

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

F. DIDON

Sur une intégrale double

Annales scientifiques de l'É.N.S. 1^{re} série, tome 7 (1870), p. 89-96

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1870_1_7__89_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1870, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR

UNE INTÉGRALE DOUBLE,

PAR M. DIDON,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE RENNES.

I.

X_n désignant la fonction de Legendre, définie par le développement

$$(1) \quad (1 - 2ax + a^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum a^n X_n(x),$$

l'intégrale double

$$\iint \frac{X_n(x) X_{n'}(y)}{\sqrt{1-x^2-y^2}} dx dy,$$

dans laquelle les variables x et y sont limitées par la condition $x^2 + y^2 \leq 1$, est nulle, toutes les fois que n et n' sont différents. La proposition est évidente, si l'un des nombres n , n' ou tous les deux sont impairs; je supposerai donc $n = 2m$, $n' = 2m'$. Calculons donc l'intégrale

$$\iint \frac{X_{2m}(x) y^{2p}}{\sqrt{1-x^2-y^2}} dx dy,$$

dans laquelle les variables satisfont encore à l'inégalité $x^2 + y^2 \leq 1$ (condition que je ne répéterai plus pour les intégrales qui vont suivre), et où p désigne un nombre entier positif. Si l'on intègre d'abord, par rapport à y , elle devient

$$\pi \frac{1.3.5 \dots (2p-1)}{2.4.6 \dots 2p} \int_{-1}^{+1} X_{2m}(x) (1-x^2)^p dx,$$

et, par conséquent, d'après une propriété bien connue des fonctions de Legendre, elle est nulle si p est inférieur à m , et égale, dans le cas où $p = m$, à

$$(-1)^m 2\pi \frac{1.3.5\dots(2m-1)}{(2m+1)(2m+3)\dots(4m+1)}.$$

Le théorème annoncé se trouve donc démontré, et l'on voit de plus que

$$\iint \frac{X_{2m}(x) X_{2m}(y)}{\sqrt{1-x^2-y^2}} dx dy = (-1)^m 2\pi \frac{1.3.5\dots(2m-1)}{2.4.6\dots 2m} \frac{1}{4m+1}.$$

De cette dernière égalité on conclut

$$\begin{aligned} & \iint \frac{(1-2ax+a^2)^{-\frac{1}{2}}(1-2by+b^2)^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{1-x^2-y^2}} dx dy \\ &= 2\pi \sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m (ab)^{2m} \frac{1.3.5\dots(2m-1)}{2.4.6\dots 2m} \frac{1}{4m+1} \\ &= \frac{2\pi}{\alpha} \int_0^\alpha (1+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}} d\alpha, \end{aligned}$$

si l'on pose $\sqrt{ab} = \alpha$.

Considérons plus généralement le développement suivant :

$$(2) \quad (1-2ax+a^2)^{-\mu-\frac{1}{2}} = \sum a^n P_n(x),$$

où μ représente un nombre entier positif quelconque.

En différentiant μ fois, par rapport à x , l'égalité (1), on est conduit à la formule

$$1.3.5\dots(2\mu-1) a^\mu (1-2ax+a^2)^{-\mu-\frac{1}{2}} = \sum a^n \frac{d^\mu X_n(x)}{dx^\mu},$$

qui, comparée à (2), donnera

$$P_n(x) = \frac{1}{1.3.5\dots(2\mu-1)} \frac{d^\mu X_{n+\mu}(x)}{dx^\mu}.$$

$P_n(x)$ est un polynôme du degré n en x , dont tous les termes ont des degrés de même parité, on en conclut l'égalité

$$(3) \quad \iint P_n(x) P_n(y) (1-x^2-y^2)^{\mu-\frac{1}{2}} dx dy = 0,$$

si l'un des nombres n, n' ou tous les deux sont impairs. Mais je dis qu'elle a aussi lieu dans le cas où, n et n' étant égaux aux deux nombres pairs $2m$ et $2m'$, m et m' sont différents. Pour établir cette proposition, je calcule

$$\iint P_{2m}(x) y^{2p} (1 - x^2 - y^2)^{\mu - \frac{1}{2}} dx dy;$$

p est un nombre entier positif. En intégrant d'abord par rapport à y , on obtient

$$\pi \frac{1.3.5 \dots (2p-1) 1.3.5 \dots (2\mu-1)}{2.4.6 \dots (2p+2\mu)} \int_{-1}^{+1} P_{2m}(x) (1-x^2)^{p+\mu} dx.$$

L'intégrale définie, qui entre dans cette expression, est égale à

$$\frac{1}{1.3.5 \dots (2\mu-1)} \int_{-1}^{+1} \frac{d^\mu X_{2m+\mu}(x)}{dx^\mu} (1-x^2)^{p+\mu} dx,$$

ou à

$$\frac{(-1)^\mu}{1.3.5 \dots (2\mu-1)} \int_{-1}^{+1} X_{2m+\mu}(x) \frac{d^\mu (1-x^2)^{p+\mu}}{dx^\mu} dx;$$

par conséquent, comme $\frac{d^\mu (1-x^2)^{p+\mu}}{dx^\mu}$ est du degré $2p + \mu$, elle est nulle si p est inférieur à m , et si $p = m$ elle est égale à

$$\frac{2(-1)^m}{1.3.5 \dots (2\mu-1)} \frac{1.2.3 \dots (2m+2\mu)}{1.3.5 \dots (4m+2\mu+1)}.$$

On déduit de là que l'égalité (3) a lieu dans tous les cas où n et n' sont différents, et, en outre, que

$$\begin{aligned} & \iint P_{2m}(x) P_{2m}(y) (1-x^2-y^2)^{\mu-\frac{1}{2}} dx dy \\ &= 2\pi (-1)^m \frac{(2\mu+1)(2\mu+3) \dots (2\mu+2m-1)}{2.4.6 \dots 2m} \frac{1}{4m+2\mu+1}. \end{aligned}$$

Par conséquent on a

$$\begin{aligned} & \iint (1-2ax+a^2)^{-\mu-\frac{1}{2}} (1-2by+b^2)^{-\mu-\frac{1}{2}} (1-x^2-y^2)^{\mu-\frac{1}{2}} dx dy \\ &= 2\pi \sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m (ab)^{2m} \frac{(2\mu+1)(2\mu+3) \dots (2\mu+2m-1)}{2.4.6 \dots 2m} \frac{1}{4m+2\mu+1}. \end{aligned}$$

La somme précédente, quand on y fait $\sqrt{ab} = \alpha$, peut s'écrire successivement

$$\frac{2\pi}{\alpha^{2\mu+1}} \int_0^\alpha d\alpha \sum_{m=0}^{m=\infty} (-1)^m \alpha^{2m+2\mu} \frac{(2\mu+1)(2\mu+3)\dots(2\mu+2m-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2m},$$

$$\frac{2\pi}{\alpha^{2\mu+1}} \int_0^\alpha \alpha^{2\mu} (1+\alpha^2)^{-\mu-\frac{1}{2}} d\alpha.$$

Il est à remarquer que l'on suppose, dans la sommation précédente, α plus petit que 1.

II.

On connaît le développement suivant :

$$-\log(1-2ax+a^2) = 2 \sum \frac{a^n}{n} \cos(n \operatorname{arc} \cos x).$$

Pour abrégér, je représenterai la fonction $\frac{\cos(n \operatorname{arc} \cos x)}{n}$ par $R_n(x)$, de sorte que l'on aura

$$(4) \quad -\log(1-2ax+a^2) = 2 \sum a^n R_n(x).$$

En différentiant μ fois, par rapport à x , cette égalité, on obtient

$$(2a)^\mu 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (\mu-1) (1-2ax+a^2)^{-\mu} = 2 \sum a^n \frac{d^\mu R_n(x)}{dx^\mu},$$

ou bien

$$(1-2ax+a^2)^{-\mu} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (\mu-1) 2^{\mu-1}} \sum a^n \frac{d^\mu R_{n+\mu}(x)}{dx^\mu},$$

ou enfin

$$(1-2ax+a^2)^{-\mu} = \sum a^n Q_n(x),$$

si l'on pose

$$Q_n(x) = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (\mu-1) 2^{\mu-1}} \frac{d^\mu R_{n+\mu}(x)}{dx^\mu}.$$

Je vais démontrer que l'intégrale

$$(4) \quad \iint Q_n(x) Q_n(y) (1-x^2-y^2)^{\mu-1} dx dy$$

est nulle toutes les fois que n et n' sont différents, et j'en trouverai la valeur dans le cas de $n = n'$. Comme $Q_n(x)$ est un polynôme du degré n , dont les degrés des divers termes sont de même parité, l'intégrale précédente sera évidemment nulle, si l'un des nombres n , n' ou tous deux sont impairs. On n'a donc qu'à considérer le cas de $n = 2m$, $n' = 2m'$. Calculons

$$\iint Q_{2m}(x) y^{2p} (1 - x^2 - y^2)^{\mu-1} dx dy,$$

où p désigne un nombre entier positif. Intégrant d'abord par rapport à y , on transforme cette expression en

$$2 \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2(\mu-1)}{(2p+1)(2p+3)\dots(2p+2\mu-1)} \int_{-1}^{+1} Q_{2m}(x) (1-x^2)^{\mu+p-\frac{1}{2}} dx.$$

La dernière intégrale définie étant égale à

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (\mu-1) 2^{\mu-1}} \frac{1}{2m+\mu} \int_{-1}^{+1} \frac{d^\mu \cos[(2m+\mu) \arccos x]}{dx^\mu} (1-x^2)^{\mu+p-\frac{1}{2}} dx,$$

ou encore à

$$\frac{(-1)^\mu}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (\mu-1) 2^{\mu-1}} \frac{1}{2m+\mu} \int_{-1}^{+1} \cos[(2m+\mu) \arccos x] d^\mu (1-x^2)^{\mu+p-\frac{1}{2}} dx,$$

on voit immédiatement, d'après une propriété bien connue des fonctions $\cos(n \arccos x)$, que, si p est inférieur à m , cette intégrale est nulle, et qu'elle est égale, si $p = m$, à

$$\frac{(-1)^m \pi}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (\mu-1) 2^{m+2\mu-1}} (2m+\mu+1)(2m+\mu+2)\dots(2m+2\mu-1).$$

On conclut de là que l'intégrale (4) est nulle toutes les fois que n et n' sont différents, et que l'on a

$$\begin{aligned} & \iint Q_{2m}(x) Q_{2m}(y) (1-x^2-y^2)^{\mu-1} dx dy \\ &= \pi \frac{(-1)^m}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (\mu-1)} \frac{(m+1)(m+2)\dots(m+\mu-1)}{2m+\mu}. \end{aligned}$$

En particulier, si $\mu = 1$,

$$\iint \frac{\sin(n \arccos x)}{\sqrt{1-x^2}} \frac{\sin(n' \arccos y)}{\sqrt{1-y^2}} dx dy = 0,$$

n étant différent de n' , ou bien

$$\iint \sin(n\varphi) \sin(n'\varphi') d\varphi d\varphi' = 0,$$

les variables φ et φ' étant assujetties à vérifier l'inégalité

$$\cos^2 \varphi + \cos^2 \varphi' \leq 1.$$

L'intégrale double

$$\iint (1 - 2ax + a^2)^{-\mu} (1 - 2by + b^2)^{-\mu} (1 - x^2 - y^2)^{\mu-1} dx dy$$

est égale à

$$\frac{\pi}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (\mu-1)} \sum_{m=0}^{m=+\infty} (-1)^m (ab)^{2m} \frac{(m+1)(m+2)\dots(m+\mu-1)}{2m+\mu}.$$

Cette quantité, si l'on pose $(ab)^2 = \alpha$, peut être écrite successivement

$$\frac{\pi}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (\mu-1)} \frac{d^{\mu-1}}{d\alpha^{\mu-1}} \sum_{m=0}^{m=+\infty} (-1)^m \frac{\alpha^{m+\mu-1}}{2m+\mu},$$

$$\frac{\pi}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (\mu-1)} \frac{d^{\mu-1}}{d\alpha^{\mu-1}} \left[(\sqrt{\alpha})^{\mu-2} \sum_{m=0}^{m=+\infty} (-1)^m \frac{(\sqrt{\alpha})^{2m+\mu}}{2m+\mu} \right].$$

Si μ est impair, la somme infinie qui entre dans cette dernière expression sera égale, au signe près, à arc tang α , diminué des $\frac{\mu-1}{2}$ premiers termes du développement de cet arc tang. suivant la puissance croissante de $\sqrt{\alpha}$; si μ est pair, cette somme sera égale, au signe près, à $\frac{1}{2} \log(1+\alpha)$, diminué de la moitié des $\frac{\mu}{2} - 1$ premiers termes du développement de $\log(1+\alpha)$ suivant les puissances croissantes de α .

III.

Ainsi, en résumé, on vient de trouver la valeur de l'intégrale double

$$(5) \quad \iint (1 - 2ax + a^2)^{-\frac{\mu}{2}} (1 - 2by + b^2)^{-\frac{\mu}{2}} (1 - x^2 - y^2)^{\frac{\mu}{2} - 1} dx dy,$$

dans le cas où μ est un nombre entier positif quelconque, et où a et b sont moindres que l'unité, et on a reconnu que cette valeur ne dépend que du produit ab . Ce dernier résultat est une conséquence des propositions que j'ai établies dans le tome V de ce Journal, relativement aux polynômes V à un nombre quelconque de variables. Les fonctions $V_{m, m', m'', \dots}$ à μ variables proviennent du développement

$$(6) \quad (1 - 2ax - 2by - 2cz - \dots + a^2 + b^2 + c^2)^{-\frac{\mu}{2}} = \Sigma a^m b^{m'} c^{m''} \dots V_{m, m', m'', \dots}$$

Considérons les fonctions $V_{0, 0, 0, \dots}, V_{1, 0, 0, \dots}, V_{2, 0, 0, \dots}, \dots, V_{m, 0, 0, \dots}$, dans lesquelles les premiers indices forment la suite naturelle des nombres, et les autres sont nuls; la somme qui leur correspond est $\Sigma a^m V_{m, 0, 0, \dots}$. Quand on l'a extraite de $\Sigma a^m b^{m'} c^{m''} \dots V_{m, m', m'', \dots}$, tous les termes qui restent contiennent évidemment en facteur ou b , ou c, \dots . Donc, si, dans l'égalité (6), on fait $b = 0, c = 0, \dots$ il vient

$$(1 - 2ax + a^2)^{-\frac{\mu}{2}} = \Sigma a^m V_{m, 0, 0, \dots},$$

et la fonction $V_{m, 0, 0, \dots}$ ne dépend que de x et est le coefficient de a^m dans le développement de $(1 - 2ax + a^2)^{-\frac{\mu}{2}}$ suivant les puissances croissantes de a ; de même, $V_{0, m', 0, \dots}$ sera le coefficient de $b^{m'}$ dans le développement de $(1 - 2by + b^2)^{-\frac{\mu}{2}}$, ou celui de $a^{m'}$ dans le développement de $(1 - 2ay + a^2)^{-\frac{\mu}{2}}$ suivant les puissances croissantes de a .

Or, j'ai démontré généralement que

$$\iiint \dots V_{m, m', m''} \dots V_{n, n', n''} \dots dx dy dz \dots = 0,$$

quand $m + m' + m'' + \dots$ est différent de $n + n' + n'' + \dots$; donc, si m et m' sont différents, on a

$$\iiint \dots V_{m, 0, 0, \dots} V_{0, m', 0, \dots} dx dy dz \dots = 0.$$

En d'autres termes, si l'on pose

$$(1 - 2ax + a^2)^{-\frac{p}{2}} = \Sigma a^n S_n(x),$$

on aura

$$\iiint \dots S_n(x) S_{n'}(y) dx dy dz \dots = 0,$$

les variables étant limitées par la condition $x^2 + y^2 + z^2 + \dots \leq 1$, quand $n \geq n'$.

Si l'on intègre le premier membre de l'égalité précédente par rapport aux variables autres que x et y , et si l'on supprime un facteur constant, cette égalité se transforme en la suivante :

$$\iint \dots S_n(x) S_{n'}(y) (1 - x^2 - y^2)^{\frac{p}{2} - 1} dx dy = 0.$$

On en déduit immédiatement que l'intégrale (5) ne dépend que de ab .

Il serait intéressant de calculer plus généralement l'intégrale multiple

$$\begin{aligned} & \iiint \dots (1 - 2ax - 2by - 2cz - \dots + a^2 + b^2 + c^2 + \dots)^{-\frac{p}{2}} \\ & \times (1 - 2a'x - 2b'y - 2c'z - \dots + a'^2 + b'^2 + c'^2)^{-\frac{p}{2}} dx dy dz \dots; \end{aligned}$$

mais cette question semble difficile à résoudre.