas symétriques par rapport au plan du feuillet, sont les deux vitesses de glissement relatives à la normale à ce plan, ou mesurant les rapidités avec lesquelles une file de molécules, alignée suivant cette normale, s'incline par rapport aux deux files tangentes; et elles sont, par suite, les seules qui puissent amener soit, sur le feuillet, une composante *tangentielle* de pression suivant une droite du feuillet, soit, sur la coupe (du feuillet) perpendiculaire à cette droite, une composante *suivant la normale au feuillet*, composantes égales par unité d'aire, en vertu du théorème de *réciprocité des pressions*. Or de telles vitesses de glissement, ne changeant rien aux densités ρ ou n'empêchant pas la quasi-neutralisation des attractions et des répulsions entre feuillets, ne produiront, sur le feuillet considéré, que des actions de viscosité *modérées* et, dès lors, sur la coupe normale qu'on y a faite fictivement,

que des actions *insignifiantes suivant la normale au feuillet*, comparativement à celles qui s'y exercent parallèlement à son plan.

Il suit de là que les *tensions superficielles* appliquées aux coupes normales d'un feuillet, seront toujours tangentes à celui-ci, ou *symétriques par rapport à son plan*; et qu'elles dépendront, linéairement, des seules vitesses élémentaires de déformation offrant pareille symétrie, ou même des seules qui se produisent dans ce plan, savoir : *les vitesses de dilatation des deux files rectangulaires de molécules du feuillet et leur vitesse de glissement mutuel*.

7. Il y a donc lieu de faire abstraction des deux autres vitesses de glissement (relatives à la normale) dans l'appréciation des très fortes actions moléculaires qui ont à intervenir ici. Or on sait qu'à chaque instant, dans tout élément superficiel de la couche, il existe, suivant chaque normale à la couche, deux certaines coupes rectangulaires, *principales*, de part et d'autre desquelles l'extension ou la contraction des feuillets se font symétriquement dans le voisinage, et qui, par suite, supporteront deux tensions superficielles (par unité de longueur), \mathfrak{F} , \mathfrak{F}' , purement normales, ou *principales* aussi, et fonctions linéaires des deux seules vitesses de déformation *distinctes* subsistant alors sur tout feuillet. Ce sont, vu l'annulation du glissement correspondant, les vitesses respectives de dilatation, ∂ , ∂' , dites également *principales*, des lignes matérielles de la couche, orientées suivant \mathfrak{F} , \mathfrak{F}' et qui restent *momentanément* perpendiculaires les unes aux autres. De plus, la parité de configuration, autour de la normale, de l'état type ou *élastique* de la couche à partir duquel se comptent les écarts de contexture produisant les forces de viscosité, entraîne l'égalité respective, dans \mathfrak{F} et \mathfrak{F}' , des coefficients de viscosité analogues.

8. Cela étant, appelons e_1 , dans l'expression de \mathfrak{F} , le coefficient de ∂' , et $2e + e_1$ celui de ∂ , de manière à avoir pour \mathfrak{F} la formule

$$f + e_1(\partial + \partial') + 2e\partial.$$

Les deux *tensions superficielles principales*, à l'état dynamique et par unité de longueur, de la couche de transition, se trouveront dès lors

exprimées par la formule double

$$(3) \quad (\mathcal{F}, \mathcal{F}') = f + e_1(\partial + \partial') + 2e(\partial, \partial'),$$

avec deux coefficients e, e_1 de viscosité *superficielle*, qui seront, comme la tension superficielle statique ou élastique f , des fonctions spécifiques des deux variables (densité et surtout température) définissant l'état physique dans le voisinage, à l'intérieur du liquide plus spécialement considéré, là où cet état est bien continu.

Il en résultera, sur les coupes normales faites dans la couche superficielle suivant les autres azimuts, des tensions encore parallèles aux faces de la couche, mais obliques à ces coupes, et dont les formules se déduiront de (3) par les relations que font connaître les deux théories générales des pressions et des déformations dans les corps ⁽¹⁾.

Chaque couche superficielle de transition entre un liquide et un gaz, ou entre deux liquides, comporte donc deux coefficients seulement, e, e_1 , de viscosité superficielle.

D'après une expérience constante, la viscosité résiste toujours, dans les corps, aux vitesses de déformation qui la mettent en jeu; de sorte que si, par exemple, un carré d'aire 1, taillé fictivement dans une couche superficielle plane, est uniformément dilaté, perpendiculairement à ses côtés respectifs, avec deux vitesses, ∂, ∂' , les tensions extérieures normales, deux à deux égales et opposées, \mathcal{F} ou \mathcal{F}' , appliquées à ces côtés, devront avoir, comme travail de leurs parties de viscosité

$$e_1(\partial + \partial') + 2e\partial, \quad e_1(\partial + \partial') + 2e\partial'$$

(1) Si ds, ds' sont, sur l'élément considéré de couche superficielle, deux fibres tangentes, sensiblement rectangulaires entre elles, $\partial_s, \partial_{s'}$ leurs vitesses actuelles de dilatation, g leur vitesse actuelle de glissement, ou vitesse avec laquelle décroît leur angle actuellement droit, enfin, d'une part, $\mathcal{T}_s, \mathcal{T}_{s'}$ les deux composantes *normales* des tensions (par unité de longueur) sur les deux coupes respectivement perpendiculaires à ds et à ds' , d'autre part, \mathcal{T} , la composante tangentielle analogue sur chacune de ces deux coupes, on aura les trois formules

$$(\mathcal{T}_s, \mathcal{T}_{s'}) = f + e_1(\partial_s + \partial_{s'}) + 2e(\partial_s, \partial_{s'}), \quad \mathcal{T} = e.g.$$

On le reconnaîtrait par la méthode indiquée ci-dessus en note, à la fin du n° 3 (p. 20); et les calculs détaillés seraient même, ici, beaucoup plus simples, en raison de ce que toutes les déformations élémentaires et composantes de pression à considérer se trouvent comprises dans un plan unique.

durant un instant dt , ou pour les dilatations linéaires $\partial dt, \partial' dt$ produites effectivement, une quantité *essentiellement positive*,

$$[e_1(\partial + \partial') + 2e\partial] \partial dt + [e_1(\partial + \partial') + 2e\partial'] \partial' dt,$$

laquelle se trouvera compensée par le travail *négligé* des actions de viscosité intérieures.

Ainsi, ce travail extérieur total par unité de temps,

$$e_1(\partial + \partial')^2 + 2e(\partial^2 + \partial'^2),$$

sera positif; et l'on aura, sous deux formes équivalentes,

$$e_1(\partial + \partial')^2 + 2e(\partial^2 + \partial'^2) = (e_1 + e)(\partial + \partial')^2 + e(\partial - \partial')^2 > 0,$$

inégalité exigeant, pour se vérifier dans les deux cas $\partial' = \mp \partial$, les deux conditions, d'ailleurs suffisantes toujours,

$$(3 \text{ bis}) \quad e > 0, \quad e_1 + e > 0 \quad \text{ou} \quad e_1 > -e.$$

Nous ferons plus loin (n° 38) une application de cette théorie, où, f ayant été annulé, \mathcal{F} et \mathcal{F}' se réduiront à leurs parties de viscosité. On aura donc alors

$$(3 \text{ ter}) \quad (\text{pour } f=0) \quad \mathcal{F}\partial + \mathcal{F}'\partial' > 0.$$

9. Les physiciens n'ont guère fait porter, jusqu'ici, leurs observations *précises* de capillarité ou de tensions superficielles, que sur des phénomènes d'équilibre; et voilà sans doute pourquoi ils n'avaient pas eu, ce me semble, l'idée d'y introduire des *forces de viscosité*. Les considérations précédentes montrent que ces forces sont aussi naturelles dans l'étude de la couche superficielle d'un liquide que dans l'hydrodynamique des fluides pris en masse.

Mon attention y a été appelée par les récentes expériences d'un jeune docteur ès sciences physiques de la Faculté des Sciences de Paris, M. Jules Roux, touchant la vitesse de chute de gouttes mercurielles ayant moins de 1^{mm} de rayon, dans de l'huile de ricin très visqueuse (¹),

(¹) *La charge de l'électron; recherches sur la loi de Stokes*, par M. Jules Roux; thèse pour le doctorat ès sciences physiques (Paris, Gauthier-Villars, 1912). Voir surtout le n° 15 (p. 25 et 26). Ce travail a paru depuis dans les *Annales de Chimie et de Physique*, au numéro de mai 1913.

et par la nécessité de mettre d'accord, avec les résultats de ces observations, une théorie ingénieuse, mais où l'action capillaire était négligée, donnée en 1911, à Cracovie, par M. Rybczynsky et, à Paris, par M. Hadamard. Il suffisait évidemment, en remarquant l'assez faible rayon des gouttes, d'avoir l'idée de mettre en œuvre la tension superficielle à la surface séparative du mercure et de l'huile, pour être conduit à la formule (3), dans un problème où les forces de viscosité ont le rôle principal.

III. — *Passage au cas de couches superficielles courbes et formation des équations de leur équilibre dynamique.*

10. Nous avons supposé plane, jusqu'ici, la couche de transition considérée. De fait, ses rayons de courbure seront toujours assez grands, par rapport à son épaisseur et, à plus forte raison, par rapport au rayon d'activité des actions moléculaires s'y exerçant, pour que les courbures de la couche n'aient aucune influence sensible sur la configuration interne de ses groupes moléculaires et, par suite, sur les pressions et tensions qui en résulteront à l'intérieur d'un fragment de couche, suivant les diverses directions tout autour de la normale au fragment. On pourra ainsi attribuer, aux tensions superficielles, leurs valeurs calculées dans l'hypothèse où le fragment aurait ses faces en coïncidence avec leurs plans tangents, menés respectivement au point où les perce une même normale.

On exprimera donc les tensions, dans la couche devenue courbe, par la formule (3) et par celles qui, mises en note (p. 23), dérivent de (3), en y prenant pour \mathfrak{D} , \mathfrak{D}' les vitesses de dilatation des deux files rectangulaires *principales* de points matériels, dans le plan tangent à un feuillet. Ou, plus exactement, les forces qu'il faudra composer avec celles-là, tout le long d'une coupe normale faite dans la couche suivant une courbe fermée quelconque, pour y obtenir les vraies tensions superficielles, auront toujours travail total négligeable et, par rapport à un axe quelconque, tant composante totale que moment total insignifiants.

11. Toutefois, si l'on veut encore plus d'approximation, du moins

quant à la *direction* des tensions principales \mathfrak{F} , \mathfrak{F}' , *considérées dans leur partie, f , statique ou élastique (et constante)*, il suffira de ne décomposer la couche superficielle en *éléments*, ou de n'y mener des coupes normales aux faces, que suivant les lignes de courbure d'une de celles-ci, de manière à n'avoir de telles coupes que tangentiellement aux sections normales de la couche *principales* en chaque endroit, au point de vue géométrique de la courbure. Car, de part et d'autre de telles sections, il y aura symétrie géométrique et, par suite, *physique*, de la couche, non seulement à ce premier degré d'approximation où on la suppose étalée sur son plan tangent, mais aussi au second où, tenant compte de ses deux courbures, on lui attribue les deux plans *principaux* (de symétrie) de son *paraboloïde de contact*.

Et il en sera évidemment de même pour les parties de \mathfrak{F} , \mathfrak{F}' dues à la viscosité, ou fonctions de \mathfrak{D} , \mathfrak{D}' , *pourvu que ces deux vitesses principales de dilatation soient orientées suivant les mêmes lignes de courbure* ou se fassent perpendiculairement aux sections normales principales. Il est visible que cela arrivera, par exemple, dans le mouvement vertical, descendant ou ascendant, d'une goutte fluide de révolution autour d'un axe vertical, au sein d'une masse indéfinie liquide ou gazeuse, en repos, et d'un poids spécifique différent du sien : cas où, par raison de symétrie, une des deux vitesses principales de dilatation, sur la surface de la goutte, a lieu suivant les méridiens de cette surface, qui constituent d'ailleurs un de ses systèmes de lignes de courbure.

12. Remarquons enfin que la tension, par unité de longueur, est la même à travers toutes les coupes, l'une, normale, les autres obliques, faites suivant une même petite droite d'une face de la couche superficielle. En effet, si l'on ferme, à ses deux bouts, par deux éléments plans normaux à cette droite, le prisme triangulaire allongé compris entre la coupe normale, une quelconque des coupes obliques en question et la portion, intersectée par ces deux coupes, de l'autre face de la couche superficielle, le poids et l'inertie de ce prisme (presque sans masse) seront négligeables, ainsi que les pressions (modérées par unité d'aire) exercées sur la partie interceptée de la seconde face et même les tensions, d'ailleurs opposées, sur les deux minimes bases du prisme, comparativement aux tensions s'exerçant, du dehors du prisme,

sur les deux coupes de même longueur, l'une, normale, l'autre, oblique. Donc ces deux tensions, à elles seules, sont tenues de se faire équilibre et s'équivalent, sur le prisme triangulaire.

13. Considérons maintenant, à partir d'un point quelconque, M , de la couche (*fig. 1*), un élément rectangulaire, légèrement courbe,

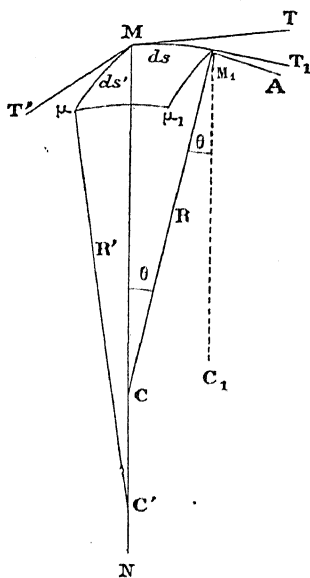


Fig. 1.

$MM_1, \mu_1\mu$, de cette couche, compris entre l'élément $MM_1 = ds$, d'une des deux lignes de courbure qui se croisent en M , un élément $M\mu = ds'$ de l'autre ligne de courbure, enfin, deux éléments analogues, $\mu\mu_1, M_1\mu_1$, des lignes de courbure voisines émanées, l'une, de μ , l'autre, de M_1 , appartenant respectivement aux mêmes systèmes que $MM_1, M\mu$; et cherchons les composantes totales, tant suivant la normale MN à la couche (menée vers l'intérieur du liquide considéré spécialement), que suivant les deux tangentes MT, MT' à ds et à ds' , des tensions superficielles exercées, partout tangentiellement au rectangle courbe $dsds'$ mais perpendiculairement à son contour, sur les quatre côtés du rectangle.

Bornons-nous au cas où les deux tensions superficielles principales

\mathfrak{F} , \mathfrak{F}' ont partout les directions des éléments ds , ds' des lignes de courbure; ce qui comprend le cas *d'isotropie autour de chaque normale*, où l'on a $\mathfrak{d}' = \mathfrak{d}$, $\mathfrak{F}' = \mathfrak{F}$, dans tous les sens tangentiels, et comprend plus spécialement encore celui où l'on néglige les forces de viscosité, de manière que \mathfrak{F} et \mathfrak{F}' se réduisent à la tension élastique ou statique constante f .

Nous appellerons λ , λ' , fonctions données des coordonnées x , y , z des divers points de la surface (ou, tout au moins, des deux d'entre elles qu'on aura choisies comme variables indépendantes), les deux paramètres caractéristiques, respectivement, des deux familles de lignes de courbure; en sorte que les deux côtés MM_1 , $\mu\mu_1$ soient définis par deux valeurs constantes voisines, λ' , $\lambda' + d\lambda'$, du second paramètre, et, les deux côtés $M\mu$, $M_1\mu_1$, par deux valeurs analogues, λ , $\lambda + d\lambda$, du premier. Les deux rayons de courbure principaux de la surface en M , savoir (à très peu près), d'une part, MC ou M_1C , que nous appellerons R , d'autre part, MC' ou $\mu C'$, que nous appellerons R' , seront deux fonctions déterminées des paramètres λ , λ' , dont chaque système de valeurs caractérise un point M de la surface. On pourra en dire autant des *rayons de courbure géodésiques*, en M , que nous appellerons respectivement v et v' , des deux lignes de courbure MM_1 , $M\mu$, c'est-à-dire les deux rayons de courbure qu'ont, en M , les projections de ces deux lignes de courbure sur le plan tangent TMT' . Et il en sera encore de même des deux rapports $\frac{ds}{d\lambda}$, $\frac{ds'}{d\lambda'}$, dérivées respectives, au point M , de l'arc des deux courbes $\lambda' = \text{const.}$, $\lambda = \text{const.}$, par rapport à celui des deux paramètres λ , λ' qui varie suivant leur longueur: ce seront donc deux fonctions déterminées de λ et de λ' .

14. Cela posé, considérons d'abord les deux côtés $M\mu$, $M_1\mu_1$, du rectangle. La tension sur le côté $M\mu$ est, d'un bout à l'autre, par unité de sa longueur ds' , \mathfrak{F} en grandeur et à l'opposé de MT en direction, avec écarts relatifs de l'ordre de petitesse de la distance à M : ce qui donne, comme composante totale de la tension *suivant un axe quelconque*, la projection, sur cet axe, d'une longueur $\mathfrak{F} ds'$ tirée en sens inverse de MT , *sauf erreurs de l'ordre de ds'^2 ou de $d\lambda'^2$* . Sur le côté opposé $M_1\mu_1$, où λ a crû de $d\lambda$ (tandis que λ' y a les mêmes valeurs que sur $M\mu$), la ten-

sion, au lieu d'être $\mathfrak{F} \frac{ds'}{d\lambda'} d\lambda'$, sera évidemment $\left(\mathfrak{F} \frac{ds'}{d\lambda'} + \frac{d.\mathfrak{F}}{d\lambda} \frac{ds'}{d\lambda'} d\lambda \right) d\lambda'$ et aura de même, comme projection sur le même axe quelconque, celle d'une ligne de cette longueur, qui serait tirée suivant la droite $M_1 T_1$, analogue à MT , mais tangente à la section principale, voisine de MM_1 , et relative au point M_1 . Quant à l'erreur due à cette évaluation, elle égalera pareillement, en projection sur un axe quelconque, l'erreur précédente, accrue de sa différentielle en λ et changée de signe; en sorte que son excédent sur cette erreur précédente, sera de l'ordre de $d\lambda'^2 d\lambda$, ou de $ds'^2 ds$, et, rapportée à l'unité de l'aire $ds ds'$ du rectangle, restera évanouissante comme ds' ou, par suite, négligeable.

Il suffit donc d'évaluer les trois projections, sur MN , MT et MT' :

1° D'abord, de la première tension, $\mathfrak{F} ds'$, qui donne ainsi

$$0, \quad -\mathfrak{F} ds', \quad 0;$$

2° De la deuxième

$$(4) \quad \mathfrak{F} ds' + \frac{d.\mathfrak{F}}{d\lambda} \frac{ds'}{d\lambda'} d\lambda d\lambda',$$

comptée le long de $M_1 T_1$.

Pour celle-ci, menons, suivant MN , la *section normale* MM_1 , presque principale en M , avec sa tangente extrême $M_1 A$ contenue aussi dans le plan NMM_1 ; et observons que le petit angle $AM_1 T_1$ a son plan, tangent en M_1 à la surface, infiniment peu incliné sur TMT' . A un écart relatif près négligeable, cet angle se projette donc en vraie grandeur sur le plan TMT' , où nous appellerons α , m_1 , t_1 les projections respectives de A , M_1 , T_1 ; mais, par contre, il a une projection infiniment réduite, c'est-à-dire du second ordre de petitesse, sur le plan $NMM_1 A$ qui est presque perpendiculaire au sien.

C'est dire que la tangente $M_1 A$ à la section normale MM_1 pourra être confondue, sans erreur angulaire appréciable dans le plan NMM_1 , avec la projection, sur ce plan, de la tangente principale $M_1 T_1$, ou que l'angle trièdre $T_1 M_1 A C_1$, obtenu en menant $M_1 C_1$ parallèle à MN , sera assimilable à un trièdre rectangle ayant $T_1 M_1 C_1$ comme face hypoténuse. Donc le cosinus de l'angle, $T_1 M_1 C_1$, de la tension (4) avec la normale MN , vaut le produit des cosinus des deux autres faces $AM_1 T_1$

et AM, C_1 , dont le premier atteint l'unité (à un écart près négligeable du deuxième ordre) et dont le second est le sinus du complément $C_1 M, C$ ou MCM_1 , c'est-à-dire de l'angle de contingence $\theta = \frac{MM_1}{CM} = \frac{ds}{R}$. Le cosinus à multiplier par (4) pour projeter la tension sur MN étant ainsi le rapport infiniment petit $\frac{ds}{R}$, on peut y réduire (4) à sa partie principale $\mathfrak{F} ds'$; et il vient, pour la composante cherchée de la tension (4) suivant MN ,

$$(5) \quad \frac{\mathfrak{F}}{R} ds ds'.$$

Le second cosinus à évaluer, celui de l'angle de M, T , avec MT , est visiblement 1 au degré d'approximation requis; et la composante de la tension (4) suivant MT égalera la tension (4) elle-même.

Cherchons enfin le cosinus de l'angle fait avec MT' par M, T_1 , ou, plutôt, par une parallèle à M, T , issue de M . Cette parallèle aura sa projection sur le plan TMT' dans la direction de m, t , définie ci-dessus; en sorte que son angle cherché fait avec MT' sera l'hypoténuse d'un trièdre rectangle ayant comme autres faces, d'une part, l'angle infiniment petit, à cosinus 1, de la droite projetée avec sa projection, d'autre part, l'angle de cette projection avec MT' , qui a pour complément l'angle de m, t , avec MT . Or, ce dernier est l'angle de contingence $\frac{Mm_1}{\tau}$ ou $\frac{ds}{\tau}$, de la projection de la ligne de courbure MM_1 sur le plan tangent TMT' . Le cosinus à évaluer, et qu'il faudra multiplier par (4) pour avoir la projection de cette tension (4) sur MT' , se réduit donc à $\frac{ds}{\tau}$. Et la composante de (4) suivant MT' est enfin

$$(6) \quad \frac{\mathfrak{F} ds' ds}{\tau}.$$

En ajoutant respectivement (5), (4) et (6) aux trois composantes, 0, $-\mathfrak{F} ds'$, 0, de la tension $\mathfrak{F} ds'$ exercée sur le côté $M\mu$, il vient donc, pour l'ensemble des deux côtés $M\mu, M_1\mu_1$, les trois composantes totales de tension, suivant MN, MT et MT' ,

$$(7) \quad \left[\frac{\mathfrak{F}}{R}, \frac{d.\mathfrak{F}}{d\lambda} \frac{ds'}{ds}, \frac{d\lambda}{ds} \frac{d\lambda'}{ds'}, \frac{\mathfrak{F}}{\tau} \right] ds ds'.$$

15. Ajoutons-y respectivement, pour les tensions s'exerçant sur les deux autres côtés MM_1 , $\mu\mu_1$, les expressions analogues

$$(8) \quad \left[\frac{\mathfrak{F}'}{R'}, \frac{\mathfrak{F}'}{r'}, \frac{d \cdot \mathfrak{F}'}{d\lambda'} \frac{ds}{ds'} \frac{d\lambda}{ds} \frac{d\lambda'}{ds'} \right] ds ds'.$$

Nous aurons les trois composantes totales cherchées, suivant MN, MT et MT', des tensions qui sollicitent le contour de l'élément $ds ds'$ de couche superficielle, savoir, après division de toutes les trois par $ds ds'$ pour les rapporter à l'unité d'aire du rectangle curviligne,

$$(9) \quad \frac{\mathfrak{F}}{R} + \frac{\mathfrak{F}'}{R'}, \quad \frac{d \cdot \mathfrak{F}}{d\lambda} \frac{ds'}{ds} \frac{d\lambda}{ds} \frac{d\lambda'}{ds'} + \frac{\mathfrak{F}'}{r'}, \quad \frac{d \cdot \mathfrak{F}'}{d\lambda'} \frac{ds}{ds'} \frac{d\lambda}{ds} \frac{d\lambda'}{ds'} + \frac{\mathfrak{F}}{r}.$$

Ici apparaît comme possible une simplification importante des deux dernières de ces formules (9). Grâce à l'emploi de nombreux cosinus réduits à l'unité, les projections sur MT et MT' se sont faites comme si les tensions élémentaires avaient été appliquées non pas au contour du rectangle curviligne, mais à la projection de ce contour sur le plan TMT', avec mêmes valeurs par unité de longueur de la projection que par unité de longueur du contour gauche, enfin partout normalement au contour de la projection comme au contour gauche; car on sait que les angles droits ne sont altérés, comme les autres, que dans des rapports négligeables du second ordre, par leur projection sur un plan presque parallèle au leur. Donc, tous les calculs de projections sur MT et MT', ont été opérés comme si le rectangle curviligne s'était trouvé contenu dans le plan TMT'. Or, supposons qu'on les eût effectués dans l'hypothèse simple $\mathfrak{F}' = \mathfrak{F} = 1$. On aurait eu alors une tension normale constante, s'exerçant, du dehors, sur tout un contour plan fermé et dans son plan, à projeter sur les deux droites MT et MT' de ce plan : opération qu'on sait aboutir à des projections totales nulles. Ainsi, la supposition $\mathfrak{F}' = \mathfrak{F} = 1$ réduit identiquement à zéro les deux dernières expressions (9); ce qui donne

$$(10) \quad \frac{d\lambda}{ds} \frac{d\lambda'}{ds'} \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{ds'}{d\lambda'} \right) = -\frac{1}{r'}, \quad \frac{d\lambda}{ds} \frac{d\lambda'}{ds'} \frac{d}{d\lambda'} \left(\frac{ds}{d\lambda} \right) = -\frac{1}{r}$$

et change les expressions (9), après effectuation des dérivations de $\mathcal{F} \frac{ds'}{d\lambda'}$ et de $\mathcal{F}' \frac{ds}{d\lambda}$, en celles-ci,

$$(11) \quad \frac{\mathcal{F}}{R} + \frac{\mathcal{F}'}{R'}, \quad \frac{d\mathcal{F}}{d\lambda} \frac{d\lambda}{ds} + \frac{\mathcal{F}' - \mathcal{F}}{\nu'}, \quad \frac{d\mathcal{F}'}{d\lambda'} \frac{d\lambda'}{ds'} + \frac{\mathcal{F} - \mathcal{F}'}{\nu}.$$

16. Observons maintenant que, même par unité d'aire, la masse de l'élément $MM_1 \mu_1 \mu$ de couche et, par suite, tant ses inerties que son poids, sont insignifiants; de sorte que cet élément est constamment en équilibre dynamique sous l'influence des tensions superficielles de son contour et des pressions que supportent ses deux faces. Appelons donc, d'une part, $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$ les trois composantes, suivant les mêmes droites MN, MT et MT' , de la pression s'exerçant sur la face *externe* (c'est-à-dire opposée à MN), d'autre part, $\mathcal{X}_1, \mathcal{Y}_1, \mathcal{Z}_1$, celles de la pression que sa face *interne* exerce elle-même, par unité d'aire, sur le liquide considéré, ou $-\mathcal{X}_1, -\mathcal{Y}_1, -\mathcal{Z}_1$ celles de la pression que subit cette face interne de la part du liquide; et il faudra évidemment que les trois différences $\mathcal{X} - \mathcal{X}_1, \mathcal{Y} - \mathcal{Y}_1, \mathcal{Z} - \mathcal{Z}_1$ donnent sommes nulles en s'adjoignant aux trois composantes analogues (11) des tensions. On aura donc, pour relier partout, sur les deux faces de la couche superficielle, les *pressions extérieures* $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$ aux *pressions intérieures* $\mathcal{X}_1, \mathcal{Y}_1, \mathcal{Z}_1$, les trois équations d'équilibre dynamique

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{X} - \mathcal{X}_1 = - \left(\frac{\mathcal{F}}{R} + \frac{\mathcal{F}'}{R'} \right), \\ \mathcal{Y} - \mathcal{Y}_1 = - \frac{d\mathcal{F}}{d\lambda} \frac{d\lambda}{ds} + \frac{\mathcal{F} - \mathcal{F}'}{\nu'}, \\ \mathcal{Z} - \mathcal{Z}_1 = - \frac{d\mathcal{F}'}{d\lambda'} \frac{d\lambda'}{ds'} + \frac{\mathcal{F}' - \mathcal{F}}{\nu}. \end{array} \right.$$

17. Un cas particulièrement intéressant est celui où, tenant compte de la viscosité superficielle par la double formule (3) (p. 23), on a partout $\lambda' = \lambda$ et, par suite, d'après (3), $\mathcal{F}' = \mathcal{F} = f + 2(e + e_1)\lambda$. La couche de transition y reste, évidemment, *isotrope* partout *autour de ses normales*, dans une étendue infiniment petite; et les deux coefficients e, e_1 de viscosité superficielle s'y fondent, comme on voit, en un seul, $2(e + e_1)$, que l'on peut appeler ν . Les formules (3) et (12) se rédui-

sent donc alors à

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{f} = f + \varepsilon\delta, \quad \mathfrak{T} - \mathfrak{T}_1 = -(f + \varepsilon\delta) \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right), \\ \mathfrak{C} - \mathfrak{C}_1 = -\frac{d\bar{f}}{ds} = -\varepsilon \frac{d\delta}{ds}, \quad \mathfrak{C}' - \mathfrak{C}'_1 = -\frac{d\bar{f}}{ds'} = -\varepsilon \frac{d\delta}{ds'}. \end{array} \right.$$

Une telle isotropie a lieu, notamment, soit à l'état statique où $(\delta, \delta') = 0$, soit quand, sans que $\delta' = \delta$, on annule les coefficients ε et ε_1 , c'est-à-dire quand on attribue la fluidité parfaite au liquide considéré, ainsi qu'au fluide contigu, cas où \bar{f} se réduit à sa partie élastique constante f . Alors, les deux dernières formules (13), où l'on fait nuls le coefficient ε ainsi que les composantes tangentielles de pression, deviennent l'identité $0 = 0$, comme l'impliquait bien l'hypothèse de fluidité parfaite; et, \mathfrak{T} , \mathfrak{T}_1 , étant les deux pressions respectives p , p_1 , soit du fluide extérieur, soit du liquide considéré lui-même, les deux premières formules (13) donnent l'équation fondamentale, usuelle, de la théorie *statique* de la capillarité,

$$(14) \quad p_1 - p = f \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right).$$

IV. — Cas particulier d'une couche de révolution.

18. Appliquons les équations (12) à une couche de révolution, comme est, par exemple, autour d'un axe vertical, la surface matérielle limitant une goutte liquide ou gazeuse qui tombe ou qui monte, par l'effet de la pesanteur, au sein d'une masse fluide indéfinie en repos, d'une autre nature et d'un poids spécifique différent du sien, lorsque un au moins des deux fluides contigus est un liquide. Telles sont encore, autour de leur axe vertical commun, dans des expériences de Savart bien connues, les deux faces extérieure et intérieure qui séparent, de l'air ambiant ou libre ou confiné, la mince nappe d'eau formée par l'étalement de la veine aqueuse cylindrique issue de haut en bas, sous une hauteur de charge modérée, d'un orifice circulaire horizontal, lorsque cette veine vient s'écraser sur un plateau rond horizontal, placé centralement au-dessous. Alors, en effet, la veine

franchit le contour circulaire du plateau, transformée en une lame à filets divergents presque horizontale à son départ, mais que la pesanteur courbe peu à peu vers le bas et que la tension capillaire fait, dans le cas d'assez faibles hauteurs de charge, se refermer inférieurement sur l'axe, avant de la résoudre en gouttelettes.

Les deux familles de lignes de courbure de chaque surface seront : d'une part, ses *méridiens*, tous pareils, intersections de la surface par les plans menés suivant l'axe et définis au moyen de leur angle azimutal, que nous pourrons appeler λ' , angle d'un plan méridien origine avec celui que l'on considère; d'autre part, ses *cercles parallèles*, ayant leurs centres sur l'axe, avec un rayon r fonction de la distance x de ce centre au point de l'axe qui sera choisi comme origine. Nous prendrons pour paramètre, λ , caractéristique de ces parallèles, l'angle de la normale, menée à la face extérieure en allant vers l'axe, avec les x positifs; et nous compterons respectivement soit les arcs, s , de méridien, soit ceux, s' , des parallèles, comme croissants, dans les sens où y grandiront λ et λ' .

Les deux arcs élémentaires ds , ds' des lignes de courbure auront visiblement $d\lambda$, $d\lambda'$ pour angles de contingence et R , r pour rayons de courbure, tous les deux, fonctions déterminées de λ *seul* (à l'époque t considérée). Ainsi, l'on aura, en y joignant l'expression évidente du second rayon principal R' de courbure, émané du point où se joignent, sur l'axe, deux normales menées à la surface par les extrémités de ds' ,

$$(15) \quad \frac{ds}{d\lambda} = R, \quad \frac{ds'}{d\lambda'} = r, \quad R' = \frac{r}{\sin \lambda}.$$

Dès lors, les deux équations (10), où les valeurs r , R de $\frac{ds'}{d\lambda'}$ et de $\frac{ds}{d\lambda}$ ne dépendent que de λ , deviendront

$$(16) \quad \frac{1}{\mathcal{J}} = -\frac{1}{Rr} \frac{dr}{d\lambda}, \quad \frac{1}{\mathcal{J}'} = 0;$$

et, vu aussi que \mathcal{F} , \mathcal{F}' seront également indépendants de λ' mais \mathcal{C}' , \mathcal{C}_1' nuls (par raison de symétrie mécanique de part et d'autre du plan méridien), les formules (12) se réduiront aux deux suivantes :

$$(17) \quad \mathcal{C} - \mathcal{C}_1 = -\left(\frac{\mathcal{F}}{R} + \frac{\mathcal{F}' \sin \lambda}{r}\right), \quad \mathcal{C} - \mathcal{C}_1 = -\frac{1}{R} \left(\frac{d\mathcal{F}}{d\lambda} + \frac{\mathcal{F} - \mathcal{F}'}{r} \frac{dr}{d\lambda}\right).$$

19. Voyons maintenant ce que deviennent les expressions (3) (p. 23) des deux tensions superficielles principales \mathfrak{F} , \mathfrak{F}' ; et, pour cela, évaluons les vitesses \mathfrak{D} , \mathfrak{D}' de dilatation des lignes ds , ds' matérielles, mais en nous bornant aux surfaces qui conservent leur forme géométrique, comme il arrive dans le mouvement vertical, une fois régularisé et devenu uniforme, d'une goutte liquide ou d'une bulle gazeuse au sein d'un fluide en repos, et dans l'écoulement permanent des nappes liquides de Savart, issues d'une veine à débit constant. Les points de la couche superficielle y sont animés, par rapport à sa figure géométrique invariable, d'une simple vitesse G de glissement sur cette figure, le long des méridiens, vitesse encore fonction uniquement du paramètre λ définissant chaque point du méridien, censé *fixe*, de la figure.

Soient M , M' , μ les trois molécules de la couche situées actuellement, les deux premières, aux deux extrémités de l'arc ds , définies par la valeur λ' du second paramètre et par les valeurs λ , $\lambda + d\lambda$ du premier, la troisième, à l'extrémité de l'arc ds' où les paramètres sont λ , $\lambda' + d\lambda'$.

Durant un instant dt , les glissements Gdt , $\left(G + \frac{dG}{d\lambda} d\lambda\right) dt$ de M et de M' se font suivant les deux tangentes menées respectivement aux deux extrémités de l'arc ds de la figure invariable; et, projetés sur la droite de jonction des deux points (mobiles) à l'époque $t + dt$, ils se trouvent multipliés par les cosinus d'angles des ordres de petitesse de $d\lambda$ et de dt , cosinus inférieurs à 1 de quantités au plus comparables à $d\lambda dt$ et donnant des projections égales aux droites projetées, sauf erreurs de l'ordre de $d\lambda dt^2$. L'écart des deux points est donc la différence de ces droites, savoir $\frac{dG}{d\lambda} d\lambda dt$, ou, rapporté à leur distance primitive $ds = R d\lambda$, $\frac{1}{R} \frac{dG}{d\lambda} dt$. Or, ainsi évalué relativement, il égale le produit de dt par la vitesse cherchée, \mathfrak{D} , de dilatation; et de là résulte l'expression de \mathfrak{D} .

Quant à la vitesse analogue, \mathfrak{D}' , de dilatation de la droite joignant les deux points matériels M et μ , distants actuellement de $ds' = r d\lambda'$, on l'obtient en observant que le glissement élémentaire et pareil Gdt de ces deux points, suivant leurs éléments ds respectifs qui font l'angle λ avec le prolongement des rayons r , les éloigne de l'axe Ox , de $Gdt \cos \lambda$, et porte ainsi à $r + G \cos \lambda dt$ le rayon r de l'arc $M\mu = r d\lambda'$, ou à $(r + G \cos \lambda dt) d\lambda'$ la longueur de l'arc lui-même. L'accroissement

relatif $\delta' dt$ de la distance des deux points est donc $\frac{G}{r} \cos \lambda dt$: d'où résulte l'expression de δ' .

En résumé, l'on aura

$$(18) \quad \delta = \frac{1}{R} \frac{dG}{d\lambda}, \quad \delta' = \frac{G}{r} \cos \lambda.$$

Et les formules (3) de \mathfrak{F} et \mathfrak{F}' deviendront

$$(19) \quad (\mathfrak{F}, \mathfrak{F}') = f + e_1 \left(\frac{1}{R} \frac{dG}{d\lambda} + \frac{G}{r} \cos \lambda \right) + 2e \left(\frac{1}{R} \frac{dG}{d\lambda}, \frac{G}{r} \cos \lambda \right).$$

On portera donc ces valeurs dans les équations (17); ce qui fera dépendre les différences $\varkappa - \varkappa_1$, $\varepsilon - \varepsilon_1$, entre les pressions exercées sur les deux faces de la couche, de la figure géométrique permanente de celle-ci et de la vitesse G de glissement du fluide sur elle.

V. — Application aux nappes liquides rétractibles de Savart.

20. Nous verrons plus loin ce que donnent ces formules dans le cas du lent mouvement vertical uniforme d'une goutte liquide (ou d'une bulle gazeuse) au sein d'un fluide en repos. Contentons-nous, ici, d'en déduire les équations de mouvement d'une mince nappe liquide de Savart (n° 18, p. 33).

Nous prendrons pour origine de l'axe vertical (descendant) des x le centre du plateau circulaire. Le rayon r_0 de celui-ci sera le rayon r initial de la nappe, laquelle se détachera du plateau en faisant avec le prolongement et au-dessous de ce rayon r_0 un angle positif λ_0 plus ou moins voisin de zéro, valeur, initiale aussi, de l'angle croissant λ de la normale (menée vers l'axe) avec les x positifs, angle que l'on comptera ici positivement en sens inverse des r positifs, par delà l'intersection de la normale et de l'axe. Comme la figure d'un méridien ou d'un filet fluide sera fixe dans l'espace, la vitesse de glissement G des molécules sur cette figure constituera la vraie vitesse d'écoulement; et nous aurons $G = \frac{ds}{dt}$.

L'épaisseur variable E de la nappe, quoique un peu sensible, sera assez petite pour que la vitesse G puisse être censée la même sur les

deux couches superficielles externe et interne, ainsi qu'entre les deux, et pour que ces couches aient, à très peu près, les mêmes centres principaux et les mêmes rayons principaux R, R' , de courbure. Elle sera assez petite aussi pour qu'un filet fluide, l'occupant tout entière et compris entre deux plans méridiens voisins, de paramètres que nous écrirons $\lambda', \lambda' + d\lambda'$, puisse être construit d'une largeur $r d\lambda'$ très supérieure à E et être divisé, par les sections normales, menées suivant les arcs $r d\lambda'$ de cercles parallèles, en tronçons rectangulaires de longueur ds très plats et à faces peu courbes, où les deux bases $r d\lambda' ds$ aient leur aire très supérieure à celle des faces latérales $E ds, E r d\lambda'$.

Nous détacherons (par la pensée), de ces tronçons ou éléments de volume $E r d\lambda' ds$, sur chaque base, la *couche superficielle*, de masse insignifiante à côté de la masse totale, $\rho E r d\lambda' ds$, de l'élément; en sorte que les pressions exercées sur ces deux bases seront les pressions *intérieures*, ou transmises à l'élément de volume par les couches superficielles et appelées $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{T}_1$, dans les formules (17). Comme nous ferons abstraction de la pression atmosphérique, censée uniforme et partout normale (ou sans frottements), exercée par l'air sur les deux couches superficielles (1), \mathfrak{P} et \mathfrak{T} s'annuleront dans ces formules (17), ainsi réduites à

$$(20) \quad \mathfrak{P}_1 = \frac{\mathfrak{P}^2}{R} + \frac{\mathfrak{P}' \sin \lambda}{r}, \quad \mathfrak{T}_1 = \frac{1}{R} \left(\frac{d\mathfrak{P}}{d\lambda} + \frac{\mathfrak{P} - \mathfrak{P}'}{r} \frac{dr}{d\lambda} \right).$$

L'impulsion de ces pressions sur l'élément de volume, sera concordante pour les deux faces interne et externe; car les deux couches

(1) Si l'on répétait quelque jour les expériences de Savart, il y aurait lieu, à cet égard, de mieux assurer qu'il ne le faisait l'égalité de pression entre l'air clos par la nappe et l'atmosphère extérieure, en choisissant, par exemple, creuse sur toute sa longueur, la tige verticale axiale qui portait le plateau circulaire et en la perçant, à des hauteurs diverses, d'un certain nombre de petits orifices. L'on maintiendrait ainsi, en communication constante, l'air qu'enveloppe la nappe, contigu à la partie supérieure de la tige, et l'air libre qui entoure la partie inférieure au-dessous du niveau de fermeture de la nappe. Sans quoi, il y a peut-être à craindre que l'air intérieur, malgré l'agitation et la fragilité de sa mince enveloppe liquide, soit partiellement entraîné par le courant et raréfié, dès lors, dans une proportion inconnue: ce qui amènerait, sous la pression plus grande de l'air libre, des réductions très compliquées dans les dimensions de cette enveloppe, c'est-à-dire de la nappe.

superficielles, où G aura les mêmes valeurs, éprouveront les mêmes vitesses ϑ , ϑ' de dilatation donnant lieu aux mêmes tensions \mathfrak{F} , \mathfrak{F}' et, par suite, à la même action totale (transmise à l'élément de volume par les forces \mathfrak{x}_1 , \mathfrak{c}_1) de ces tensions, exercées sur les contours respectifs de deux fragments égaux de couches pris, l'un, à la face externe, l'autre, à la face interne. Il y aura donc lieu d'évaluer, par exemple, l'impulsion sur la base externe de l'élément de volume, puis de doubler les résultats pour tenir compte aussi de l'impulsion sur l'autre base.

Quant aux pressions, de même ordre par unité d'aire que les précédentes \mathfrak{x}_1 , \mathfrak{c}_1 , exercées sur les autres faces de l'élément de volume, bien plus petites, elles seront beaucoup moins sensibles et, d'ailleurs, presque égales mais opposées, sur chaque couple de faces parallèles. Elles s'entredétruiront au lieu de s'ajouter et seront négligeables.

21. Formons, d'après cela, les deux équations de mouvement de l'élément de volume $E r d\lambda' ds$, en écrivant que les deux composantes tangentielle et centripète de sa force motrice,

$$(21) \quad \rho E r d\lambda' ds \frac{dG}{dt} \quad \text{et} \quad \rho E r d\lambda' ds \frac{G^2}{R},$$

égalent les actions de mêmes sens respectifs,

$$(22) \quad \frac{2}{R} \left(\frac{d\mathfrak{F}}{d\lambda} + \frac{\mathfrak{F} - \mathfrak{F}'}{r} \frac{dr}{d\lambda} \right) r d\lambda' ds \quad \text{et} \quad 2 \left(\frac{\mathfrak{F}}{R} + \frac{\mathfrak{F}' \sin \lambda}{r} \right) r d\lambda' ds,$$

exercées, d'après (20), sur les deux bases $r d\lambda' ds$ de cet élément, plus les deux composantes respectives, tangentielle et normale,

$$(23) \quad \rho g E r d\lambda' ds \sin \lambda \quad \text{et} \quad \rho g E r d\lambda' ds \cos \lambda,$$

de son poids $\rho g E r d\lambda' ds$, dirigé suivant les x positifs et faisant, par conséquent, les deux angles $\frac{\pi}{2} - \lambda$, λ , avec la tangente au méridien ds et avec la normale censée menée vers l'axe. Ces deux équations sont donc, après division par la masse de l'élément,

$$(24) \quad \begin{cases} \frac{dG}{dt} = \frac{2}{\rho E R r} \left[r \frac{d\mathfrak{F}}{d\lambda} + (\mathfrak{F} - \mathfrak{F}') \frac{dr}{d\lambda} \right] + g \sin \lambda, \\ \frac{G^2}{R} = \frac{2}{\rho E} \left(\frac{\mathfrak{F}}{R} + \frac{\mathfrak{F}' \sin \lambda}{r} \right) + g \cos \lambda. \end{cases}$$

Éliminons-en l'épaisseur variable E de la nappe par l'équation de conservation des volumes liquides. Si nous appelons $2\pi q$ le débit donné de la veine fournissant la nappe, celui du filet fluide considéré, compris dans l'angle $d\lambda'$ de deux plans méridiens voisins, en sera la fraction $\frac{d\lambda'}{2\pi}$ ou vaudra $q d\lambda'$. Et comme il est le produit de la section droite $E r d\lambda'$ du filet par sa vitesse G , on aura

$$(25) \quad G E r = q; \quad \text{d'où} \quad E = \frac{q}{G r}.$$

22. Introduisons en outre, comme paramètre destiné à remplacer λ , l'arc s de méridien, compté à partir du bord ($x = 0$, $r = r_0$) du plateau; ce qui, vu les formules évidentes

$$(26) \quad \cos \lambda = \frac{dr}{ds}, \quad \sin \lambda = \frac{dx}{ds}$$

(d'où, par différentiation,

$$(27) \quad -\sin \lambda d\lambda = d \frac{dr}{ds}, \quad d\lambda = -\frac{ds}{dx} d \frac{dr}{ds},$$

et vu aussi que R vaut $\frac{ds}{d\lambda}$, donnera

$$(28) \quad \frac{1}{R} = -\frac{1}{dx} d \frac{dr}{ds}.$$

On aura d'ailleurs, pour transformer les dérivées des fonctions de λ , la formule symbolique

$$(29) \quad \frac{d}{d\lambda} = \frac{ds}{d\lambda} \frac{d}{ds} = R \frac{d}{ds}.$$

Enfin, la vitesse G n'étant, en raison de la permanence, fonction du temps t que par l'intermédiaire de la variable s , l'accélération tangentielle $\frac{dG}{dt}$ équivaut à $\frac{dG}{ds} \frac{ds}{dt}$ ou à $G \frac{dG}{ds}$.

Dans ces conditions, les équations (24) deviendront

$$(30) \quad \begin{cases} \frac{d}{ds} \left(\frac{G^2}{2} \right) = \frac{2G}{\rho q} \left[r \frac{d\mathcal{F}}{ds} + (\mathcal{F} - \mathcal{F}') \frac{dr}{ds} \right] + g \frac{dx}{ds}, \\ \frac{G^2}{R} = \frac{2G}{\rho q} \left(\mathcal{F} \frac{r}{R} + \mathcal{F}' \frac{dx}{ds} \right) + g \frac{dr}{ds}. \end{cases}$$

Il faudra y observer que, d'après (19), (26) et (29),

$$(31) \quad (\mathfrak{F}, \mathfrak{F}') = f + \frac{e_1}{r} \frac{d.r.G}{ds} + 2e \left(\frac{dG}{ds}, \frac{G}{r} \frac{dr}{ds} \right)$$

et que, par suite,

$$(32) \quad \mathfrak{F} - \mathfrak{F}' = 2er \frac{d}{ds} \left(\frac{G}{r} \right).$$

La première (30), multipliée par l'élément ds de chemin, pourrait, sans la présence du premier terme (complexe) de son second membre, être intégrée immédiatement à partir de $s = 0$, c'est-à-dire à partir du plateau, où $x = 0$ et où la vitesse initiale G_0 sera censée donnée. Et l'on aurait ainsi l'équation des forces vives, qui ferait connaître la vitesse G en fonction des coordonnées. Puis la substitution de cette valeur de G dans la seconde (30) donnerait une équation différentielle de la trajectoire ou du méridien. Mais le terme en G du second membre de la première (30) résiste à l'intégration et il semble difficile de pousser plus loin la solution générale du problème.

23. Restreignons-nous donc à l'hypothèse de fluidité parfaite, ou annulons les coefficients e, e_1 de viscosité; ce qui rend $\mathfrak{F}, \mathfrak{F}'$ égaux à la constante f . Alors le terme en G du second membre de la première (30) disparaît et il vient pour G^2 , en appelant G_0 la vitesse du fluide au départ du plateau, l'expression ordinaire

$$(33) \quad G^2 = G_0^2 + 2gx.$$

La vitesse G étant ainsi connue en fonction de x , multiplions la seconde (30) par $\frac{dx}{G}$, après y avoir remplacé la courbure $\frac{1}{R}$ du méridien par son expression (28); et, en transposant ensuite le premier terme, celui-ci, devenu, dans le second membre, $G d \frac{dr}{ds}$, s'y groupera avec le dernier terme de l'équation, $\frac{g dx}{G} \frac{dr}{ds}$, où $\frac{g dx}{G}$ aura, d'après (33), la valeur dG ; il viendra ainsi $d \left(G \frac{dr}{ds} \right)$. D'autre part, le terme en \mathfrak{F} et \mathfrak{F}' sera

$$\frac{2f}{\rho q} \left(\frac{dx^2}{ds} - r d \frac{dr}{ds} \right);$$

et l'on pourra y remplacer dx^2 par $ds^2 - dr^2$, puis observer que $-\frac{dr^2}{ds}$ ou $-\frac{dr}{ds}dr$ se joint à $-r d\frac{dr}{ds}$ pour donner $-d\left(r\frac{dr}{ds}\right)$. L'équation étant dès lors

$$d\left[G\frac{dr}{ds} + \frac{2f}{\rho q}\left(s - r\frac{dr}{ds}\right)\right] = 0 \quad \text{ou} \quad d\left[\left(G - \frac{2f}{\rho q}r\right)\frac{dr}{ds} + \frac{2f}{\rho q}s\right] = 0,$$

son intégration immédiate fera connaître l'équation différentielle première de la trajectoire, sous la forme

$$(33 \text{ bis}) \quad \left(G - \frac{2f}{\rho q}r\right)\frac{dr}{ds} = \left(G_0 - \frac{2f}{\rho q}r_0\right)\cos\lambda_0 - \frac{2f}{\rho q}s.$$

De celle-ci, démontrée un peu autrement, j'ai déduit en 1869 (1) la figure générale de la nappe, que j'ai déterminée ensuite de plus près en effectuant, par des calculs numériques approchés et dans un cas particulier voisin de ceux qu'avait observés Savart, une dernière intégration, dont les résultats sont assez sensiblement conformes à ceux de l'expérience.

Cette première approximation, obtenue en négligeant la viscosité superficielle, pourrait sans doute servir de point de départ à des calculs plus exacts où l'on en tiendrait compte (du moins quand on connaîtra, pour l'eau, les coefficients e , e_1); et cela, grâce aux formules (33), (31), (32) de G , \mathcal{F} , \mathcal{F}' , $\mathcal{F} - \mathcal{F}'$ qui fourniraient, des quantités négligées ici, une évaluation approchée. Mais la question ne paraît guère de nature à motiver d'aussi longs calculs.

VI. *Démonstration nouvelle de la formule des énergies potentielles de superficie, dans les liquides parfaits, et application aux volumes fluides pesants déprimés ou soulevés, dans les tubes cylindriques de section quelconque.*

24. Bornons-nous encore, ici, aux liquides parfaits, où \mathcal{F} , \mathcal{F}' se réduisent à la tension constante d'état élastique f , pour y étudier

(1) *Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences*, t. LXIX, 5 et 12 juillet 1869 : on trouve beaucoup plus de développements dans mon *Essai sur la théorie des eaux courantes*, p. 639 à 659 (au Tome XXIV du *Recueil des Savants étrangers*).

analytiquement, d'une manière simple et qui me semble nouvelle ⁽¹⁾, le travail produit par cette tension, ou à raison de cette tension, dans leurs couches superficielles.

Il s'agit seulement des couches contiguës ou à leurs surfaces libres, ou à la surface séparative de deux liquides, non de celles qu'ils forment contre les parois solides et qui, tenant de ces parois la propriété d'exercer ou de subir des actions tangentielles, ont leur contexture généralement dissymétrique de part et d'autre de leurs sections principales; en sorte que l'agitation calorifique est impuissante à y établir l'isotropie autour de la normale, et qu'elles sont comme étrangères au système *fluide* proposé. Mais ces dissymétries s'y évanouissent à des distances de la paroi imperceptibles (du moins partout ailleurs qu'au voisinage d'une autre surface); et le fluide intérieur, isotrope, y glisse librement sur la couche superficielle dans tous les sens parallèles à la paroi. Il suffira donc de considérer, comme faisant corps avec celle-ci, la mince couche dissymétrique de transition, pour avoir, en tant que conditions à la paroi, celles de l'hydrodynamique rationnelle, savoir, la normalité de la pression extérieure s'y exerçant et l'annulation, dans le même sens normal, de la vitesse relative du liquide par rapport à la paroi.

25. A la jonction d'une paroi et de la couche séparant deux fluides, c'est-à-dire sur la ligne commune à la paroi, à un liquide (spécialement considéré) et à un autre fluide, gazeux ou non, l'on peut admettre que la rapidité de l'évolution interne, due à l'agitation calorifique, amène sans cesse presque instantanément, dans chaque petit espace, la configuration la plus stable possible des deux espèces de matière fluide; et qu'elle y règle, par conséquent, les angles dièdres adjacents formés par les deux fluides avec la paroi, jusque dans le détail des feuillettes de ceux-ci, exactement de même qu'elle règle, aux distances de là assez grandes, la constitution intime de la couche superficielle, ses densités, son isotropie autour de la normale, et la grandeur f de sa tension. Or, sur la ligne de jonction de cette même couche avec la paroi, du moins quand celle-ci est plane ou de courbure

⁽¹⁾ Je l'ai donnée pour la première fois, dans mon Cours de la Sorbonne, en novembre et décembre 1912.

modérée, la géométrie indique encore, comme plan de symétrie, mais unique, celui qui est perpendiculaire à l'arête des deux dièdres et qui sera, par suite, le siège de pressions dirigées suivant l'arête ou normales, tandis qu'il contiendra lui-même les pressions subies par les plans menés suivant l'arête ou parallèles à l'arête.

Donc, en particulier, si la paroi est *homogène* (sans *impuretés* consistant en minces couches *irrégulières*, de nature quelconque), l'angle φ , dit *de raccordement*, que la paroi, se prolongeant, fera, hors du liquide spécialement considéré, avec la couche séparative de ce liquide et du milieu fluide contigu, sera *constant*, c'est-à-dire fonction seulement des matières en présence et de la température, comme l'est f à quelque distance de là. Cet angle sera obtus, pouvant même atteindre 2 droits, quand, aux distances imperceptibles, la paroi attirera le liquide, jusqu'à en faire étaler sur elle une très mince couche au delà de la région occupée par le gros de cette masse liquide; il sera aigu, au contraire, et susceptible peut-être de s'abaisser jusqu'à zéro, quand le liquide semblera fuir la paroi ou en être repoussée.

En résumé, l'angle φ de raccordement est une donnée des problèmes, comme la tension même f de la couche superficielle considérée : il est la constante *propre* à la ligne l de jonction de la paroi avec la couche, de même que le sont les deux constantes respectives, f , pour la couche, et ρ , pour l'intérieur du liquide.

26. Proposons-nous d'abord de déterminer, en fonction de f et de φ , l'action de la paroi sur la couche superficielle qui s'y joint le long d'une ligne l ou droite, ou de courbure modérée. A cet effet, prenons, pour tableau, le plan même de symétrie normal à un élément quelconque dl de cette ligne, en son milieu; et soit S (*fig. 2*) l'intersection, par ce plan, de dl arête des deux dièdres adjacents, dont l'un, P'SS' est celui (qu'occupe le liquide considéré) de la paroi PSP' avec la couche superficielle SS', tandis que l'autre, PSS', est celui du prolongement SP de la paroi (au-dessus du liquide, par exemple) avec la même couche superficielle SS' et se trouve occupé soit par un gaz, soit par un autre liquide.

Considérant, de part et d'autre du tableau, c'est-à-dire moitié en avant et moitié en arrière, la mince bande de matière, d'épaisseur dl ,

étalée à sa surface, ou comprise entre deux plans parallèles au tableau $PS'SP'$ sur lesquels ne s'exerceront, par raison de symétrie, que des actions normales, isolons par la pensée, dans cette bande, la portion de la couche superficielle SS' que découperont deux sections, normales à celle-ci et au tableau, menées, l'une, en S , l'autre en c , à une très

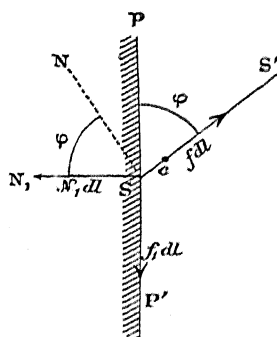


Fig. 2.

petite distance Sc imperceptible, mais suffisante pour que la tension de la couche, en c , soit déjà $f dl$ et dirigée suivant cS' . L'angle PSS' ne sera donc autre que φ et égalera celui de la normale SN , tirée hors du liquide à la couche SS' , avec la normale SN_1 à la paroi, menée vers l'intérieur de celle-ci, c'est-à-dire hors de deux fluides contigus.

Cela posé, observons que l'action de la paroi en S , sur la portion considérée Sc de couche, doit comprendre une traction normale $SN_1 = \varkappa, dl$ et une composante tangentielle $SP' = f, dl$, que nous regarderons comme positive quand elle sera dirigée (suivant la flèche) vers le côté où est le liquide et non au dehors. Or ces deux actions, sensibles par unité de l'épaisseur dl , l'emportent extrêmement, et sur les pressions ordinaires, finies par unité d'aire, sollicitant, depuis S jusqu'en c , les deux faces $Sc \times dl$, l'une tournée vers le liquide, l'autre extérieure, de cet élément Sc de couche, ainsi que sur le poids et les inerties du même élément, dont la masse est insensible par unité de la même aire $Sc \times dl$. Il ne s'exerce sur cet élément, de comparables aux deux forces en question \varkappa, dl et f, dl , que la tension $f dl$ appliquée en c , à composantes $-f dl \sin \varphi$ et $-f dl \cos \varphi$ suivant SN_1 et SP' , plus les deux tensions, égales et opposées, perpendiculaires

au plan du tableau par raison de symétrie, qui s'exercent sur les deux faces du même élément Sc distantes de dl et parallèles au tableau. Celles-ci se neutralisant, il n'y a qu'à exprimer l'équilibre des forces en S et en c suivant les deux directions SN_1 , SP' . Et il vient, pour déterminer l'action cherchée de la paroi (ou de la mince couche fluide contiguë dissymétrique, prise d'épaisseur uniforme, qu'on lui adjoint), les deux formules

$$(34) \quad \mathfrak{T}_1 = f \sin \varphi, \quad f_1 = f \cos \varphi.$$

Quand il y aura ainsi une paroi limitant le liquide que nous étudierons, elle ne le limitera qu'en partie et nous la supposerons fixe. Donc, les pressions normales exercées par elle sur le liquide intérieur qui y glissera, ne produiront aucun travail; et ce sera seulement le long de la ligne, l , où s'y joindra chaque couche superficielle comme SS' , que la composante tangentielle f_1 de l'action de la paroi aura du travail, pourvu que cette ligne l soit mobile, c'est-à-dire pourvu que *la couche superficielle considérée balaie la paroi fixe* (¹).

27. Nous pouvons chercher maintenant comment l'équation des forces vives est modifiée, dans une masse liquide, par la tension f de sa couche superficielle ou libre, ou contiguë à un autre liquide. La masse fluide en question sera homogène, composée de particules, de masse M et en grand nombre, ayant respectivement les vitesses visibles V , les poids Mg et des altitudes (au-dessus d'un plan horizontal fixe) appelées z ; enfin, elle se trouvera limitée, en partie, par des parois fixes, ayant à l'époque t certaines aires totales σ , en contact avec le liquide, et, en partie, par des surfaces ou libres, ou contiguës à d'autres liquides, et dont les diverses aires totales seront nommées σ .

Ne portant pour le moment notre attention que sur une seule des surfaces ou libres, ou séparatives de deux liquides, excluons par la pensée, de cette masse ΣM , non seulement, comme il est dit ci-dessus, d'une manière définitive, une mince couche censée adjointe aux parois

(¹) Cela exclut le cas où les parois se réduiraient aux *files tendus* (ou aux tiges minces) d'un cadre autour desquels pourraient simplement tourner les couches superficielles, sans y glisser d'une manière notable.

et de masse négligeable, mais aussi, *provisoirement*, la couche superficielle d'aire σ , de tension f et de masse non moins négligeable; de manière que la pression subie par le système matériel considéré y soit celle, p_1 , que cette couche exerce sur le liquide *intérieur*. Alors l'équation des forces vives exprime, comme on sait, que l'énergie totale du mouvement *visible* de la masse liquide ΣM , somme de son énergie actuelle ou demi-force vive $\sum \frac{M}{2} V^2$ et de son énergie potentielle *de pesanteur* $\Sigma M g b$, a sa différentielle durant un instant dt égale au travail élémentaire correspondant, $dt \int_{\sigma} V_n p_1 d\sigma$, des pressions $p_1 d\sigma$ exercées sur le liquide par les divers éléments $d\sigma$ de sa couche superficielle, dont V_n désigne ici la vitesse suivant une normale tirée à $d\sigma$ vers l'intérieur du fluide. Quant aux pressions dues à la paroi et s'exerçant sur la masse liquide intérieure ainsi délimitée, on a déjà vu qu'elles n'y donnent aucun travail perceptible. On a donc, en menant à $d\sigma$ une normale infiniment petite δn pour figurer le *cheminement normal* de $d\sigma$ durant dt , ou égale à $-V_n dt$, si le liquide envahit l'espace environnant, et à $V_n dt$, s'il délaisse cet espace ou recule sur lui-même,

$$(35) \quad d \left(\sum \frac{M}{2} V^2 + \sum M g b \right) = \int_{\sigma} (\mp \delta n) p_1 d\sigma,$$

relation où le signe supérieur $-$ de δn doit s'employer, comme on voit, pour tout élément $d\sigma$ de la couche superficielle qui s'avance hors de la masse liquide, tandis que le signe inférieur $+$ s'appliquera pour les éléments $d\sigma$ qui refoulent cette masse.

Mais la formule (35) contient à son second membre la pression *intérieure* p_1 , qui ne constitue pas une donnée naturelle des questions et qu'il y a lieu, par conséquent, d'éliminer, pour faire figurer, à la place, la pression *extérieure* p , au contraire connue (et même constante) dans la plupart des problèmes, où le fluide extérieur n'est autre que l'atmosphère. Or cette élimination de p_1 impliquera que l'on comprenne les couches superficielles σ dans le système matériel à étudier; ce qui obligera d'y considérer le travail des tensions f intérieures aux couches, et même celui des tractions tangentielles $f_t dl$ de la paroi *sur le contour* des mêmes couches, contour qui, généralement, s'y déplace et *la balaie*.

On atteint ce but le plus simplement possible, par la substitution à p_1 , dans (35), de sa valeur (p. 33)

$$f\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) + p$$

résultant de l'équation (14). Le second membre de (35) se dédouble ainsi en deux termes, dont le second exprimera le travail élémentaire des pressions $p d\sigma$ du fluide ambiant, travail dit *extérieur*, d'ordinaire ou nul ou immédiatement évaluable, et que nous représenterons par $d\mathfrak{E}_e$. Quant au premier terme, devenu un travail de forces en grande partie intérieures au système, il sera, pour chaque surface σ *d'un seul tenant*, ou fermée ou limitée à un contour s'appuyant sur une paroi,

$$(36) \quad f \int_{\sigma} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) (\mp \delta n) d\sigma.$$

28. Nous y évaluerons la somme des deux courbures principales $\frac{1}{R}, \frac{1}{R'}$, de la couche σ , dont les situations successives constituent dans l'espace une certaine famille $\tau(x, y, z) = \text{const.}$ de surfaces, par une formule très simple, convenant à une telle famille continue quelconque, et que j'ai donnée en 1887 dans mon *Cours d'Analyse infinitésimale pour la Mécanique et la Physique* (t. I, fasc. 2, p. 74*). Cette formule emploie les trois cosinus directeurs α, β, γ de la normale, δn , menée en (x, y, z) à la surface $\tau = \text{const.}$ qui y passe et du côté où le paramètre τ grandit (ce qui arrivera ici pour nos δn si l'on adopte, par exemple, comme paramètre τ caractéristique de chaque surface, l'instant même t de sa réalisation) : elle est

$$(37) \quad \frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = - \left(\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz} \right),$$

pourvu qu'on y compte positivement les rayons R, R' quand le centre de courbure correspondant se trouve dans la direction de δn .

Démontrons-la, en observant d'abord que l'expression

$$\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz}$$

est, au point quelconque $M(x, y, z)$ de l'espace, indépendante des axes rectangulaires choisis. En effet, si l'on se sert des deux paramètres différentiels Δ_1, Δ_2 de Lamé, bien connus, et qu'on appelle finalement $\delta\Delta_1\tau$ la différentielle géométrique de la fonction $\Delta_1\tau$ de point le long du chemin δn , il vient successivement

$$(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{1}{\Delta_1\tau} \frac{d\tau}{d(x, y, z)};$$

$$\frac{d\alpha}{dx} = \frac{1}{\Delta_1\tau} \frac{d^2\tau}{dx^2} - \frac{1}{\Delta_1\tau} \frac{d\Delta_1\tau}{dx} \alpha, \quad \frac{d\beta}{dy} = \dots, \quad \frac{d\gamma}{dz} = \dots,$$

et, enfin,

$$\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz} = \frac{1}{\Delta_1\tau} \left(\Delta_2\tau - \frac{\partial\Delta_1\tau}{\partial n} \right),$$

expression où les x, y, z ne figurent plus.

Prenons dès lors, en M , pour axe des z , la normale δn qui en émane et, pour axes des x et des y , les tangentes à deux arcs élémentaires $MA = dx$, $MB = dy$ des deux sections normales principales menées à la surface passant par M , arcs qui ont, dans les deux plans respectifs des zx et des zy , les angles de contingence $\frac{dx}{R}$, $\frac{dy}{R'}$. Les deux normales δn menées, par exemple, en M et en A , font, par suite, avec l'axe des x , les deux angles $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + \frac{dx}{R}$; d'où résultent pour α les deux valeurs $0, -\frac{dx}{R}$. On aura donc $\frac{d\alpha}{dx} = -\frac{1}{R}$; et, de même, $\frac{d\beta}{dy} = -\frac{1}{R'}$. Quant à $\frac{d\gamma}{dz}$, l'identité $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ donnant partout, différentiée en z , la relation $\alpha \frac{d\alpha}{dz} + \beta \frac{d\beta}{dz} + \gamma \frac{d\gamma}{dz} = 0$, cette relation se réduit à $\frac{d\gamma}{dz} = 0$, en M où α et β s'annulent.

La formule (37) est ainsi démontrée.

29. Cela posé, le second membre de (37) peut être substitué au premier dans (36), quand la normale δn y est prise avec son signe inférieur $+$, c'est-à-dire quand la masse liquide est refoulée par l'élément $d\sigma$ de sa couche superficielle, ou que les normales δn se trouvent menées vers l'intérieur où se comptent positivement R, R' . Mais le second

membre de (37) devra être changé de signe si l'élément $d\sigma$ envahit l'espace extérieur, cas où les normales δn seront menées à l'opposé du sens où la formule (14), employée ici, compte positivement R et R'.

Donc, dans les deux cas, le produit figurant sous le signe \int de (36) aura le signe $-$; et cette expression sera, en définitive,

$$-f \int_{\sigma} \left(\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz} \right) \delta n d\sigma.$$

Or $\delta n d\sigma$ représente le volume, que l'on peut appeler $d\varpi$, décrit par l'élément $d\sigma$ de couche superficielle; et, si $\delta\varpi$ désigne la somme de tous les volumes élémentaires pareils, pour la couche entière σ d'un

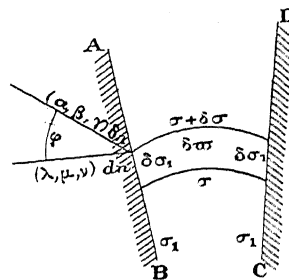


Fig. 3.

seul tenant, à contour l balayant une paroi ABCD (*fig. 3*) ou σ_1 , le terme (36) deviendra

$$(38) \quad -f \int_{\delta\varpi} \left(\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz} \right) d\varpi.$$

L'intégrale de volume y est, comme on voit, de celles qui s'intègrent immédiatement une fois, par une formule tout à fait usuelle les transformant en une intégrale de surface prise sur toute la frontière de ce volume $\delta\varpi$. Or, ici, la frontière dont il s'agit comprend : 1° la surface σ , considérée avant son déplacement; 2° cette même surface devenue, après son déplacement, $\sigma + \delta\sigma$; 3° enfin, la portion de paroi balayée, entre les deux positions de σ , par son contour l . Nous appellerons celle-ci $\delta\sigma_1$, en supposant dans la figure, pour fixer les idées, que la couche σ envahisse l'espace extérieur au liquide et accroisse, par conséquent, de $\delta\sigma_1$, l'aire mouillée σ , de la paroi en question ABCD.

Soient λ , μ , ν les trois cosinus directeurs des normales dn aux divers éléments de la frontière, tirées vers le dehors du volume $\delta\omega$, cosinus évidemment égaux à α , β , γ sur la partie $\sigma + \delta\sigma$ de la surface limite (où les dn se confondent avec les δn), à $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$ sur la partie σ (où les dn sont opposés aux δn), enfin complètement distincts de α , β , γ sur les éléments $d\sigma_1$ de l'aire $\delta\sigma$, balayée par le contour l . Et la formule usuelle donne dès lors, y compris le facteur $-f$, pour les trois parties du résultat concernant respectivement $\sigma + \delta\sigma$, σ et $\delta\sigma_1$,

$$\begin{aligned} -f \int_{\sigma + \delta\sigma} (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) d\sigma, & \quad + f \int_{\sigma} (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) d\sigma, \\ & \quad - f \int_{\delta\sigma_1} (\alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu) d\sigma_1. \end{aligned}$$

Les deux premières valent évidemment $-f(\sigma + \delta\sigma)$, $f\sigma$ et ont pour somme $-f\delta\sigma$, ou $-\delta(f\sigma)$, vu la constance admise de f sur chaque partie de couche superficielle qui est *d'un seul tenant*.

Quant à la troisième partie, le trinome $\alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu$ y exprime le cosinus, sur le contour l , de l'angle des deux normales δn (à la couche σ) et dn (à la paroi, hors de l'espace que σ parcourt); et cet angle est précisément celui de raccordement φ invariable pour toute la paroi σ_1 . D'ailleurs, le produit constant $f\cos\varphi$ égale, d'après (34), la traction f_1 qu'exerce sur le bord de la couche superficielle, par unité de la longueur l de ce bord et perpendiculairement à celui-ci, mais dans le plan de la paroi, la partie déjà mouillée (ou plutôt couverte) σ , de cette paroi, traction qui deviendrait négative (ou émanerait de la portion *non encore mouillée* de la paroi), si l'angle φ était obtus.

Cette troisième partie du résultat est donc $-f_1\delta\sigma_1$, ou $-\delta(f_1\sigma_1)$; et il est visible qu'elle exprime le produit des tractions élémentaires $f_1 dl$ exercées sur les divers éléments dl du bord ou contour, par la projection, sur elles, des chemins qu'ont parcourus leurs bases dl d'application, chemins négatifs sur notre figure où chaque élément dl progresse vers la partie non mouillée de la paroi et y balaie un élément de $\delta\sigma$, ayant pour hauteur la valeur absolue de la projection dont il s'agit. Autrement dit, la troisième partie, $-\delta(f_1\sigma_1)$, du résultat représente le travail des actions exercées par la paroi sur le bord de la couche superficielle.

30. En résumé, l'introduction de la couche superficielle σ dans le système matériel considéré (d'où nous l'avions d'abord excluse) amène trois termes au second membre de l'équation (35) des forces vives, à la place du travail des pressions intérieures $p, d\sigma$, savoir : 1° le terme $d\bar{\epsilon}_e$, travail élémentaire, *extérieur*, des pressions $p d\sigma$ du fluide ambiant; 2° le terme $-\delta(f, \sigma_1)$, travail *extérieur aussi*, mais exercé par la paroi fixe sur le contour mobile l de la couche σ ; 3° enfin, le terme $-\delta(f\sigma)$. Or, comme l'adjonction de la couche σ au système devait évidemment introduire dans l'équation des forces vives, outre le travail *extérieur*, celui des actions intérieures à la couche, il est clair que ce dernier terme $-\delta(f\sigma)$, proportionnel à la variation $\delta\sigma$ éprouvée par l'étendue de la couche, exprime justement le travail de ces actions intérieures, c'est-à-dire le travail de la tension superficielle f , à laquelle il est aussi proportionnel.

Notre masse liquide pouvant comprendre un certain nombre de couches superficielles, comme σ , limitées, extérieurement, par des fluides distincts susceptibles de modifier f , et, latéralement ou sur leur contour, par tout autant de parois, comme σ_1 , exerçant des actions f_1 différentes, ces diverses couches introduiront des termes analogues à $-\delta(f\sigma)$ et à $-\delta(f_1\sigma_1)$. Donc, en continuant à appeler $d\bar{\epsilon}_e$ le travail *total* des pressions normales $p d\sigma$ des fluides ambiants, nous aurons, comme second membre de l'équation (35) des forces vives,

$$(39) \quad -d\Sigma f\sigma - d\Sigma f_1\sigma_1 + d\bar{\epsilon}_e.$$

Le premier terme, *travail des actions intérieures aux couches superficielles*, est le décroissement élémentaire de la somme des produits des tensions f de ces couches par leurs aires σ . Cette somme de produits, fonction déterminée et simple de la figure des couches, peut donc être regardée comme une *énergie potentielle de superficie*, comme un capital de travail inhérent aux couches et qui, à mesure qu'il se dépense par la diminution des aires σ , se révèle sous la forme de travail réalisé. C'est *l'énergie potentielle propre des couches superficielles liquides*.

Dans le second terme, $-d\Sigma f_1\sigma_1$, décroissement élémentaire de la somme des produits des aires-parois mouillées σ_1 par la traction f_1

qu'exerce chaque paroi, tangentiellement à elle-même, sur l'unité de longueur du contour contigu de la couche superficielle qui s'y appuie, cette somme $\Sigma f_1 \sigma_1$ constitue aussi, évidemment, une énergie potentielle, puisque, *en se dépensant*, elle fournit le travail de ces résistances qu'oppose chaque paroi à son envahissement croissant par la couche superficielle qu'elle limite; ou à l'extension de sa partie mouillée σ_1 . On pourrait l'appeler *l'énergie potentielle de la résistance des parois à leur recouvrement par le liquide*, ou à *l'étalement croissant, sur elles*, de celui-ci.

Transposons ces deux termes de (39), qui expriment les deux *énergies potentielles de superficie* du système matériel dans leur variation élémentaire, au premier membre de la formule (35), à côté des énergies actuelle et potentielle *de volume* ou *de masse*, qui y figurent déjà; et l'équation des forces vives de notre liquide, pour les mouvements visibles, acquerra la forme définitive que nous nous proposons d'établir :

$$(40) \quad d\left(\sum \frac{M}{2} V^2 + \sum M g h + \sum f \sigma + \sum f_1 \sigma_1\right) = d\bar{e}_e.$$

31. Elle signifie que *l'énergie totale de la masse liquide, dans son mouvement visible, comprend son énergie actuelle* $\sum \frac{M}{2} V^2$, *son énergie potentielle de pesanteur* $\Sigma M g h$, *l'énergie potentielle propre* $\Sigma f \sigma$ *de ses surfaces ou libres, ou séparatives, du liquide d'avec d'autres fluides*, enfin, *l'énergie potentielle* $\Sigma f_1 \sigma_1$ *de résistance des parois (fixes) à l'extension du liquide sur elles*; et que *cette énergie totale reçoit, d'un instant à l'autre, un accroissement égal au travail des pressions normales* $p d\sigma$ *qu'exercent sur les couches superficielles les divers fluides environnants*.

Comme le volume total du liquide se conserve et que les parois sont supposées fixes, les déplacements en avant d'une partie des couches superficielles, à l'encontre des fluides ambiants, et les mouvements contraires de recul des autres parties se compensent à tout instant; d'où il résulte, comme on sait, que le travail $d\bar{e}_e$ s'annule sans cesse *quand la pression extérieure* p *est uniforme sur toute la surface de ces couches*. L'énergie totale du liquide sera donc alors constante; et si la

somme des trois énergies potentielles est minimum (en tenant compte de l'invariabilité du volume), pour une certaine configuration de la masse liquide entre les parois fixes qui la maintiennent partiellement, cette configuration sera dès lors une figure d'équilibre stable. Il suffit, en effet, qu'elle soit réalisée un moment, sans autres vitesses V que des vitesses infiniment petites, pour que celles-ci ne puissent jamais devenir sensibles, ni la configuration changer d'une manière appréciable; car de tels changements ne pourraient manquer d'accroître la somme de l'énergie actuelle $\sum \frac{M}{2} V^2$ (essentiellement positive) et de l'énergie potentielle (actuellement minimum), somme qui est, au contraire, invariable.

Si, par exemple, la masse liquide se trouve isolée dans l'espace et sans pesanteur, ou que la seule énergie potentielle en jeu soit son énergie propre $f\sigma$ de superficie, la forme sphérique, où l'aire σ est aussi réduite que possible, sera sa figure d'équilibre stable.

32. Ne quittons pas ce beau sujet d'études sans appliquer encore la formule (37) de la somme des deux courbures principales, au calcul du volume fluide qui est *ou déprimé, ou surélevé, par la tension superficielle f* , à la surface libre du liquide pesant remplissant jusqu'à une

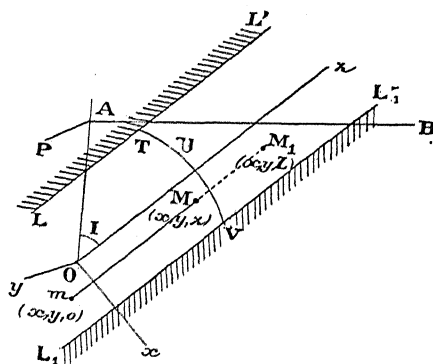


Fig. 4.

certaine hauteur un tube cylindrique $LL'L_1L_1$ (*fig. 4*) ouvert par le haut, c'est-à-dire au calcul du volume liquide en équilibre qu'il faudrait, ou *surajouter* à cette surface libre, ou *enlever* (suivant que

l'angle φ de raccordement est aigu ou obtus), pour que l'annulation de la tension superficielle f ne changeât rien, dans la partie du tube occupée, aux pressions hydrostatiques qui s'y exercent.

Prenons pour origine un point O de l'axe du tube, vers sa partie inférieure, et cet axe même, faisant un angle aigu I avec la verticale ascendante OA , pour celui des z ; puis, dans le plan vertical AOz , la perpendiculaire descendante Ox , à Oz , pour axe des x ; enfin, l'horizontale Oy , normale au plan zOx , pour axe des y . Soient : PAB le plan horizontal de repère à partir duquel se compteront, de haut en bas, les profondeurs verticales H qui, multipliées par le poids ρg de l'unité de volume du liquide, mesureront les vraies pressions intérieures p_1 , dans la partie occupée du tube; enfin, TUV la surface libre qui s'y observe et M un de ses points, ayant les coordonnées (x, y, z) , tandis que m , à coordonnées $(x, y, 0)$, sera la projection de M sur le plan des xy , et M_1 , à coordonnées (x, y, Z) , le point du plan de repère PAB qui a la même projection m sur ce plan des xy .

La dépression à calculer sera le volume ϖ compris, dans le tube, entre la surface libre TUV et le plan de repère PAB; car c'est ce volume qu'il faudrait remplir de liquide, si f s'annulait, pour maintenir partout dans le tube, au-dessous de TUV, les pressions qui s'y produisent. Pour l'évaluer, divisons-le par des plans parallèles aux zx et aux zy , en filets élémentaires, à section droite $dx dy$ dans le plan des xy (jusqu'auquel nous les supposons prolongés) et dont l'un, de hauteur $MM_1 = Z - z$, aura le volume $(Z - z) dx dy$. Si nous appelons A la section (droite) du cylindre par le plan des xy et S son contour, la dépression sera évidemment ($dx dy$ étant dA) exprimée par

$$\int_A (Z - z) dA.$$

Cela posé, la pression intérieure p_1 , en M , sous la couche superficielle, correspond à un abaissement H de niveau, au-dessous de PAB, qui est la projection, $(MM_1) \cos I$ ou $(Z - z) \cos I$, de MM_1 sur une verticale; et l'on a

$$p_1 = (\rho g \cos I) (Z - z) \quad \text{ou} \quad Z - z = \frac{p_1}{\rho g \cos I}.$$

Or la formule (14) (p. 33), ici où il est fait abstraction partout de la pres-

sion atmosphérique constante p , montre que p_1 a la valeur $f\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)$, si R et R' sont les deux rayons principaux de courbure de la surface libre en M . Il viendra donc

$$(41) \quad \text{Volume } \varpi \text{ de la dépression} = \int_{\Lambda} (Z - z) d\Lambda = \frac{f}{\rho g \cos I} \int_{\Lambda} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) d\Lambda.$$

33. Or, prenons l'équation de la surface TUV sous la forme $z = f(x, y)$, et, appelant p, q , suivant l'usage, les deux dérivées partielles de f en x et y , déduisons de cette surface, en la déplaçant parallèlement à Oz sans modifier ses rayons R, R' de courbure en fonction de x et de y , toute la famille de surfaces $z - f(x, y) = \text{const.}$, dont les normales δn , menées de manière à faire des angles aigus avec les z positifs, auront les cosinus directeurs $(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{(-p, -q, 1)}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}}$ indépendants de z . La formule (37), où le second membre se trouvera ici changé de signe par l'opposition du sens des δn à celui suivant lequel les R, R' se comptent positivement, donnera, pour la somme des deux courbures principales, le binôme $\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy}$; et l'expression (41) de la capacité ϖ deviendra une intégrale double prise sur toute la partie A du plan des xy , savoir

$$(42) \quad \varpi = \frac{f}{\rho g \cos I} \int_{\Lambda} \left(\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy}\right) d\Lambda.$$

Une intégration immédiate y donne, grâce à la formule usuelle, l'intégrale de contour $\int_s (\alpha\lambda + \beta\mu) dS$, où la somme $\alpha\lambda + \beta\mu$ est le cosinus de l'angle constant φ des deux normales δn (à la surface libre) et dn (à la paroi), vu ici l'annulation du troisième cosinus directeur, ν , de dn . Il vient donc la formule cherchée

$$(43) \quad \varpi = \frac{f \cos \varphi}{\rho g \cos I} S = \frac{f_1 S}{\rho g \cos I}.$$

On l'aurait obtenue, il est vrai, encore plus simplement, en menant vers le bas du tube une section horizontale du liquide qu'il contient et en observant que la poussée verticale du liquide sous-jacent excède

de $\rho g \varpi$ le poids du liquide situé au-dessus dans le tube. Or, cet excédent $\rho g \varpi$ de poussée ne peut être équilibré, quant à sa composante $\rho g \varpi \cos I$ suivant Oz , que par la composante en sens contraire des tractions $f_1 dl$ que la paroi exerce, tangentiellement à elle-même, sur le bord l de la surface libre TUV. Mais la composante, suivant zO , de chaque traction élémentaire $f_1 dl$, normale à dl , s'évaluera en projetant l'élément dl du bord sur le contour S de la section droite A et en remplaçant dl par cette projection dS dans le produit $f_1 dl$. Ainsi, la force qui équilibre suivant Oz l'excédent $\rho g \varpi$ de poussée verticale est $f_1 S$, et l'on a bien $\rho g \varpi \cos I = f_1 S$.

34. En divisant la capacité ϖ par la section droite A du tube, on aura la longueur moyenne, suivant Oz , de la dépression; et cette longueur, multipliée par $\cos I$, c'est-à-dire *estimée verticalement*, sera ce que l'on peut appeler la *profondeur H moyenne de la dépression*. Sa valeur est, comme on voit,

$$(44) \quad H = \frac{f_1 S}{\rho g A} = \frac{f \cos \varphi S}{\rho g A},$$

c'est-à-dire inverse de la droite dite, en hydraulique, le *rayon moyen du tube*, expression désignant le quotient de la section droite A par son contour *mouillé* S.

Quand la résistance f_1 , ou $f \cos \varphi$, de la paroi à l'extension du liquide sur elle, devient négative, c'est-à-dire quand l'angle φ de raccordement est obtus, la capacité ϖ de la dépression se change en un volume liquide surélevé au-dessus du plan PAB, et la profondeur H, en une *surélévation moyenne h*. Si, par exemple, le tube est, comme on dit, *mouillé effectivement* par le liquide, ou que l'angle φ atteigne 2 droits, il vient enfin la vieille formule usuelle

$$(45) \quad h = \frac{f S}{\rho g A}.$$

La surélévation moyenne de liquide, que produit dans le tube la tension superficielle f, égale donc alors le quotient, par le rayon moyen du tube, de cette tension elle-même, évaluée en prenant comme unité de force le poids de l'unité de volume du liquide.

VII. — *Équations du problème du lent mouvement vertical, régularisé ou devenu uniformé, d'une goutte liquide ou gazeuse, au sein d'une masse fluide indéfinie en repos, visqueuse aussi, mais d'une autre espèce et d'un poids spécifique différent.*

35. Abordons enfin le problème qui est le but principal de cette étude et à l'occasion duquel m'est venue (n° 9) l'idée des formules (3) de viscosité superficielle, savoir, le calcul de la chute verticale, censée assez lente et devenue uniforme, d'une goutte liquide, au sein d'une masse fluide visqueuse indéfinie en repos, d'un poids spécifique moindre que le sien. La lenteur de cette chute est supposée telle, qu'on puisse y réduire à leur premier terme, seul linéaire, les expressions ordinaires des accélérations

$$w' = \frac{du}{dt} + u \frac{du}{dx} + v \frac{du}{dy} + w \frac{du}{dz}, \quad v' = \dots, \quad w' = \dots,$$

en négligeant ainsi les produits des vitesses u, v, w par leurs dérivées en x, y, z . Or, ici où le mouvement est *régularisé*, c'est-à-dire devenu permanent à l'intérieur et tout autour de la figure géométrique de la goutte, figure elle-même désormais invariable et animée suivant les axes des trois vitesses constantes à déterminer a, b, c , les dérivées de u, v, w sur place, ou $\frac{d(u, v, w)}{dt}$, s'évanouissent aussi. En effet, les vitesses absolues u, v, w sont *successivement* les mêmes aux endroits où viendrait un observateur mû comme l'est la goutte; en sorte que u, v, w restent invariables, quand t, x, y, z croissent simultanément de $dt, a dt, b dt, c dt$, et qu'on a

$$\frac{d(u, v, w)}{dt} + a \frac{d(u, v, w)}{dx} + b \frac{d(u, v, w)}{dy} + c \frac{d(u, v, w)}{dz} = 0.$$

Or, les trois derniers termes sont, en général, du même ordre de petitesse que les produits, négligés ci-dessus, de u, v, w par leurs dérivées en x, y, z .

36. Donc les deux hypothèses de lenteur et de permanence relative

entraînent celle de l'uniformité *approchée* du mouvement de chaque molécule. Et les équations indéfinies du problème seront celles d'un équilibre dynamique, savoir

$$(46) \quad \begin{cases} \frac{dN_x}{dx} + \frac{dT_z}{dy} + \frac{dT_y}{dz} + \rho X = 0, \\ \frac{dT_z}{dx} + \frac{dN_y}{dy} + \frac{dT_x}{dz} + \rho Y = 0, \\ \frac{dT_y}{dx} + \frac{dT_x}{dy} + \frac{dN_z}{dz} + \rho Z = 0, \end{cases}$$

où ρ désigne la densité au point (x, y, z) , densité autre hors de la goutte que dans la goutte, (X, Y, Z) les trois composantes constantes de la pesanteur, enfin $N_x, N_y, N_z, T_x, T_y, T_z$ les six composantes principales de pression relatives aux axes. Celles-ci ont, comme on sait, les expressions

$$(47) \quad \begin{cases} (N_x, N_y, N_z) = -p + 2\varepsilon \left(\frac{du}{dx}, \frac{dv}{dy}, \frac{dw}{dz} \right), \\ T_x = \varepsilon \left(\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} \right), \quad T_y = \varepsilon \left(\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz} \right), \quad T_z = \varepsilon \left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} \right), \end{cases}$$

p étant la *pression moyenne*, fonction, comme u, v, w et pour les mêmes raisons, de x, y, z seuls (non de t) et ε étant le coefficient de viscosité, autre (comme ρ) hors de la goutte que dans la goutte.

Il faut, outre l'équation de conservation des volumes

$$(48) \quad \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

y joindre, d'une part, les conditions d'immobilité $(u, v, w) = 0$, aux distances infinies de l'origine, en spécifiant même que le travail des actions extérieures exercées sur une sphère fluide de rayon infini, décrite autour de l'origine, s'annule à tout instant (1); d'autre part,

(1) On peut voir, à l'année 1912 des *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure* (p. 567), dans mon *Complément à un récent Mémoire intitulé: « Sur les principes de la Mécanique et sur leur applicabilité à des phénomènes qui semblent mettre en défaut certains d'entre eux »*, que, l'hypothèse de la conservation des volumes fluides étant admise comme ici, l'évanouissement asymptotique des vitesses, aux distances infinies de la région troublée par un corps central en mouvement, n'entraîne généralement

que, à la surface de la goutte, les vitesses u, v, w sont les mêmes sur les deux faces de sa couche superficielle et, les *tractions* sur la face extérieure, plus grandes que celles de la face intérieure, de différences exactement compensées par les tensions superficielles, conformément, par exemple, aux équations (12) ou (17) (p. 32 et 34).

Enfin, comme nous supposons ici permanent le mouvement partout où il est sensible (au changement près de son siège) et, par conséquent, invariables, les quantités de mouvement suivant une direction quelconque, il faut admettre que la pression totale exercée du dehors sur une sphère fluide de rayon très grand, est exactement égale et contraire au poids du fluide contenu dans la sphère. C'est, du reste, ce qu'expriment *d'une manière précise* les équations d'équilibre (46), *pour une surface fermée quelconque*; car ces équations s'appliquent même, comme on le verra ci-après (n° 39), dans l'épaisseur de la mince couche de transition, où, seulement, les N, T n'ont plus des expressions aussi simples que (47). Et quand on ne les y applique pas, les équations qui les remplacent pour cette couche, (12) ou (17) par exemple, sont également des équations *d'équilibre*, entraînant la même conclusion quant à la compensation du poids intérieur par les pressions extérieures, *sur toute surface fermée*.

37. Démontrons d'abord que le problème ainsi défini se trouve complètement déterminé pour toute forme possible, *censée donnée*, de la goutte; ce qui revient à prouver, vu la forme linéaire de ses équations, que, si l'on y remplace u, v, w, p par $u + u', v + v', w + w', p + p'$ et, par suite, $N_x, N_y, N_z, T_x, T_y, T_z$ par $N_x + N'_x, N_y + N'_y, N_z + N'_z, T_x + T'_x, T_y + T'_y, T_z + T'_z$, avec les N', T' exprimés en u', v', w', p' comme le sont les N, T en u, v, w, p , les nouvelles équations du problème, en u', v', w', p' , obligeront d'annuler partout les excédents u', v', w' de vitesse.

En effet, convenons, pour simplifier, d'effacer les accents (') des

pas l'annulation analogue de l'action totale qui en résulte, suivant une direction donnée, sur une sphère de rayon infini, mais qu'il entraîne cependant l'évanouissement du travail des forces constituant cette action totale.

Du reste, dans l'application de l'équation du travail que nous ferons au numéro suivant, ce n'est pas seulement le travail extérieur en question qui s'évanouira, mais aussi l'action totale elle-même.

nouvelles inconnues u' , v' , w' , p' . Il est visible que les équations seront encore, toujours avec la condition d'évanouissement de u , v , w à l'infini, (46), (47), (48), (3), mais prises en y annulant ρ , et même f dans ces formules (3) (p. 23), c'est-à-dire prises pour deux fluides sans pesanteur ni tension superficielle *élastique*; et que, de plus, la pression totale exercée du dehors, suivant une direction quelconque, sur une sphère de rayon très grand ou même infini, s'annulera.

Alors les trois équations (46), multipliées par l'élément $d\omega$ de volume et intégrées soit dans tout l'intérieur de la goutte fluide, soit dans tout le fluide extérieur, jusqu'à cette sphère, montreront, comme on sait, que les trois composantes totales, soit de la pression exercée par la couche superficielle σ de la goutte sur le fluide intérieur, soit de la pression exercée par le fluide extérieur sur la couche superficielle σ , sont nulles; et qu'il en est, par suite, de même des trois composantes totales des excédents des secondes de ces pressions sur les premières aux divers points de σ , c'est-à-dire des composantes de pression dues aux tensions superficielles et qu'expriment, par exemple, les seconds membres de (17) (p. 34) dans le cas où σ est de révolution. Par suite, ces pressions en excédent sur les éléments de σ ne donneront aucun travail *dans le mouvement Vdt de translation commun à toute la figure géométrique, invariable, de la goutte; et il suffira, pour obtenir leur travail, de l'évaluer dans les mouvements propres Gdt de glissement des divers éléments de la couche superficielle sur leur surface d'ensemble.*

Cela posé, cherchons la formule des forces vives ou plutôt du travail, en multipliant les trois équations (46), où ρ est ici nul, par $u dt d\omega$, $v dt d\omega$, $w dt d\omega$, puis ajoutant, intégrant et transformant, comme à l'ordinaire, les produits

$$u \frac{dN_x}{dx}, \quad u \frac{dT_z}{dy}, \quad \dots, \quad \text{en} \quad \frac{d.uN_x}{dx} - N_x \frac{du}{dx}, \quad \frac{d.uT_z}{dy} - T_z \frac{du}{dy}, \quad \dots,$$

enfin, effectuant, pour les premiers termes, la conversion habituelle des intégrales de volume en intégrales de surface. Nous ferons d'abord cette conversion pour le fluide intérieur à σ , puis, pour le fluide extérieur, où l'on admet que la sphère enveloppante de rayon infini ne donnera qu'un travail évanouissant. L'addition finale des résultats fournira, en premier lieu, comme intégrale totale de volume,

changée de signe et en tenant compte de (48),

$$(49) \quad dt \int \varepsilon \left[2 \frac{du^2}{dx^2} + 2 \frac{dv^2}{dy^2} + 2 \frac{dw^2}{dz^2} + \left(\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} \right)^2 + \left(\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz} \right)^2 + \left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} \right)^2 \right] d\omega;$$

en deuxième lieu, comme intégrale de surface, le travail, pour les glissements Gdt tangents à σ , des excédents des pressions qu'exerce la face intérieure de la couche sur celles que supporte la face extérieure.

38. Bornons-nous d'abord au seul cas où nous ayons obtenu des équations de raccordement (17), (18), (19) (p. 34 et 36), complètement explicites, le cas pratique où la surface σ est de révolution autour d'un axe.

Alors l'excédent en question se réduit, par unité d'aire, dans le sens du glissement Gdt , à la composante tangentielle $\varepsilon_1 - \varepsilon$, donnée par la seconde équation (17). Le travail, également changé de signe comme l'a été (49), sera donc, vu le développement du second membre de cette équation (17),

$$dt \int_{\sigma} G(\varepsilon - \varepsilon_1) d\sigma = dt \int_{\sigma} \left(-\frac{G}{Rr} \frac{d.r \mathcal{F}}{d\lambda} + \mathcal{F}' \frac{G}{Rr} \frac{dr}{d\lambda} \right) d\sigma.$$

Or l'expression $\frac{G}{Rr} \frac{dr}{d\lambda}$, identique à $\frac{G}{r} \frac{dr}{ds}$ ou à $\frac{G}{r} \cos \lambda$, n'est autre, d'après la seconde (18), que \mathcal{V}' ; et, d'autre part, vu la valeur (18) de \mathcal{V} , on peut ajouter à la parenthèse les deux termes égaux et contraires $-\frac{r \mathcal{F}}{Rr} \frac{dG}{d\lambda}$ et $\mathcal{F} \mathcal{V}$. Il vient ainsi comme travail total, changé de signe, des tensions superficielles,

$$(50) \quad dt \left[-\int_{\sigma} \frac{d.r G \mathcal{F}}{d\lambda} \frac{d\sigma}{Rr} + \int_{\sigma} (\mathcal{F} \mathcal{V} + \mathcal{F}' \mathcal{V}') d\sigma \right].$$

Le premier terme entre crochets s'annule identiquement, comme on le voit en prenant ici pour élément $d\sigma$ de surface une zone élémentaire $2\pi r ds$, ou $2\pi r R d\lambda$, et en intégrant d'un pôle à l'autre, c'est-à-dire de $\lambda = 0$ à $\lambda = \pi$, limites où \mathcal{F} est fini, mais où r et G sont évidemment nuls.

Il ne subsiste donc, dans (50), que la dernière intégrale. Et, en annulant la somme de (49) et de (50), il vient comme équation du travail, après suppression du facteur dt ,

$$(51) \quad \int_{\sigma} \varepsilon \left[2 \frac{du^2}{dx^2} + 2 \frac{dv^2}{dy^2} + 2 \frac{dw^2}{dz^2} + \left(\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} \right)^2 \right. \\ \left. + \left(\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz} \right)^2 + \left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} \right)^2 \right] d\omega + \int_{\sigma} (\mathcal{F}\delta + \mathcal{F}'\delta') d\sigma = 0.$$

Or tous les éléments du premier membre sont essentiellement positifs ; car l'expression de $\mathcal{F}\delta + \mathcal{F}'\delta'$ est précisément, ici, celle de la formule (3 ter) (p. 24). Comme les valeurs de ε , e , $e_1 + e$ excèdent partout zéro, on devra donc poser, en tous les points, tant des deux fluides que de leur couche séparative,

$$\frac{du}{dx} = 0, \quad \frac{dv}{dy} = 0, \quad \frac{dw}{dz} = 0, \\ \frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} = 0, \quad \frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz} = 0, \quad \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} = 0, \quad \delta = 0, \quad \delta' = 0.$$

Autrement dit, les vitesses de déformation seront identiquement nulles. L'ensemble des deux fluides ne se mouvra qu'à la manière d'un solide unique. Et comme les points du fluide extérieur éloignés sont immobiles, l'on aura bien, partout, $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$; ce qu'on se proposait de démontrer.

Ainsi le problème du lent mouvement permanent vertical de la goutte est parfaitement déterminé par ses équations obtenues, du moins quand on attribue à la goutte une figure de révolution, seul cas pour lequel nous les ayons complètement formées.

39. Le problème est déterminé aussi sans cette restriction ; car la généralité de l'équation (51) résulte de sa simplicité même. Et, en effet, on l'obtient en supprimant la fiction d'une surface séparative σ sans épaisseur, pour mettre à la place une couche mince où existerait la continuité des pressions, c'est-à-dire où les équations d'équilibre seraient encore (46), avec expressions des N , T plus complexes que (47) et rapidement variables suivant le sens de l'épaisseur.

Il en résulte, pour le travail, changé de signe, des actions intérieures

de la couche, une partie sensible de l'intégrale en ϖ trouvée

$$(52) \quad dt \int_{\varpi} \left[N_x \frac{du}{dx} + \dots + T_x \left(\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} \right) + \dots \right] d\varpi,$$

où l'expression entre crochets, *travail (au signe près) des forces intérieures par unités de volume et de temps*, est visiblement indépendante du choix des axes. Or évaluons-la, pour tous les éléments $d\varpi$ qui constituent *un fragment* $d\sigma$ de la couche superficielle, en prenant un axe des z normal à la couche, avec des x et des y orientés suivant les deux vitesses principales ϑ, ϑ' de dilatation de tous ses feuillets, dont dz sera l'épaisseur élémentaire. On y aura donc

$$d\varpi = dz d\sigma, \quad \frac{du}{dx} = \vartheta, \quad \frac{dv}{dy} = \vartheta', \quad \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} = 0;$$

et, seules parmi les N, T , les deux forces N_x, N_y exercées suivant ϑ et ϑ' sur des coupes normales aux deux faces $d\sigma$ du fragment, seront assez grandes, pour donner des termes sensibles, sous la petite épaisseur $\int dz$ de la couche. L'intégrale (52), où l'on pourra effectuer, pour le fragment, la sommation en $\int dz$, s'écrira donc, si l'on observe que $\int N_x dz, \int N_y dz$ seront précisément nos deux tensions superficielles $\mathcal{F}, \mathcal{F}'$:

$$(53) \quad dt \int_{\sigma} d\sigma \left[\vartheta \int N_x dz + \vartheta' \int N_y dz \right] = dt \int_{\sigma} (\mathcal{F}\vartheta + \mathcal{F}'\vartheta') d\sigma.$$

Au contraire, pour les éléments de volume $d\varpi$ ordinaires des deux fluides, où les N, T ont les expressions (47), l'intégrale (52) prend, vu (48), la forme (49); et l'annulation de la somme des travaux élémentaires changés de signe (52), pour tout l'ensemble du système matériel, en équilibre sous l'action de ses seules forces intérieures, conduit bien à l'équation (51), ainsi démontrée d'une manière générale (1).

(1) On voit combien l'équation des forces vives devient aisée à établir, en ce qui concerne le travail des forces intérieures aux couches de transition, quand, tenant compte de l'épaisseur de ces couches, on y regarde l'état physique comme variable très rapidement, *mais avec continuité*, suivant le sens de leur petite dimension.

Il est clair, par exemple, qu'en se bornant aux couches séparatives des liquides *parfaits* d'avec d'autres fluides *parfaits* aussi, ce qui réduit \mathcal{F} et \mathcal{F}' à leur partie élastique

VIII. — *Calcul effectif, pour une goutte liquide sphérique tombant ainsi au milieu d'une masse fluide en repos moins dense qu'elle, de la vitesse verticale de sa chute.*

40. Comme une goutte liquide, supposée d'abord en repos au sein d'une masse fluide indéfinie de même poids spécifique qu'elle, a la forme sphérique exigée, en tant que figure d'équilibre stable, par sa tension superficielle, on peut augurer que cette forme persistera si, rendant la goutte un peu plus lourde que le fluide ambiant, on lui fait prendre, au milieu de ce dernier, une vitesse permanente de chute assez faible pour laisser insensibles, dans les équations de son mouvement, les carrés et produits des vitesses à côté de leurs premières puissances. Car les déformations, surtout l'aplatissement, qu'on observe dans de pareilles gouttes lorsque leur chute devient rapide, paraissent dues à des causes de cet ordre des carrés (de vitesses) ainsi négligés ici : telles sont, notamment, *l'impulsion vive* du fluide sous-jacent, subie par la goutte à sa partie antérieure (*proue*) où elle heurte ce fluide, les forces centrifuges dues aux tourbillonnements intérieurs que provoque, dans la goutte, le frottement de ce même fluide sur toute la surface σ où il glisse de la proue vers la poupe, etc. C'est donc dire que, *au degré d'approximation convenu*, la goutte conservera sa forme sphérique et son rayon R . Et, en effet, nos calculs le montreront en faisant vérifier par cette forme même toutes les équations du mouvement, *après suppression de leurs termes non linéaires*.

Nous prendrons le centre *actuel* O de cette sphère pour origine des

constante f , le travail élémentaire (changé encore de signe) y sera, par unité d'aire,

$$f(\delta dt + \delta' dt),$$

expression où la somme des deux dilatations linéaires effectives δdt , $\delta' dt$ *suivant deux sens rectangulaires*, égale l'accroissement, durant l'instant dt , de la surface actuelle σ . Donc, pour une aire σ , dont l'augmentation proportionnelle serait $\delta\sigma$, le travail des forces intérieures vaudra, au signe près, $f\delta\sigma$ et, avec son signe, $-f\delta\sigma$ ou $-\delta(f\sigma)$, comme on l'a trouvé tout autrement au n° 30 (p. 51). En considérant, sur des parois fixes, l'action tangentielle $f_1 dl$ exercée par chaque longueur dl de la mince bande de ces parois contiguë au bord ou contour de la même couche superficielle, on aurait encore plus simplement $-f_1\delta\sigma_1$, ou $-\delta(f_1\sigma_1)$, pour le *travail extérieur* dû à un balayage $\delta\sigma_1$ de ces parois par le bord de la couche.

coordonnées, la verticale (ici descendante) allant vers la proue pour axe des x positifs; enfin, un axe horizontal des y dirigé dans le demi-plan méridien où nous nous proposerons d'étudier le mouvement, qui se fera évidemment de la même manière dans tous, et un axe des z normal aux deux autres. L'axe des y pourrait être nommé aussi l'axe des r , rayons des *cercles parallèles* et ordonnées horizontales, $r = \sqrt{z^2 - x^2}$, dans le demi-plan méridien considéré, de la *méridienne* tracée par ce demi-plan sur toute couche sphérique actuellement concentrique à la goutte : z désignera le rayon d'une telle couche sphérique, rayon inférieur ou supérieur à R , suivant que la couche appartiendra à la goutte ou au fluide ambiant.

Enfin, les divers points de la méridienne en question, où z est $\sqrt{x^2 + r^2}$, se distingueront les uns des autres, soit par leur abscisse verticale x , variable de z à $-z$ quand on passe du premier *pôle*, correspondant à la *proue*, au second *pôle*, qui correspond à la *poupe*, soit par leur abscisse courbe s comptée le long de la méridienne à partir du premier pôle, et qui croît en même temps de zéro à πz , soit encore et surtout par l'angle λ , que nous appellerons la *colatitude*, du rayon aboutissant au point (x, r) ou de la normale tirée vers le dehors, avec les x positifs, angle croissant de zéro à π entre la proue et la poupe.

A la surface $z = R$ de la goutte, les molécules fluides, astreintes à ne pas la quitter, auront leur vitesse composée : 1° de la vitesse translatoire constante V , suivant les x positifs, de la figure géométrique *invariable* de la goutte; 2° de la vitesse de glissement, G , de chaque molécule sur cette figure géométrique, vitesse évidemment tangente à la méridienne. On reconnaît sans calcul qu'elle sera dirigée de la proue vers la poupe, suivant le sens des colatitudes λ croissantes. Car le liquide intérieur à la goutte, moins retardé dans sa chute que celui de la couche superficielle par la résistance du fluide extérieur, se porte vers le bas de la sphère séparative et oblige la matière de la couche superficielle à se porter vers le haut.

41. Abordons maintenant l'intégration des équations indéfinies (46) et (48), où il faudra faire $X = g$, $Y = 0$, $Z = 0$ et porter les valeurs (47) des N , T . Les trois premières, (46), deviennent ainsi,

comme on sait,

$$(54) \quad \frac{dp}{dx} = \rho g + \varepsilon \Delta_2 u, \quad \frac{dp}{d(y, z)} = \varepsilon \Delta_2 (v, w),$$

où Δ_2 désigne le symbole opératoire $\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2}$, paramètre différentiel du second ordre de la fonction écrite à la suite. Nous y désignerons par ρ et par ε la densité et la *viscosité* du fluide extérieur indéfini, auquel, en particulier, s'appliqueront ces équations. Mais, quand nous les considérerons dans la goutte même, ou, pour $r < R$, ρ et ε devront être remplacés par la densité ρ , et la viscosité ε , du liquide intérieur; en sorte que u, v, w, p y seront d'autres fonctions de x, y, z qu'à l'extérieur.

Comme le problème, dans le cas extrême d'une goutte de viscosité infinie, deviendrait celui de Stokes relatif à la chute uniforme ou régularisée d'une sphère *solide* dans un fluide visqueux, il est naturel de le traiter en cherchant à y étendre la plus simple des méthodes qui aient été indiquées pour ce problème de Stokes, savoir, celle qui m'a permis, au commencement de 1885 (¹), de résoudre la question du lent mouvement *varié* de la sphère solide. Elle consiste à exprimer les trois composantes u, v, w de la vitesse au point quelconque (x, y, z) des fluides considérés, tout en y vérifiant identiquement l'équation (48) de conservation des volumes matériels, par les trois formules

$$(55) \quad u = \Delta_2 \varphi - \frac{d^2 \varphi}{dx^2}, \quad (v, w) = - \frac{d}{d(y, z)} \frac{d\varphi}{dx},$$

où la fonction auxiliaire φ ne dépend des coordonnées x, y, z que par l'intermédiaire de la distance r du point (x, y, z) au centre de la sphère. Or, ici, où le mouvement de part et d'autre de cette sphère géométrique limitant la goutte est censé devenu *permanent*, u, v, w, φ seront indépendants du temps t , vu que l'on a placé l'origine O au centre *actuel* de la sphère, par rapport auquel tout est sans cesse pareil, quelle que soit l'époque t présente. Ainsi φ ne dépendra que de r , égal à $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

(¹) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences de Paris* (t. C, 6 avril 1885, p. 935).

42. Les expressions (55) de u , v , w , portées dans (54), changent celles-ci en

$$(56) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dx} \left(p - \rho g x + \varepsilon \frac{d \Delta_2 \varphi}{dx} \right) = \varepsilon \Delta_2 \Delta_2 \varphi = \frac{\varepsilon}{\tau} \frac{d^4 \tau \varphi}{d\tau^4}, \\ \frac{d}{d(y, z)} \left(p - \rho g x + \varepsilon \frac{d \Delta_2 \varphi}{dx} \right) = 0; \end{array} \right.$$

et la dérivation en y ou en z de la première (56) montre, vu les deux dernières (56), que $\Delta_2 \Delta_2 \varphi$ ne peut pas dépendre de y , ni de z . Dès lors, $\Delta_2 \Delta_2 \varphi$, n'étant, comme φ , fonction que de $\tau = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, sera tout aussi indépendant de x et se réduira à une constante.

Ainsi, le produit $\tau \Delta_2 \Delta_2 \varphi$, dérivée quatrième de $\tau \varphi$ en τ , contient un seul terme, proportionnel à τ . Quatre intégrations immédiates donneront donc pour $\tau \varphi$ un polynome du troisième degré en τ , accru d'un terme du cinquième; et, par suite, φ , d'où l'on supprimera la partie constante, étrangère aux expressions (55) de u , v , w , comprendra seulement, avec deux termes respectivement en τ^2 et en τ^4 , deux autres termes, en $\tau^{\pm 1}$.

Or, dans le fluide extérieur, où u , v , w doivent s'évanouir pour τ infini, les deux termes en τ^2 et en τ^4 donneraient dans (55), aux distances infinies, le premier, une vitesse u constante, le second, des vitesses infinies. Donc, ces deux termes y auront coefficients nuls. Au contraire, dans la goutte, ce sont les deux termes en $\tau^{\pm 1}$ qui disparaîtront; car ils produiraient, au centre $\tau = 0$, des vitesses infinies respectivement des premier et troisième ordres. Ainsi, les deux fonctions φ à considérer seront, avec quatre constantes A, B, C, D *en tout*,

$$(57) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\text{pour } \tau < R) \quad \varphi = \frac{A}{4} \tau^2 - \frac{B}{8} \tau^4, \\ (\text{pour } \tau > R) \quad \varphi = C\tau + \frac{D}{3\tau}. \end{array} \right.$$

43. Portées dans les formules (55) en se souvenant que les dérivées de τ en x , y , z sont les trois rapports de x , y , z à τ , elles donneront comme composantes *verticale* et *horizontale* des vitesses, aux divers points du demi-plan méridien des xy (avec $y > 0$) auquel nous nous

bornons :

$$(58) \quad \begin{cases} (\text{pour } r < R) & u = (A - Br^2) - By^2, & v = B\gamma x, \\ (\text{pour } r > R) & u = 2\left(\frac{C}{r} - \frac{D}{3r^3}\right) - \left(\frac{C}{r^3} - \frac{D}{r^5}\right)\gamma^2, & v = \left(\frac{C}{r^3} - \frac{D}{r^5}\right)\gamma x. \end{cases}$$

Sur la sphère de rayon r et, par conséquent (dans ce demi-plan des $x\gamma$) le long du demi-cercle méridien de rayon r , nous aurons évidemment $x = r \cos \lambda$, $\gamma = r \sin \lambda$. Nous verrons alors que ces deux composantes verticale et horizontale de vitesse comprennent :

1° Une petite vitesse verticale descendante commune, U , de tout le demi-cercle, et, par suite, de toute la sphère considérée,

$$(59) \quad U = \text{soit } A - Br^2, \quad \text{soit } 2\left(\frac{C}{r} - \frac{D}{3r^3}\right);$$

2° Une petite vitesse tangentielle ou de glissement, G , ascendante, des molécules le long du demi-cercle,

$$(60) \quad G = \text{soit } Br^2 \sin \lambda, \quad \text{soit } \left(\frac{C}{r} - \frac{D}{r^3}\right) \sin \lambda.$$

En effet, les deux angles de la tangente (ascendante) au demi-cercle avec les x et les γ positifs sont $\frac{\pi}{2} + \lambda$ et λ , ou ont pour cosinus $-\sin \lambda$ et $\cos \lambda$; de sorte que les deux projections de cette vitesse de glissement valent bien, dans les formules (58), le dernier terme de u et l'expression complète de v . Ainsi, *les couches sphériques concentriques à la surface visible de la goutte conservent, durant un instant dt , leur forme d'ensemble et leur rayon; mais elles s'abaissent inégalement, et, par suite, leur matière s'y distribue, aussi, inégalement de bas en haut.*

Sur chaque sphère, en particulier, *la vitesse G de glissement est proportionnelle au sinus de la colatitude λ* (comme si cette petite vitesse tangentielle G était partout la projection, sur la tangente à l'arc élémentaire ds du méridien, d'une vitesse verticale constante): circonstance de nature à amener, comme on verra bientôt, d'importantes simplifications.

44. Cherchons, grâce aux formules (59) et (60), les deux vitesses

principales ϑ , ϑ' de dilatation, suivant le méridien $ds = r d\lambda$ et suivant le parallèle $ds' = r d\lambda'$, de la mince couche sphérique de rayon r en son point de colatitude λ , ainsi que la vitesse de dilatation, ϑ'' , du prolongement matériel $d\epsilon$ du rayon r aboutissant à ce point, et la *vitesse relative de glissement* des deux lignes matérielles $d\epsilon$, ds , diminution élémentaire durant un instant dt , rapportée à l'unité de temps, de leur angle mutuel.

Le calcul des deux dilatations principales ϑ , ϑ' d'un élément superficiel de la couche a été déjà fait, pour une couche de révolution quelconque, au n° 19 (p. 35 et 36), où l'on a trouvé à ϑ , ϑ' les valeurs (18) dans lesquelles le rayon R de courbure du méridien s'appelle maintenant r . Or, ici, où G est proportionnel à $\sin\lambda$ et où le rayon r du parallèle égale visiblement $r \sin\lambda$, le rapport $\frac{\vartheta}{\vartheta'}$ résultant de (18), savoir $\frac{r}{r \cos\lambda} \frac{d \log G}{d\lambda}$, se réduit à l'unité. Les deux vitesses principales ϑ , ϑ' de la couche mince sont donc égales; et il vient

$$(61) \quad \vartheta = \vartheta' = \frac{1}{r} \frac{dG}{d\lambda}.$$

Or, à raison de la conservation des volumes fluides, la vitesse ϑ'' de dilatation suivant $d\epsilon$ donne avec ϑ et ϑ' une somme nulle. On aura donc aussi

$$(62) \quad \vartheta'' = - \frac{2}{r} \frac{dG}{d\lambda}.$$

Voyons enfin, comme il est demandé, de combien décroît, durant un instant dt , l'angle des deux éléments matériels rectilignes ds , $d\epsilon$; et, pour cela, cherchons la rotation élémentaire qu'éprouve, suivant le sens des colatitudes croissantes, chacun des deux éléments matériels. On peut y faire abstraction du déplacement vertical descendant $U dt$ commun à tout l'élément ds et, par suite, à la première extrémité de $d\epsilon$, pourvu qu'on tienne compte, pour la seconde extrémité de $d\epsilon$, de l'abaissement en excédent $\frac{dU}{d\epsilon} d\epsilon dt$ qu'elle éprouve sur sa sphère de rayon $r + d\epsilon$. Or, l'élément ds , tangent au demi-méridien πr , y avance de $G dt$ et y tourne de l'angle de contingence $\frac{G dt}{r}$. Quant à l'élément $d\epsilon$, sa rotation est proportionnelle à l'excédent du trajet

effectué, suivant le sens normal de ds , par sa seconde extrémité, sur celui, $G dt$, qu'effectue la première, excédent comprenant : 1° celui, $\frac{dG}{d\epsilon} d\epsilon dt$, de son glissement propre parallèle à ds , $\left(G + \frac{dG}{d\epsilon} d\epsilon\right) dt$, effectué sur son demi-méridien $\pi(\epsilon + d\epsilon)$; 2° la projection sur ds , $\frac{dU}{d\epsilon} d\epsilon dt \cos\left(\frac{\pi}{2} + \lambda\right)$ ou $-\frac{dU}{d\epsilon} \sin\lambda d\epsilon dt$, de l'abaissement supplémentaire de la sphère de rayon $\epsilon + d\epsilon$.

Or, au trajet total en excédent, $\left(\frac{dG}{d\epsilon} - \frac{dU}{d\epsilon} \sin\lambda\right) d\epsilon dt$, ainsi obtenu, suivant ds , pour la seconde extrémité de $d\epsilon$, correspond pour $d\epsilon$ la rotation $\left(\frac{dG}{d\epsilon} - \frac{dU}{d\epsilon} \sin\lambda\right) dt$. Et c'est l'excès de cette rotation sur celle, $\frac{G dt}{\epsilon}$, de ds , qui mesure la diminution élémentaire de l'angle des deux éléments, dont le quotient par dt sera ce qu'on appelle leur *vitesse de glissement mutuel*. Celle-ci, qu'on cherche, vaut donc :

$$(63) \quad \frac{dG}{d\epsilon} - \frac{G}{\epsilon} - \frac{dU}{d\epsilon} \sin\lambda.$$

45. Les formules (61) de ϑ, ϑ' , spécifiées pour le rayon $\epsilon = R$ de la goutte, feront connaître les deux vitesses principales de dilatation de sa couche superficielle et, par suite, les deux tensions $\mathfrak{F}, \mathfrak{F}'$ à porter dans les équations (17) de raccordement (p. 34) des pressions s'exerçant de part et d'autre de cette couche. Quant aux formules (62) et (63), elles nous permettront d'obtenir les deux composantes $\mathfrak{x}, \mathfrak{e}$, suivant la normale extérieure $d\epsilon$ et suivant la tangente ds au méridien (dans le sens des colatitudes croissantes), de la pression qu'exerce par unité d'aire le fluide extérieur sur la sphère d'un rayon ϵ quelconque.

Commençons par celles-ci. Les formules (2) de Navier (p. 20), appliquées respectivement à \mathfrak{x} et à \mathfrak{e} en observant, pour \mathfrak{e} , que la vitesse de glissement relatif y multipliant ϵ sera (63), donnent

$$(64) \quad \mathfrak{x} = -p + 2\epsilon \vartheta'' = -p - \frac{4\epsilon}{\nu} \frac{dG}{d\lambda}, \quad \mathfrak{e} = \epsilon \left(\frac{dG}{d\epsilon} - \frac{G}{\epsilon} - \frac{dU}{d\epsilon} \sin\lambda \right).$$

Il ne reste plus qu'à y évaluer la pression moyenne p et à y substituer les expressions (59), (60) de U et de G . Pour éviter toute confusion,

nous affecterons \varkappa , ε , p , ρ , ε , considérés dans la goutte ou pour $\varkappa < R$, de l'indice 1, et nous prendrons ces quantités sans indice dans le fluide extérieur, pour $\varkappa > R$.

La pression moyenne p résultera des équations (54), respectivement multipliées par dx , dy , dz , ajoutées et intégrées. Comme les formules (57) donnent $\left(-5Bx, -\frac{2Cx}{\varkappa^3}\right)$ pour $\frac{d\Delta_2\varphi}{dx}$ et $(-15B, 0)$ pour $\Delta_2\Delta_2\varphi$, il viendra, sans difficulté, en remplaçant x par $\varkappa \cos\lambda$ et appelant c_1 , dans le liquide de la goutte, c , dans le fluide extérieur, la constante d'intégration :

$$(65) \quad \begin{cases} (\text{pour } \varkappa < R) & p = c_1 + (\rho_1 g - 10\varepsilon_1 B)\varkappa \cos\lambda, \\ (\text{pour } \varkappa > R) & p = c + \left(\rho g + \frac{2\varepsilon C}{\varkappa^3}\right)\varkappa \cos\lambda. \end{cases}$$

Substituons ces valeurs dans (64) en même temps que celles, (59), (60), de U et de G. Nous aurons, presque immédiatement :

$$(66) \quad \begin{cases} \varkappa_1 = -c_1 - (\rho_1 g - 6\varepsilon_1 B)\varkappa \cos\lambda, & \varepsilon_1 = 3\varepsilon_1 B \varkappa \sin\lambda; \\ \varkappa = -c - \left[\rho g + 6\varepsilon \left(\frac{C}{\varkappa^3} - \frac{2}{3} \frac{D}{\varkappa^5}\right)\right]\varkappa \cos\lambda, & \varepsilon = 2\varepsilon \frac{D}{\varkappa^5} \varkappa \sin\lambda. \end{cases}$$

46. Voyons ce qui aura lieu à la limite $\varkappa = R$ des deux fluides, c'est-à-dire sur les deux faces de la couche superficielle où la translation élémentaire $U dt$ de la figure des couches et les glissements analogues $G dt$ sur cette figure seront communs de part et d'autre. L'égalité des deux expressions (59) de U à la vitesse cherchée V de chute de la goutte, et celle des deux expressions (60) de G, y donnera donc d'abord, entre les cinq constantes inconnues A, B, C, D, V, les trois équations

$$(67) \quad V = A - BR^2 = \frac{2C}{R} - \frac{2D}{3R^3}, \quad BR^2 = \frac{C}{R} - \frac{D}{R^3}.$$

Il y aura, d'autre part, pour toutes les valeurs de λ , entre les pressions s'exerçant sur les deux faces, les relations (17) (p. 34), où \mathcal{F} , \mathcal{F}' prendront, vu (61), la valeur commune (13) (p. 33), savoir

$$f + \frac{e}{R} \frac{dG}{d\lambda} = f + eBR \cos\lambda,$$

où, de plus, r sera $R \sin \lambda$ et où enfin il ne faudra pas oublier que \varkappa , \varkappa_1 désignaient, au paragraphe IV, des composantes comptées positivement vers le centre de courbure du méridien, tandis qu'elles le sont, ici, vers le sens, opposé, de dx (ce qui change $\varkappa - \varkappa_1$ en $\varkappa_1 - \varkappa$). Il s'adjointra ainsi à (67), vu (66), pour compléter entre les inconnues A, B, C, D, V et même $c_1 - c$ un système *déterminé* d'équations du premier degré, les trois relations

$$(68) \quad \begin{cases} c_1 - c = \frac{2f}{R}, & \frac{(\rho_1 - \rho)g}{6} = \left(\varepsilon_1 + \frac{c}{3R}\right)B + \varepsilon \left(\frac{C}{R^3} - \frac{2}{3} \frac{D}{R^5}\right), \\ & \left(\varepsilon_1 + \frac{c}{3R}\right)B = \frac{2\varepsilon}{3} \frac{D}{R^5}. \end{cases}$$

La première permet de rattacher l'une à l'autre les pressions moyennes p à l'intérieur et à l'extérieur de la goutte. La deuxième, en y éliminant B par la troisième, prend la forme simple

$$(69) \quad (\rho_1 - \rho)gR^3 = 6\varepsilon C$$

et détermine la constante C en fonction du rayon R de la goutte et de son poids spécifique apparent $(\rho_1 - \rho)g$ dans le fluide extérieur. Après quoi, d'une part, la dernière (68), d'autre part, la dernière (67), résolue par rapport à C , font connaître les rapports mutuels des constantes B, D, C , auxquelles les deux premières (67) permettent d'adjointre A et V . Il en résulte, en fonction de la vitesse de chute V , encore inconnue, de la goutte, les expressions des quatre constantes A, B, C, D qu'indique la suite de rapports égaux

$$(70) \quad \frac{R^4 A}{2 \left[\frac{2c}{3} + (2\varepsilon_1 + 3\varepsilon)R \right]} = \frac{R^6 B}{2\varepsilon R} = \frac{R^3 C}{c + (3\varepsilon_1 + 2\varepsilon)R} \\ = \frac{RD}{c + 3\varepsilon_1 R} = \frac{R^4 V}{\frac{4}{3} [c + (3\varepsilon_1 + 3\varepsilon)R]}.$$

La plus importante de ces quatre expressions est celle de C , qui, portée dans (69), fait enfin connaître la vitesse cherchée V de chute :

$$(71) \quad V = \frac{2(\rho_1 - \rho)gR^2}{9\varepsilon} \frac{c + (3\varepsilon_1 + 3\varepsilon)R}{c + (3\varepsilon_1 + 2\varepsilon)R}.$$

47. Comme accélérations et inerties sont négligeables dans la question, c'est la résistance du fluide extérieur au mouvement de la goutte qui neutralise le poids $\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_1 g$ de la goutte. Or, en résolvant (71) par rapport à $\rho_1 g$, on trouve, pour ce poids ou cette résistance, d'abord, la *poussée hydrostatique*, ou d'Archimède, $\frac{4}{3}\pi R^3 \rho g$, et, en outre, une *résistance dynamique* \mathfrak{R} , ayant l'expression

$$(72) \quad \mathfrak{R} = 6\pi\varepsilon R V \frac{e + (3\varepsilon_1 + 2\varepsilon)R}{e + (3\varepsilon_1 + 3\varepsilon)R}.$$

Elle est le produit de la résistance analogue $6\pi\varepsilon R V$, qu'avait obtenue Stokes pour une sphère solide de même rayon que la goutte, par une fraction, inférieure à l'unité de $\frac{\varepsilon R}{e + (3\varepsilon_1 + 3\varepsilon)R}$. C'est donc de cette fraction, de sa valeur chez une goutte solide, qu'est abaissée la résistance \mathfrak{R} , par la *plasticité* de la couche superficielle et du liquide intérieur.

48. Pour une goutte de *viscosité infinie*, cas où ε s'évanouit comparativement à ε_1 et à e , le dernier facteur fractionnaire, dans (71), se réduit à l'unité, et la vitesse de chute devient, comme on pouvait le prévoir, celle que donne la formule de Stokes pour une sphère solide. Si donc on appelle k le rapport de la vitesse de chute effective à celle qu'on observerait dans une goutte rigide, on aura

$$(73) \quad k = \frac{e + (3\varepsilon_1 + 3\varepsilon)R}{e + (3\varepsilon_1 + 2\varepsilon)R}.$$

Ce rapport est sensiblement égal à 1 pour les gouttes d'un rayon R très petit; ce qui signifie que *la viscosité superficielle e produit sur les gouttes assez ténues le même effet que la rigidité*. Mais il grandit avec R et atteint à très peu près, dans les *grosses* gouttes, la valeur $\frac{3\varepsilon_1 + 3\varepsilon}{3\varepsilon_1 + 2\varepsilon}$, qu'indiquait naturellement, *pour tous les cas*, la théorie de MM. Rybczynski et Hadamard (où e ne figurait pas), et dont le maximum, sensiblement réalisé *par l'immersion de la goutte dans un fluide beaucoup plus visqueux qu'elle-même*, serait $\frac{3}{2}$. Ce maximum était

presque atteint pour les gouttes mercurielles tombant dans de l'huile de ricin, du moins à la température où M. Jules Roux a fait ses observations; mais, pour les rayons R expérimentés par lui et qui allaient, à peu près, de $0^{\text{mm}},62$ à $0^{\text{mm}},90$, le rapport k a crû environ de 1,06 à 1,12 (1), variant bien dans le sens indiqué par la formule (73).

IX. — *Courants permanents qui existent alors dans la goutte.*

49. Étudions encore les déformations de la goutte liquide, le mouvement relatif de ses diverses parties. Cela se fera en imprimant à nos axes coordonnés, qui étaient fixes jusqu'ici, la vitesse descendante V de la sphère qu'elles remplissent, c'est-à-dire en remplaçant par $V + \frac{dx}{dt}$

(1) *La charge élémentaire de l'électron; recherches sur la loi de Stokes*: thèse de M. Jules Roux pour le doctorat ès sciences physiques, p. 26 (Paris, Gauthier-Villars, 1912 et *Annales de Chimie et de Physique*, mai 1913, p. 24).

Les neuf observations de M. Jules Roux forment quatre groupes assez distincts.

Le premier, comprenant les deux observations où R était le plus petit ($0^{\circ},0618$ et $0^{\circ},0648$), a donné

$$k = 1,06, \text{ pour la valeur moyenne } 0^{\circ},063 \text{ de R.}$$

Le deuxième contient les trois observations suivantes : elles ont donné

$$k = 1,09, \text{ pour la valeur moyenne } 0^{\circ},068 \text{ de R.}$$

Le troisième comprend les deux observations qui viennent ensuite sur le Tableau de M. Roux, et l'on y a eu

$$k = 1,10, \text{ pour la valeur moyenne } 0^{\circ},071 \text{ de R.}$$

Enfin, le quatrième groupe, constitué par les deux dernières observations, a donné respectivement $k = 1,12$ pour $R = 0,0872$ et $k = 1,10$ pour $R = 0,0905$, soit, en moyenne,

$$k = 1,11 \text{ pour } R = 0^{\circ},089.$$

D'ailleurs, à la température $14^{\circ},1$ des observations, les viscosités ε et ε_1 étaient (en unités normales C. G. S.)

$$\varepsilon = 21,20, \quad \varepsilon_1 = 0,016.$$

Or la formule (73) donne

$$k - 1 = \frac{\varepsilon R}{\varepsilon + (3\varepsilon_1 + 2\varepsilon)R},$$

et par $\frac{dy}{dt}$, respectivement, les deux composantes u , v de la vitesse absolue données par les deux premières formules (58), où x , y seront, sur le demi-plan méridien considéré des xy , les coordonnées verticale et horizontale (comptées à partir du centre) d'une molécule qu'on se propose de suivre *dans la goutte*. Il vient ainsi, vu la première (67), les deux équations du mouvement relatif de la molécule fluide,

$$(74) \quad \frac{dx}{dt} = B(R^2 - x^2 - y^2), \quad \frac{dy}{dt} = B y x,$$

où il faut se souvenir que $r^2 = x^2 + y^2$, et que, d'après (70), la constante B , exprimée en fonction de la vitesse V de chute et du rayon R , de la goutte, a la valeur

$$(75) \quad B = \frac{3\varepsilon R}{c + 3(\varepsilon_1 + \varepsilon)R} \frac{V}{2R^2}.$$

c'est-à-dire, ici,

$$k - 1 = \frac{21,20R}{c + 42,45R}.$$

Et, de là, se déduit la *viscosité superficielle* c , donnée constante par la théorie,

$$c = \left(\frac{21,20}{k-1} - 42,45 \right) R.$$

Portons-y, pour les quatre groupes, les valeurs 0,06, 0,09, 0,10, 0,11 de $(k-1)$, ainsi que les quatre valeurs moyennes correspondantes 0,063, 0,068, 0,071, 0,089 de R ; et il viendra pour c les quatre valeurs, pas plus discordantes que ne le laissait prévoir la nature très délicate des observations,

$$c = 19,6, \quad c = 13,1, \quad c = 12,0, \quad c = 13,4.$$

Le coefficient c , à déterminer pour la couche séparative du mercure et de l'huile de ricin, ne doit donc guère s'éloigner de la moyenne 14 environ, à la température 14°,1 des observations.

Il vient de paraître, au Tome IX (n° 13) des *Archives pour les Mathématiques, l'Astronomie et la Physique*, que publie l'Académie des Sciences de Stockholm, un Mémoire d'avril 1913, fait au Laboratoire de Chimie de l'Université d'Upsal, où l'auteur, M. Ivar Nordlung, étudie la chute de très petites gouttes (à rayons moindres que 0^{mm},1), de nitro-benzine dans de l'eau qui en est saturée, et de mercure dans de la glycérine étendue d'eau. La conclusion en est que, pour de pareilles gouttes microscopiques, la vitesse de chute n'excède que dans un très petit rapport celle que donne la formule de Stokes pour les sphères solides; et l'auteur attribue très justement une pareille rigidité approchée de ces gouttes à leur tension superficielle. Mais on voit, par le présent Mémoire, que c'est seulement la partie dynamique ou visqueuse de cette tension qui intervient dans la chute lente des gouttes.

Or ces deux équations (74), multipliées par x , y respectivement et ajoutées, donnent

$$(76) \quad \varepsilon \frac{d\varepsilon}{dt} = Bx(R^2 - \varepsilon^2).$$

Le premier membre a évidemment le signe du facteur x du second membre. Donc, la dérivée de ε en t est positive quand x l'est lui-même, c'est-à-dire au-dessous du centre, négative au-dessus. Ainsi, la distance ε de la molécule au centre de la goutte grandit, et *le mouvement est centrifuge, dans la moitié inférieure de la goutte; il est, au contraire, centripète, au-dessus du centre, dans la moitié supérieure.*

Mais éliminons Bx de (76) par la seconde relation (74) : il viendra $\frac{d}{dt}(y\sqrt{R^2 - \varepsilon^2}) = \sigma$, c'est-à-dire, en intégrant et appelant c' une constante positive (vu $y > 0$), l'équation finie de la trajectoire,

$$(77) \quad y\sqrt{R^2 - \varepsilon^2} = \frac{c'}{2} \quad \text{ou} \quad R^4 - (R^2 - 2y^2)^2 - 4x^2y^2 = c'^2.$$

50. On voit que c' atteint son maximum R^2 au point (x, y) qui annule les deux carrés de $R^2 - 2y^2$ et de $2xy$; c'est-à-dire au point $(y = \frac{R}{\sqrt{2}} = 0,707\dots R, x = 0)$. Dans tout le demi-plan méridien, la molécule qui a ces coordonnées est donc la seule qui reste nécessairement fixe par rapport à la goutte, *sa trajectoire se réduisant à un seul point.* Par suite, autour d'elle et d'après cette seconde équation (77), les autres molécules décrivent des courbes fermées algébriques, du quatrième degré, symétriques de part et d'autre de l'équateur $x = 0$ et où, vu la première équation (77), y et ε varient sans cesse dans les mêmes sens, la molécule s'éloignant ou se rapprochant du centre en même temps qu'elle s'éloigne ou s'approche de l'axe Ox . Elle s'éloigne donc de l'un et de l'autre, quand elle décrit la moitié inférieure de son orbite, s'en rapproche quand elle décrit la moitié supérieure.

La valeur la plus petite possible de la constante positive c' , zéro, correspond à la trajectoire la plus étendue, ayant l'équation $y\sqrt{R^2 - \varepsilon^2} = 0$ et comprenant : 1° le demi-cercle méridien $\varepsilon = R$, où le mouvement est ascendant [car la première (74) y donne $\frac{dx}{dt} < 0$]; 2° l'axe

même $y = 0$, où $\frac{dx}{dt}$ est positif entre les deux pôles $x = \mp R$ et, le mouvement, descendant. Les deux composantes (74) de la vitesse s'y annulent à ces deux pôles ($x = \mp R, y = 0$): et il le fallait bien pour la continuité du mouvement; car, à vitesse sensible, l'accélération centripète y aurait été infinie, comme la courbure même de la trajectoire. D'ailleurs, la vitesse, verticale sur l'axe, ne pouvait s'y orienter plutôt suivant un azimut que suivant un autre.

La seconde formule (74) montre que, dans la goutte, la composante horizontale de la vitesse s'annule, soit sur l'équateur $x = 0$, soit sur l'axe $y = 0$; mais la première (74) fait voir que la composante verticale ne s'annule en même temps, sur l'équateur, que si l'on a $y = \frac{R}{\sqrt{2}}$, ce qui redonne le point à orbite infiniment concentrée, et, sur l'axe $y = 0$, que pour $x = \mp R$, c'est-à-dire aux deux pôles, comme on l'a reconnu aussi. Il n'existe donc pas, dans le demi-plan méridien, d'autres points que ces trois, où la vitesse soit nulle. Mais il y a, entre les deux pôles et le point ($x = 0, y = 0, 707\dots R$), une différence importante. Chaque molécule qui vient presque toucher un pôle ne s'y arrête qu'un instant, les trajectoires contiguës étant les plus étendues de toutes. Au contraire, la molécule pour laquelle c' est maximum garde indéfiniment sa situation ($x = 0, y = 0, 707\dots R$), les trajectoires adjacentes, où elle pourrait s'engager, ne s'en écartant partout qu'excessivement peu.

Ainsi, toutes les molécules liquides comprises dans le demi-plan méridien tournoient sans fin et périodiquement autour de celle-là.

51. Vérifions la constance du volume fluide débité, durant l'unité de temps, par le filet élémentaire compris, dans l'angle $d\lambda'$ du demi-plan méridien et d'un autre infiniment voisin, entre les deux surfaces de révolution (autour de l'axe des x) qui ont comme méridiennes les deux trajectoires voisines à paramètres c'^2 et $c'^2 + d(c'^2)$.

Si δ désigne la distance des deux trajectoires, mesurée sur une section normale du filet, ou, par conséquent, la base de cette section normale, sa hauteur sera un élément $y d\lambda'$ du *cercle parallèle* de rayon y ; et le débit du filet, en appelant v la vitesse à travers la

section, se trouvera exprimé par $\nu y d\lambda' \delta$. Or νy est la racine carrée de la somme des carrés des seconds membres de (74), c'est-à-dire $B \sqrt{(R^2 - x^2 - y^2)^2 + x^2 y^2}$, et δy égale, comme on sait, le quotient de la différentielle $d(c'^2)$ du paramètre de la famille par le paramètre différentiel du premier ordre de la fonction de point c'^2 , savoir, par $\sqrt{\left(\frac{d \cdot c'^2}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d \cdot c'^2}{dy}\right)^2}$. Et les dérivations en x et y du premier membre de la seconde (77) donnent aisément pour ce paramètre $8y \sqrt{x^2 y^2 + (R^2 - x^2 - y^2)^2}$, c'est-à-dire $\frac{8y\nu}{B}$.

On a donc $\delta = \frac{B(d \cdot c'^2)}{8y\nu}$ et le débit $\nu y d\lambda' \delta$ devient $\frac{B}{8} d\lambda' (d \cdot c'^2)$, quantité qui est bien invariable le long du filet.

52. Cherchons enfin le temps qu'emploient les molécules à parcourir les diverses parties de leur trajectoire dans la goutte.

Nous avons, à cet effet, la seconde équation (74), qui donne

$$B dt = \frac{dy}{yx} = \frac{dy}{y\sqrt{x^2 - y^2}},$$

où le radical a le signe de x . Comme les deux parties de la trajectoire, séparées par l'équateur $x = 0$, sont symétriques et décrites symétriquement, nous nous bornerons à la partie supérieure où x est négatif et nous prendrons le radical avec le signe $-$.

Substituons à x^2 , dans le troisième membre, son expression tirée de la première (77), et il viendra

$$(78) \quad B dt = \frac{-dy}{\sqrt{-\frac{c'^2}{4} + R^2 y^2 - y^4}} \\ = \frac{-dy}{\sqrt{\left[y^2 - \frac{1}{2}(R^2 - \sqrt{R^4 - c'^2})\right] \left[\frac{1}{2}(R^2 + \sqrt{R^4 - c'^2}) - y^2\right]}}$$

L'écart y d'avec l'axe y varie entre les deux valeurs extrêmes qui annulent la vitesse horizontale $\frac{dy}{dt}$ ou qui donnent

$$y^2 = \frac{1}{2} (R^2 \pm \sqrt{R^4 - c'^2}),$$

valeurs toujours réelles et positives (puisque c'^2 n'excède jamais R^4). Nous partirons de la plus grande et, appelant φ un angle auxiliaire croissant, alors nul, nous poserons

$$(79) \quad \gamma^2 = \frac{1}{2}(R^2 - \sqrt{R^4 - c'^2}) + \sqrt{R^4 - c'^2} \cos^2 \varphi.$$

Les deux facteurs en γ^2 , sous le radical, deviennent respectivement $\sqrt{R^4 - c'^2}(\cos^2 \varphi, \sin^2 \varphi)$; et comme, d'autre part,

$$d\gamma = \frac{d\gamma^2}{2\gamma} = -\sqrt{R^4 - c'^2} \cos \varphi \sin \varphi \frac{d\varphi}{\gamma},$$

que, de plus, (79) peut, en appelant e^2 le rapport, toujours inférieur à l'unité,

$$(80) \quad e^2 = \frac{2\sqrt{R^4 - c'^2}}{R^2 + \sqrt{R^4 - c'^2}},$$

s'écrire

$$\gamma^2 = \frac{1}{2}(R^2 + \sqrt{R^4 - c'^2})(1 - e^2 \sin^2 \varphi),$$

l'équation (78) prend la forme simple des différentielles elliptiques de première espèce,

$$(81) \quad \sqrt{\frac{1}{2}(R^2 + \sqrt{R^4 - c'^2})} B dt = \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}.$$

Le temps $\int dt$ employé à faire décroître γ depuis son maximum jusqu'à toute autre de ses valeurs, ou à faire grandir φ de zéro à toute longueur d'arc moindre que $\frac{\pi}{2}$, s'exprimera par l'intégrale elliptique $F(e, \varphi)$ de Legendre.

Cherchons, par exemple, la durée T d'une demi-révolution complète de la molécule, durée comprise entre un moment où γ est maximum et celui où se produit le minimum suivant, évidemment correspondant à $\varphi = \frac{\pi}{2}$. L'intégrale deviendra celle que Legendre appelle l'intégrale *complète* et désigne par $F_1(e)$. On aura donc

$$(82) \quad \sqrt{\frac{1}{2}(R^2 + \sqrt{R^4 - c'^2})} BT = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} \\ = F_1(e) = F_1\left(\sqrt{\frac{2\sqrt{R^4 - c'^2}}{R^2 + \sqrt{R^4 - c'^2}}}\right).$$

Pour les molécules infiniment voisines du centre des tournolements, c'est-à-dire pour $c' = R^2$, il vient ainsi

$$RBT = \sqrt{2} F_1(0) = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \quad (1).$$

D'où résulte, en remplaçant finalement B par sa valeur (75), la demi-période effective T du mouvement autour de ce centre :

$$(83) \quad T = \sqrt{2} \frac{e + 3(\varepsilon_1 + \varepsilon)R}{3\varepsilon R} \frac{\pi R}{V}.$$

La période de révolution des molécules est donc parfaitement finie et déterminée au centre des tournolements (2). Mais elle devient de plus en plus longue à mesure qu'on approche de la surface de la goutte, ou à mesure que, c' s'évanouissant, e tend vers l'unité. Elle

(1) On reconnaît aisément sur la seconde équation (77), en y remplaçant respectivement y et x par $\frac{R}{\sqrt{2}} + \delta y$ et par δx , avec δy et δx infiniment petits du même ordre, que les orbites sont, autour du centre des tournolements, les petites ellipses

$$(2\delta y)^2 + (\delta x)^2 = \text{const.},$$

deux fois plus allongées dans le sens vertical des x que dans le sens horizontal des y . D'ailleurs, les équations (74) y deviennent très sensiblement :

$$\frac{d\delta x}{dt} = - (BR\sqrt{2}) \cdot 2\delta y, \quad \frac{d \cdot 2\delta y}{dt} = (BR\sqrt{2}) \delta x;$$

d'où

$$\frac{d^2(\delta x, 2\delta y)}{dt^2} = - (BR\sqrt{2})^2 (\delta x, 2\delta y).$$

Les mouvements sont donc pendulaires dans les deux sens horizontal et vertical, avec une demi-période T égale à $\frac{\pi}{BR\sqrt{2}}$.

(2) On remarquera que le rapport $\frac{\pi R}{VT}$, fonction simple, d'après cette formule, des trois viscosités, $\varepsilon_1, e, \varepsilon$, est celui de la circonférence $2\pi R$ de la goutte à la hauteur $2VT$ dont la goutte tombe, pendant une révolution des molécules voisines du centre des tournolements. Ce rapport tend vers zéro, comme on pouvait le prévoir, quand la viscosité ε du fluide extérieur devient très faible par rapport à l'une ou à l'autre de celles ε_1, e , de la goutte, qui, alors, se déforme fort lentement; il tend vers sa valeur la plus grande $\frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707\dots$, quand ce sont, au contraire, les deux viscosités ε_1, e de la goutte qui s'évanouissent comparativement à celle du fluide extérieur.

croît indéfiniment à la surface même, comme $\int \frac{d\varphi}{\cos\varphi}$ près de la limite $\varphi = \frac{\pi}{2}$, à cause de l'arrêt (de vitesse) propre au pôle.

X. *Évaluation approximative de l'accroissement qu'éprouve la résistance à une telle chute, quand celle-ci se fait au sein d'une masse fluide non plus indéfinie, mais remplissant un grand ballon fixe.*

53. Dans la question précédente de la chute uniforme d'une goutte liquide au sein d'une masse fluide, nous n'avons pas à eu à employer, pour l'expression des vitesses de ce fluide extérieur, l'intégrale générale (à quatre constantes arbitraires) de l'équation indéfinie $\frac{1}{v} \frac{d^4 v \cdot \varphi}{dv^4} = \text{const.}$, parce qu'il était censé illimité et que les mouvements s'y éteignaient aux distances infinies de la goutte, circonstance entraînant l'annulation de deux constantes. Mais l'intégrale complète devra, au contraire, y figurer, si ce fluide extérieur est limité, qu'il remplisse, par exemple, un ballon sphérique fixe d'un très grand rayon R_1 , et que la chute se soit trouvée régularisée, c'est-à-dire devenue uniforme, vers l'époque où la goutte est parvenue sensiblement au centre du ballon, dont l'équation peut être alors supposée $v = R_1$.

Il est clair que, dans un tel cas, la formule de φ pour $v > R$ cumule les quatre termes en A, B, C, D de (57), mais avec d'autres valeurs E, F, de A et B. Les formules (57) deviennent ainsi ;

$$(84) \quad (\text{pour } v < R) \quad \varphi = \frac{A}{4}v^2 - \frac{B}{8}v^4, \quad (\text{pour } v > R) \quad \varphi = Cv + \frac{D}{3v} + \frac{E}{4}v^2 - \frac{F}{8}v^4.$$

On en déduit sans nouveaux calculs les expressions, comme (58), des vitesses u , v et, par suite, les suivantes, analogues à (59) et (60), tant pour les vitesses instantanées descendantes U de la figure des couches sphériques de rayon v , que pour les vitesses ascendantes G de glissement du fluide sur ces figures :

$$(85) \quad \left\{ \begin{array}{ll} U = \text{soit } A - Bv^2, & \text{soit } \frac{2C}{v} - \frac{2D}{3v^3} + E - Fv^2; \\ G = \text{soit } Bv^2 \sin\lambda, & \text{soit } \left(\frac{C}{v} - \frac{D}{v^3} + Fv^2 \right) \sin\lambda. \end{array} \right.$$

En appelant encore V la vitesse de chute de la goutte, c'est-à-dire la valeur de U pour $\nu = R$, on aura, en tout, à déterminer les sept constantes A, B, C, D, E, F, V , au lieu des cinq A, B, C, D, V . Il faudra donc deux conditions de plus. On les obtient en exprimant la manière dont le ballon *fixe* maintient, par son contact, la couche fluide la plus extérieure $\nu = R_1$. Les plus simples qu'on puisse avoir, d'ailleurs réalisées toujours ou presque toujours, sont celles d'immobilité, savoir

$$(86) \quad (\text{pour } \nu = R_1, \quad U = 0, \quad G = 0.$$

54. Appelons i le petit rapport du rayon R de la goutte à celui, R_1 , du ballon; et achevons le calcul dans l'hypothèse d'une goutte à très grande viscosité ou intérieure ε_1 , ou superficielle ε , en sorte qu'elle se meuve à la manière d'un solide, donnant ainsi, dans (85),

$$(\text{pour } \nu < R), \quad U = V, \quad G = 0 \quad \text{ou} \quad A = V, \quad B = 0.$$

On n'aura donc plus à déterminer que les cinq constantes C, D, E, F, V . A cet effet, on joindra aux deux conditions (86), qui sont

$$(87) \quad \frac{2C}{R_1} - \frac{2D}{3R_1^3} + E - FR_1^2 = 0, \quad \frac{C}{R_1} - \frac{D}{R_1^3} + FR_1^2 = 0,$$

les conditions d'égalité de vitesse des deux fluides à leur limite commune $\nu = R$, savoir

$$(88) \quad V = \frac{2C}{R} - \frac{2D}{3R^3} + E - FR^2, \quad \frac{C}{R} - \frac{D}{R^3} + FR^2 = 0,$$

et enfin la condition d'équilibre entre le poids $\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_1 g$ de la goutte et la pression, à composantes normale \varkappa et tangentielle ε par unité d'aire, qu'exerce sur toute sa surface le fluide extérieur. Or ces composantes seront données par les troisième et quatrième formules (66), mais où l'adjonction des termes en E et F se fera d'après les termes en A et B des première et seconde de ces formules. Bref, on aura évidemment

$$\varkappa = -c - \left[\rho g + 6\varepsilon \left(\frac{C}{\nu^3} - \frac{2}{3} \frac{D}{\nu^5} - F \right) \right] \nu \cos \lambda, \quad \varepsilon = \varepsilon \left(2 \frac{D}{\nu} + 3F \right) \nu \sin \lambda.$$

Sur chaque élément $d\sigma$ de la sphère fluide de rayon ν , \varkappa fait avec les x positifs l'angle λ et, ε , l'angle $\frac{\pi}{2} + \lambda$; de sorte que la composante totale de la pression suivant la verticale descendante est, par unité aire, $\varkappa \cos \lambda - \varepsilon \sin \lambda$, c'est-à-dire finalement (vu que

$$\begin{aligned} \sin^2 \lambda &= 1 - \cos^2 \lambda, \\ -c \cos \lambda - \rho g \nu \cos^2 \lambda - 3\varepsilon \left(\frac{2C}{\nu^3} - \frac{2D}{\nu^5} - 3F \right) \nu \cos^2 \lambda - \varepsilon \left(2\frac{D}{\nu^3} + 3F \right) \nu. \end{aligned}$$

Prenons la valeur moyenne de cette expression sur toute l'aire $4\pi\nu^2$ de la sphère fluide, en y remplaçant $\cos \lambda$ et $\cos^2 \lambda$ par leurs valeurs moyennes, bien connues pour la sphère, 0 et $\frac{1}{3}$; puis multiplions par $4\pi\nu^2$ le résultat obtenu et nous aurons évidemment l'action totale qu'exerce de haut en bas, sur la sphère, le fluide extérieur :

$$-\frac{4}{3}\pi\nu^3\rho g - 8\pi\varepsilon C.$$

Cette force, pour $\nu = R$, neutralisant le poids $\frac{4}{3}\pi R^3\rho_1 g$ de la goutte, il vient, après multiplication par $\frac{3}{4\pi}$, la cinquième équation cherchée, identique à (69) (p. 72),

$$(89) \quad (\rho_1 - \rho)gR^3 = 6\varepsilon C.$$

55. La seconde (87) et la seconde (88), puis la première (87), déterminent les rapports mutuels de C, F, D, E, constantes que la première (88) permet ensuite d'exprimer en fonction de V. On obtient ainsi la suite de rapports égaux

$$(90) \quad \frac{C}{1-i^5} = \frac{D}{R^2(1-i^3)} = \frac{-3ER_1}{9-5i^2-4i^5} = \frac{-FR_1^3}{1-i^2} = \frac{3RV}{4-9i+10i^3-9i^5+4i^6}.$$

Après quoi, la valeur de C qu'on en tire, portée dans (89), détermine la vitesse V de chute. La relation (89) devient, en effet,

$$(91) \quad (\rho_1 - \rho)gR^3 = 18\varepsilon RV \frac{1-i^5}{4-9i+10i^3-9i^5+4i^6}.$$

d'où

$$(92) \quad V = \frac{2(\rho_1 - \rho)gR^2}{9\varepsilon} \frac{4 - 9i + 10i^3 - 9i^5 + 4i^6}{4(1 - i^5)}.$$

Comme une de nos suppositions fondamentales concerne l'extrême petitesse du rapport i du rayon de la goutte au rayon du ballon, on pourra toujours supprimer devant l'unité les puissances de i plus élevées que le carré; et la formule sera, pour la vitesse V de chute,

$$(93) \quad V = \frac{2(\rho_1 - \rho)gR^2}{9\varepsilon} \left(1 - \frac{9}{4}i\right).$$

On voit que le dernier facteur binôme, $1 - \frac{9}{4}i$, y représente l'influence du ballon sur la vitesse uniforme de chute, quand la goutte se trouve vers le centre de la masse fluide environnante. Cette influence réduit, de la petite fraction $\frac{9}{4}i$ de sa valeur, la vitesse V , agissant ainsi dans le sens qu'on pouvait prévoir; car l'immobilisation, par le ballon, de la couche fluide la plus extérieure, tend évidemment à ralentir le mouvement des autres couches de plus en plus intérieures, jusqu'à celui de la goutte même. L'action réductrice du ballon sur la vitesse s'évanouit d'ailleurs, quand le rapport i du rayon de la goutte au sien devient négligeable.

56. En multipliant par $\frac{4}{3}\pi$ le premier membre de (91) et aussi, par suite, le second, l'on obtient, en fonction de la vitesse V , le poids apparent $\frac{4}{3}\pi R^3(\rho_1 - \rho)g$ de la goutte, auquel fait équilibre la *résistance dynamique* \mathfrak{R} que le fluide oppose à la chute, c'est-à-dire au mouvement uniforme d'une sphère de rayon R et de vitesse V . Ainsi cette résistance dynamique est

$$(94) \quad \mathfrak{R} = 6\pi\varepsilon RV \frac{4(1 - i^5)}{4 - 9i + 10i^3 - 9i^5 + 4i^6}.$$

Le dernier facteur fractionnaire, peu différent de $1 + \frac{9}{4}i$, exprime l'influence du ballon, qui accroît ainsi la résistance, de la fraction $\frac{4}{9}i$ (environ) de sa valeur. Cette fraction mesure donc, en quelque sorte,

le *degré de gêne* qu'apporte au mouvement de la goutte centrale la limitation de la masse fluide environnante (1).

(1) Il est naturel de penser que, de même, dans un corps transparent, la résistance opposée par chaque molécule pondérable, au mouvement vibratoire de l'éther qui l'environne, doit être plus grande, quand il existe d'autres molécules à d'assez petites distances de la première, et formant autour d'elle comme une enceinte qui maintiendrait plus ou moins l'éther, que lorsque la molécule est, pour ainsi dire, seule en présence d'un éther indéfini. C'est de la sorte que s'expliquerait, ce me semble, le plus simplement, ce fait, que le pouvoir réfringent d'un gaz augmente quelque peu avec sa pression ou sa densité. On peut voir, à ce sujet, une Note (se rapportant à la page 412) du Tome II de mon *Cours de Physique mathématique* (Paris, Gauthier-Villars, 1903; p. XXXI, après l'Introduction). Il y a donc lieu d'ajouter à cette Note le complément suivant :

« Ou mieux, encore, comme si celles (les molécules) qui entourent l'une d'elles, formaient une sorte d'enceinte empêchant de supposer l'éther indéfini autour de cette molécule et gênant leurs mouvements relatifs, de manière à accroître leurs actions réciproques, c'est-à-dire, notamment, la résistance de la molécule aux vibrations de l'éther qui l'environne ».

Diverses parties du présent Mémoire (terminé le 25 juin 1913) ont fait l'objet de Notes insérées aux *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* de Paris (t. 156, 31 mars, 7 et 14 avril 1913, p. 983, 1035 et 1124; t. 157, 7, 15, 21 juillet et 4 août 1913, p. 7, 89, 171, 313).