J. CLAIRIN

Sur quelques points de la théorie des transformations de Baecklund

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 30 (1913), p. 173-192

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1913_3_30__173_0>

SUR QUELQUES POINTS

DE LA

THÉORIE DES TRANSFORMATIONS DE BAECKLUND;

PAR M. J. CLAIRIN,

Professeur à l'Université de Lille.

J'ai indiqué dans ma Thèse (1) plusieurs propositions générales relatives aux transformations de Bäcklund, principalement à celles qui sont de première ou de seconde espèce, c'est-à-dire qui sont telles qu'à chaque intégrale de l'une au moins des deux équations transformées corresponde une seule intégrale de l'autre équation; depuis cette époque, j'ai obtenu quelques résultats nouveaux que je me propose d'exposer dans le présent travail.

Le plus intéressant de ces résultats paraît être le suivant : j'ai déjà établi qu'une équation aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes, qui possède une famille de caractéristiques du premier ordre, dérive toujours d'une infinité de transformations représentées analytiquement par quatre équations entre les coordonnées de deux systèmes d'éléments du premier ordre; je montrerai plus loin que, parmi ces transformations, il y a toujours, sauf dans un cas

---

(1) *Annales de l'École Normale supérieure*, 3e série, t. XIX, *suppl.*, 1902. — Dans les références qui seront indiquées au cours de ce travail, je désignerai les pages de ma thèse par leurs numéros dans le volume des *Annales de l'École Normale*, il faut augmenter les nombres de quatre pour avoir les numéros des pages correspondantes dans le tirage à part.

particulier, une transformation de Bäcklund de première espèce ([1]).

Je ne définirai pas à nouveau les notations qui seront employées : ce sont les notations ordinaires dont s'est servi M. Goursat dans son grand Ouvrage ([2]), j'ai moi-même rappelé leur signification dans ma Thèse et au début d'un Mémoire récent inséré également dans ces *Annales* ([3]).

1. Supposons que l'équation aux dérivées partielles du second ordre

$$(\varepsilon) \qquad r + f(x, y, z, p, q, s, t) = 0$$

possède un système de caractéristiques (C) du premier ordre correspondant à l'équation différentielle

$$dy = m\,dx,$$

où m désigne une racine de l'équation en λ

$$\lambda^2 - \frac{\partial f}{\partial s}\lambda + \frac{\partial f}{\partial t} = 0,$$

si μ représente la seconde racine de cette équation ([4]), (ε) possède un autre système de caractéristiques (Γ) défini par l'équation

$$dy = \mu\,dx.$$

Imaginons que (ε) dérive d'une transformation de Bäcklund de seconde espèce déduite du système (C) de caractéristiques, soient

$$x' = f_1(x, y, z, p, q; z'), \qquad y' = f_2(x, y, z, p, q; z'),$$
$$p' = f_3(x, y, z, p, q; z'), \qquad q' = f_4(x, y, z, p, q; z'),$$
$$\left(f_3 \frac{\partial f_1}{\partial z'} + f_4 \frac{\partial f_2}{\partial z'} = 1\right);$$

les équations de cette transformation, (ε) résulte de l'élimination

([1]) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 3 juillet 1911.

([2]) *Leçons sur les équations aux dérivées partielles du second ordre.*

([3]) *Annales de l'École Normale supérieure*, 3e série, t. XXVII, 1910, p. 451.

([4]) Nous ne nous occuperons pas du cas où les deux racines de l'équation en λ sont toujours égales.

de z' entre

$$B + \alpha r + \beta s = 0, \qquad C + \alpha s + \beta t = 0, \tag{1}$$

où l'on a posé

$$B = f_3\left(\frac{df_1}{dx}\right) + f_4\left(\frac{df_2}{dx}\right), \qquad C = f_3\left(\frac{df_1}{dy}\right) + f_4\left(\frac{df_2}{dy}\right),$$

$$\alpha = f_3 \frac{\partial f_1}{\partial p} + f_4 \frac{\partial f_2}{\partial p}, \qquad \beta = f_3 \frac{\partial f_1}{\partial q} + f_4 \frac{\partial f_2}{\partial q} \ (^1).$$

Par hypothèse $z'(x', y')$ satisfait à une équation de Monge-Ampère (ε'), il est permis de supposer cette équation linéaire en r', s', t' et de l'écrire

$$r' + (m' + \mu')s' + m'\mu' t' + M' = 0, \tag{ε'}$$

m', μ', M' désignant des fonctions de x', y', z', p', q'. On peut calculer x', y', z', p', q' en fonction de x, y, z, p, q, s, t, z' étant tiré de la deuxième équation (1) et remplacé par sa valeur dans f_1, f_2, f_3, f_4,

$$\left\{\begin{aligned} x' &= \psi_1(x, y, z, p, q, s, t),\\ y' &= \psi_2(x, y, z, p, q, s, t),\\ z' &= \psi\ (x, y, z, p, q, s, t),\\ p' &= \psi_3(x, y, z, p, q, s, t),\\ q' &= \psi_4(x, y, z, p, q, s, t) \quad (^2). \end{aligned}\right. \tag{2}$$

Aux caractéristiques (C) de (ε) correspondent des caractéristiques (C′) de (ε') le long desquelles

$$\frac{dy'}{dx'} = m' = \frac{\left(\frac{d\psi_2}{dx}\right) + m\left(\frac{d\psi_2}{dy}\right) + (m - \mu)\frac{\partial \psi_2}{\partial s}(p_{1,2} + mp_{0,3}) - \frac{\partial \psi_2}{\partial s}\left(\frac{df}{dy}\right)}{\left(\frac{d\psi_1}{dx}\right) + m\left(\frac{d\psi_1}{dy}\right) + (m - \mu)\frac{\partial \psi_1}{\partial s}(p_{1,2} + mp_{0,3}) - \frac{\partial \psi_1}{\partial s}\left(\frac{df}{dy}\right)}. \tag{3}$$

(ε') contenant linéairement les dérivées secondes de z', m' dépend de x', y', z', p', q' seulement ; si ces quantités sont remplacées par les expressions (2), m' devient une fonction de x, y, z, p, q, s, t, les dérivées troisièmes de z n'y figurant pas. D'après (3) cela ne peut arriver

---

(1) *Thèse*, p. 8, 12.
(2) *Ibid.*, p. 26.

que si l'égalité

$$\frac{\left(\frac{d\psi_2}{dx}\right)+m\left(\frac{d\psi_2}{dy}\right)}{\left(\frac{d\psi_1}{dx}\right)+m\left(\frac{d\psi_1}{dy}\right)}=\frac{\frac{\partial\psi_2}{\partial s}}{\frac{\partial\psi_1}{\partial s}}$$

est satisfaite, m' est alors égal à la valeur commune de ces deux rapports.

ψ_1 et ψ_2 s'obtiennent d'ailleurs en remplaçant z' par ψ dans f_1 et f_2, par conséquent

$$m'=\frac{\frac{\partial\psi_2}{\partial s}}{\frac{\partial\psi_1}{\partial s}}=\frac{\frac{\partial f_2}{\partial z'}}{\frac{\partial f_1}{\partial z'}}.$$

Les formules qui servent à calculer r', s', t' (1) donnent l'expression de M' en fonction de x, y, z et des dérivées de z si l'on tient compte de (ε'); d'ailleurs, M' ne peut dépendre que de x, y, z, p, q, s, t puisque les expressions de x', y', z', p', q' ne contiennent pas les dérivées de z d'ordre supérieur à deux. Le calcul n'offre aucune difficulté et montre que M' se présente sous la forme d'une fraction dont les deux termes sont linéaires par rapport à $p_{1,2}+mp_{03}$, M' qui est indépendante de cette quantité a nécessairement pour valeur le quotient des coefficients de $p_{1,2}+mp_{03}$ au numérateur et au dénominateur; il vient

$$M'=-\frac{\frac{\partial\psi_4}{\partial s}+\mu'\frac{\partial\psi_3}{\partial s}}{\frac{\partial\psi_1}{\partial s}}=-\frac{\frac{\partial f_4}{\partial z'}+\mu'\frac{\partial f_3}{\partial z'}}{\frac{\partial f_1}{\partial z'}}$$

puisque ψ_1, ψ_3, ψ_4 s'obtiennent en remplaçant z' par ψ dans f_1, f_3, f_4.

Ces égalités expriment que la multiplicité formée par les éléments (x', y', z', p', q') qui correspondent à un élément (x, y, z, p, q) est une multiplicité caractéristique de (ε'), car les coordonnées de ces éléments satisfont aux équations

$$dy'=m'\,dx',\qquad dp'+\mu'\,dq'+M'=0$$

des caractéristiques du système (C').

---

(1) *Thèse*, p. 28.

Le raisonnement précédent ne suppose pas essentiellement que la transformation de Bäcklund considérée soit de seconde espèce, il suffit que $z'(x', y')$ satisfasse à une équation de Monge-Ampère : le résultat que nous venons d'établir subsiste donc pour une transformation de première espèce si celle-ci fait correspondre à (ε) une équation de Monge-Ampère.

2. Une équation aux dérivées partielles du second ordre (ε) qui possède une famille de caractéristiques du premier ordre peut toujours être considérée comme dérivant d'une transformation définie par le système

$$(4)\qquad \begin{cases} x' = f_1(x, y, z, p, q; z'), & y' = f_2(x, y, z, p, q; z'), \\ p' = f_3(x, y, z, p, q; z'), & q' = f_4(x, y, z, p, q; z'), \end{cases}$$
$$\left(f_3 \frac{\partial f_1}{\partial z'} + f_4 \frac{\partial f_2}{\partial z'} = 1\right);$$

pour le voir il suffit de remarquer qu'une équation de l'espèce indiquée est le résultat de l'élimination de θ, η, ζ, ξ entre

$$\theta r + \eta s + \zeta = 0, \qquad \theta s + \eta t + \xi = 0,$$
$$\Phi_1(x, y, z, p, q, \theta, \eta, \zeta, \xi) = 0, \qquad \Phi_2(x, y, z, p, q, \theta, \eta, \zeta, \xi) = 0,$$

Φ_1 et Φ_2 désignant deux fonctions homogènes de θ, η, ζ, ξ, et qu'elle sera identique à l'équation déduite du système (4) si l'on a

$$(5)\qquad \Phi_1(x, y, z, p, q, \alpha, \beta, B, C) = 0, \qquad \Phi_2(x, y, z, p, q, \alpha, \beta, B, C) = 0,$$

en appelant B, C, α, β les mêmes quantités que précédemment.

Après que f_3 et f_4 ont été éliminées entre ces deux équations, ce qui est possible puisque Φ_1 et Φ_2 sont des fonctions homogènes de ces deux quantités, il reste une seule équation qui contient outre x, y, z, p, q les dérivées premières de f_1 et f_2, une de ces fonctions ayant été choisie arbitrairement l'autre doit satisfaire à l'équation qui vient d'être obtenue; une fois que f_1 et f_2 sont déterminées, f_3 et f_4 sont données par le système formé de l'une des équations (5) et de

$$(6)\qquad f_3 \frac{\partial f_1}{\partial z'} + f_4 \frac{\partial f_2}{\partial z'} = 1 \quad [1].$$

[1] *Thèse*, p. 12.

Nous nous proposons de montrer que, parmi les transformations (4) dont dérive l'équation considérée, il y a en général une transformation de Bäcklund de première espèce.

Les équations (4) définissent une transformation (B_1) si le déterminant

$$\Delta = \left| \left(\frac{df_i}{dx}\right) \quad \left(\frac{df_i}{dy}\right) \quad \frac{\partial f_i}{\partial p} \quad \frac{\partial f_i}{\partial q} \right| \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

est nul, c'est-à-dire s'il existe une relation linéaire et homogène entre les éléments de chaque ligne.

Remarquons que les éléments de la troisième ligne de Δ peuvent être remplacés respectivement par

$$\frac{\partial f_1}{\partial z'}\left(\frac{df_3}{dx}\right) + \frac{\partial f_2}{\partial z'}\left(\frac{df_4}{dx}\right), \quad \frac{\partial f_1}{\partial z'}\left(\frac{df_3}{dy}\right) + \frac{\partial f_2}{\partial z'}\left(\frac{df_4}{dy}\right),$$
$$\frac{\partial f_1}{\partial z'}\frac{\partial f_3}{\partial p} + \frac{\partial f_2}{\partial z'}\frac{\partial f_4}{\partial p}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial z'}\frac{\partial f_3}{\partial q} + \frac{\partial f_2}{\partial z'}\frac{\partial f_4}{\partial q},$$

et ceux de la quatrième ligne par

$$\frac{f_4\left(\dfrac{df_3}{dx}\right) - f_3\left(\dfrac{df_4}{dx}\right)}{f_4^2}, \quad \frac{f_4\left(\dfrac{df_3}{dy}\right) - f_3\left(\dfrac{df_4}{dy}\right)}{f_4^2}, \quad \frac{f_4\dfrac{\partial f_3}{\partial p} - f_3\dfrac{\partial f_4}{\partial p}}{f_4^2}, \quad \frac{f_4\dfrac{\partial f_3}{\partial q} - f_3\dfrac{\partial f_4}{\partial q}}{f_4^2}$$

ou

$$\left(\frac{d}{dx}\frac{f_3}{f_4}\right), \quad \left(\frac{d}{dy}\frac{f_3}{f_4}\right), \quad \frac{\partial}{\partial p}\frac{f_3}{f_4}, \quad \frac{\partial}{\partial q}\frac{f_3}{f_4}.$$

De plus, en dérivant les deux membres de l'équation (6), il vient

$$\frac{\partial f_1}{\partial z'}\left(\frac{df_3}{dx}\right) + \frac{\partial f_2}{\partial z'}\left(\frac{df_4}{dx}\right) = -\left[f_3\frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{df_1}{dx}\right) + f_4\frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{df_2}{dx}\right)\right],$$
$$\frac{\partial f_1}{\partial z'}\frac{\partial f_3}{\partial p} + \frac{\partial f_2}{\partial z'}\frac{\partial f_4}{\partial p} = -\left(f_3\frac{\partial}{\partial z'}\frac{\partial f_1}{\partial p} + f_4\frac{\partial}{\partial z'}\frac{\partial f_2}{\partial p}\right),$$

et deux autres relations analogues obtenues en remplaçant x par y et p par q.

L'équation qui exprime que le système (4) définit une transformation (B_1) est donc

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{df_1}{dx}\right) & \left(\frac{df_1}{dy}\right) & \frac{\partial f_1}{\partial p} & \frac{\partial f_1}{\partial q} \\ \left(\frac{df_2}{dx}\right) & \left(\frac{df_2}{dy}\right) & \frac{\partial f_2}{\partial p} & \frac{\partial f_2}{\partial q} \\ f_3\frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{df_1}{dx}\right)+f_4\frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{df_2}{dx}\right) & f_3\frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{df_1}{dy}\right)+f_4\frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{df_2}{dy}\right) & f_3\frac{\partial}{\partial z'}\frac{\partial f_1}{\partial p}+f_4\frac{\partial}{\partial z'}\frac{\partial f_2}{\partial p} & f_3\frac{\partial}{\partial z'}\frac{\partial f_1}{\partial q}+f_4\frac{\partial}{\partial z'}\frac{\partial f_2}{\partial q} \\ \left(\frac{d}{dx}\frac{f_3}{f_4}\right) & \left(\frac{d}{dy}\frac{f_3}{f_4}\right) & \frac{\partial}{\partial p}\frac{f_3}{f_4} & \frac{\partial}{\partial q}\frac{f_3}{f_4} \end{vmatrix} =$$

Nous avons déjà dit que f_1 et f_2 satisfont à l'équation obtenue en éliminant f_3 et f_4 entre les équations (5) : imaginons qu'on ait résolu ces deux équations par rapport à $\frac{f_3}{f_4}$, qu'on ait tiré de la première

$$\frac{f_3}{f_4} = \mathrm{H}_1\left[x, y, z, p, q, \left(\frac{df_1}{dx}\right), \left(\frac{df_1}{dy}\right), \frac{\partial f_1}{\partial p}, \frac{\partial f_1}{\partial q}, \left(\frac{df_2}{dx}\right), \left(\frac{df_2}{dy}\right), \frac{\partial f_2}{\partial p}, \frac{\partial f_2}{\partial q}\right]$$

et de la seconde

$$\frac{f_3}{f_4} = \mathrm{H}_2\left[x, y, z, p, q, \left(\frac{df_1}{dx}\right), \left(\frac{df_1}{dy}\right), \frac{\partial f_1}{\partial p}, \frac{\partial f_1}{\partial q}, \left(\frac{df_2}{dx}\right), \left(\frac{df_2}{dy}\right), \frac{\partial f_2}{\partial p}, \frac{\partial f_2}{\partial q}\right].$$

En égalant ces deux expressions de $\frac{f_3}{f_4}$, on a

$$\mathrm{H}_1 - \mathrm{H}_2 = 0, \tag{8}$$

pour abréger nous désignerons par G le premier membre de cette équation.

H_1, H_2, et par conséquent G, sont évidemment des fonctions homogènes du premier ordre de $\left(\frac{df_2}{dx}\right)$, $\left(\frac{df_2}{dy}\right)$, $\frac{\partial f_2}{\partial p}$, $\frac{\partial f_2}{\partial q}$ et des fonctions homogènes d'ordre -1 de $\left(\frac{df_1}{dx}\right)$, $\left(\frac{df_1}{dy}\right)$, $\frac{\partial f_1}{\partial p}$, $\frac{\partial f_1}{\partial q}$. Remarquons aussi qu'on a

$$\frac{\dfrac{\partial \mathrm{H}_1}{\partial\left(\frac{df_1}{dx}\right)}}{\dfrac{\partial \mathrm{H}_1}{\partial\left(\frac{df_2}{dx}\right)}} = \frac{\dfrac{\partial \mathrm{H}_1}{\partial\left(\frac{df_1}{dy}\right)}}{\dfrac{\partial \mathrm{H}_1}{\partial\left(\frac{df_2}{dy}\right)}} = \frac{\dfrac{\partial \mathrm{H}_1}{\partial\frac{\partial f_1}{\partial p}}}{\dfrac{\partial \mathrm{H}_1}{\partial\frac{\partial f_2}{\partial p}}} = \frac{\dfrac{\partial \mathrm{H}_1}{\partial\frac{\partial f_1}{\partial q}}}{\dfrac{\partial \mathrm{H}_1}{\partial\frac{\partial f_2}{\partial q}}} = \mathrm{H}_1; \tag{9}$$

il suffit, pour le vérifier, d'observer que H_1 satisfait à l'équation

$$\Phi_1\left[x, y, z, p, q, H_1\left(\frac{df_1}{dx}\right)+\left(\frac{df_2}{dx}\right), H_1\left(\frac{df_1}{dy}\right)+\left(\frac{df_2}{dy}\right),\right.$$
$$\left. H_1\frac{\partial f_1}{\partial p}+\frac{\partial f_2}{\partial p}, H_1\frac{\partial f_1}{\partial q}+\frac{\partial f_2}{\partial q}\right]=0,$$

et qu'en posant

$$H_1\left(\frac{df_1}{dx}\right)+\left(\frac{df_2}{dx}\right)=u,$$

on trouve

$$\frac{\partial H_1}{\partial\left(\dfrac{df_1}{dx}\right)}=-\frac{\dfrac{\partial\Phi_1}{\partial\left(\dfrac{df_1}{dx}\right)}}{\dfrac{\partial\Phi_1}{\partial H_1}}=-\frac{\dfrac{\partial\Phi_1}{\partial u}H_1}{\dfrac{\partial\Phi_1}{\partial H_1}}, \qquad \frac{\partial H_1}{\partial\left(\dfrac{df_2}{dx}\right)}=-\frac{\dfrac{\partial\Phi_1}{\partial\left(\dfrac{df_2}{dx}\right)}}{\dfrac{\partial\Phi_1}{\partial H_1}}=-\frac{\dfrac{\partial\Phi_1}{\partial u}}{\dfrac{\partial\Phi_1}{\partial H_1}};$$

en divisant membre à membre, on obtient,

$$\frac{\dfrac{\partial H_1}{\partial\left(\dfrac{df_1}{dx}\right)}}{\dfrac{\partial H_1}{\partial\left(\dfrac{df_2}{dx}\right)}}=H_1;$$

on opère de même pour les autres rapports qui figurent dans les égalités (9).

On a des égalités analogues en remplaçant H_1 par H_2, d'ailleurs, d'après (8), on a aussi

$$(10)\qquad \frac{\dfrac{\partial G}{\partial\left(\dfrac{df_1}{dx}\right)}}{\dfrac{\partial G}{\partial\left(\dfrac{df_2}{dx}\right)}}=\frac{\dfrac{\partial G}{\partial\left(\dfrac{df_1}{dy}\right)}}{\dfrac{\partial G}{\partial\left(\dfrac{df_2}{dy}\right)}}=\frac{\dfrac{\partial G}{\partial\dfrac{\partial f_1}{\partial p}}}{\dfrac{\partial G}{\partial\dfrac{\partial f_2}{\partial p}}}=\frac{\dfrac{\partial G}{\partial\dfrac{\partial f_1}{\partial q}}}{\dfrac{\partial G}{\partial\dfrac{\partial f_2}{\partial q}}}=H_1=H_2.$$

Multiplions par

$$\frac{\partial G}{\partial\left(\dfrac{df_1}{dx}\right)}, \quad \frac{\partial G}{\partial\left(\dfrac{df_1}{dy}\right)}, \quad \frac{\partial G}{\partial\dfrac{\partial f_1}{\partial p}}, \quad \frac{\partial G}{\partial\dfrac{\partial f_1}{\partial q}},$$

les éléments de la première ligne du déterminant Δ et ajoutons les produits, il vient

$$\left(\frac{df_1}{dx}\right)\frac{\partial G}{\partial\left(\frac{df_1}{dx}\right)}+\left(\frac{df_1}{dy}\right)\frac{\partial G}{\partial\left(\frac{df_1}{dy}\right)}+\frac{\partial f_1}{\partial p}\frac{\partial G}{\partial\frac{\partial f_1}{\partial p}}+\frac{\partial f_1}{\partial q}\frac{\partial G}{\partial\frac{\partial f_1}{\partial q}}=-G=0,$$

en appliquant le théorème des fonctions homogènes et tenant compte de l'équation (8).

Opérons de même sur les éléments de la deuxième ligne, d'après (10) le résultat est

$$H_1\left[\left(\frac{df_2}{dx}\right)\frac{\partial G}{\partial\left(\frac{df_2}{dx}\right)}+\left(\frac{df_2}{dy}\right)\frac{\partial G}{\partial\left(\frac{df_2}{dy}\right)}+\frac{\partial f_2}{\partial p}\frac{\partial G}{\partial\frac{\partial f_2}{\partial p}}+\frac{\partial f_2}{\partial q}\frac{\partial G}{\partial\frac{\partial f_2}{\partial q}}\right]=H_1G=0.$$

Passons à la troisième ligne, nous trouvons

$$\begin{aligned}&f_3\left[\frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{df_1}{dx}\right)\frac{\partial G}{\partial\left(\frac{df_1}{dx}\right)}+\frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{df_1}{dy}\right)\frac{\partial G}{\partial\left(\frac{df_1}{dy}\right)}+\frac{\partial}{\partial z'}\frac{\partial f_1}{\partial p}\frac{\partial G}{\partial\frac{\partial f_1}{\partial p}}+\frac{\partial}{\partial z'}\frac{\partial f_1}{\partial q}\frac{\partial G}{\partial\frac{\partial f_1}{\partial q}}\right]\\&\quad+f_4\left[\frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{df_2}{dx}\right)\frac{\partial G}{\partial\left(\frac{df_1}{dx}\right)}+\frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{df_2}{dy}\right)\frac{\partial G}{\partial\left(\frac{df_1}{dy}\right)}+\frac{\partial}{\partial z'}\frac{\partial f_2}{\partial p}\frac{\partial G}{\partial\frac{\partial f_1}{\partial p}}+\frac{\partial}{\partial z'}\frac{\partial f_2}{\partial q}\frac{\partial G}{\partial\frac{\partial f_1}{\partial q}}\right],\end{aligned}$$

et en divisant par f_3

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{df_1}{dx}\right)\frac{\partial G}{\partial\left(\frac{df_1}{dx}\right)}+\frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{df_1}{dy}\right)\frac{\partial G}{\partial\left(\frac{df_1}{dy}\right)}+\frac{\partial}{\partial z'}\frac{\partial f_1}{\partial p}\frac{\partial G}{\partial\frac{\partial f_1}{\partial p}}+\frac{\partial}{\partial z'}\frac{\partial f_1}{\partial q}\frac{\partial G}{\partial\frac{\partial f_1}{\partial q}}\\&\quad+\frac{1}{H_1}\left[\frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{df_2}{dx}\right)\frac{\partial G}{\partial\left(\frac{df_1}{dx}\right)}+\frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{df_2}{dy}\right)\frac{\partial G}{\partial\left(\frac{df_1}{dy}\right)}+\frac{\partial}{\partial z'}\frac{\partial f_2}{\partial p}\frac{\partial G}{\partial\frac{\partial f_1}{\partial p}}+\frac{\partial}{\partial z'}\frac{\partial f_2}{\partial q}\frac{\partial G}{\partial\frac{\partial f_1}{\partial q}}\right]\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{df_1}{dx}\right)\frac{\partial G}{\partial\left(\frac{df_1}{dx}\right)}+\frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{df_1}{dy}\right)\frac{\partial G}{\partial\left(\frac{df_1}{dy}\right)}+\frac{\partial}{\partial z'}\frac{\partial f_1}{\partial p}\frac{\partial G}{\partial\frac{\partial f_1}{\partial p}}+\frac{\partial}{\partial z'}\frac{\partial f_1}{\partial q}\frac{\partial G}{\partial\frac{\partial f_1}{\partial q}}\\&\quad+\frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{df_2}{dx}\right)\frac{\partial G}{\partial\left(\frac{df_2}{dx}\right)}+\frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{df_2}{dy}\right)\frac{\partial G}{\partial\left(\frac{df_2}{dy}\right)}+\frac{\partial}{\partial z'}\frac{\partial f_2}{\partial p}\frac{\partial G}{\partial\frac{\partial f_2}{\partial p}}+\frac{\partial}{\partial z'}\frac{\partial f_2}{\partial q}\frac{\partial G}{\partial\frac{\partial f_2}{\partial q}},\end{aligned}$$

d'après (10). Cette expression est la dérivée totale de G par rapport à z', elle est donc nulle.

Pour que le déterminant du premier membre de l'équation (7) soit nul, il faut et il suffit que la relation linéaire et homogène à laquelle satisfont les éléments des trois premières lignes soit également vérifiée par les éléments de la quatrième, c'est-à-dire qu'on ait

$$\frac{\partial G}{\partial\left(\frac{df_1}{dx}\right)}\left(\frac{d}{dx}\frac{f_3}{f_4}\right)+\frac{\partial G}{\partial\left(\frac{df_1}{dy}\right)}\left(\frac{d}{dy}\frac{f_3}{f_4}\right)+\frac{\partial G}{\partial\frac{\partial f_1}{\partial p}}\frac{\partial}{\partial p}\frac{f_3}{f_4}+\frac{\partial G}{\partial\frac{\partial f_1}{\partial q}}\frac{\partial}{\partial q}\frac{f_3}{f_4}=0$$

ou en remplaçant $\frac{f_3}{f_4}$ par H_1

$$\begin{aligned}(11)\qquad &\frac{\partial G}{\partial\left(\frac{df_1}{dx}\right)}\left(\frac{dH_1}{dx}+p\frac{dH_1}{dz}\right)+\frac{\partial G}{\partial\left(\frac{df_1}{dy}\right)}\left(\frac{dH_1}{dy}+q\frac{dH_1}{dz}\right)\\ &\qquad+\frac{\partial G}{\partial\frac{\partial f_1}{\partial p}}\frac{dH_1}{dp}+\frac{\partial G}{\partial\frac{\partial f_1}{\partial q}}\frac{dH_1}{dq}=0 \quad (^1);\end{aligned}$$

f_1 et f_2 doivent satisfaire en même temps à (8) et à (11).

Le premier membre de (11) contient les dérivées du second ordre de f_1, f_2, mais si nous en retranchons

$$\frac{\partial H_1}{\partial\left(\frac{df_1}{dx}\right)}\left(\frac{dG}{dx}+p\frac{dG}{dz}\right)+\frac{\partial H_1}{\partial\left(\frac{df_1}{dy}\right)}\left(\frac{dG}{dy}+q\frac{dG}{dz}\right)+\frac{\partial H_1}{\partial\frac{\partial f_1}{\partial p}}\frac{dG}{dp}+\frac{\partial H_1}{\partial\frac{\partial f_1}{\partial q}}\frac{dG}{dq},$$

quantité évidemment nulle puisque G et par conséquent $\frac{dG}{dx}$, $\frac{dG}{dy}$, ... sont nulles, il reste une équation entre x, y, z, p, q et les dérivées du premier ordre de f_1 et f_2. Le calcul n'offre aucune difficulté, après

(1) H_1, H_2, G et d'autres fonctions qui seront définies plus loin dépendent de x, y, z, p, q directement et par l'intermédiaire des dérivées de f_1, f_2, nous désignons par $\frac{dH_1}{dx}$, $\frac{dH_1}{dy}$, ... les dérivées totales calculées en appliquant le théorème des fonctions composées.

réduction l'équation devient

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial G}{\partial\left(\frac{df_1}{dx}\right)}\left(\frac{\partial H_1}{\partial x}+p\,\frac{\partial H_1}{\partial z}\right)+\frac{\partial G}{\partial\left(\frac{df_1}{dy}\right)}\left(\frac{\partial H_1}{\partial y}+q\,\frac{\partial H_1}{\partial z}\right)+\frac{\partial G}{\partial\frac{\partial f_1}{\partial p}}\frac{\partial H_1}{\partial p}+\frac{\partial G}{\partial\frac{\partial f_1}{\partial q}}\frac{\partial H_1}{\partial q}\\
&\quad-\left(\frac{\partial G}{\partial x}+p\,\frac{\partial G}{\partial z}\right)\frac{\partial H_1}{\partial\left(\frac{df_1}{dx}\right)}-\left(\frac{\partial G}{\partial y}+q\,\frac{\partial G}{\partial z}\right)\frac{\partial H_1}{\partial\left(\frac{df_1}{dy}\right)}-\frac{\partial G}{\partial p}\frac{\partial H_1}{\partial\frac{\partial f_1}{\partial p}}-\frac{\partial G}{\partial q}\frac{\partial H_1}{\partial\frac{\partial f_1}{\partial q}}\\
&\quad+\left[\frac{\partial G}{\partial\frac{\partial f_1}{\partial p}}\frac{\partial H_1}{\partial\left(\frac{df_1}{dx}\right)}+\frac{\partial G}{\partial\frac{\partial f_1}{\partial q}}\frac{\partial H_1}{\partial\left(\frac{df_1}{dy}\right)}-\frac{\partial G}{\partial\left(\frac{df_1}{dx}\right)}\frac{\partial H_1}{\partial\frac{\partial f_1}{\partial p}}-\frac{\partial G}{\partial\left(\frac{df_1}{dy}\right)}\frac{\partial H_1}{\partial\frac{\partial f_1}{\partial q}}\right]\frac{\partial f_1}{\partial z}\\
&\quad+\left[\frac{\partial G}{\partial\frac{\partial f_1}{\partial p}}\frac{\partial H_1}{\partial\left(\frac{df_2}{dx}\right)}+\frac{\partial G}{\partial\frac{\partial f_1}{\partial q}}\frac{\partial H_1}{\partial\left(\frac{df_2}{dy}\right)}-\frac{\partial G}{\partial\left(\frac{df_1}{dx}\right)}\frac{\partial H_1}{\partial\frac{\partial f_2}{\partial p}}-\frac{\partial G}{\partial\left(\frac{df_1}{dy}\right)}\frac{\partial H_1}{\partial\frac{\partial f_2}{\partial q}}\right]\frac{\partial f_2}{\partial z}=0,
\end{aligned}$$

ou en remplaçant G par H_1-H_2

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial H_1}{\partial\left(\frac{df_1}{dx}\right)}\left(\frac{\partial H_2}{\partial x}+p\,\frac{\partial H_2}{\partial z}\right)+\frac{\partial H_1}{\partial\left(\frac{df_1}{dy}\right)}\left(\frac{\partial H_2}{\partial y}+q\,\frac{\partial H_2}{\partial z}\right)\\
&\quad+\frac{\partial H_1}{\partial\frac{\partial f_1}{\partial p}}\frac{\partial H_2}{\partial p}+\frac{\partial H_1}{\partial\frac{\partial f_1}{\partial q}}\frac{\partial H_2}{\partial q}-\left(\frac{\partial H_1}{\partial x}+p\,\frac{\partial H_1}{\partial z}\right)\frac{\partial H_2}{\partial\left(\frac{df_1}{dx}\right)}\\
&\quad-\left(\frac{\partial H_1}{\partial y}+q\,\frac{\partial H_1}{\partial z}\right)\frac{\partial H_2}{\partial\left(\frac{df_1}{dy}\right)}-\frac{\partial H_1}{\partial p}\frac{\partial H_2}{\partial\frac{\partial f_1}{\partial p}}-\frac{\partial H_1}{\partial q}\frac{\partial H_2}{\partial\frac{\partial f_1}{\partial q}}\\
&\quad+\left[\frac{\partial H_1}{\partial\frac{\partial f_1}{\partial p}}\frac{\partial H_2}{\partial\left(\frac{df_1}{dx}\right)}+\frac{\partial H_1}{\partial\frac{\partial f_1}{\partial q}}\frac{\partial H_2}{\partial\left(\frac{df_1}{dy}\right)}\right.\\
&\qquad\left.-\frac{\partial H_1}{\partial\left(\frac{df_1}{dx}\right)}\frac{\partial H_2}{\partial\frac{\partial f_1}{\partial p}}-\frac{\partial H_1}{\partial\left(\frac{df_1}{dy}\right)}\frac{\partial H_2}{\partial\frac{\partial f_1}{\partial q}}\right]\frac{\partial f_1}{\partial z}\\
&\quad+\left[\frac{\partial H_1}{\partial\frac{\partial f_2}{\partial p}}\frac{\partial H_2}{\partial\left(\frac{df_1}{dx}\right)}+\frac{\partial H_1}{\partial\frac{\partial f_2}{\partial q}}\frac{\partial H_2}{\partial\left(\frac{df_1}{dy}\right)}\right.\\
&\qquad\left.-\frac{\partial H_1}{\partial\left(\frac{df_2}{dx}\right)}\frac{\partial H_2}{\partial\frac{\partial f_1}{\partial p}}-\frac{\partial H_1}{\partial\left(\frac{df_2}{dy}\right)}\frac{\partial H_2}{\partial\frac{\partial f_1}{\partial q}}\right]\frac{\partial f_2}{\partial z}=0.
\end{aligned}\right.\tag{12}$$

3. Les théorèmes généraux de Cauchy ne peuvent s'appliquer au système formé par (8) et (12); pour nous en assurer reprenons les

équations

$$(13)\quad \Phi_1(x, y, z, p, q, \theta, \eta, \zeta, \xi) = 0, \qquad \Phi_2(x, y, z, p, q, \theta, \eta, \zeta, \xi) = 0$$

qui avec

$$\theta r + \eta s + \zeta = 0, \qquad \theta s + \eta t + \xi = 0$$

définissent l'équation du second ordre donnée, sans restreindre la généralité nous pouvons imaginer que ces équations aient été mises sous la forme

$$\zeta - \varphi_1(x, y, z, p, q, \theta, \eta) = 0, \qquad \xi - \varphi_2(x, y, z, p, q, \theta, \eta) = 0.$$

Les équations (13) sont en effet résolubles par rapport à ζ, ξ à moins qu'on ne puisse éliminer simultanément ces deux quantités de manière à obtenir entre $x, y, z, p, q, \theta, \eta$ seulement une relation d'où l'on déduirait

$$\frac{\eta}{\theta} = \omega(x, y, z, p, q).$$

Le système de caractéristiques du premier ordre de (ε) serait défini par

$$dy = \omega(x, y, z, p, q)\, dx,$$

on peut toujours revenir au cas où il n'en est pas ainsi à l'aide d'une transformation de contact.

H_1 et H_2 sont alors données par les équations

$$B - \varphi_1(x, y, z, p, q, \alpha, \beta) = 0, \qquad C - \varphi_2(x, y, z, p, q, \alpha, \beta) = 0,$$

α, β, B, C ayant toujours la même signification. Le calcul des dérivées partielles de H_1, H_2 ne présente pas de difficultés, quand on remplace ces dérivées par leurs expressions dans (12), il vient

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial\varphi_1}{\partial y} + q\frac{\partial\varphi_1}{\partial z} - \frac{\partial\varphi_1}{\partial p}\frac{\partial\varphi_2}{\partial\alpha} - \frac{\partial\varphi_1}{\partial q}\frac{\partial\varphi_2}{\partial\beta} - \frac{\partial\varphi_2}{\partial x} - p\frac{\partial\varphi_2}{\partial z} + \frac{\partial\varphi_1}{\partial\alpha}\frac{\partial\varphi_2}{\partial p} \\ &\qquad + \frac{\partial\varphi_1}{\partial\beta}\frac{\partial\varphi_2}{\partial q} + \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial\beta} - \frac{\partial\varphi_2}{\partial\alpha}\right)\left(H_1\frac{\partial f_1}{\partial z} + \frac{\partial f_2}{\partial z}\right) \\ &\quad = M\left(x, y, z, p, q, \frac{\partial f_1}{\partial x}, \frac{\partial f_1}{\partial z}, \frac{\partial f_1}{\partial p}, \frac{\partial f_1}{\partial q}, \frac{\partial f_2}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_2}{\partial p}, \frac{\partial f_2}{\partial q}\right) = 0 \end{aligned}\right.$$

en tenant compte de l'égalité de H_1 et H_2 [équation (8)].

Dans le premier membre de (14), α, β doivent être respectivement remplacées par $H_1 \frac{\partial f_1}{\partial p} + \frac{\partial f_2}{\partial p}$, $H_1 \frac{\partial f_1}{\partial q} + \frac{\partial f_2}{\partial q}$. Si l'on remarque en outre que H_1 satisfait aux égalités (9), on vérifie aisément que

$$(15) \qquad \frac{\dfrac{\partial M}{\partial \dfrac{\partial f_1}{\partial x}}}{\dfrac{\partial M}{\partial \dfrac{\partial f_2}{\partial x}}} = \frac{\dfrac{\partial M}{\partial \dfrac{\partial f_1}{\partial z}}}{\dfrac{\partial M}{\partial \dfrac{\partial f_2}{\partial z}}} = \frac{\dfrac{\partial M}{\partial \dfrac{\partial f_1}{\partial p}}}{\dfrac{\partial M}{\partial \dfrac{\partial f_2}{\partial p}}} = \frac{\dfrac{\partial M}{\partial \dfrac{\partial f_1}{\partial q}}}{\dfrac{\partial M}{\partial \dfrac{\partial f_2}{\partial q}}} = H_1 = H_2.$$

Il est donc nécessaire d'étudier directement le système

$$(16) \qquad \left\{ \begin{aligned} &G\left(x, y, z, p, q, \frac{\partial f_1}{\partial x}, \frac{\partial f_1}{\partial y}, \frac{\partial f_1}{\partial z}, \frac{\partial f_1}{\partial p}, \frac{\partial f_1}{\partial q}, \frac{\partial f_2}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial y}, \frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_2}{\partial p}, \frac{\partial f_2}{\partial q}\right) = 0, \\ &M\left(x, y, z, p, q, \frac{\partial f_1}{\partial x}, \frac{\partial f_1}{\partial z}, \frac{\partial f_1}{\partial p}, \frac{\partial f_1}{\partial q}, \frac{\partial f_2}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_2}{\partial p}, \frac{\partial f_2}{\partial q}\right) = 0, \end{aligned} \right.$$

puisque tous les déterminants fonctionnels tels que $\dfrac{D(G, M)}{D\left(\dfrac{\partial f_1}{\partial x}, \dfrac{\partial f_2}{\partial x}\right)}$ sont nuls.

Écrivons la combinaison

$$(17) \qquad \begin{aligned} &\frac{dG}{dx} \frac{\partial M}{\partial \dfrac{\partial f_1}{\partial x}} - \frac{\partial G}{\partial \dfrac{\partial f_1}{\partial x}} \frac{dM}{dx} - \frac{\partial G}{\partial \dfrac{\partial f_1}{\partial y}} \frac{dM}{dy} \\ &+ \frac{dG}{dz} \frac{\partial M}{\partial \dfrac{\partial f_1}{\partial z}} - \frac{\partial G}{\partial \dfrac{\partial f_1}{\partial z}} \frac{dM}{dz} + \frac{dG}{dp} \frac{\partial M}{\partial \dfrac{\partial f_1}{\partial p}} \\ &- \frac{\partial G}{\partial \dfrac{\partial f_1}{\partial p}} \frac{dM}{dp} + \frac{dG}{dq} \frac{\partial M}{\partial \dfrac{\partial f_1}{\partial q}} - \frac{\partial G}{\partial \dfrac{\partial f_1}{\partial q}} \frac{dM}{dq} = 0, \end{aligned}$$

il est facile de voir que, dans le premier membre de cette équation, les dérivées secondes de f_1 et f_2 disparaissent; pour ce qui est des dérivées de f_1 nous remarquerons que l'expression précédente est la parenthèse (G, M) formée en considérant (16) comme un système de deux équations simultanées aux dérivées partielles du premier ordre, la fonction inconnue étant f_1, quant aux dérivées de f_2 calculons les coefficients de $\frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f_2}{\partial x \partial p}$, nous trouvons

$$\frac{\partial G}{\partial \frac{\partial f_2}{\partial x}} \frac{\partial M}{\partial \frac{\partial f_1}{\partial x}} - \frac{\partial G}{\partial \frac{\partial f_1}{\partial x}} \frac{\partial M}{\partial \frac{\partial f_2}{\partial x}},$$

$$\frac{\partial G}{\partial \frac{\partial f_2}{\partial p}} \frac{\partial M}{\partial \frac{\partial f_1}{\partial x}} - \frac{\partial G}{\partial \frac{\partial f_1}{\partial x}} \frac{\partial M}{\partial \frac{\partial f_2}{\partial p}} + \frac{\partial G}{\partial \frac{\partial f_2}{\partial x}} \frac{\partial M}{\partial \frac{\partial f_1}{\partial p}} - \frac{\partial G}{\partial \frac{\partial f_1}{\partial p}} \frac{\partial M}{\partial \frac{\partial f_2}{\partial x}},$$

quantités nulles d'après (10) et (15).

(17) se réduit ainsi à une équation entre x, y, z, p, q et les dérivées du premier ordre de f_1 et f_2, nous l'écrirons pour abréger

$$(18) \quad N\left(x, y, z, p, q, \frac{\partial f_1}{\partial x}, \frac{\partial f_1}{\partial y}, \frac{\partial f_1}{\partial z}, \frac{\partial f_1}{\partial p}, \frac{\partial f_1}{\partial q}, \frac{\partial f_2}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial y}, \frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_2}{\partial p}, \frac{\partial f_2}{\partial q}\right) = 0.$$

Considérons le système formé par (18) et

$$(19) \quad G\left(x, y, z, p, q, \frac{\partial f_1}{\partial x}, \frac{\partial f_1}{\partial y}, \frac{\partial f_1}{\partial z}, \frac{\partial f_1}{\partial p}, \frac{\partial f_1}{\partial q}, \frac{\partial f_2}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial y}, \frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_2}{\partial p}, \frac{\partial f_2}{\partial q}\right) = 0;$$

nous venons d'indiquer que N est identique à (G, M), cette parenthèse étant prise de la manière que nous avons expliquée comme toutes celles qui interviennent dans le raisonnement, G représente la différence

$$H_1 - H_2;$$

(18) s'écrit donc

$$(18') \qquad (H_1, M) = (H_2, M).$$

Remarquons que, d'après la forme du premier membre de (14), M est une fonction de $x, y, z, p, q, \alpha, \beta$, $H_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \frac{\partial f_2}{\partial z}$, les lettres α, β désignant respectivement $H_1 \frac{\partial f_1}{\partial p} + \frac{\partial f_2}{\partial p}$, $H_1 \frac{\partial f_1}{\partial q} + \frac{\partial f_2}{\partial q}$, où H_2 peut remplacer H_1 d'après (8); remarquons aussi que H_1, H_2 sont déterminées par les équations

$$\mathrm{H}_1\left(\frac{df_1}{dx}\right)+\left(\frac{df_2}{dx}\right)-\varphi_1\left(x,y,z,p,q,\mathrm{H}_1\frac{\partial f_1}{\partial p}+\frac{\partial f_2}{\partial p},\mathrm{H}_1\frac{\partial f_1}{\partial q}+\frac{\partial f_2}{\partial q}\right)=0,$$
$$\mathrm{H}_2\left(\frac{df_1}{dy}\right)+\left(\frac{df_2}{dy}\right)-\varphi_2\left(x,y,z,p,q,\mathrm{H}_2\frac{\partial f_1}{\partial p}+\frac{\partial f_2}{\partial p},\mathrm{H}_2\frac{\partial f_1}{\partial q}+\frac{\partial f_2}{\partial q}\right)=0,$$

qui permettent de calculer les dérivées partielles de H_1, H_2.

Après développement des deux membres, (18′) devient

$$(18'')\quad \frac{\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial \mathrm{M}}{\partial x}+p\dfrac{\partial \mathrm{M}}{\partial z}-\dfrac{\partial \mathrm{M}}{\partial p}\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial\alpha}-\dfrac{\partial \mathrm{M}}{\partial q}\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial\beta}\\ \quad+\left(\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial\beta}-\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial\alpha}\right)\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial z}+\dfrac{\partial \mathrm{M}}{\partial\alpha}\left(\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial p}-\mathrm{H}_1\dfrac{\partial f_1}{\partial z}-\dfrac{\partial f_2}{\partial z}\right)+\dfrac{\partial \mathrm{M}}{\partial\beta}\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial q}\end{array}\right\}}{\left(\dfrac{df_1}{dx}\right)-\dfrac{\partial f_1}{\partial p}\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial\alpha}-\dfrac{\partial f_1}{\partial q}\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial\beta}}$$
$$=\frac{\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial \mathrm{M}}{\partial y}+q\dfrac{\partial \mathrm{M}}{\partial z}-\dfrac{\partial \mathrm{M}}{\partial p}\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial\alpha}-\dfrac{\partial \mathrm{M}}{\partial q}\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial\beta}\\ \quad+\left(\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial\beta}-\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial\alpha}\right)\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial z}+\dfrac{\partial \mathrm{M}}{\partial\alpha}\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial p}+\dfrac{\partial \mathrm{M}}{\partial\beta}\left(\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial q}-\mathrm{H}_1\dfrac{\partial f_1}{\partial z}-\dfrac{\partial f_2}{\partial z}\right)\end{array}\right\}}{\left(\dfrac{df_1}{dy}\right)-\dfrac{\partial f_1}{\partial p}\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial\alpha}-\dfrac{\partial f_1}{\partial q}\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial\beta}}$$

quand on a supprimé de part et d'autre les facteurs égaux H_1, H_2.

Si, dans les deux rapports précédents, les numérateurs ne s'annulent pas, on peut imaginer que l'équation (18″) obtenue en les égalant ait été résolue par rapport à $\dfrac{\partial f_1}{\partial y}$ puis qu'après avoir remplacé cette dérivée par sa valeur on ait tiré $\dfrac{\partial f_2}{\partial y}$ de (19). D'après le théorème de Cauchy, les équations (18), (19) admettent deux intégrales $f_1(x,y,z,p,q;z')$, $f_2(x,y,z,p,q;z')$ qui sont complètement déterminées par la condition de se réduire à deux fonctions données $\omega_1(x,z,p,q;z')$, $\omega_2(x,z,p,q;z')$ pour une valeur particulière y_0 de y. Supposons que ω_1 et ω_2 mises à la place de f_1, f_2 annulent l'expression M où l'on attribue à y la valeur y_0 et montrons que les intégrales f_1 et f_2 correspondant à ces fonctions ω_1, ω_2 satisfont à (14) quelle que soit y.

En effet quand on substitue dans M à f_1, f_2 des fonctions quelconques de x, y, z, p, q, z', M devient une fonction $\mu(x,y,z,p,q;z')$

et les dérivées que nous avons représentées par $\frac{dM}{dx}, \frac{dM}{dy}, \cdots$ deviennent $\frac{\partial\mu}{\partial x}, \frac{\partial\mu}{\partial y}, \cdots$. D'après l'expression (17) de N, si f_1 et f_2 satisfont à (18) et (19), μ est une intégrale de

$$\frac{\partial G}{\partial \frac{\partial f_1}{\partial x}} \frac{\partial\mu}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial \frac{\partial f_1}{\partial y}} \frac{\partial\mu}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial \frac{\partial f_1}{\partial z}} \frac{\partial\mu}{\partial z} + \frac{\partial G}{\partial \frac{\partial f_1}{\partial p}} \frac{\partial\mu}{\partial p} + \frac{\partial G}{\partial \frac{\partial f_1}{\partial q}} \frac{\partial\mu}{\partial q} = 0 \quad (^1)$$

puisque les dérivées $\frac{dG}{dx}, \frac{dG}{dy}, \cdots$ sont alors constamment nulles. Il n'existe qu'une intégrale de cette équation qui s'annule identiquement quand y devient égale à y_0, c'est nécessairement l'intégrale évidente zéro. D'ailleurs on obtient $\mu(x, y_0, z, p, q; z')$ en faisant dans M la substitution indiquée plus haut qui consiste à remplacer y, f_1, f_2 respectivement par y_0, ω_1, ω_2, les fonctions f_1, f_2 sont donc des intégrales de (14) si leurs valeurs initiales ω_1 et ω_2 satisfont à la condition énoncée.

Vérifions que les valeurs initiales pourront toujours être choisies comme il vient d'être dit : il est facile de voir que l'équation

$$(20) \qquad M\left(x, y_0, z, p, q, \frac{\partial\omega_1}{\partial x}, \frac{\partial\omega_1}{\partial z}, \frac{\partial\omega_1}{\partial p}, \frac{\partial\omega_1}{\partial q}, \frac{\partial\omega_2}{\partial x}, \frac{\partial\omega_2}{\partial z}, \frac{\partial\omega_2}{\partial p}, \frac{\partial\omega_2}{\partial q}\right) = 0$$

est toujours résoluble par rapport à $\frac{\partial\omega_2}{\partial x}$ ou $\frac{\partial\omega_2}{\partial z}$. La forme du premier membre de (14) montre en effet que $p\frac{\partial M}{\partial \frac{\partial\omega_2}{\partial x}}$ et $\frac{\partial M}{\partial \frac{\partial\omega_2}{\partial z}}$ différant de $\frac{\partial\varphi_1}{\partial\beta} - \frac{\partial\varphi_2}{\partial\alpha}$, cette quantité ne peut s'annuler identiquement que si $\varphi_1(x, y, z, p, q, \theta, \eta)$, $\varphi_2(x, y, z, p, q, \theta, \eta)$ sont les dérivées partielles par rapport à θ, η d'une fonction $\psi(x, y, z, p, q, \theta, \eta)$ [2]. L'équation

---

[1] Il faut naturellement imaginer que $\frac{\partial f_1}{\partial x}, \frac{\partial f_1}{\partial y}, \ldots, \frac{\partial f_2}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial y}, \ldots$ aient été remplacées par leurs valeurs dans $\frac{\partial G}{\partial \frac{\partial f_1}{\partial x}}, \frac{\partial G}{\partial \frac{\partial f_1}{\partial y}}, \cdots$ comme dans M.

[2] La fonction ψ peut être supposée homogène et du second degré par rapport à θ, η puisque φ_1, φ_2 sont homogènes et du premier degré par rapport à ces quantités.

du second ordre donnée résulterait alors de l'élimination de θ, η entre

$$\theta r + \eta s + \frac{\partial\psi}{\partial\theta} = 0, \qquad \theta s + \eta t + \frac{\partial\psi}{\partial\eta} = 0,$$

ou encore, en regardant r, s, t comme les coordonnées cartésiennes d'un point dans l'espace, l'équation du second ordre représenterait l'enveloppe des plans

$$\theta^2 r + 2\theta\eta s + \eta^2 t + \psi(x, y, z, p, q, \theta, \eta) = 0$$

qui sont toujours parallèles à un plan tangent au cône

$$rt - s^2 = 0,$$

les deux systèmes de caractéristiques de (ε) ne seraient pas distincts, nous avons écarté ce cas.

Les dérivées $\dfrac{\partial M}{\partial \dfrac{\partial\omega_2}{\partial x}}$, $\dfrac{\partial M}{\partial \dfrac{\partial\omega_2}{\partial z}}$ ne sont donc pas toutes deux nulles, il est toujours possible de prendre pour ω_1 une fonction quelconque de x, z, p, q, z' et de déterminer ω_2 par l'équation (20).

4. Examinons maintenant le cas où le numérateur de l'un des deux membres de (18″) (pour fixer les idées, celui du premier membre) est nul quand f_1, f_2 satisfont aux équations (16). Cela revient à supposer (H_1, M) nulle en vertu de ces équations.

Appelons λ une constante quelconque et écrivons le système

$$(21) \qquad H_1 = \lambda, \qquad H_2 = \lambda, \qquad M = 0,$$

nous allons lui appliquer un théorème démontré par M. Riquier [1]; nous conserverons les notations employées par ce géomètre.

On peut imaginer que l'équation

$$M = 0$$

[1] *Les systèmes d'équations aux dérivées partielles*, p. 387 et suiv.

ait été résolue par rapport à $\frac{\partial f_1}{\partial z}$ et qu'après avoir porté l'expression obtenue dans

$$H_1 = \lambda$$

on en ait tiré $\frac{\partial f_1}{\partial x}$, quant à

$$H_2 = \lambda$$

elle est résoluble par rapport à $\frac{\partial f_2}{\partial y}$; $\frac{\partial f_1}{\partial x}$, $\frac{\partial f_1}{\partial z}$, $\frac{\partial f_2}{\partial y}$ sont les dérivées principales du premier ordre.

Si l'on attribue à chacune des variables x, y, z, p, q et à chacune des fonctions f_1, f_2 une cote égale à l'unité, tous les premiers membres des équations, supposées résolues comme il vient d'être dit, ont pour cote 2 et les seconds membres ne contiennent que des quantités dont la cote ne dépasse pas ce nombre.

Désignons par x_0, y_0, z_0 trois nombres, par ϖ_1 une fonction de y, p, q et par ϖ_2 une fonction de x, z, p, q et montrons qu'il existe deux fonctions $f_1(x, y, z, p, q)$, $f_2(x, y, z, p, q)$ satisfaisant aux équations (21) et aux conditions initiales

$$f_1(x_0, y, z_0, p, q) = \varpi_1(y, p, q), \qquad f_2(x, y_0, z, p, q) = \varpi_2(x, z, p, q);$$

plus brièvement montrons que le système (21) est complètement intégrable.

La cote des premiers membres des conditions initiales, représentée par Γ dans l'énoncé de M. Riquier, est égale à l'unité; pour que le système (21) soit complètement intégrable, il faut et il suffit que les équations déduites des équations proposées en dérivant fournissent pour les dérivées principales de cote 3, c'est-à-dire du second ordre, des valeurs bien déterminées. La seule dérivée principale du second ordre qui puisse être calculée de deux manières différentes est ici $\frac{\partial^2 f_1}{\partial x \, \partial z}$; qu'on se serve de la première ou de la deuxième des équations (21) les expressions trouvées sont identiques puisque la condition

$$(H_1, M) = 0$$

est une conséquence de ces équations. Nous avons ainsi établi l'existence de deux intégrales f_1, f_2 du système (21).

Posons

$$\lambda f_1(x, y, z, p, q) + f_2(x, y, z, p, q) = \mathrm{V}(x, y, z, p, q),$$

d'après tout ce qui précède, cette fonction $\mathrm{V}(x, y, z, p, q)$ satisfait aux équations

$$\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x} + p\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z} - \varphi_1\left(x, y, z, p, q, \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial p}, \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial q}\right) = 0,$$
$$\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y} + q\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z} - \varphi_2\left(x, y, z, p, q, \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial p}, \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial q}\right) = 0,$$

quelle que soit la constante k

$$\mathrm{V}(x, y, z, p, q) = k$$

est une intégrale intermédiaire de (ε). Le cas d'exception que nous venons d'étudier est donc celui où l'équation du second ordre considérée possède une intégrale intermédiaire du premier ordre dépendant d'une fonction arbitraire.

Une telle équation ne peut dériver d'une transformation (B_1); en effet, il existe alors pour le système (Γ) de caractéristiques trois invariants du second ordre [1] auxquels devraient correspondre trois invariants du premier ordre de la transformée [2], celle-ci serait une équation de Monge-Ampère dont les deux systèmes de caractéristiques seraient confondus, chose impossible puisque (ε) a par hypothèse deux systèmes distincts de caractéristiques.

5. En dehors de ce cas particulier, une équation aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes, qui possède un système de caractéristiques du premier ordre, dérive d'une transformation de Bäcklund de première espèce ; les équations qui définissent cette transformation dépendent, comme nous avons vu, de certaines fonctions arbitraires, mais quand ces fonctions sont modifiées la transformation (B_1) n'est pas changée, plus exactement la nouvelle transfor-

---

(1) Goursat, *Leçons sur les équations aux dérivées partielles du second ordre*, t. II, p. 158.

(2) *Thèse*, p. 39.

mation est déduite de la première au moyen d'une transformation de contact appliquée aux éléments (x', y', z', p', q') (1).

Si l'équation proposée (ε) est une équation de Monge-Ampère elle dérive de deux transformations (B_1) puisque les deux systèmes de caractéristiques sont du premier ordre.

Nous ferons une seule application de la théorie précédente. M. Goursat a indiqué que chacun des systèmes de caractéristiques d'une équation aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes ne peut posséder plus d'un invariant d'un ordre donné supérieur à deux (2), j'ai complété ce résultat en montrant qu'il subsiste pour les invariants du second ordre quand le système considéré est composé de caractéristiques du premier ordre (3), la démonstration que j'ai faite est d'ailleurs calquée sur celle de M. Goursat.

On peut déduire la dernière proposition du théorème général de M. Goursat. En effet, imaginons qu'il y ait deux invariants du second ordre pour le système (C) de caractéristiques de (ε), le système (C′) de caractéristiques de l'équation obtenue en effectuant la transformation (B_1) dont l'existence a été démontrée dans ce travail posséderait deux invariants du troisième ordre, ce qui ne peut arriver d'après le théorème que nous venons de rappeler.

---

(1) *Thèse*, p. 35.

(2) Goursat, *loc. cit.*, p. 152.

(3) *Bulletin de la Société mathématique*, t. XXXII, 1904, p. 149.