

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

ERNEST VESSIOT

Sur la réductibilité et l'intégration des systèmes complets

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 29 (1912), p. 209-278

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1912_3_29__209_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1912, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR

LA RÉDUCTIBILITÉ ET L'INTÉGRATION

DES

SYSTÈMES COMPLETS;

PAR M. E. VESSIOT.

Introduction.

Nous exposons dans ce travail les idées nouvelles sur la réductibilité des systèmes complets

$$(A) \quad \sum_{i=1}^n \lambda_{ki}(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \quad (k=1, 2, \dots, q),$$

que nous avons indiquées dans deux Notes des *Comptes rendus* de l'Académie des Sciences de Paris (1). Ces idées s'appliquent aux systèmes d'équations de Pfaff, complètement intégrables : en particulier, aux systèmes d'équations différentielles ordinaires et, directement ou indirectement, à tous les problèmes de calcul intégral qui se résolvent par l'intégration d'un système différentiel, dont la solution générale ne dépend que de constantes arbitraires. Elles permettent non seulement d'introduire d'emblée, d'une manière simple et précise, les groupes de transformations qui expriment le caractère spécial d'un

(1) 8 novembre 1909; 20 juin 1910.

système complet donné, mais aussi d'étudier et de comparer les divers aspects de la réductibilité; et, par là, elles sont particulièrement utiles pour les applications. C'est, du reste, en cherchant à discuter, au moyen de la notion des groupes de rationalité, les théories de S. Lie qui concernent les systèmes complets admettant des transformations infinitésimales connues, et celles qui ont trait à l'utilisation des invariants intégraux, que nous avons été conduit à notre nouvelle conception de la réductibilité. Nous avons dû cependant limiter ce Mémoire à l'exposé des théories générales, et renvoyer les applications à un autre travail.

1. A tout système complet (A), ou au système d'équations de Pfaff, complètement intégrable, qui lui équivaut et qui en définit les caractéristiques, sont associés deux groupes de transformations en x_1, \dots, x_n : le *groupe* (g) formé de toutes les transformations qui admettent pour invariant chaque solution de (A), c'est-à-dire qui laissent invariante chaque caractéristique; et le *groupe* (G), formé de toutes les transformations qui laissent invariant le système (A), c'est-à-dire qui en permutent, soit les solutions, soit les caractéristiques.

Se donner (A) équivaut à se donner les équations de définition ⁽¹⁾, c'est-à-dire les invariants différentiels ⁽²⁾ de (G). Intégrer (A) équivaut à trouver les invariants, c'est-à-dire les équations de définition de (g). Le problème de l'intégration de (A) apparaît donc comme un cas particulier de ce problème de la théorie des groupes. Connaissant

⁽¹⁾ On sait que, si la transformation générale d'un groupe continu est

$$x'_i = f_i(x_1, \dots, x_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

les *équations de définition* du groupe sont les équations qui définissent les fonctions x'_i des variables indépendantes x_1, \dots, x_n : elles peuvent être des équations différentielles, ou des relations entre $x'_1, \dots, x'_n; x_1, \dots, x_n$ seuls.

⁽²⁾ Comme cas particuliers, ces *invariants différentiels* peuvent être des fonctions de x_1, \dots, x_n seuls, c'est-à-dire être des invariants différentiels de degré 0. C'est sous cette forme générale qu'il faut entendre ce terme.

On sait que les invariants différentiels se déduisent, par des éliminations, des équations de définition; et que, réciproquement, les équations de définition se déduisent aussitôt, et rationnellement, de certains invariants différentiels qu'on appellera *invariants fondamentaux* du groupe, et dont le nombre est limité.

les équations de définition d'un groupe, trouver celles de l'un de ses sous-groupes invariants. Et ce problème se simplifie toutes les fois que l'on connaît les équations de définition d'un groupe intermédiaire entre le groupe donné et le groupe cherché, c'est-à-dire contenu dans le premier et contenant le second.

Nous plaçant au point de vue de la rationalité, nous sommes donc conduits à considérer un système complet donné (A) comme *réductible* ou *spécial*, dans un domaine de rationalité donné (R), s'il existe quelque *groupe intermédiaire*, c'est-à-dire contenu dans (G) et contenant (g), dont les équations de définition soient rationnelles dans (R). Et, si le système est réductible, nous considérerons son mode de réductibilité particulier comme défini par le plus petit de ces groupes intermédiaires, à équations de définition rationnelles. Ce groupe intermédiaire rationnel minimum est ce que nous appelons le *groupe spécifique* du système complet donné (1). Il est entièrement déterminé.

Nous appelons *groupe de rationalité* l'un quelconque des groupes qui expriment la loi d'échange des caractéristiques de (A) par les diverses transformations du groupe spécifique: ces groupes constituent une classe de groupes à p variables ($p = n - q$), semblables entre eux. Le type seul du groupe de rationalité est donc déterminé.

Le groupe spécifique et les groupes de rationalité se présentent simultanément quand on introduit les systèmes différentiels, à p fonctions inconnues z_1, \dots, z_p , et à n variables indépendantes x_1, \dots, x_n , dont une solution est constituée par p solutions du système complet (A), indépendantes entre elles, et dont la solution la plus générale se déduit des formules $z_h = v_h(x_1, \dots, x_n)$ ($h = 1, 2, \dots, p$), qui définissent une solution particulière quelconque, en y effectuant, sur les variables z_1, \dots, z_p , les transformations d'un groupe. C'est ce que nous pouvons appeler les *systèmes automorphes auxiliaires*: ils s'offrent d'eux-mêmes, quand on étudie la nature des groupes intermédiaires.

(1) Dans les Notes citées, nous avons employé le mot *groupe caractéristique*; il crée certaines difficultés dans le langage, à cause des *caractéristiques* du système complet. C'est pour cette raison que nous avons adopté ici le mot *groupe spécifique*, qui rappelle qu'il s'agit de préciser de quelle manière le système considéré est spécial.

Parmi ces systèmes automorphes intermédiaires, ceux dont les équations de définition peuvent s'écrire sous forme rationnelle, et dont la solution générale a le degré de généralité minimum compatible avec cette condition, définissent à la fois le groupe spécifique et les divers groupes de rationalité⁽¹⁾. Car, pour chacun d'eux, le groupe qui est formé de toutes les transformations en x_1, \dots, x_n qui le laissent invariant est précisément le groupe spécifique; et le groupe qui est formé de toutes les transformations en z_1, \dots, z_p qui laissent ce même système invariant est une des formes du groupe de rationalité.

2. Tout système automorphe auxiliaire est susceptible de deux formes canoniques, suivant qu'on y met en évidence celui des deux groupes, en x_1, \dots, x_n , ou en z_1, \dots, z_p , qu'il admet. La comparaison de ces deux formes canoniques conduit à construire *a priori* les *types de systèmes complets réductibles*⁽²⁾, au moins quand on se borne au cas où le groupe spécifique et le groupe de rationalité sont transitifs, c'est-à-dire quand on suppose que le système complet considéré n'a pas de solution rationnelle.

Imaginons les diverses classes de groupes transitifs en z_1, \dots, z_p ; les groupes de chaque classe sont tous ceux qui sont semblables à l'un d'entre eux. Dans chaque classe, choisissons un représentant, et, pour ce représentant, choisissons un système d'invariants fondamentaux Γ_μ ($\mu = 1, 2, \dots, m$). Ce sont des fonctions des variables z_1, \dots, z_p et des dérivées de ces variables, considérées comme fonctions des variables x_1, \dots, x_p . Le choix du représentant de chaque classe, et le choix des invariants fondamentaux de ce représentant sont arbitraires, sous la réserve que les Γ_μ soient rationnels, toutes les fois que cela

(1) C'est déjà au moyen de ces systèmes que se trouve défini le groupe de rationalité, dans les travaux antérieurs. Au sujet de ces travaux et de la théorie qui nous occupe, on pourra consulter notre article de l'*Encyclopédie mathématique* (édition française), t. II, 3^e vol. : Équations différentielles, nos 43, 44.

(2) C'est, dans le cas où le système complet (A) se compose d'une seule équation, le procédé de classification auquel M. Drach avait été conduit dans sa Thèse (Paris, 1898, p. 93), et qui se trouve justifié par la discussion que nous avons faite de la théorie de M. Drach dans notre Mémoire des *Annales de l'École Normale supérieure*, 1904. (Voir, plus spécialement, p. 77.) M. Drach a, du reste, indiqué lui-même la possibilité d'étendre sa théorie aux systèmes complets.

est possible; et les classes, pour lesquelles ce serait impossible, sont exclues.

Considérons donc les invariants Γ_μ de l'une des classes de groupes, et remplaçons-y les z_h par un système fondamental de solutions de (A): nous obtiendrons des fonctions $\omega_\mu(x_1, \dots, x_n)$ ($\mu = 1, 2, \dots, m$), que nous pouvons appeler un système de valeurs des Γ_μ ; de sorte que les Γ_μ ont, suivant le système de solutions de (A) employé, une infinité de systèmes de valeurs.

Cela posé, les invariants Γ_μ de la classe des groupes de rationalité ont un système de valeurs composé de fonctions rationnelles; et les invariants d'une autre classe ont un système de valeurs rationnelles, lorsque le représentant de cette classe contient un sous-groupe qui est du type des groupes de rationalité. Chaque type de systèmes complets réductibles est donc caractérisé par un système d'équations rationnelles de la forme $\Gamma_\mu = \omega_\mu(x_1, \dots, x_n)$ ($\mu = 1, 2, \dots, m$).

Quand on se donne les invariants Γ_μ et le système complet (A), on peut former le *système résolvant* dont dépend le système de valeurs ω_μ , le plus général des invariants de la classe considérée. Ce même système résolvant peut servir aussi à définir directement les groupes intermédiaires d'un même type. La détermination du groupe spécifique et du groupe de rationalité, dépend donc de la recherche des solutions rationnelles de ces systèmes résolvants.

3. On sait que M. Drach s'était placé, dans cette théorie de la réductibilité, à un point de vue tout autre que celui d'où nous sommes partis dans ce qui précède. Pour M. Drach ⁽¹⁾, un système (A) est spécial si le système différentiel qui en définit un système fondamental quelconque de solutions est réductible; et M. Drach entend par là qu'il existe au moins un système différentiel, formé d'équations rationnelles, dépendant de x_1, \dots, x_n , de z_1, \dots, z_p , et des dérivées des z_h par rapport aux x_i , qui soit compatible avec les équations $L_k z_h = 0$ ($h = 1, 2, \dots, p; k = 1, 2, \dots, q$), sans en être une conséquence.

⁽¹⁾ Voir Thèse, Paris, 1898, p. 77. Voir aussi la Note plus récente de M. Drach (*Comptes rendus Ac. Sc. Paris*, 18 juillet 1910); et son Mémoire des *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 2^e série, t. X, 1908.

On peut se borner à ceux de ces systèmes qui sont ce que nous appelons des *systèmes auxiliaires*, c'est-à-dire dont chaque solution est composée de solutions de (A). Chacun d'eux reste invariant par le groupe spécifique, et il résulte immédiatement de là que ceux dont la solution générale a le degré minimum de généralité sont précisément les systèmes automorphes auxiliaires qui définissent, comme nous avons dit, le groupe spécifique et le groupe de rationalité. Il y a donc équivalence entre les deux définitions de la réductibilité; elles conduisent aux mêmes groupes de rationalité.

Nous montrons, de plus, qu'il n'y aurait aucun intérêt à considérer des systèmes auxiliaires dépendant de variables indépendantes autres que celles qui figurent dans le système complet (A) considéré.

Dans les applications, il arrive généralement que le groupe spécifique se détermine facilement et fait connaître immédiatement le groupe de rationalité. Il faut remarquer que, inversement, la connaissance du groupe de rationalité ne fournirait que la structure du groupe spécifique. Connaître le groupe spécifique équivaut à connaître à la fois le groupe de rationalité et le système de fonctions ω_μ qui est rationnel.

4. On peut, d'une infinité de manières, substituer au groupe spécifique d'autres groupes qui définissent, d'une manière aussi complète que lui, le mode de réductibilité particulier du système complet considéré. Et cela est extrêmement important pour les applications.

On se rend compte, en effet, que les raisonnements ne sont pas sensiblement modifiés si l'on substitue au groupe (G), dans l'analyse qui nous a conduits à la notion du groupe spécifique, un sous-groupe (K) de (G), dont les équations de définition soient rationnelles, et qui ait en commun avec (g) un sous-groupe (g_i) n'admettant pas d'autres invariants d'ordre zéro que (g) lui-même. Le plus petit sous-groupe de (K), contenant (g_i), et dont les équations de définition soient rationnelles, peut alors jouer le rôle de groupe spécifique. Dès que ses équations de définition sont connues, on en peut déduire, par des calculs rationnels, celles du groupe spécifique lui-même; et la loi d'échange des caractéristiques par les transformations de ce *groupe*

spécifique modifié est, comme pour le groupe spécifique proprement dit, définie par le groupe de rationalité.

On obtient, en particulier, des résultats intéressants en prenant, pour le groupe (g_i) , le groupe à q paramètres défini par les transformations infinitésimales de la forme

$$M_k f = \frac{\partial f}{\partial x_{p+k}} + \sum_{h=1}^p \mu_{kh}(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_h} \quad (k = 1, 2, \dots, q),$$

qui donnent, quand on les égale à zéro, un système complet équivalent au système (A) donné. On trouve, en effet, que le mode de réductibilité de (A) peut encore être caractérisé par l'ensemble des invariants différentiels communs à ces transformations infinitésimales $M_k f$, qui se trouvent être rationnels. Les invariants différentiels qui interviennent ici, sont des fonctions de x_1, \dots, x_n et des dérivées, prises par rapport à x_1, \dots, x_p , de p variables auxiliaires z_1, \dots, z_p , considérées comme invariante par les transformations infinitésimales $M_k f$. Il suffira toujours d'en considérer un nombre fini. Ces invariants ne sont autre chose que des solutions des *systèmes complets prolongés* issus de (A), c'est-à-dire des systèmes complets qu'on obtient en égalant à zéro les symboles des transformations infinitésimales $M_k f$, prolongées jusqu'à un même ordre quelconque, relativement aux dérivées considérées.

De là résulte que la détermination du groupe spécifique revient à la recherche des solutions rationnelles de ces systèmes complets prolongés. On peut dire encore que le seul mode de réductibilité des systèmes complets est, au fond, l'existence de solutions rationnelles, en convenant de remplacer, le cas échéant, les systèmes complets donnés par les systèmes prolongés qu'on en peut déduire. Il y a, d'ailleurs, équivalence entre un système complet (A) et les systèmes prolongés qui en dérivent, tant au point de vue de l'intégration qu'au point de vue de la réductibilité.

5. Dans un dernier paragraphe, nous avons étudié la réduction du groupe spécifique (ce qui équivaut à celle du groupe de rationalité), par voie d'*adjonction*. On arrive à des énoncés très nets, si l'on se

borne à adjoindre des invariants différentiels communs aux $M_k f$. On montre, en particulier, que la réduction du groupe spécifique à un de ses sous-groupes invariants peut s'obtenir par l'intégration d'un système complet rationnel dont le groupe spécifique est simple.

Nous avons dû nous limiter au cas des groupes transitifs, vu les difficultés spéciales qui proviennent, dans cette théorie, de l'intervention des groupes intransitifs. On peut éluder une partie de ces difficultés en employant le procédé classique par lequel on utilise les solutions particulières, supposées connues, d'un système complet, en prenant ces solutions comme nouvelles variables. Mais cela entraîne à remplacer le point de vue strict de la rationalité par un point de vue plus large : celui de l'algébricité. Cette extension, qui n'altère pas les points essentiels de la théorie de la réductibilité, semble devoir être avantageuse toutes les fois qu'on voudra, sans avoir à modifier le groupe de rationalité, pouvoir appliquer à un système complet des changements de variables, définis par des équations rationnelles quelconques. Nous nous sommes cependant tenus, dans le présent exposé, au point de vue purement rationnel.

De nouvelles difficultés se présentent quand on se propose d'adjoindre au domaine de rationalité des fonctions quelconques, par exemple des fonctions de x_1, \dots, x_n définies elles-mêmes par des systèmes différentiels rationnels ; car le mot même d'adjonction est loin alors d'avoir, par lui-même, un sens bien clair. Pour des systèmes différentiels convenablement définis, on peut cependant parler de l'adjonction de toutes leurs solutions, et montrer que, si elle réduit le groupe spécifique, elle le réduit à un sous-groupe invariant.

Ce théorème doit jouer un rôle essentiel dans l'étude de l'intégration des systèmes complets les uns par les autres. Cette étude, sauf dans le cas où les groupes de rationalité qui interviennent sont finis, paraît, à cause des observations précédentes, présenter encore bien des difficultés. Dans ce Mémoire, nous avons eu surtout en vue le cas général où les groupes de rationalité sont des groupes infinis, nous réservant de revenir sur les questions qui relèvent du cas où ces groupes sont finis, par exemple sur l'application des théories précédentes aux systèmes de Lie, et à la condition d'intégrabilité au moyen d'équations différentielles linéaires ordinaires.

I. — Préliminaires. Les deux groupes associés à un système complet.

1. Soient x_1, \dots, x_n n variables indépendantes; on pourra les considérer comme coordonnées d'un point (x) d'un espace E_n à n dimensions. Une fonction de ces variables sera représentée, indifféremment, par $f(x_1, \dots, x_n)$, ou par $f((x))$. La forme générale d'un système complet (A) est alors

$$(1) \quad L_k f = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, q; q < n),$$

les $L_k f$ étant des expressions différentielles de la forme

$$(2) \quad L_k f \equiv \sum_{i=1}^n \lambda_{ki}((x)) \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (k = 1, 2, \dots, q),$$

dont les crochets de Jacobi s'annulent, quand on tient compte des équations (1) du système. Un même système complet (A) peut s'écrire d'une infinité de manières sous la forme (1). Nous nous servirons souvent de sa *forme résolue*

$$(3) \quad M_k f = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, q),$$

où les $M_k f$ peuvent, en supposant les notations convenablement choisies, s'écrire

$$(4) \quad M_k f \equiv \frac{\partial f}{\partial x_{p+k}} + \sum_{h=1}^p \mu_{kh}((x)) \frac{\partial f}{\partial x_h} \quad (k = 1, 2, \dots, q; n = p + q).$$

On appelle *système fondamental de solutions* de (A) l'ensemble de p solutions indépendantes $\gamma_1, \dots, \gamma_p$ de ce système (A): il est défini par des formules de la forme

$$(5) \quad \gamma_h = v_h((x)) \quad (h = 1, 2, \dots, p);$$

où le déterminant fonctionnel

$$(6) \quad \Delta = \frac{\partial(v_1, \dots, v_p)}{\partial(x_1, \dots, x_p)}$$

n'est pas identiquement nul. La *solution générale* de (A) est une fonction arbitraire de $\varphi_1, \dots, \varphi_p$, et le système fondamental de solutions le plus général se déduit des formules (5) en y effectuant la transformation ponctuelle la plus générale de l'espace ε_p , à p dimensions, dont $\gamma_1, \dots, \gamma_p$ sont les coordonnées.

On appelle enfin *système principal de solutions, correspondant aux valeurs initiales*

$$(7) \quad x_{p+k} = x_{p+k}^0 \quad (k = 1, 2, \dots, q),$$

le système fondamental (5), dans lequel les fonctions φ_h se réduisent, respectivement, aux variables x_h , quand on attribue aux variables x_{p+k} les valeurs constantes (7).

Au point de vue géométrique, les équations (5), où l'on considère les γ_h comme des constantes arbitraires, représentent une famille de multiplicités à q dimensions; et l'espace E_n se trouve décomposé en ces diverses multiplicités, qu'on appelle les *caractéristiques* du système (A). Ces caractéristiques sont définies directement par un système, complètement intégrable, d'équations de Pfaff. Soit (B) ce système: on peut l'écrire, en particulier, sous la forme résolue

$$(8) \quad \mu_h[x] = 0 \quad (h = 1, 2, \dots, p),$$

où les symboles $\mu_h[x]$ représentent les expressions de Pfaff

$$(9) \quad \mu_h[x] = dx_h - \sum_{k=1}^q \mu_{kh}((x)) dx_{p+k} \quad (h = 1, 2, \dots, p).$$

Il y a réciprocity entre les systèmes (A) et (B), de sorte que la théorie de l'intégration des systèmes complets, et celle des systèmes de Pfaff complètement intégrables, ne forment, en réalité, qu'une seule et même théorie.

La représentation des caractéristiques est particulièrement nette si l'on suppose que les équations (5) définissent le système principal de solutions qui correspond aux valeurs initiales (7). Les équations

$$(10) \quad \varphi_h((x)) = x_h^0 \quad (h = 1, 2, \dots, p)$$

représentent alors celle des caractéristiques qui passe par le point (x^0) .

2. Il nous sera souvent utile de ramener les systèmes (A) et (B) à leurs *formes canoniques*. Nous le ferons au moyen d'un changement de variables, ou transformation, que nous appellerons, pour abrégé, une *transformation canonisante*. Chaque système fondamental (5) en fournit une, qui est

$$(11) \quad \begin{cases} y_h = v_h(x) & (h = 1, 2, \dots, p), \\ y_{p+k} = x_{p+k} & (k = 1, 2, \dots, q). \end{cases}$$

Par cette transformation, $M_k f$ se change en $\frac{\partial f}{\partial y_{p+k}}$, pour $k = 1, 2, \dots, q$; et l'on a, identiquement,

$$(12) \quad dy_h = \sum_{l=1}^p \frac{\partial v_h}{\partial x_l} \mu_l[x] \quad (h = 1, 2, \dots, p).$$

Le système (A) prend donc la forme canonique

$$(13) \quad \frac{\partial f}{\partial y_{p+k}} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, q);$$

et la forme canonique correspondante de (B) est

$$(14) \quad dy_h = 0 \quad (h = 1, 2, \dots, p).$$

Les solutions de (13) sont les fonctions de y_1, \dots, y_p seuls; ses caractéristiques sont les multiplicités linéaires

$$(15) \quad y_h = \text{const.} \quad (h = 1, 2, \dots, p).$$

3. A tout système (A) se trouvent associés deux groupes ponctuels de l'espace E_n , à savoir : 1° le groupe (g) qui est formé de toutes les transformations ponctuelles qui laissent invariante chaque solution du système (A); 2° le groupe (G) qui est formé de toutes les transformations ponctuelles qui laissent le système (A) invariant.

On se rend compte de la nature de ces deux groupes en passant par

l'intermédiaire de la forme canonique (α) . Il suffit de remarquer que la transformation canonisante (11) établit une correspondance entre l'espace E_n et l'espace \mathcal{E}_n où y_1, \dots, y_n jouent le rôle de coordonnées. Aux groupes (g) et (G) correspondent ainsi, respectivement : 1° le groupe (γ) formé de toutes les transformations ponctuelles de \mathcal{E}_n qui laissent invariante chacune des variables y_1, \dots, y_p ; 2° le groupe (Γ) , qui est formé par toutes les transformations ponctuelles de \mathcal{E}_n qui laissent le système (α) invariant. On déduira donc (g) de (γ) , et (G) de (Γ) , au moyen de la transformation canonisante (11).

La nature de (γ) résulte immédiatement de sa définition. Ses équations de définition sont

$$(14) \quad y'_h = y_h \quad (h = 1, 2, \dots, p);$$

ses équations générales (équations de la transformation finie la plus générale) sont

$$(15) \quad \begin{cases} y'_h = y_h & (h = 1, 2, \dots, p), \\ y'_{p+k} = \varphi_k(y_1, \dots, y_n) & (k = 1, 2, \dots, q; \varphi_k \equiv \text{fonct. arbitr.}), \end{cases}$$

et sa transformation infinitésimale générale est

$$(16) \quad \Lambda f = \sum_{k=1}^q \varphi_k(y_1, \dots, y_n) \frac{\partial f}{\partial y_{p+k}} \quad (\varphi_k \equiv \text{fonct. arbitr.}).$$

Par conséquent ⁽¹⁾, les équations de définition de (g) sont

$$(17) \quad v_h((x')) = v_h((x)) \quad (h = 1, 2, \dots, p);$$

ses équations générales sont

$$(18) \quad \begin{cases} v_h((x')) = v_h((x)) & (h = 1, 2, \dots, p), \\ x'_{p+k} = \Phi_k(x_1, \dots, x_n) & (k = 1, 2, \dots, q; \Phi_k \equiv \text{fonct. arbitr.}); \end{cases}$$

et sa transformation infinitésimale générale est

$$(19) \quad Lf = \sum_{k=1}^q \Phi_k(x_1, \dots, x_n) M_k f \quad (\Phi_k \equiv \text{fonct. arbitr.}).$$

⁽¹⁾ Cf. K. ZORAWSKI, *Extrait du Bulletin de l'Académie des Sciences de Cracovie*, 1909, p. 518. Dans cet article, M. Zorawski étudie les invariants intégraux du groupe (g) .

On voit, de plus, que (γ) pourrait être défini comme le groupe ponctuel de E_n le plus général qui laisse invariante chaque caractéristique de (α) , c'est-à-dire chaque solution de (β) .

Donc (g) est aussi le groupe ponctuel de E_n le plus général qui laisse invariante chaque caractéristique de (A) , c'est-à-dire chaque solution du système de Pfaff (B) .

Enfin la formule (19) montre que toute forme du système complet (A) s'obtient en égalant à zéro les symboles de q transformations infinitésimales quelconques de (g) , pourvu que les équations ainsi obtenues soient indépendantes.

Il y a, en quelque sorte, identité entre le système complet (A) et le groupe (g) qui lui est associé : les transformations infinitésimales de (g) étant l'image de ce système donné sous sa forme différentielle, et les équations de définition de (g) étant l'image de l'intégrale générale du même système.

4. Passons à l'étude du groupe (G) et, par conséquent, cherchons d'abord le groupe (Γ) . Par un changement de variables quelconque

$$(20) \quad y'_i = f_i(y_1, \dots, y_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

le système (α) devient

$$(21) \quad \sum_{i=1}^n \frac{\partial y'_i}{\partial y_{p+k}} \frac{\partial f}{\partial y'_i} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, q).$$

Les conditions d'invariance de (α) , c'est-à-dire les équations de définition de (Γ) , sont donc

$$(22) \quad \frac{\partial y'_h}{\partial y_{p+k}} = 0 \quad (h = 1, 2, \dots, p; k = 1, 2, \dots, q).$$

On en conclut, par intégration, les équations générales de (Γ)

$$(23) \quad \begin{cases} y'_h = \psi_h(y_1, \dots, y_p) & (h = 1, 2, \dots, p; \psi_h \equiv \text{fonct. arbitr.}), \\ y'_{p+k} = \varphi_k(y_1, \dots, y_p, \dots, y_n) & (k = 1, 2, \dots, q; \varphi_k \equiv \text{fonct. arbitr.}). \end{cases}$$

La transformation infinitésimale la plus générale de (Γ) est, par

suite,

$$(24) \quad \sum_{h=1}^p \psi_h(y_1, \dots, y_p) \frac{\partial f}{\partial y_h} + \sum_{k=1}^q \varphi_k(y_1, \dots, y_p, \dots, y_n) \frac{\partial f}{\partial y_{p+k}},$$

où les symboles ψ_h et φ_k désignent encore des fonctions arbitraires des arguments correspondants.

Ces résultats donnent lieu aux remarques suivantes :

1° On retrouve les mêmes conditions (22) si l'on exprime que la transformation (20) laisse invariant le système de Pfaff (β) ; car, par cette transformation, le système $dy'_h = 0$ ($h = 1, 2, \dots, p$) devient

$$(25) \quad \sum_{i=1}^n \frac{\partial y'_h}{\partial y_i} dy_i = 0 \quad (h = 1, 2, \dots, p),$$

et les conditions (22) expriment bien l'équivalence de (β) avec ce système (25);

2° Le groupe (Γ) est le groupe ponctuel de \mathcal{E}_n le plus général qui échange entre elles les solutions, soit de (α) , soit de (β) ;

3° Le groupe (Γ) est le groupe ponctuel de \mathcal{E}_n le plus général dans lequel (γ) soit invariant. Car (γ) est bien un sous-groupe de (Γ) , les équations (22) étant une conséquence des équations (14). De plus (Γ) contient toutes les transformations ponctuelles de \mathcal{E}_n qui laissent (γ) invariant: en effet, pour qu'une transformation laisse un groupe invariant, il est nécessaire et suffisant qu'elle change chacun des invariants figurant dans les équations de définition du groupe en une fonction de ces invariants (1); et cette condition équivaut ici à dire que la transformation change chacune des variables y_1, \dots, y_p en une fonction de ces mêmes variables.

De ces propriétés de (Γ) résultent, immédiatement, les propriétés

(1) Les équations de définition sont supposées, dans cet énoncé, mises sous la forme canonique, bien connue, due à S. Lie. L'énoncé résulte de cet autre théorème de Lie, qu'une transformation du groupe est caractérisée par sa propriété de ne pas altérer les invariants en question; et du fait que ces mêmes invariants constituent un système d'invariants fondamentaux en fonction desquels s'exprime tout invariant différentiel dont l'ordre ne dépasse pas le leur.

correspondantes pour (G) : 1° (G) est formé de toutes les transformations ponctuelles de E_n qui laissent invariant le système (B) (système différentiel des caractéristiques); 2° (G) est formé de toutes les transformations ponctuelles de E_n qui changent toute solution de (A) en une solution de (A), ou, ce qui revient au même, qui changent toute caractéristique de (A) en une caractéristique de (A); 3° (G) est formé de toutes les transformations ponctuelles de E_n qui laissent invariant (g).

5. Pour obtenir les équations de définition de (G), il faut faire, dans les équations (22), la transformation canonisante (11) sur les variables dépendantes et sur les variables indépendantes. Faisons-la d'abord sur les premières : il suffit pour cela de remarquer que le système (22) peut s'écrire

$$(26) \quad dy'_h = 0 \quad (h = 1, 2, \dots, p),$$

en désignant par la caractéristique d la différentiation totale relative aux seules variables y_{p+1}, \dots, y_n . Car il en résulte que, la transformation (11) faisant correspondre le système (8) et le système (β), nous obtiendrons ainsi le système $\mu_h[x'] = 0$ ($h = 1, 2, \dots, p$); et celui-ci, à cause de la signification de la caractéristique d , s'écrit

$$(27) \quad \frac{\partial x'_h}{\partial y_{p+k}} - \sum_{j=1}^q \mu_{jh}((x')) \frac{\partial x'_{p+j}}{\partial y_{p+k}} = 0 \quad (h = 1, 2, \dots, p; k = 1, 2, \dots, q).$$

Le changement de variables indépendantes se fait ensuite en remarquant que $\frac{df}{dy_{p+k}}$ équivaut alors à $M_k f$.

Les équations de définition de (G) sont donc

$$(28) \quad M_k x'_h - \sum_{j=1}^q \mu_{jh}((x')) M_k x'_{p+j} = 0 \quad (h = 1, 2, \dots, p; k = 1, 2, \dots, q).$$

On remarquera que, provenant d'un système en involution, ce système est lui-même en involution et que, si on le résout par rapport aux dérivées $\frac{\partial x'_h}{\partial x_{p+k}}$, il s'écrit

$$(29) \quad \frac{\partial x'_h}{\partial x_{p+k}} = - \sum_{l=1}^p \mu_{kl}((x)) \frac{\partial x'_h}{\partial x_l} + \sum_{j=1}^q \mu_{jh}((x')) M_k x'_{p+j} \quad \left(\begin{array}{l} h = 1, 2, \dots, p \\ k = 1, 2, \dots, q \end{array} \right).$$

6. Appliquant ensuite la transformation canonisante (11) aux équations (23), on trouve immédiatement que *les équations générales de (G) sont*

$$(30) \begin{cases} v_h((x')) = \Psi_h(v_1((x)), \dots, v_p((x))) & (h=1, 2, \dots, p; \Psi_h \equiv \text{fonct. arb.}), \\ x'_{p+k} = \Phi_k(x_1, \dots, x_p, \dots, x_n) & (k=1, 2, \dots, q; \Phi_k \equiv \text{fonct. arb.}). \end{cases}$$

Enfin, pour transformer de même la transformation infinitésimale (24), il suffit de remarquer que $\frac{\partial f}{\partial y_1}$ est identique à $\frac{\partial(f, y_2, \dots, y_p)}{\partial(y_1, y_2, \dots, y_p)}$, ce qui donne l'identité de transformation

$$(31) \quad \frac{\partial f}{\partial y_1} = \frac{1}{\Delta} \frac{\partial(f, v_2, \dots, v_p)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_p)},$$

où Δ désigne toujours le déterminant fonctionnel (6). Si donc on désigne par $\Delta_h f$ ce que devient ce déterminant quand on y remplace la lettre v_h par la lettre f , on trouve que *la transformation infinitésimale générale de (G) est*

$$(32) \quad \frac{1}{\Delta} \sum_{h=1}^p \psi_h(v_1((x)), \dots, v_p((x))) \Delta_h f + \sum_{k=1}^q \Phi_k((x)) M_k f,$$

où les ψ_h et les Φ_k désignent encore des fonctions arbitraires.

On peut observer, de plus, que toute transformation infinitésimale en y_1, \dots, y_p se ramène à la forme $\frac{\partial f}{\partial y_1}$ par une transformation ponctuelle convenable de l'espace \mathcal{E}_p ; cette transformation revient ici à changer le système fondamental (5) employé. *Si donc l'on considère v_1, \dots, v_p comme le système fondamental de solutions le plus général de (A), on peut dire que la transformation infinitésimale générale de (G) est* (1)

$$(33) \quad \frac{1}{\Delta} \frac{\partial(f, v_2, \dots, v_p)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_p)} + \sum_{k=1}^q \Phi_k((x)) M_k f \quad (\Phi_k \equiv \text{fonct. arbitr.}).$$

Nous garderons de préférence la forme (32) et nous terminerons

(1) Comparez : BUHL, *Comptes rendus*, t. CXLV, p. 1134. — SALT'YKOV, *Ibid.*, p. 1260.

en remarquant que, si les caractéristiques sont représentées par les équations (5), la loi suivant laquelle elles sont permutées par une transformation (30) de (G) est donnée par les formules paramétriques correspondantes

$$(34) \quad y'_h = \psi_h(y_1, \dots, y_p) \quad (h = 1, 2, \dots, p),$$

et, de même, la loi suivant laquelle elles sont permutées par les transformations du groupe à un paramètre qui est engendré par la transformation infinitésimale (32), est exprimée par le groupe à un paramètre engendré par la transformation infinitésimale correspondante

$$(35) \quad \sum_{h=1}^p \psi_h(y_1, \dots, y_p) \frac{\partial f}{\partial y_h}.$$

II. — Le problème de l'intégration d'un système complet, considéré comme un problème de la théorie des groupes. Sa réductibilité.

7. Les résultats précédents conduisent à considérer l'intégration d'un système complet donné (A) comme un problème ressortissant de la théorie des groupes continus, et cela de plusieurs manières.

La conclusion du n° 3 conduit d'abord, immédiatement, à l'énoncé suivant : *Intégrer le système complet (A), c'est trouver les équations de définition du groupe (g) qui lui est associé, connaissant la transformation infinitésimale générale de ce groupe.*

D'autre part, la forme (29) des équations de définition du groupe (G), qui se trouvent ainsi constituer un système d'équations aux dérivées partielles en involution, pourra être obtenue, sans ambiguïté, dès qu'on connaîtra, sous une forme quelconque, les équations de définition de ce groupe (G). Car il suffira de les mettre sous la forme d'un système du premier ordre, en involution, et de résoudre ce système par rapport aux dérivées $\frac{\partial x'_k}{\partial x_{p+k}}$, ce qui, d'après les équations (29), est possible d'une seule manière. Et la forme de ces équations (29) montre alors que *connaître le système complet (A) équivaut à connaître les équations de définition du groupe (G), qui est associé à ce système.*

De là ce nouvel énoncé, que nous adopterons de préférence : *Intégrer le système complet (A), c'est, connaissant les équations de définition du groupe (G), trouver celles de son sous-groupe invariant (g)*. Cet énoncé est bien précis parce que, comme nous le verrons plus loin (n° 33), (g) est le seul sous-groupe invariant de (G), en exceptant, bien entendu, le groupe (G) lui-même, et le groupe formé de la seule transformation identique.

On pourrait enfin ne faire intervenir, dans l'énoncé du problème, que le groupe (G) seulement. Les équations (30) montrent que, dès que (A) est intégré, on peut écrire les équations générales de (G). Il est facile de voir que, réciproquement, si l'on connaît les équations générales de (G), on en peut déduire l'intégrale générale de (A). En effet, on en peut déduire d'abord la transformation infinitésimale générale de (G). Or, il résulte facilement de la formule (32) que cette transformation est de la forme

$$(36) \quad \sum_{h=1}^p \gamma_h(v_1((x)), \dots, v_p((x))) T_h f + \sum_{k=1}^q \Phi_k((x)) M_k f,$$

les $T_h f$ étant p transformations infinitésimales particulières *quelconques* de (G), et les γ_h et les Φ_k étant des fonctions arbitraires ⁽¹⁾. Le système des fonctions γ_h est donc un système fondamental de solutions de (A).

On peut donc dire : *Intégrer le système complet (A), c'est, connaissant les équations de définition du groupe (G) qui lui est associé, trouver, soit les équations générales, soit la transformation infinitésimale générale de ce groupe (G)*.

8. Nous considérons donc le problème de l'intégration du système (A) comme ainsi posé : *On connaît les équations de définition d'un certain groupe (G); il s'agit de trouver les équations de définition d'un certain sous-groupe invariant de ce groupe, à savoir (g)*.

Nous sommes ainsi amenés à considérer le problème comme susceptible de réduction toutes les fois que nous pourrons, au moins

(1) C'est, du reste, un résultat dû à S. Lie (Cf. *Math. Ann.*, t. XXV, p. 71 et suiv.).

théoriquement, substituer au groupe (G) , dans l'énoncé précédent, un de ses sous-groupes, *qui contienne aussi* (g) . Un tel sous-groupe de (G) , que nous appellerons un *groupe intermédiaire*, contiendra alors (g) comme sous-groupe invariant.

Supposons que l'on ait fixé un *domaine de rationalité* (\mathfrak{R}) dont fassent partie, par définition, les coefficients des équations du système complet donné (A) . *Ce système sera dit réductible dans le domaine* (\mathfrak{R}) , *s'il existe au moins un groupe intermédiaire qui ne soit pas* (G) *lui-même, et dont les équations de définition soient rationnelles dans le domaine* (\mathfrak{R}) .

Si l'on remarque que le plus grand sous-groupe commun à deux groupes intermédiaires est encore un groupe intermédiaire dont les équations de définition s'obtiennent en réunissant celles des deux premiers, nous concluons : *Parmi tous les groupes intermédiaires dont les équations de définition sont rationnelles dans* (\mathfrak{R}) *et relatifs au système* (A) , *il en existe un et un seul de degré de généralité minimum : ce groupe intermédiaire rationnel minimum est contenu dans tous les groupes intermédiaires rationnels* ⁽¹⁾. *Nous l'appellerons le* GROUPE SPÉCIFIQUE *de* (A) , parce que nous le considérons comme caractérisant le mode de réductibilité, ou de spécialité, du système (A) dans le domaine de rationalité (\mathfrak{R}) .

Les transformations du groupe spécifique échangent les caractéristiques de (A) suivant une certaine loi. Les caractéristiques étant représentées par les équations (5), cette loi de permutation aura son expression dans un certain groupe ponctuel de \mathfrak{C}_p . *Ce groupe, qui exprime la loi de permutation des caractéristiques par les transformations du groupe spécifique, c'est-à-dire aussi la loi d'échange des systèmes fondamentaux de solutions, issus de l'un d'entre eux par les transformations du groupe spécifique, portera le nom de* GROUPE DE RATIONALITÉ *de* (A) *dans le domaine* (\mathfrak{R}) .

Il faut remarquer que, tandis que le groupe spécifique est unique, il y a une infinité de groupes de rationalité qui sont tous les groupes

(1) Nous dirons souvent, pour abrégé, qu'un groupe est *rationnel*, lorsque les équations de définition sont rationnelles, toutes les fois que cette manière de parler ne pourra pas prêter à confusion.

semblables à l'un d'entre eux. En d'autres termes, *le type seul du groupe de rationalité est déterminé*. Cela tient à ce que, dans la définition précédente, figurent, au même titre, tous les systèmes fondamentaux (5), déduits de l'un quelconque d'entre eux par une transformation ponctuelle quelconque de \mathcal{E}_p (Cf. n° 4).

Nous dirons qu'un groupe de rationalité est *principal*, s'il correspond à un système fondamental (5) qui soit un système principal.

9. Pour tirer parti des notions fondamentales que nous venons d'introduire, il nous faut d'abord étudier les groupes intermédiaires.

Imaginons donc un groupe intermédiaire quelconque (h) et transformons-le par la transformation canonisante (11). Nous obtiendrons un groupe (η) qui sera une forme canonique de (h). D'après le n° 4, une transformation particulière quelconque de (η) est de la forme (23). Soit

$$(37) \quad \begin{cases} y'_h = f_h(y_1, \dots, y_p) & (h = 1, 2, \dots, p), \\ y'_{p+k} = g_k(y_1, \dots, y_p, \dots, y_n) & (k = 1, 2, \dots, q), \end{cases}$$

une telle transformation. Comme (η) contient (γ), il contient le produit de cette transformation (37) par la transformation générale (15), c'est-à-dire toutes les transformations :

$$(38) \quad \begin{cases} y'_h = f_h(y_1, \dots, y_p) & (h = 1, 2, \dots, p), \\ y'_{p+k} = \varphi_k(y_1, \dots, y_p, \dots, y_n) & (k = 1, 2, \dots, q; \varphi_k \equiv \text{fonct. arbit.}). \end{cases}$$

Il est, de plus, visible que toutes les transformations en y_1, \dots, y_p seuls

$$(39) \quad y'_h = f_h(y_1, \dots, y_p) \quad (h = 1, 2, \dots, p),$$

qui correspondent, en vertu des notations précédentes, aux diverses transformations (37) de (η), forment un groupe ($\overline{\eta}$) : c'est le groupe qui exprime la loi suivant laquelle le groupe intermédiaire (h) permute les caractéristiques (5) de (A) (n° 6).

En résumé, la transformation générale d'un groupe (η) est de la forme (38), *les équations (39) représentant, par hypothèse, la trans-*

formation générale d'un groupe $(\bar{\eta})$ de ε_p . Et, par suite, les équations générales du groupe intermédiaire (h) , qui lui correspond par la transformation canonisante (11) , sont :

$$(40) \begin{cases} v_h((x')) = f_h(v_1((x)), \dots, v_p((x))) & (h = 1, 2, \dots, p), \\ x'_{p+k} = \Phi_k(x_1, \dots, x_n) & (k = 1, 2, \dots, q; \Phi_k \equiv \text{fonct. arb.}). \end{cases}$$

Un même groupe intermédiaire peut être mis sous la forme (40) d'une infinité de manières, car, suivant le système fondamental (5) employé, on obtient pour $(\bar{\eta})$ l'un ou l'autre des groupes d'un même type (Cf. nos 4 et 8). Dans le cas particulier où l'on utilise le système principal qui correspond aux valeurs initiales (7), on obtient pour $(\bar{\eta})$ un groupe particulier que nous désignerons par (η_0) .

Le groupe (η_0) peut se déduire du groupe (h) de la manière suivante : d'après la forme des équations (40), (h) contient un sous-groupe (h_0) qui laisse invariante chacune des variables x_{p+k} ($k = 1, 2, \dots, q$) : les équations générales de ce sous-groupe sont :

$$(41) \begin{cases} v_h((x')) = f_h(v_1((x)), \dots, v_p((x))) & (h = 1, 2, \dots, p), \\ x'_{p+k} = x_{p+k} & (k = 1, 2, \dots, q). \end{cases}$$

Si, dans ces équations, on fait $x_{p+k} = x_{p+k}^0$ ($k = 1, 2, \dots, q$), les v_h se réduisent tous aux variables x_h ou x'_h correspondantes, et l'on obtient les équations

$$(42) \begin{cases} x'_h = f_h(x_1, \dots, x_p) & (h = 1, 2, \dots, p), \\ x'_{p+k} = x_{p+k}^0 & (k = 1, 2, \dots, q). \end{cases}$$

Il n'y a plus qu'à faire abstraction des inconnues x'_{p+k} pour avoir les équations générales de (η_0) .

Donc : on déduit de tout groupe intermédiaire (h) le groupe (η_0) correspondant en donnant aux variables x_{p+k} les valeurs particulières x_{p+k}^0 dans les équations du sous-groupe (h_0) de (h) qui laisse invariante chacune de ces variables x_{p+k} ($k = 1, 2, \dots, q$).

Si (h) est connu par ses équations de définition, on en déduit immédiatement celles de (h_0) , en leur adjoignant les équations $x'_{p+k} = x_{p+k}$ ($k = 1, 2, \dots, q$). On aura donc, par le théorème précédent, les équations de définition de (η_0) .

En particulier, si l'on connaît les équations de définition du groupe spécifique, on en déduit, rationnellement, celles d'un groupe de rationalité principal quelconque.

10. Cette première étude des groupes intermédiaires va nous permettre de préciser la nature des éléments essentiels qui caractérisent le mode de réductibilité d'un système complet (A) donné. On sait ⁽¹⁾ que les équations de définition de tout groupe ponctuel de l'espace E_n sont de la forme

$$(43) \quad U_\rho \left(x'_1, \dots, x'_n \left| \dots, \frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} x'_i}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}, \dots \right. \right) = \omega_\rho(x_1, \dots, x_n) \quad (\rho = 1, 2, \dots, x),$$

les U_ρ étant certains invariants différentiels du groupe; et, de plus, si les équations de définition du groupe sont données sous une forme quelconque, la réduction à cette forme (43) ne comporte que des calculs rationnels. On peut, évidemment, substituer à cette forme, par simple échange des variables dépendantes en variables indépendantes et inversement, la forme corrélatrice :

$$(44) \quad T_\rho \left(x_1, \dots, x_n \left| \dots, \frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} x'_i}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}, \dots \right. \right) = \theta_\rho(x'_1, \dots, x'_n) \quad (\rho = 1, 2, \dots, x).$$

Les T_ρ sont des invariants différentiels du groupe, c'est-à-dire qu'ils gardent leur forme, si, laissant les variables x'_1, \dots, x'_n invariantes, on effectue sur x_1, \dots, x_n l'une quelconque des transformations du groupe. Le fait que les équations de définition d'un groupe sont rationnelles équivaut donc à celui-ci : un système fondamental d'invariants différentiels, invariants U_ρ ou invariants T_ρ , est rationnel.

Si l'on remarque, de plus, que tout invariant différentiel d'un groupe est un invariant différentiel de chacun de ses sous-groupes, on voit que le groupe spécifique du système (A) est défini par un système fondamental d'invariants différentiels rationnels, du type T_ρ par exemple, qui sont aussi des invariants différentiels de chacune

⁽¹⁾ S. LIE, *Leipziger Berichte*, 1891, p. 391. — E. VESSIOT, *Annales Éc. Norm. sup.*, 1903, p. 420.

des transformations infinitésimales du groupe (g) [transformation (19)].

Le mode de réductibilité de (A) est, par suite, caractérisé par l'ensemble des invariants différentiels du groupe (g) , du type T_ρ , qui se trouvent être rationnels. Il résulte, de plus, de la théorie générale des invariants différentiels, que tous les invariants différentiels en question se déduisent, par des calculs rationnels, d'un nombre limité d'entre eux.

Mais nous allons voir qu'on peut, en réalité, se borner à considérer des invariants différentiels d'un type un peu plus simple.

11. Reprenons, à cet effet, un groupe intermédiaire (h) quelconque, et partons du groupe $(\bar{\eta})$ qui le caractérise. Les équations de définition de $(\bar{\eta})$ étant, par exemple,

$$(45) \quad \delta_\mu \left(y_1, \dots, y_p \left| \dots, \frac{\partial^{\beta_1 + \dots + \beta_p} y'_h}{\partial y_1^{\beta_1} \dots \partial y_p^{\beta_p}}, \dots \right. \right) = \theta_\mu(y'_1, \dots, y'_p) \quad (\mu = 1, 2, \dots, m),$$

celles du groupe (η) seront

$$(46) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta_\mu \left(y_1, \dots, y_p \left| \dots, \frac{\partial^{\beta_1 + \dots + \beta_p} y'_h}{\partial y_1^{\beta_1} \dots \partial y_p^{\beta_p}}, \dots \right. \right) = \theta_\mu(y'_1, \dots, y'_p) \quad (\mu = 1, 2, \dots, m) \\ \frac{\partial y'_h}{\partial y_{p+k}} = 0 \quad (h = 1, 2, \dots, p; k = 1, 2, \dots, q); \end{array} \right.$$

puisque, dans les formules (38), les y'_h sont les mêmes fonctions que dans les formules (39), tandis que les y'_{p+k} sont des fonctions arbitraires.

Nous sommes ainsi conduits à considérer le système (46) à p fonctions inconnues et n variables indépendantes. Nous l'appellerons le système (σ) et nous l'écrirons avec un léger changement de notations, utile pour la suite :

$$(47) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta_\mu \left(y_1, \dots, y_p \left| \dots, \frac{\partial^{\beta_1 + \dots + \beta_p} z_h}{\partial y_1^{\beta_1} \dots \partial y_p^{\beta_p}}, \dots \right. \right) = \theta_\mu(z_1, \dots, z_p) \\ \frac{\partial z_h}{\partial y_{p+h}} = 0 \end{array} \right. \quad \left(\begin{array}{l} h = 1, 2, \dots, p \\ k = 1, 2, \dots, q \\ \mu = 1, 2, \dots, m \end{array} \right).$$

La solution générale de ce système est

$$(48) \quad z_h = f_h(y_1, \dots, y_p) \quad (h = 1, 2, \dots, p),$$

où les lettres f_h ont la même signification que dans les équations (39). Il est visible, soit par la manière dont ce système a été introduit, soit par ces formules (48), que les groupes (η) et $(\bar{\eta})$ sont constitués par l'ensemble de toutes les transformations ponctuelles de \mathcal{E}_n et de \mathcal{E}_p , respectivement, qui laissent ce système invariant quand on les effectue sur les variables indépendantes, dans le premier cas, et sur les variables dépendantes dans le second cas. Et toutes les solutions de ce système se déduisent d'une solution particulière quelconque par les transformations de l'un ou de l'autre de ces groupes. Ce système (σ) est donc, en particulier, le système *automorphe* ⁽¹⁾ ayant $(\bar{\eta})$ pour groupe associé, et admettant la solution $z_h = y_h$ ($h = 1, 2, \dots, p$). Et il définit à la fois deux groupes, (η) et $(\bar{\eta})$, suivant que l'on considère des transformations portant sur les variables indépendantes ou dépendantes.

Si, dans les équations de ce système (σ) , nous effectuons la transformation canonisante (11) sur les variables indépendantes seulement, nous obtiendrons un système automorphe (s) , ayant encore $(\bar{\eta})$ pour groupe associé et admettant, comme solution particulière, le système fondamental de solutions de (A)

$$(49) \quad z_h = v_h((x)) \quad (h = 1, 2, \dots, p).$$

La solution générale de ce système sera

$$(50) \quad z_h = f_h((x)), \dots, v_p((x)) \quad (h = 1, 2, \dots, p).$$

Et (h) sera le groupe qui est composé de toutes les transformations ponctuelles de \mathcal{E}_n qui, effectuées sur les variables indépendantes, laissent ce système (s) invariant. Ce système (s) définit donc à la fois le groupe intermédiaire (h) et l'un des groupes $(\bar{\eta})$ qui corres-

⁽¹⁾ Sur la définition des *systèmes automorphes*, voir p. 211; *Acta mathematica*, t. XXVIII, p. 311.

pondent à ce groupe (h) . Et les équations de définition de ces deux groupes se déduiraient, par des calculs rationnels, des équations du système (s) , supposées connues.

Au groupe intermédiaire (h) correspond donc une classe de systèmes (s) , dont on peut dire qu'ils sont *semblables* entre eux, en entendant par là qu'ils dérivent les uns des autres par les diverses transformations ponctuelles de l'espace ε_p , supposées effectuées sur les variables dépendantes z_h ($h = 1, 2, \dots, p$). Cela tient à ce que l'on peut, dans les considérations précédentes, employer comme système fondamental (5) l'un quelconque des systèmes fondamentaux de A (Cf. nos 1, 8, 9).

Parmi ces systèmes (s) , nous considérerons spécialement le système (s_0) qui admet pour solution le système principal de solutions de (A), caractérisé par les valeurs initiales (7). Nous l'appellerons un *système automorphe principal attaché à (h)* . Son groupe associé est (γ_0) [Cf. n° 9].

L'importance de ces systèmes (s_0) tient à ce qu'on déduit le système (s_0) des équations de définition de (h) en y remplaçant les lettres x'_1, \dots, x'_p par les lettres z_1, \dots, z_p , et les variables dépendantes x'_{p+1}, \dots, x'_n par les valeurs constantes x^0_{p+1}, \dots, x^0_n .

En effet, supposons que les équations (39) soient celles du groupe (γ_0) , et que les formules (5) représentent le système principal de solutions de (A), qui correspond aux valeurs initiales (7). En effectuant dans les formules (40) la modification indiquée, nous obtiendrons la solution générale du système déduit de (h) par la règle énoncée. Or, les $v_h((x'))$ se réduisent ainsi aux x'_h , ou mieux aux z_h correspondants : donc cette solution générale est donnée par les formules (50) qui fournissent la solution générale du système (s_0) . Il y a donc bien identité entre le système qui résulte de l'application de notre règle et le système (s_0) .

Il résulte de là, en particulier, que *les systèmes (s_0) sont rationnels dès que les équations de définition du groupe intermédiaire (h) correspondant sont rationnelles, et réciproquement.*

Et par conséquent : *Parmi les systèmes automorphes principaux (s_0) , dont les équations sont rationnelles, celui dont la solution générale a le degré minimum de généralité caractérise le mode de réductibilité parti-*

culier du système complet (A) considéré. Son groupe associé est groupe de rationalité principal pour (A). Et le groupe formé de toutes les transformations ponctuelles qui, effectuées sur les variables indépendantes, laissent ce système (s_0) invariant, est le groupe spécifique de (A).

Nous pouvons conclure aussi, de ce qui précède, que : *Tout système automorphe (s), dont les équations sont rationnelles, correspond à un groupe intermédiaire (h) qui contient le groupe spécifique; et son groupe associé a pour sous-groupe l'une des formes du groupe de rationalité.*

Et, par suite, le degré de généralité de la solution générale d'un système automorphe (s) étant caractérisé par le degré de généralité de son groupe associé :

Tout système automorphe (s), dont les équations sont rationnelles, et dont la solution générale a le degré de généralité minimum, a pour groupe intermédiaire (h) le groupe spécifique, et pour groupe associé une des formes du groupe de rationalité.

12. La recherche du groupe spécifique étant ainsi ramenée à celle des systèmes (s) rationnels, étudions la forme des équations d'un tel système. Nous les obtenons, d'après sa définition même, en faisant, dans les équations (47), la transformation (11), sur les variables indépendantes y_1, \dots, y_n . Or la formule (31) montre que, dans ce changement de variables, toute dérivation par rapport à y_1 s'exprime au moyen de dérivations par rapport aux variables x_1, \dots, x_p ; et l'on aurait des formules toutes semblables, $\frac{\partial f}{\partial y_n} = \frac{1}{\Delta} \Delta_n f$ ($h = 1, 2, \dots, p$), pour la dérivation par rapport à l'une quelconque des variables y_1, y_2, \dots, y_p . Il en résulte que le système (s) sera de la forme

$$(51) \quad \left\{ \begin{array}{l} G_\mu \left(x_1, \dots, x_n \left| \dots, \frac{\partial^{\beta_1 + \dots + \beta_p} z_\mu}{\partial x_1^{\beta_1} \dots \partial x_p^{\beta_p}}, \dots \right. \right) = \vartheta_\mu(z_1, \dots, z_p) \quad (\mu = 1, 2, \dots, m), \\ \mathbf{M}_k z_h = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, q; h = 1, 2, \dots, p). \end{array} \right.$$

Les fonctions différentielles G_μ qui interviennent ainsi ne sont pas, en général, des invariants différentiels du groupe intermédiaire (h), car les fonctions z_μ , d'où elles proviennent, sont des invariants du groupe ($\bar{\eta}$), mais non pas, en général, du groupe (η). Mais, comme

les variables y_1, \dots, y_p figurent seules dans les \mathfrak{S}_μ , ce sont encore des invariants différentiels pour le groupe (η') , dont les équations générales sont

$$(52) \quad \begin{cases} y'_h = f_h(y_1, \dots, y_p) & (h = 1, 2, \dots, p), \\ y'_{p+k} = \psi_k(y_{p+1}, \dots, y_n) & (k = 1, 2, \dots, q; \psi_k \equiv \text{fonct. arbitr.}). \end{cases}$$

De sorte que les G_μ sont des invariants différentiels du groupe (h') , dont les équations générales sont

$$(53) \quad \begin{cases} v_h((x')) = f_h(v_1((x)), \dots, v_p((x))) & (h = 1, 2, \dots, p), \\ x'_{p+k} = \psi_k(x_{p+1}, \dots, x_n) & (k = 1, 2, \dots, q; \psi_k \equiv \text{fonct. arbitr.}). \end{cases}$$

Ce groupe (h') est le plus grand sous-groupe de (h) , qui échange entre elles les variables x_{p+1}, \dots, x_n . Les équations de définition se déduiraient donc de celles de (h) , en leur adjoignant les équations $\frac{\partial x'_{p+k}}{\partial x_h} = 0$, pour $h = 1, 2, \dots, p; k = 1, 2, \dots, q$. Elles sont donc rationnelles, si celles de (h) le sont.

Il faut remarquer que (h') n'est pas un groupe intermédiaire, car il ne contient pas la transformation générale (18) de (g) . Mais il contient le sous-groupe (g') de (g) qui est fourni par les formules (18) et (19), quand on y suppose que les fonctions Φ_k ne dépendent pas des variables x_1, \dots, x_p . Nous désignerons par $L'f$ la transformation infinitésimale générale de ce groupe (g') .

Cela posé, imaginons un invariant différentiel quelconque de (h') , qui dépende, comme les invariants G_μ , de x_1, \dots, x_n et des dérivées, prises par rapport aux seules variables x_1, \dots, x_p , de p autres variables z_1, \dots, z_p qu'on suppose invariables; et soit G cet invariant. Il admet en particulier la transformation infinitésimale $L'f$, c'est-à-dire que l'expression $L'G$ est nulle identiquement. Pour calculer effectivement cette expression, il faudrait calculer les quantités $L' \frac{\partial^{\beta_1 + \dots + \beta_p} z_k}{\partial x_1^{\beta_1} \dots \partial x_p^{\beta_p}}$; et, si l'on ne faisait aucune hypothèse sur les z_h , ces quantités s'exprimeraient, par les méthodes habituelles de prolongement, au moyen des coefficients de $L'f$, des quantités $L'z_h$ et de leurs dérivées. Par hypothèse, l'expression $L'G$ ainsi formée est nulle identiquement, quand on suppose les $L'z_h$ identiquement nuls : et l'identité a lieu par rapport aux

variables x_1, \dots, x_n , et par rapport aux dérivées des z_h . Elle a donc lieu, *a fortiori*, par rapport aux seules variables x_1, \dots, x_n , si l'on remplace les z_h par p fonctions de x_1, \dots, x_n qui satisfassent aux conditions $L'z_h \equiv 0$ ($h = 1, 2, \dots, p$); c'est-à-dire par un système fondamental (49) de solutions du système (A).

Donc, si dans l'invariant G , on remplace les z_h par les fonctions (49), on obtient une fonction de x_1, \dots, x_n seulement, qui satisfait à toute équation $L'f = 0$, c'est-à-dire qui est elle-même une solution du système complet (A) et peut se mettre sous la forme $\theta(z_1, \dots, z_p)$. Considérons alors l'équation

$$(54) \quad G \left(x_1, \dots, x_n \left| \dots, \frac{\partial^{\beta_1 + \dots + \beta_p} z_h}{\partial x_1^{\beta_1} \dots \partial x_p^{\beta_p}}, \dots \right. \right) = \theta(z_1, \dots, z_p).$$

Elle est vérifiée par les fonctions (49); et, à cause de l'invariance de G , elle est vérifiée par toutes les fonctions qu'on déduit de ces formules (49), en effectuant dans les seconds membres les diverses transformations du groupe (h'), c'est-à-dire par toutes les solutions (50) du système (s) considéré. L'équation (54) fait donc partie, explicitement ou implicitement, des équations du système (s). Et l'invariant G peut, par suite, s'exprimer au moyen des invariants G_μ et de ceux qu'on en peut déduire par la différentiation des équations $G_\mu = \theta_\mu$ ($\mu = 1, 2, \dots, m$). En d'autres termes, *les invariants G_μ forment un système fondamental d'invariants du type considéré, pour le groupe (h')*.

13. Remarquons, de plus, que *si les invariants G_μ sont connus, on pourra construire effectivement les systèmes principaux (s_0)*, qui correspondent au groupe (h) considéré. Car, si nous supposons alors que le système fondamental (49) est le système principal qui correspond aux valeurs initiales $x_{p+k} = x_{p+k}^0$ ($k = 1, 2, \dots, q$), et si nous remplaçons, dans G_μ , les z_h par les fonctions (49), nous obtiendrons la fonction $\theta_\mu(\varphi_1((x)), \dots, \varphi_p((x)))$; et, en donnant ensuite aux x_{p+k} les valeurs x_{p+k}^0 , il restera les fonctions $\theta_\mu(x_1, \dots, x_p)$.

On obtient donc, dans le cas du système (s_0), les fonctions $\theta_\mu(x_1, \dots, x_p)$, en remplaçant, dans les coefficients G_μ , les variables x_{p+k}

par les valeurs x_{p+h}^0 , et les dérivées des z_h par les dérivées du système principal qui correspond à ces valeurs particulières, calculées pour ces mêmes valeurs. Or, les dérivations ont lieu par rapport aux variables x_1, \dots, x_p seulement, de sorte qu'on peut, pour calculer ces dérivées, faire d'abord l'hypothèse $x_{p+k} = x_{p+k}^0$ dans les z_h eux-mêmes, ce qui les réduit aux x_h correspondants. On a donc simplement

$$(55) \quad \theta_p(x_1, \dots, x_p) = G_p \left(x_1, \dots, x_p, x_{p+1}^0, \dots, x_n^0 \left| \dots, \frac{d^{\beta_1 + \dots + \beta_p} x_h}{\partial x_1^{\beta_1} \dots \partial x_p^{\beta_p}}, \dots \right. \right).$$

En résumé, *si les équations de (h') sont rationnelles, on en déduira, par des calculs rationnels, les systèmes principaux (s_0) associés au groupe (h) qui correspond à (h'). Et les équations de définition de (h) seront aussi rationnelles.*

Si l'on rapproche ce résultat de ceux du n° 12, on conclut que *deux groupes (h) et (h') qui correspondent aux mêmes groupes (η) ont, en même temps, leurs équations de définition rationnelles.*

Par suite, *dans la définition* donnée, au n° 8, *du mode de réductibilité d'un système complet* donné (A), dans un domaine de rationalité donné (\mathbb{R}), *on peut substituer, à la considération des groupes intermédiaires (h), celle de leurs sous-groupes (h').* Cela ne changera pas, en particulier, les groupes de rationalité.

Pour définir directement les groupes (h'), il suffirait de considérer le groupe (G'), formé de toutes les transformations de (G) [Cf. n° 3], qui échangent entre elles les variables x_{p+1}, \dots, x_n . Les groupes (h') sont alors les sous-groupes de (G') qui contiennent (g').

14. On peut aller plus loin, dans le même ordre d'idées, en substituant, aux groupes (h') eux-mêmes, des sous-groupes (h'') de ces groupes, convenablement choisis. On voit, en effet, que les raisonnements précédents peuvent se reprendre pourvu qu'à chaque groupe (h') corresponde un sous-groupe (h'') et un seul : dont les équations de définition soient rationnelles lorsque celles de (h') le seront; qui échange les caractéristiques suivant la même loi que (h'), et qui contienne au moins q transformations infinitésimales du type $L'f$, dont, lorsqu'on les égale à zéro, un système équivalent au système

complet (A). Un tel groupe aura les mêmes invariants du type G que le groupe (h') lui-même.

Comme application de ce principe général, considérons le groupe (g'') qui est défini par les transformations infinitésimales $M_k f$ [équation (4)]. Les équations générales sont

$$(56) \quad \begin{cases} v_h((x')) = v_h((x)) & (h = 1, 2, \dots, p), \\ x'_{p+k} = x_{p+k} + c_k & (k = 1, 2, \dots, q; c_k = \text{const. arbitr.}). \end{cases}$$

Et considérons, en même temps, le groupe (G'') qui est le plus grand sous-groupe de (G) dont toutes les transformations sont de la forme

$$(57) \quad \begin{cases} x'_h = \Psi_h(x_1, \dots, x_n) & (h = 1, 2, \dots, p), \\ x'_{p+k} = x_{p+k} + c_k & (k = 1, 2, \dots, q). \end{cases}$$

Ses équations de définition s'obtiennent en adjoignant aux équations (28) les équations

$$(58) \quad \frac{\partial x'_{p+k}}{\partial x_h} = 0, \quad \frac{\partial x'_{p+k}}{\partial x_{p+j}} = \varepsilon_{kj} \quad (k, j = 1, 2, \dots, q; h = 1, 2, \dots, p),$$

où ε_{kj} désigne, suivant l'usage, un nombre égal à *zéro* si $k \neq j$, et à *un* si $k = j$. Or, en tenant compte des équations (58), les équations (28) deviennent

$$(59) \quad M_k x'_h = \mu_{kh}((x')) \quad (k = 1, 2, \dots, q; h = 1, 2, \dots, p);$$

de sorte que (G'') est aussi le plus grand groupe de transformations de la forme (57) qui laisse invariante chacune des transformations infinitésimales $M_k f$. Les équations générales de (G'') sont

$$(60) \quad \begin{cases} v_h((x')) = \psi_h(v_1((x)), \dots, v_p((x))) & (h = 1, 2, \dots, p; \psi_h = \text{fonct. arb.}), \\ x'_{p+k} = x_{p+k} + c_k & (k = 1, 2, \dots, q; c_k = \text{const. arb.}). \end{cases}$$

Tout groupe (h') a donc en commun avec (G'') un sous-groupe (h''), contenant (g''), dont les équations générales sont

$$(61) \quad \begin{cases} v_h((x')) = f_h(v_1((x)), \dots, v_p((x))) & (h = 1, 2, \dots, p), \\ x'_{p+k} = x_{p+k} + c_k & (k = 1, 2, \dots, q), \end{cases}$$

lorsque celles de (k') sont les équations (53). La correspondance entre (k') et (k'') est donc univoque. Et le groupe (k'') satisfait aux autres conditions énoncées.

Donc : on peut caractériser le mode de réductibilité d'un système complet par le plus petit groupe de transformations de la forme (57), laissant le système complet invariant, et dont les équations de définition soient rationnelles. Ce groupe fournira immédiatement les invariants différentiels G_μ qui permettent de construire les systèmes principaux (s_0) associés au groupe spécifique.

15. Les diverses formes, équivalentes entre elles, que peut prendre la notion de réductibilité sont utiles au point de vue des applications ; car, suivant le cas, l'une ou l'autre permettra de fixer le mode de réductibilité d'un système donné. Aussi allons-nous généraliser encore les remarques du numéro précédent.

Considérons un sous-groupe (k) du groupe (G) , qui sera astreint à la seule condition de contenir au moins q transformations infinitésimales de (g) , qui, égalées à zéro, donnent des équations indépendantes et, par conséquent, un système équivalent au système complet (A) . On peut supposer que les transformations $L_k f$ ($k = 1, 2, \dots, q$) du n° I sont ces transformations infinitésimales.

Réduisons ce groupe (k) à une forme canonique (x) , au moyen de la transformation canonisante (11). Les équations générales de ce nouveau groupe (x) seront de la forme (23) ; représentons-les par

$$(62) \quad y'_h = f_h(y_1, \dots, y_p) \quad (h = 1, 2, \dots, p),$$

$$(63) \quad y'_{p+k} = g_k(y_1, \dots, y_p, \dots, y_n) \quad (k = 1, 2, \dots, q).$$

Les équations (62) sont les équations générales d'un groupe $(\bar{\eta})$, auquel correspond un groupe (η) (Cf. n° 9). Si donc on isole, parmi les équations de définition de (x) , celles qui définissent les fonctions y'_1, \dots, y'_p , on retombera sur le système des équations de définition de (η) , c'est-à-dire sur le système (46), ou sur un système équivalent. Et, puisqu'il s'agit des équations de définition d'un groupe, le système ainsi obtenu pourra se ramener à la forme canonique de Lie (n° 10) ; si l'on tient compte, de plus, de ce que les variables y'_{p+1}, \dots, y'_n ne peuvent pas figurer dans ses équations, on conclut à

un système de la forme

$$(64) \quad J_{\sigma} \left(y_1, \dots, y_n \left| \dots, \frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} y'_h}{\partial y_1^{\alpha_1} \dots \partial y_n^{\alpha_n}}, \dots \right. \right) = \tau_{\sigma}(y'_1, \dots, y'_p) \quad \left(\begin{array}{l} h = 1, 2, \dots, p \\ \sigma = 1, 2, \dots, s \end{array} \right),$$

où les J sont des invariants différentiels de (η) .

Le groupe (α) admet donc des invariants différentiels, dépendant des variables y_1, \dots, y_n et des dérivées, par rapport à ces variables, de p autres variables y'_1, \dots, y'_p , supposées invariantes : à savoir ces invariants J_{σ} . Et le système (64), c'est-à-dire le système (σ) du n° 11, se construit au moyen de certains de ces invariants, en exprimant qu'il admet la solution $y'_h = y_h$ ($h = 1, 2, \dots, p$).

Si l'on repasse de (α) à (k) , au groupe (η) correspondra le plus petit groupe intermédiaire (h) contenant (k) . Et au système (σ) correspondra le système (s) associé à (h) . On voit ainsi que (k) admet des invariants différentiels relatifs aux variables x_1, \dots, x_n et aux dérivées, prises par rapport à ces variables, de p fonctions z_1, \dots, z_p , supposées invariantes, c'est-à-dire du type

$$(65) \quad \mathbb{H} \left(x_1, \dots, x_n \left| \dots, \frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} z_h}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}, \dots \right. \right) \quad (h = 1, 2, \dots, p);$$

et que le système (s) s'obtient en égalant certains de ces invariants différentiels aux fonctions de v_1, \dots, v_p auxquelles ils se réduisent par la substitution $z_h = v_h((x))$ ($h = 1, 2, \dots, p$).

Mais si l'on considère, réciproquement, un invariant différentiel quelconque de (k) appartenant à ce même type (75), comme il admet chacune des transformations infinitésimales $L_k f$ ($k = 1, 2, \dots, q$), on conclut, en raisonnant comme au n° 12, que cette substitution $z_h = v_h((x))$ le réduira aussi à une fonction $\tau(v_1, \dots, v_p)$, c'est-à-dire que le système fondamental (5) sera une solution de l'équation

$$(66) \quad \mathbb{H} = \tau(z_1, \dots, z_p).$$

Il en résulte d'abord que cette équation admet les solutions qui se déduisent des formules (5) par les transformations de (k) , qui sont

$$(67) \quad \begin{cases} v'_h((x')) = f_h(v_1((x)), \dots, v_p((x))) & (h = 1, 2, \dots, p), \\ x'_{p+k} = g_k(v_1((x)), \dots, v_p((x)), x_{p+1}, \dots, x_n) & (k = 1, 2, \dots, q); \end{cases}$$

de sorte qu'elle admet toutes les solutions [(50)] du système (s); elle fait donc partie de ce système (s).

Le système (s) doit donc se construire avec un système fondamental complet d'invariants de (k), du type (65).

Remarquons, de plus, que si le système fondamental $v_k((x))$ est le système principal qui correspond aux valeurs initiales $x_{p+k} = x_{p+k}^0$, on peut calculer les valeurs que prennent, pour ces valeurs initiales, toutes les dérivées des $v_k((x))$. Car d'une telle dérivée on peut, au moyen des équations $M_k z_h = 0$ ($h = 1, 2, \dots, q; h = 1, 2, \dots, p$), éliminer toute dérivation par rapport aux variables x_{p+1}, \dots, x_n , et l'on achève ensuite comme au n° 13.

On peut, du reste, avant de former le système (s), éliminer, comme il vient d'être expliqué, des invariants II, toutes les dérivations par rapport aux variables x_{p+k} ; on obtiendra ainsi certaines fonctions K sur lesquelles il ne restera plus qu'à opérer comme sur les fonctions G_p , utilisées aux nos 12 et 13. Mais il faudra associer aux équations ainsi obtenues les conditions $M_k z_h = 0$ ($k = 1, 2, \dots, q; h = 1, 2, \dots, p$).

16. Cela posé, soit (K) un sous-groupe de (G) dont les équations de définition soient rationnelles, et tel que le groupe (g_1) formé par toutes les transformations communes à (K) et (g) contienne au moins q transformations infinitésimales n'ayant pas d'autres invariants communs que les solutions de (A). Parmi les groupes (k) contenus dans (K) et contenant (g_1), et dont les équations de définition sont rationnelles, il y en a un qui est minimum et est contenu dans tous les autres. Ce groupe caractérise le mode de réductibilité du système (A), car le groupe spécifique est le plus petit groupe intermédiaire qui le contienne; et il échange les caractéristiques suivant une loi qui a encore son expression dans le groupe de rationalité.

En effet, les équations de définition de (K) se déduisent de celles de (G) par l'adjonction de certaines équations rationnelles (E). Si donc on adjoint, aux équations de définition du groupe spécifique (h_s), ces équations (E), on obtient un groupe qui est le plus grand groupe commun à (K) et (h_s); et, comme (h_s) contient (g), ce groupe contient le sous-groupe (g_1) commun à (K) et à (g). C'est donc un groupe (k) de

l'espèce considérée et dont les équations de définition sont rationnelles.

Or, par les calculs exposés au n° 15, on peut, par des calculs rationnels, déduire, des équations de définition de ce groupe (k) , celles du plus petit groupe intermédiaire qui le contienne ; ce dernier ne peut donc être que (k_s) , sans quoi (k_s) ne serait pas le groupe intermédiaire rationnel minimum. Et nous avons vu, de plus, que le groupe (k) et le groupe intermédiaire minimum le contenant échangent les caractéristiques suivant la même loi. Donc le groupe spécifique et le groupe (k) que nous en déduisons échangent les caractéristiques suivant la même loi.

Soit (k_s) le groupe (k) ainsi associé au groupe spécifique. Il est impossible qu'un autre groupe (k) , contenu dans (k_s) , soit rationnel. Car le groupe intermédiaire minimum contenant cet autre groupe (k_1) serait rationnel ; et il échangerait les caractéristiques suivant une loi caractérisée par un groupe $(\bar{\eta}_1)$, contenu dans le groupe de rationalité, puisque cette loi serait la même que pour (k_1) , contenu dans (k_s) . Ce groupe intermédiaire serait, par suite, contenu dans le groupe spécifique, à cause de la relation qui existe entre tout groupe intermédiaire et le groupe $(\bar{\eta})$ correspondant. Or cela est impossible, puisque le groupe spécifique est contenu dans tous les groupes intermédiaires rationnels.

Les résultats énoncés se trouvent ainsi établis.

17. Indiquons, sommairement, *deux applications* importantes des remarques précédentes, que nous nous proposons de développer dans d'autres articles.

Supposons d'abord que l'on connaisse (1) certaines transformations infinitésimales $X_1 f, \dots, X_r f$ qui laissent le système (A) invariant. On peut toujours les remplacer par d'autres $Z_1 f, \dots, Z_r f$ qui laissent invariante chacune des transformations infinitésimales $M_k f$ ($k = 1, 2, \dots, q$), dont chacune reste aussi invariante par toutes les autres. On voit, par conséquent, que le plus grand groupe qui laisse

(1) Ou que l'on sache que de telles transformations sont rationnelles. Une remarque analogue s'applique aux exemples qui suivent.

invariantes à la fois $Z_1 f, \dots, Z_r f, M_1 f, \dots, M_q f$, peut jouer le rôle du groupe (K) considéré au n° 16. On pourrait même se borner à considérer un groupe de transformations de la forme (57). De la nature de ce groupe (K) dépendra donc la nature du problème de l'intégration du système (A), dans le cas considéré. Et l'on a ainsi un moyen d'aborder la discussion de la méthode d'intégration donnée par S. Lie, pour ce problème.

Supposons en second lieu que, pour une forme particulière (1) du système (A), on connaisse des invariants, différentiels ou intégraux, des transformations infinitésimales $L_k f$, ou des systèmes différentiels invariants par ces transformations. Si l'on suppose, de plus, que ces transformations sont, deux à deux, échangeables, on pourra introduire, comme groupe (K), celui qui est formé de toutes les transformations qui laissent invariants à la fois chacune des transformations $L_k f$, et les éléments invariants considérés. Et de là le moyen d'aborder, rationnellement, l'étude des problèmes d'intégration qui se posent ainsi (1).

Il serait facile d'indiquer d'autres applications de la même nature. Bornons-nous à signaler le cas où l'on connaîtrait les équations de définition d'un groupe quelconque laissant le système (A) invariant, mais sans satisfaire aux conditions imposées au groupe (K), dans ce qui précède.

III. — Les types de systèmes réductibles.

18. Nous avons obtenu, au n° 12, sous la forme (51), les équations du système automorphe (s), attaché à un groupe intermédiaire (h), et ayant un groupe ($\bar{\eta}$) pour groupe associé. Nous reviendrons plus loin sur la recherche des fonctions G_μ , dans le cas où le groupe (h) est le groupe spécifique du système considéré. Nous allons d'abord indiquer une autre forme qu'on peut donner au système (s), et en tirer des conséquences pour la classification des systèmes complets réductibles.

Reprenons, à cet effet, la marche suivie au n° 11, en prenant les

(1) Cf. S. LIE, *Leipziger Berichte*, 1897, p. 402 et 406.

équations de définition de $(\bar{\eta})$ sous la forme (43), au lieu de les prendre sous la forme (44). Soient

$$(68) \quad \Gamma_{\mu} \left(y'_1, \dots, y'_p \left| \dots, \frac{\partial^{\beta_1 + \dots + \beta_p} y'_h}{\partial y_1^{\beta_1} \dots \partial y_p^{\beta_p}}, \dots \right. \right) = \mathfrak{S}_{\mu}(y_1, \dots, y_p) \quad (\mu = 1, 2, \dots, m),$$

ces équations. Le système (σ) s'écrira

$$(69) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Gamma_{\mu} \left(z_1, \dots, z_p \left| \dots, \frac{\partial^{\beta_1 + \dots + \beta_p} z_h}{\partial y_1^{\beta_1} \dots \partial y_p^{\beta_p}}, \dots \right. \right) = \mathfrak{S}_{\mu}(y_1, \dots, y_p) \quad (\mu = 1, 2, \dots, m), \\ \frac{\partial z_h}{\partial y_{p+k}} = 0 \quad (h = 1, 2, \dots, p; k = 1, 2, \dots, q). \end{array} \right.$$

Si nous faisons maintenant, dans ces équations, la transformation canonisante [II], les Γ_{μ} , qui sont des invariants différentiels de $(\bar{\eta})$, quand on considère z_1, \dots, z_p comme les variables transformées, et y_1, \dots, y_p comme des variables non transformées, deviendront des fonctions Γ'_{μ} de z_1, \dots, z_p et des dérivées $\frac{\partial^{\beta_1 + \dots + \beta_p} z_h}{\partial x_1^{\beta_1} \dots \partial x_p^{\beta_p}}$, possédant le même caractère d'invariance. Si donc nous imaginons les Γ_{μ} écrits avec les lettres x_1, \dots, x_p au lieu des lettres y_1, \dots, y_p , nous aurons des relations de la forme

$$(70) \quad \Gamma'_{\mu} = \mathfrak{F}_{\mu}(\Gamma_1, \dots, \Gamma_m | x_1, \dots, x_n) \quad (\mu = 1, 2, \dots, m),$$

qui pourront aussi se résoudre par rapport aux Γ'_{μ} ; car le changement de variables effectué ne peut pas altérer la propriété des Γ_{μ} de former un système fondamental d'invariants du groupe $(\bar{\eta})$. Les équations (69) transformées, qui se présenteraient sous la forme

$$(71) \quad \Gamma'_{\mu} = \mathfrak{S}'_{\mu}(x_1, \dots, x_n) \quad (\mu = 1, 2, \dots, m),$$

pourront donc s'écrire sous la forme, équivalente,

$$(72) \quad \Gamma_{\mu} = \omega_{\mu}(x_1, \dots, x_n) \quad (\mu = 1, 2, \dots, m).$$

Nous obtenons ainsi, pour le système (s), la nouvelle forme canonique

$$(73) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Gamma_{\mu} \left(z_1, \dots, z_p \left| \dots, \frac{\partial^{\beta_1 + \dots + \beta_p} z_h}{\partial x_1^{\beta_1} \dots \partial x_p^{\beta_p}}, \dots \right. \right) = \omega_{\mu}(x_1, \dots, x_n) \quad (\mu = 1, 2, \dots, m), \\ M_k z_h = 0 \quad (h = 1, 2, \dots, p; k = 1, 2, \dots, q), \end{array} \right.$$

où figurent les invariants fondamentaux Γ_μ du groupe $(\bar{\eta})$ associé à ce système automorphe ⁽¹⁾.

Il est essentiel, pour la théorie de la réductibilité, de remarquer que si le système (s) peut se mettre sous une forme telle que ses équations soient rationnelles, il sera aussi susceptible d'une forme canonique (73) rationnelle. Car des équations rationnelles de (s) on déduit successivement, par des calculs rationnels, les équations de définition de $(\bar{\eta})$, puis un système d'invariants Γ_μ ; et les ω_μ se calculent ensuite rationnellement en écrivant que chacune des équations (73) est une conséquence algébrique des équations de (s) , convenablement différenciées, s'il y a lieu ⁽²⁾.

Cette remarque s'applique, en particulier, aux systèmes principaux (s_0) et, plus spécialement, à celui qui est attaché au groupe spécifique.

19. Mais on peut aller plus loin. Dans le cas où le groupe intermédiaire (h) est transitif, si ses équations de définition sont rationnelles, et si les Γ_μ constituent un système fondamental d'invariants différentiels rationnels d'un groupe quelconque $(\bar{\eta})$ semblable aux groupes principaux (η_0) qui correspondent à (h) , il existe un système (s) rationnel de la forme (73), c'est-à-dire ayant précisément $(\bar{\eta})$ pour groupe associé.

Pour démontrer ce théorème, remarquons d'abord que supposer le groupe (h) transitif équivaut à admettre que le groupe $(\bar{\eta})$ est transitif : cela résulte de la comparaison des équations générales (39) et (38) du groupe $(\bar{\eta})$ et du groupe (η) , qui est semblable à (h) .

Alors les systèmes (51), ou (73), ne peuvent avoir comme conséquence aucune équation indépendante des dérivées qui y figurent.

Cela posé, observons encore que le système (s) annoncé existe certainement, et qu'il s'agit seulement de prouver qu'il est rationnel. Car on a vu au n° 14 qu'à un groupe intermédiaire (h) correspondent tous les groupes $(\bar{\eta})$ semblables à l'un d'entre eux.

Il existe donc des fonctions ω_μ et des fonctions θ_μ telles que les

⁽¹⁾ Cf. *Acta mathematica*, t. XXVIII, p. 313.

⁽²⁾ Cf. *Annales Éc. Norm. sup.*, t. XXI, 1904, p. 19.

systèmes (73) et (51) soient équivalents. Exprimons, par exemple, que chaque équation (73) est conséquence des équations (51), en traitant dans le calcul les dérivées seules comme des indéterminées, les z_h et les x_i étant, au contraire, considérées comme des constantes paramétriques. Nous obtiendrons des équations rationnelles de la forme

$$(74) \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega_\mu(x_1, \dots, x_n) = \Omega_\mu(x_1, \dots, x_n | z_1, \dots, z_p | \theta_1((z)), \dots, \theta_m((z))) \\ (\mu = 1, 2, \dots, m), \end{array} \right.$$

qui sont identiques en $x_1, \dots, x_n; z_1, \dots, z_p$. Nous ne connaissons pas les fonctions θ_μ ; mais, si nous donnons aux z_h des valeurs constantes arbitraires, mais choisies une fois pour toutes, les θ_μ seront certaines constantes c_μ , et les formules (74) prendront la forme

$$(75) \quad \omega_\mu(x_1, \dots, x_n) = \bar{\Omega}_\mu(x_1, \dots, x_n | c_1, \dots, c_m) \quad (\mu = 1, 2, \dots, m).$$

Et il restera seulement à calculer les constantes inconnues c_μ . Pour cela, nous reprenons l'identification des deux systèmes, après avoir remplacé les ω_μ par les valeurs (75). En écrivant que chaque équation (51) est conséquence des équations (73), nous obtiendrons des formules rationnelles

$$(76) \quad \theta_\mu(z_1, \dots, z_p) = \Theta_\mu(z_1, \dots, z_p | x_1, \dots, x_n | c_1, \dots, c_m) \quad (\mu = 1, 2, \dots, m),$$

qui sont nécessaires et suffisantes pour l'équivalence des deux systèmes. Nous savons de plus qu'on peut choisir les constantes c_μ de manière que ces formules (76) soient identiques, c'est-à-dire de manière que les seconds membres soient indépendants de x_1, \dots, x_n . En exprimant donc que les Θ_μ ne dépendent pas de x_1, \dots, x_n nous obtiendrons, entre les c_μ seuls, un système rationnel (C). Il faudra lui adjoindre, s'il y a lieu, les conditions qui expriment que le système (73) admet, au point de vue différentiel, au moins une solution; cela donnera de nouvelles équations rationnelles entre les c_μ seuls. On aura donc un système total (C') qui exprimera entièrement que le système (73), écrit avec les fonctions (75), équivaut à un système (s), correspondant au groupe (h). En portant dans les équations (75) une

solution quelconque de ce système (C'), on obtiendra effectivement des valeurs rationnelles pour les ω_μ , comme nous l'avions annoncé (1).

20. Les résultats précédents conduisent à caractériser, autrement que nous ne l'avons fait, le mode de réductibilité d'un système complet donné (A), dans un domaine de rationalité (\mathfrak{R}) déterminé.

Remarquons d'abord que, si le groupe spécifique est intransitif, ses invariants d'ordre zéro, étant des invariants pour les transformations infinitésimales $M_k f$, qui font partie de ce groupe, sont des solutions de (A). Donc, dans ce cas, le système (A) admet une ou plusieurs solutions rationnelles.

Réciproquement, si (A) admet une ou plusieurs solutions rationnelles, ce sont des invariants pour le groupe (g); le plus grand groupe laissant ces fonctions invariantes, et contenu dans (G), est donc un groupe intermédiaire (h), dont les équations de définition sont rationnelles. Le groupe spécifique en est dès lors un sous-groupe; il admet ces mêmes solutions pour invariants, et est intransitif.

Admettons que, dans le cas où (A) a des solutions rationnelles, on puisse les déterminer. Prenons-les pour variables nouvelles; le système sera réduit au cas où le nombre des variables indépendantes est inférieur à n . Les coefficients du système transformé, qui seront, en général, des fonctions algébriques, et non rationnelles, dans le domaine de rationalité (\mathfrak{R}), devront être adjointes à ce domaine. Dans le nouveau domaine de rationalité (\mathfrak{R}') ainsi obtenu, (A) n'aura plus de solution rationnelle, car une telle solution serait algébrique dans (\mathfrak{R}); et les coefficients de l'équation rationnelle [dans (\mathfrak{R})] et irréductible dont elle dépendrait seraient eux-mêmes des solutions rationnelles, dont une au moins serait distincte des solutions utilisées d'abord. Donc le groupe spécifique du nouveau système, dans le nouveau domaine de rationalité (\mathfrak{R}'), sera transitif.

On peut donc, au moins dans une première étude, se borner au cas où le groupe spécifique est transitif; c'est-à-dire au cas où le groupe

(1) Si le groupe (\bar{r}_1) est invariant dans un groupe plus grand que lui, le système (C') aura une infinité de solutions. Le système (s) le plus général répondant à la question dépendrait alors de constantes arbitraires.

de rationalité est lui-même transitif (*Cf* n° 19). Choisissons alors arbitrairement une forme type de ce groupe de rationalité, sous la seule condition que ses invariants fondamentaux Γ_μ soient rationnels. D'après le théorème du n° 19, il existe un système (73) rationnel, c'est-à-dire un système de fonctions ω_μ rationnelles.

Or les divers systèmes de fonctions ω_μ donnant un système (73) compatible ⁽¹⁾ s'obtiennent en remplaçant, dans les expressions différentielles Γ_μ , les lettres z_1, \dots, z_p par les divers systèmes fondamentaux de solutions de (A). C'est ce qu'on peut appeler *les divers systèmes de valeurs des invariants différentiels* Γ_μ . Donc, *pour le groupe de rationalité considéré, l'un de ces systèmes de valeurs est rationnel.*

Réciproquement, si les invariants fondamentaux Γ_μ d'un groupe transitif ($\bar{\eta}$) de l'espace \mathcal{E}_p sont de forme rationnelle, et admettent un système de valeurs rationnel, le système (73) correspondant admet un groupe ponctuel de \mathbb{E}_n qui est rationnel, et qui est un groupe intermédiaire de (A). Car il admet par hypothèse, pour solution, au moins un système fondamental de solutions de (A); supposons que ce soit la solution (5), et transformons le système (73) par la transformation canonisante correspondante (11). En l'appliquant aux m premières équations (73), on obtiendra un système qui peut se ramener à la forme

$$(77) \quad \Gamma_\mu \left(z_1, \dots, z_p \mid \dots, \frac{\partial^{\beta_1 + \dots + \beta_p} z_h}{\partial y_1^{\alpha_1} \dots \partial y_p^{\alpha_p}}, \dots \right) = \omega'_\mu(y_1, \dots, y_n) \quad (\mu = 1, 2, \dots, m).$$

On le voit en raisonnant comme on l'a fait au n° 18, pour une transformation analogue.

Or ce système (77) admet maintenant la solution

$$z_h = y_h \quad (h = 1, 2, \dots, p)$$

On en conclut que les ω'_μ sont identiques aux \mathfrak{Z}_μ des équations (68). On retombe donc sur le système des équations de définition du groupe ($\bar{\eta}$). Refaisant la même transformation en sens inverse on doit, d'après le n° 18, arriver à un système (s) qui admet le groupe inter-

(1) A cause de la propriété d'invariance des Γ_μ , dès que ce système admet une solution (49), il a comme solution générale la solution (50). Ce fait a déjà été utilisé implicitement au n° 19.

médiaire correspondant au groupe $(\bar{\eta})$, et au système fondamental (5). Comme on doit ainsi retomber sur le système (73) d'où l'on était parti, ce système était précisément un tel système (s). Comme, de plus, le groupe intermédiaire (h) de ce système est rationnel, il est contenu dans le groupe spécifique; et $(\bar{\eta})$ est, soit semblable aux groupes de rationalité de (A), soit contenu dans l'un d'eux.

21. *Imaginons alors qu'on adopte, pour chaque classe de groupes ponctuels transitifs de E_p , semblables entre eux, une forme type dont les invariants différentiels fondamentaux soient rationnels (toutes les fois que cela sera possible) : il y aura, parmi les types ainsi choisis pour lesquels les invariants fondamentaux ont un système de valeurs rationnel, un type d'ordre de généralité minimum. C'est le type des groupes de rationalité du système (A). Il est contenu dans chacun des types pour lesquels les invariants considérés ont un système de valeurs rationnel; en entendant, par là, qu'il est semblable à un sous-groupe de chacun de ces autres groupes types.*

Le groupe type de rationalité caractérise visiblement le mode de spécialité du système (A) considéré, au même titre que le groupe spécifique, auquel il est rattaché. Et nous avons ainsi une définition directe du groupe de rationalité, indépendante de la notion de groupe spécifique (1).

Si l'on voulait s'en servir pour la recherche effective du groupe de rationalité type, pour un système complet (A) donné, il faudrait chercher les solutions rationnelles des divers *systèmes différentiels résolvants*, dont dépendent les valeurs ω_p des invariants fondamentaux Γ_p correspondant aux divers types de groupes ponctuels transitifs de l'espace à p dimensions.

Nous reviendrons plus loin sur la forme de ces systèmes résolvants. (Voir n° 27.)

IV. — Les systèmes auxiliaires et la réductibilité.

22. Nous allons maintenant montrer qu'il y a équivalence entre

(1) Cf. J. DRACH, *Annales Éc. Norm. sup.*, 1898, p. 93. — E. VESSIOT, *Ibid.*, 1904, p. 58. — P. PAINLEVÉ, *Bull. des Sc. math.*, 1904, p. 193.

notre définition de la réductibilité, et la notion de réductibilité introduite par M. Drach.

Imaginons, à cet effet, un système différentiel quelconque (D), avec un nombre quelconque de fonctions inconnues et de variables indépendantes. Parmi ces variables indépendantes figureront les variables x_1, \dots, x_n considérées jusqu'ici : c'est une hypothèse qu'on peut toujours faire, quitte à adjoindre aux variables indépendantes qui interviennent effectivement dans le système (D) celles des variables x_1, \dots, x_n qui ne s'y trouveraient pas.

Supposons que, dans l'une au moins des solutions de ce système (D), la valeur de l'une au moins des inconnues satisfasse au système complet (A). On pourra, par des calculs d'élimination, obtenir un ou plusieurs systèmes définissant cette ou ces inconnues seules, et tels que, dans toute solution de chacun de ces nouveaux systèmes (D'), les valeurs des inconnues satisfassent à (A). Si, dans l'un de ces systèmes (D'), les valeurs des inconnues étaient, nécessairement, des fonctions de x_1, \dots, x_n non indépendantes, on le reconnaîtrait à ce que les équations obtenues en égalant à zéro certains déterminants fonctionnels seraient des conséquences des équations de ce système (D'). On éliminerait alors de nouveau certaines des inconnues de manière à éviter cette circonstance, tout en conservant le plus grand nombre possible de fonctions inconnues.

Enfin, dans l'un quelconque des systèmes (D'') ainsi obtenus, on pourra, s'il contient moins de p fonctions inconnues, par exemple si les inconnues qui y figurent sont $z_1, \dots, z_{p'}$ ($p' < p$), leur adjoindre des inconnues nouvelles $z_{p'+1}, \dots, z_p$, en ajoutant aux équations du système les équations

$$(78) \quad M_k z_j = 0 \quad (j = p'+1, \dots, p; k = 1, 2, \dots, q).$$

De plus, si le système dépend de variables indépendantes autres que x_1, \dots, x_n , on considérera le système (A) comme dépendant aussi de ces autres variables, qui en seront seulement des solutions particulières.

On voit ainsi que pour étudier quelles sont, au point de vue de la réductibilité, telle que nous l'avons définie, les conséquences de l'existence d'un ou de plusieurs systèmes rationnels (D), nous pour-

rons nous borner au cas des systèmes rationnels, à p variables dépendantes z_1, \dots, z_p , et à n variables indépendantes x_1, \dots, x_n , qui satisfont aux conditions suivantes : 1° les équations

$$(79) \quad M_k z_h = 0 \quad (h = 1, 2, \dots, p; k = 1, 2, \dots, q),$$

sont des conséquences des équations du système ; 2° les équations du système n'ont pas comme conséquence l'équation

$$(80) \quad \frac{\partial(z_1, \dots, z_p)}{\partial(x_1, \dots, x_p)} = 0.$$

Un tel système sera appelé un *système auxiliaire* du système (A), et sera désigné par la lettre (S). Bien entendu, ses équations sont supposées compatibles.

Remarquons que la connaissance d'une seule *solution fondamentale* de (S), c'est-à-dire d'une solution qui ne satisfait pas à l'équation (80), fournit l'intégration complète de (A) ; mais que la connaissance d'un système fondamental de solutions de (A) n'entraîne pas, en général, l'intégration du système (S).

23. Si, dans les équations d'un système auxiliaire (S), on effectue, sur les variables indépendantes, une des transformations du groupe (g), le système reste invariant, car chaque solution de ce système, étant composée de solutions de (A), c'est-à-dire d'invariants de (g), demeure séparément invariante. Donc le plus grand sous-groupe de (G) laissant invariant un système auxiliaire (relativement aux variables indépendantes) est un groupe intermédiaire (h). Et si le système auxiliaire est rationnel, les équations de définition de ce groupe, qu'on appellera son groupe intermédiaire, sont aussi rationnelles.

Parmi les systèmes automorphes (s) qui correspondent au groupe intermédiaire (h) du système (S) considéré, il y en a un qui admet une solution principale particulière quelconque, déterminée, de (S) (Cf. n° 11). Considérons-le ; ses autres solutions proviennent de cette solution particulière quand on y effectue, sur les variables indépendantes, les transformations de (h). Or ces transformations changent

toute solution de (S) en une solution de (S). Donc toutes les solutions du système (s) considéré appartiennent à (S).

A vrai dire, le raisonnement précédent ne s'applique qu'aux solutions fondamentales. Mais il en résulte que les équations de (S) sont, au point de vue algébrique, des conséquences des équations de (s), différenciées autant qu'il est nécessaire, puisque les premières admettent toutes les solutions des secondes qui ne satisfont pas à l'équation (80). Elles en sont donc, *a fortiori*, des conséquences au point de vue différentiel ; c'est-à-dire que toute solution de (s) est bien une solution de (S).

De là résulte que *la solution générale d'un système auxiliaire (S) a un degré de généralité au moins égal à celui de la solution générale de tout système automorphe (s) associé au groupe intermédiaire (h) de (S) ; pour qu'elle ait exactement le même degré de généralité, il faut et il suffit que (S) soit l'un de ces systèmes automorphes (s).*

Observons de plus que si (S) est rationnel, il en est de même des équations de définition de son groupe intermédiaire, et, par conséquent, tout système principal (s_0), attaché à (h), est aussi rationnel [n° 11].

De là : *Tout système auxiliaire rationnel, dont la solution générale a le degré de généralité minimum, est un système automorphe, dont le groupe intermédiaire est le groupe spécifique, et dont le groupe associé est groupe de rationalité.*

De là résulte la définition du groupe de rationalité, adoptée dans les travaux antérieurs, conformément aux idées de M. Drach (1). Elle est de plus complétée ici par l'introduction du groupe spécifique.

Notons aussi que, *parmi les systèmes auxiliaires rationnels minimums, figurent tous les systèmes automorphes principaux attachés au groupe spécifique.*

24. Il est nécessaire de faire quelques remarques au sujet des opérations préliminaires effectuées au n° 22. Car les résultats que nous venons d'obtenir n'ont, jusqu'ici, de fondement et de sens précis que si le nombre des variables indépendantes reste fixe.

(1) Cf. P. PAINLEVÉ, *Comptes rendus Ac. Sc. Paris*, t. CXXXV, p. 421. — E. VESSIOT, *Ann. Éc. Normale*, 1904, p. 72, 79. — J. DRACH, *Comptes rendus Ac. Sc. Paris*, t. 151, 1910, p. 192.

Examinons donc ce qui se passe lorsqu'on adjoint aux variables x_1, \dots, x_n figurant dans le système complet (A) des variables nouvelles t_1, \dots, t_s . Pour faciliter le langage, nous désignerons le système (A) par (A') lorsqu'on l'envisage à ce point de vue nouveau. Au système principal de solutions de (A) que nous supposons représenté par les équations (5) correspond, pour (A'), le système principal

$$(81) \quad \begin{cases} z_h = v_h(x) & (h = 1, 2, \dots, p), \\ u_l = t_l & (l = 1, 2, \dots, s). \end{cases}$$

Imaginons le système automorphe principal (s'_0) qui correspond pour (A') à son groupe spécifique (h') et admet cette solution (81). Cette solution satisfaisant aux équations rationnelles

$$(82) \quad \frac{\partial z_h}{\partial t_l} = 0 \quad (h = 1, 2, \dots, p; l = 1, 2, \dots, s).$$

celles-ci sont des conséquences des équations de (s'_0) ; sans quoi, en les associant aux équations de ce système, on obtiendrait un système auxiliaire compatible, dont la solution générale aurait un degré de généralité moindre que celle de (s'_0) , ce qui est impossible, puisque (s'_0) correspond par hypothèse au groupe spécifique (n° 23).

Pour une raison analogue, les équations

$$(83) \quad u_l = t_l$$

sont des conséquences des équations de (s'_0) ; et, comme elles déterminent entièrement les inconnues u_l , ce sont les seules conséquences de (s'_0) , distinctes entre elles et ne contenant que ces inconnues.

Cela posé, imaginons une transformation quelconque

$$(84) \quad \begin{cases} z'_h = F_h(z_1, \dots, z_p, u_1, \dots, u_s) & (h = 1, 2, \dots, p), \\ u'_l = G_l(z_1, \dots, z_p, u_1, \dots, u_s) & (l = 1, 2, \dots, s). \end{cases}$$

du groupe $(\overline{\tau}_l')$, associé au système (s'_0) . Les fonctions

$$(85) \quad \begin{cases} z_h = F_h(v_1, \dots, v_p, t_1, \dots, t_s) & (h = 1, 2, \dots, p), \\ u_l = G_l(v_1, \dots, v_p, t_1, \dots, t_s) & (l = 1, 2, \dots, s), \end{cases}$$

constituent une solution de (s'_0) . Les p premières de ces fonctions,

satisfaisant aux équations (82), ne peuvent dépendre de t_1, \dots, t_s . Or, pour $x_{p+k} = x_{p+k}^0$ ($k = 1, 2, \dots, q$), elles se réduisent aux fonctions $F_h(x_1, \dots, x_p, t_1, \dots, t_s)$; donc les F_h ne peuvent dépendre de la seconde série de variables u_1, \dots, u_s . Pour une raison analogue, chaque fonction G_l se réduit à la variable u_l correspondante. Et la transformation générale du groupe (γ'_{10}) est de la forme

$$(86) \quad \begin{cases} z'_h = f_h(z_1, \dots, z_p) & (h = 1, 2, \dots, p), \\ u'_l = u_l & (l = 1, 2, \dots, s). \end{cases}$$

Telle est donc la forme type du groupe de rationalité de (A') , les équations

$$(87) \quad z_h = f_h(z_1, \dots, z_p) \quad (h = 1, 2, \dots, p)$$

étant les équations générales d'un groupe (η_0) de l'espace \mathcal{E}_p .

Introduisant alors, comme au n° 18, les invariants différentiels Γ_μ de ce groupe (η_0) et adjoignant aux équations (69) les équations (82) et (83), on pourra reprendre les raisonnements de ce n° 18. La transformation canonisante qui interviendra sera seulement

$$(88) \quad \begin{cases} y_h = v_h(x) & (h = 1, 2, \dots, p), \\ y_{p+k} = x_{p+k} & (k = 1, 2, \dots, q), \\ t_l = t_l & (l = 1, 2, \dots, s); \end{cases}$$

et, comme elle n'altère pas les équations (82) et (83), on obtiendra, pour le système (s'_0) , la forme

$$(89) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Gamma_\mu(z_1, \dots, z_p \mid \dots, \frac{\partial^{\beta_1 + \dots + \beta_p} z_h}{\partial x_1^{\beta_1} \dots \partial x_p^{\beta_p}}, \dots) = \omega_\mu(x_1, \dots, x_n) \quad (\mu = 1, 2, \dots, m), \\ \mathbf{M}_k z_h = 0 \quad (h = 1, 2, \dots, p; k = 1, 2, \dots, q), \\ \frac{\partial z_h}{\partial t_l} = 0 \quad (h = 1, 2, \dots, p; l = 1, 2, \dots, s), \\ u_l = t_l \quad (l = 1, 2, \dots, s). \end{array} \right.$$

Or, si l'on fait abstraction des inconnues u_l , ce système a les mêmes solutions que le système (73), qui est rationnel en même temps que lui, et est, pour (A) , un système automorphe (s_0) , ayant le groupe (η_0) pour groupe associé.

Réciproquement, au système automorphe principal (s_0) , qui correspond, pour (A), à son groupe spécifique, et qu'on peut supposer représenté par les équations (73), correspond, par concordance des notations, le système automorphe (s'_0) , représenté par les équations (89), qui est, pour (A'), un système auxiliaire, et qui est rationnel.

On conclut de là que cette correspondance a nécessairement lieu entre les systèmes automorphes qui ont pour groupes associés les groupes principaux de rationalité de (A') et (A) : c'est-à-dire que *les groupes de rationalité eux-mêmes se correspondent, comme les groupes (η'_0) et (η_0) représentés par les équations (86) et (87)*.

Donc, quand on passe du groupe de rationalité de (A) à celui de (A'), la loi d'échange des caractéristiques de (A) n'est pas altérée. On peut dire, d'une manière abrégée, que *le groupe de rationalité n'a pas changé : il est seulement interprété dans un espace à un plus grand nombre de dimensions*.

De là résulte qu'il est inutile, au point de vue de la théorie de la réductibilité, de faire intervenir des systèmes auxiliaires où figureraient des variables indépendantes autres que celles qui figurent dans les équations du système complet (A) donné.

25. Notons quelques conséquences des considérations utilisées au n° 23, en ce qui concerne la *nature des systèmes auxiliaires*.

D'abord, pour qu'un système auxiliaire soit automorphe, il faut et il suffit que son groupe intermédiaire (h) échange transitivement les solutions fondamentales de ce système.

Dans le cas contraire, ces solutions fondamentales se répartissent entre divers systèmes automorphes, ayant tous (h) pour groupe intermédiaire. Chacun d'eux est donc de la forme (51), où les G_μ peuvent être considérés comme connus, tandis que les θ_μ restent à déterminer. Pour cela on exprimera : 1° que le système (51) est en involution ; 2° que les équations du système auxiliaire (S) considéré sont, en $x_1, \dots, x_n, \dots, \frac{\partial^{\beta_1 + \dots + \beta_p} z_h}{\partial x_1^{\beta_1} \dots \partial x_p^{\beta_p}}, \dots$, des conséquences des équations (51), différenciées, s'il y a lieu. Cela donnera, pour déterminer les fonctions θ_μ , un système différentiel (Σ) .

Réciproquement, tout système différentiel (Σ) entre les fonctions θ_μ et les variables z_1, \dots, z_p , comprenant les conditions d'intégrabilité du système (51), et intégrable lui-même, donnera, par élimination des variables θ_μ entre ses équations et les équations (51), un système auxiliaire (S).

Au point de vue rationnel, si les équations (S) sont rationnelles, les équations (Σ) le sont aussi. Pour la réciproque, il faut supposer que non seulement les équations (Σ) , mais aussi les équations de définition du groupe intermédiaire (h) que l'on introduira, soient rationnelles.

26. Essayons encore de préciser la *forme analytique des systèmes auxiliaires*. Remarquons d'abord que, les équations (79) devant être une conséquence des équations d'un tel système (S), on peut supposer qu'elles y figurent effectivement et s'en servir pour faire disparaître, des équations restantes, tout signe de différentiation par rapport aux variables x_{p+1}, \dots, x_n . Tout système auxiliaire (S) est donc formé par l'adjonction des équations (79), à un système de la forme

$$(90) \quad F_\mu \left(x_1, \dots, x_n \mid z_1, \dots, z_p \mid \dots, \frac{\partial^{\beta_1 + \dots + \beta_p} z_h}{\partial x_1^{\beta_1} \dots \partial x_p^{\beta_p}}, \dots \right) = 0 \quad (\mu = 1, 2, \dots, m);$$

et l'on peut supposer que ce système (90) est en involution, quand on y considère les variables x_{p+1}, \dots, x_n comme des constantes paramétriques.

De plus, le système (S), ainsi formé, admet le groupe (g) et, par conséquent, admet chaque transformation Lf de la forme (19).

Réciproquement, supposons qu'un système (S), formé de la même manière, admette les q transformations infinitésimales $L_k f$, qui constituent les premiers membres des équations du système complet (A), sous l'une quelconque des formes équivalentes de ce système (A). Et appliquons-lui une transformation canonisante (11) quelconque. Les équations (90) donneront un autre système en involution

$$(91) \quad F'_\mu \left(y_1, \dots, y_n \mid z_1, \dots, z_p \mid \dots, \frac{\partial^{\beta_1 + \dots + \beta_p} z_h}{\partial y_1^{\beta_1} \dots \partial y_p^{\beta_p}}, \dots \right) = 0 \quad (\mu = 1, 2, \dots, m).$$

Les $\Lambda_k f$ prendront la forme (16) : désignons par

$$(92) \quad \Lambda_k f = \sum_{j=1}^q a_{kj}(y_1, \dots, y_n) \frac{df}{dy_{p+j}} \quad (k = 1, 2, \dots, q)$$

leurs nouvelles expressions. Enfin, les équations (79) se réduisent à

$$(93) \quad \frac{\partial z_h}{dy_{p+k}} = 0 \quad (h = 1, 2, \dots, p; k = 1, 2, \dots, q).$$

Et le système formé des équations (91), (93) admettra chacune des transformations infinitésimales $\Lambda_k f$. Voyons ce qu'on en peut conclure.

Nous remarquons, à cet effet, les identités

$$(94) \quad \frac{\partial}{\partial y_i} \Lambda_k f = \sum_{j=1}^q \frac{\partial a_{kj}}{\partial y_i} \frac{df}{dy_{p+j}} + \Lambda_k \frac{df}{dy_i} \quad (k = 1, 2, \dots, q; i = 1, 2, \dots, n),$$

qui montrent que, si une fonction de y_1, \dots, y_n reste invariante par les transformations infinitésimales (92), chacune de ses dérivées du premier ordre, et par conséquent ses dérivées de tous ordres, ont la même propriété d'invariance. Dès lors, si l'on calcule les quantités $\Lambda_k F'_\mu$, en tenant compte des équations (93), qui équivalent à $\Lambda_k z_h = 0$ ($k = 1, 2, \dots, q; h = 1, 2, \dots, p$), elles se réduisent à

$$(95) \quad \sum_{j=1}^q \frac{\partial F'_\mu}{\partial y_{p+j}} a_{kj}((y)) \quad (k = 1, 2, \dots, q; \mu = 1, 2, \dots, m);$$

et, en exprimant qu'elles sont nulles, moyennant les équations de (S), on exprime que les équations

$$(96) \quad \frac{\partial F'_\mu}{\partial y_{p+j}} = 0 \quad (\mu = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, q)$$

sont des conséquences des équations (91). On peut donc supposer ces équations (91) écrites sous une forme telle que les variables y_{p+1}, \dots, y_n n'y figurent pas.

Elles sont donc compatibles avec les équations (93); et la solution

générale du système (91) et (93) ne diffère pas de la solution générale du système (91) seul.

En résumé, pour qu'un système (90), en involution par rapport aux variables x_1, \dots, x_p , forme, avec les équations $M_k z_h = 0$ ($k = 1, 2, \dots, q$; $h = 1, 2, \dots, p$), un système auxiliaire du système (A), il est nécessaire et suffisant que le système ainsi obtenu admette q transformations infinitésimales de la forme $L_1 f, \dots, L_q f$. Dans ce cas, le système obtenu a le même degré de généralité que le système (90) lui-même, considéré comme à p variables indépendantes.

Remarquons encore que, si l'on veut exprimer que le système (S) considéré admet les transformations infinitésimales $M_k f$ ($k = 1, 2, \dots, q$), on aura seulement à exprimer que le système (90), pris isolément, admet ces transformations; car, dans les formules de prolongement qui interviendront, ne figurera aucun des indices de dérivation x_{p+1}, \dots, x_n , en ce qui concerne les dérivées des z_h .

27. Appliquons ces résultats au système (73), de manière à obtenir les systèmes résolvants définissant les ω_μ . (Voir n° 11.)

Nous aurons d'abord à écrire les conditions d'intégrabilité du système

$$(97) \quad \Gamma_\mu \left(z_1, \dots, z_p \left| \dots, \frac{\partial^{\beta_1 + \dots + \beta_p} z_h}{\partial x_1^{\beta_1} \dots \partial x_p^{\beta_p}}, \dots \right. \right) = \omega_\mu(x_1, \dots, x_n) \quad (\mu = 1, 2, \dots, m)$$

considéré comme aux variables indépendantes x_1, \dots, x_p seulement. On obtient ainsi le système qui définit les divers groupes qui appartiennent au même type que le groupe $(\overline{\eta})$ dont les Γ_μ sont les invariants fondamentaux ⁽¹⁾.

(1) Voir *Annales de l'Éc. Norm. sup.*, 1903, p. 436; 1904, p. 58. — Ces conditions expriment que la multiplicité $u_\mu = \mathfrak{S}_\mu(x_1, \dots, x_p)$ ($\mu = 1, 2, \dots, m$) correspondant aux équations (68) de $(\overline{\eta})$, est homologue de la multiplicité $u_\mu = \omega_\mu(x_1, \dots, x_n)$ ($\mu = 1, 2, \dots, m$), relativement au groupe obtenu en prolongeant le groupe

$$x'_h = \varphi_h(x_1, \dots, x_n) \quad (h = 1, 2, \dots, p), \quad x'_{p+k} = x_{p+k} \quad (k = 1, 2, \dots, q),$$

suivant les variables $u_\mu = \Gamma_\mu \left(z_1, \dots, z_p \left| \dots, \frac{\partial^{\beta_1 + \dots + \beta_p} z_h}{\partial x_1^{\beta_1} \dots \partial x_p^{\beta_p}}, \dots \right. \right)$ ($\mu = 1, 2, \dots, m$).

Et le système automorphe (s) fournit les transformations de ce groupe permettant de

Il faut y joindre les conditions qui expriment que ce système (97) admet chacune des transformations infinitésimales $M_k f$. Or, pour une telle transformation, les Γ_μ gardent leur propriété d'invariance, relativement au groupe (η) : il existe donc des identités de la forme

$$(98) \quad M_k \Gamma_\mu = \mathfrak{R}_{k,\mu}(\Gamma_1, \dots, \Gamma_m | x_1, \dots, x_n) \quad \left(\begin{array}{l} k = 1, 2, \dots, q \\ \mu = 1, 2, \dots, m \end{array} \right).$$

Et les conditions cherchées seront, par suite

$$(99) \quad M_k \omega_\mu = \mathfrak{R}_{k,\mu}(\omega_1, \dots, \omega_m | x_1, \dots, x_n) \quad (k = 1, 2, \dots, q; \mu = 1, 2, \dots, m).$$

Ainsi seront formés les systèmes résolvants dont les solutions rationnelles caractérisent le degré de réductibilité du système complet (A).

28. Avant d'envisager un nouvel aspect de la réductibilité, faisons encore la remarque suivante : notre première définition de la réductibilité, au moyen du groupe spécifique, s'applique indifféremment au système complet (A), ou au système d'équations de Pfaff (B), qui en définit les caractéristiques. Car les mêmes groupes ponctuels en x_1, \dots, x_n laissent invariant l'un ou l'autre de ces systèmes.

Pour la théorie actuelle, fondée sur la considération des systèmes auxiliaires, il faut en modifier légèrement la forme, pour l'appliquer directement aux systèmes de Pfaff complètement intégrables, tels que (B).

On considérera, par exemple, les variables x_1, \dots, x_p comme des fonctions de x_{p+1}, \dots, x_n , et de p autres variables indépendantes z_1, \dots, z_p , qui ne sont autre chose que les constantes d'intégration. Cela revient, par rapport au point de vue précédent, à un changement de variables. Dans le système de variables : $x_1, \dots, x_p; x_{p+1}, \dots, x_n; z_1, \dots, z_p$, on considérerait les n premières comme variables indépen-

passer de l'une de ces multiplicités à l'autre, ce qui donne une nouvelle interprétation des systèmes automorphes attachés aux groupes intermédiaires : ils définissent les formules de passage des groupes (h) aux groupes $(\bar{\eta})$ correspondants. Enfin les équations (99) expriment que les $M_k f$, prolongées de la même manière, laissent invariante la multiplicité $\omega_\mu = \omega_\mu(x_1, \dots, x_n)$ qui caractérise le groupe (h) .

dantes ; tandis que, maintenant, ce sont les n dernières qui jouent ce rôle.

Les systèmes auxiliaires rationnels se correspondent, par ce changement de variables, dans les deux cas. Les groupes intermédiaires qui les laissent invariants ne changent pas, le groupe de rationalité reste du même type.

Remarquons encore que le fait que, parmi les systèmes auxiliaires de degré de généralité minimum, en figure toujours un qui admet une solution principale arbitraire, revient ici au suivant : *On peut se borner à considérer la manière dont p des variables dépendent des q autres, et de leurs propres valeurs initiales ; c'est dans la nature des relations différentielles auxiliaires rationnelles auxquelles elles peuvent satisfaire, comme fonctions de ces valeurs initiales, et, plus spécialement, dans celles qui leur laisseraient le degré d'indétermination minimum, que réside le caractère spécial d'un système réductible.*

Ce fait est à rapprocher de ce qui se passe quand on étudie les intégrales des équations différentielles ordinaires au point de vue de la théorie des fonctions. Ce dernier point de vue pourrait, du reste, dans une certaine mesure, être rattaché à celui de la réductibilité, en donnant au mot *rationnel* une acception convenable.

V. — La réductibilité et le système complet prolongé.

29. D'après ce que nous avons vu au n° 12, la détermination du groupe spécifique d'un système complet (A) donné est liée à la recherche de certaines fonctions différentielles rationnelles de la forme

$$(100) \quad G_p \left(x_1, \dots, x_n \left| \dots, \frac{\partial^{\beta_1 + \dots + \beta_p} z_p}{\partial x_1^{\beta_1} \dots \partial x_p^{\beta_p}}, \dots \right. \right).$$

Ces fonctions sont, en particulier, des invariants différentiels pour chacune des transformations infinitésimales $M_k f$, qui, égalées à zéro, donnent le système complet sous sa forme résolue (3). Soit $M_k^{(2)} f$ la transformation infinitésimale qu'on déduit de $M_k f$ en la prolongeant, relativement aux dérivées prises par rapport aux variables x_1, \dots, x_p ,

de p variables non transformées z_1, \dots, z_p , ce prolongement étant poussé jusqu'aux dérivées d'ordre δ . Et désignons par $(A^{(\delta)})$ le système complet obtenu en égalant à zéro les k transformations infinitésimales prolongées $M_k^{\delta} f$: c'est ce que nous appellerons, pour abréger, le système (A) prolongé jusqu'à l'ordre δ .

Les invariants G_μ sont des solutions de l'un de ces systèmes $(A^{(\delta)})$.

Réciproquement, si l'on considère un nombre quelconque m de solutions G_μ de l'un de ces systèmes prolongés, et si l'on écrit les équations

$$(101) \quad G_\mu \left(x_1, \dots, x_n \left| \dots, \frac{\partial^{\beta_1 + \dots + \beta_p} z_h}{\partial x_1^{\beta_1} \dots \partial x_p^{\beta_p}}, \dots \right. \right) = \theta_\mu(z_1, \dots, z_p) \quad (\mu = 1, 2, \dots, m),$$

en choisissant, pour les fonctions $\theta_\mu(x_1, \dots, x_p)$, les fonctions auxquelles se réduisent les G_μ quand on y fait $x_{p+k} = x_{p+k}^0$ ($k = 1, 2, \dots, q$) et $z_h = x_h$ ($h = 1, 2, \dots, p$); le système ainsi obtenu est compatible. Car, d'après le raisonnement des nos 12 et 13, on obtient ainsi le système de la forme (101), qui admet comme solution le système principal de solutions correspondant aux valeurs initiales $x_{p+k} = x_{p+k}^0$ ($k = 1, 2, \dots, q$).

De plus, le système (101) admet les transformations infinitésimales $M_k f$, puisque les deux membres sont des invariants pour ces transformations.

Il existe donc un système différentiel en involution qu'on peut déduire de ce système (101) par des différentiations, s'il y a lieu, et qui admettra, comme lui, les transformations infinitésimales $M_k f$. Et en lui adjoignant les équations $M_k z_k = 0$, pour $h = 1, 2, \dots, p$; $k = 1, 2, \dots, q$, on obtiendra un système auxiliaire (S) du système complet donné (A) (Cf. n° 25).

Si les G_μ considérés sont rationnels, il en sera de même des équations de ce système auxiliaire (S); de sorte que toutes les solutions du système automorphe principal (s_0), attaché au groupe spécifique, et admettant la solution principale considérée, appartiennent à ce système (S) (Cf. n° 23). Dans les équations de ce système automorphe figurent donc tous les invariants différentiels rationnels des transformations infinitésimales $M_k f$, jusqu'à l'ordre différentiel maximum des équations de ce système, ramené à être en involution.

On voit ainsi que le mode particulier de réductibilité d'un système complet (A) donné est déterminé par l'ensemble des solutions rationnelles des systèmes complets prolongés (A⁽²⁾) issus de ce système (A), c'est-à-dire par les invariants différentiels rationnels des transformations infinitésimales $M_k f$, qui appartiennent au type (100).

Remarquons que, par des raisonnements semblables à ceux du n° 26, on pourrait, dans ce qui précède, substituer, à la forme (3) du système (A), sa forme générale (1). Mais il faudrait alors faire intervenir des invariants de la forme plus générale T_ρ , introduite dans les équations (44).

Il peut être, également, intéressant de se placer au point de vue examiné au n° 28. Il suffira, pour cela, d'imaginer qu'on prolonge les transformations infinitésimales $M_k f$, non plus suivant les dérivées $\frac{\partial^{\beta_1+\dots+\beta_p} z_h}{\partial x_1^{\beta_1} \dots \partial x_p^{\beta_p}}$ des variables z_1, \dots, z_p considérées comme fonctions de $x_1, \dots, x_p, \dots, x_n$, mais suivant les dérivées, prises par rapport à z_1, \dots, z_p , des variables x_1, \dots, x_p considérées comme fonctions de x_{p+1}, \dots, x_n et de z_1, \dots, z_p . Les dérivées considérées dans le premier cas s'expriment rationnellement au moyen des dérivées considérées dans le second cas, et réciproquement; car les variables x_{p+1}, \dots, x_n sont traitées, dans les deux cas, comme des constantes. De sorte que les invariants différentiels rationnels se correspondront dans les deux cas au moyen de ce changement de variables rationnel, portant sur les nouvelles variables introduites par le prolongement (1).

(1) Cette correspondance montre que de tout invariant G_μ , on en déduit d'autres par l'application répétée des *paramètres différentiels* qui équivalent aux opérations

$$\frac{d}{dz_h} \quad (h = 1, 2, \dots, p).$$

Quand on différencie le système (101), pour en déduire un système en involution, on peut se borner à différencier par rapport à x_1, \dots, x_p ; et cela équivaut à appliquer les opérations définies ici.

On ne doit donc considérer des invariants G_μ comme indépendants que si aucun d'eux ne peut s'exprimer en fonction des autres et de ceux qui s'en déduisent par les paramètres différentiels en question.

Et l'on voit de plus que le nombre des invariants G_μ , INDÉPENDANTS, qui peuvent se trouver rationnels, est limité.

Or le prolongement employé ici donne, pour déterminer les invariants différentiels, les systèmes complets équivalents aux systèmes de Pfaff définissant, en même temps que les variables x_1, \dots, x_p , considérées comme fonctions de x_{p+1}, \dots, x_n , les dérivées de x_1, \dots, x_p par rapport aux constantes arbitraires d'intégration. On peut donc énoncer le résultat suivant : *Si l'on considère x_1, \dots, x_p comme des fonctions inconnues de x_{p+1}, \dots, x_n et des p constantes d'intégration z_1, \dots, z_p , et si l'on imagine les systèmes de Pfaff (complètement intégrables) qui définissent, comme fonctions de x_{p+1}, \dots, x_n , les x_1, \dots, x_p en même temps que leurs dérivées prises par rapport aux constantes d'intégration, le mode particulier de réductibilité du système de Pfaff (B) donné est caractérisé par les intégrales premières rationnelles de ces systèmes de Pfaff, issus ainsi du système donné (par voie de prolongement).*

Quel que soit celui des deux points de vue adopté, on voit que la détermination du groupe spécifique et du groupe de rationalité revient à la recherche des solutions rationnelles de certains systèmes complets.

30. Revenons aux systèmes complets prolongés ($A^{(h)}$). Nous allons voir qu'il y a équivalence complète, au point de vue de l'intégration, entre le système complet (A) et l'un quelconque des systèmes prolongés ($A^{(h)}$) qu'on en peut déduire.

Pour la commodité de l'exposition, nous examinerons seulement le cas où l'on prolonge jusqu'au premier ordre; mais la démonstration se ferait d'une manière analogue pour le prolongement jusqu'à un ordre quelconque. Et l'on pourrait aussi employer le mode de raisonnement de proche en proche.

Soit donc ($A^{(1)}$) le système prolongé au premier ordre, où figureront, par conséquent, les variables nouvelles $z_{hl} = \frac{\partial z_h}{\partial x_l}$ ($h, l = 1, 2, \dots, p$). Il est clair que si ($A^{(1)}$) est intégré, (A) l'est aussi, puisque les solutions de (A) sont celles des solutions de ($A^{(1)}$) qui ne dépendent pas des variables z_{hl} . Vérifions l'exactitude de la réciproque.

Posons, pour cela

$$(102) \quad z_h = \varphi_h(v_1(x), \dots, v_p(x)) \quad (h = 1, 2, \dots, p),$$

les v_h étant toujours un système fondamental de solutions de (A) et

les φ_h étant des fonctions arbitraires de leurs arguments. Ces équations admettant les transformations infinitésimales $M_k f$, les équations qu'on en déduit par différentiation admettront les transformations prolongées $M_k^{(1)} f$: ce sont

$$(103) \quad z_{hl} = \sum_{j=1}^p \frac{\partial \varphi_h}{\partial v_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_l} \quad (h, l = 1, 2, \dots, p).$$

En résolvant ce système par rapport aux dérivées $\frac{\partial \varphi_h}{\partial v_j}$, il prend la forme

$$(104) \quad V_{hj} \left(\dots, \frac{\partial v_j}{\partial x_l}, \dots \right) = \frac{\partial z_{hl}}{\partial v_j} \quad (h, j = 1, 2, \dots, p);$$

et à cause de la nature, indéterminée, des fonctions φ_h , l'invariance de ce système entraîne celle des fonctions V_{hj} . Ces fonctions sont donc des solutions de $(A^{(1)})$ et forment, avec les v_h , un système fondamental de solutions de ce système.

On pourrait craindre cependant que les solutions de $(A^{(1)})$, ainsi obtenues, ne fussent pas indépendantes. Mais si l'on suppose, par exemple, que les v_h constituent, pour (A) , le système principal de solutions qui correspond aux valeurs initiales $x_{p+h} = x_{p+h}^0$ ($h = 1, 2, \dots, q$), on a, pour ces mêmes valeurs initiales, $\frac{\partial v_j}{\partial x_l} = \varepsilon_{jl}$, ε_{jl} étant égal à zéro ou à un, suivant que j et l sont inégaux ou égaux. Alors les formules (103) se réduisent à $z_{hl} = \frac{\partial \varphi_h}{\partial v_l}$; et, à cause des formules (104), V_{hl} se réduit à z_{hl} .

Donc, dans ce cas, les V_{hj} forment avec les v_h le système principal des solutions de $(A^{(1)})$, qui correspond aux valeurs initiales considérées.

31. Étudions maintenant ce qui se passe, au point de vue du groupe spécifique et du groupe de rationalité, quand on passe de (A) à $(A^{(1)})$. Soient (h) le groupe spécifique de (A) et (γ_0) le groupe de rationalité principal, qui correspond au système principal v_h ($h = 1, 2, \dots, p$) que nous venons de considérer. Utilisant la remarque du n° 14, substituons à (h) son plus grand sous-groupe (h'') , dont les transformations sont de la forme (57). Soient $(h^{(1)})$ et $(\gamma_0^{(1)})$ les groupes qui pro-

viennent de (h'') et de (η_0) par le mode de prolongement qui fait passer de (A) à $(A^{(1)})$.

Le groupe $(h^{(1)})$ se déduit de (h'') en adjoignant, à ses équations de définition, les équations

$$(105) \quad z_{hl} = \sum_{j=1}^p \frac{\partial x'_j}{\partial x_l} z'_{hj} \quad (h, l = 1, 2, \dots, p).$$

On obtient ces équations en différentiant les identités $z'_h = z_h$ ($h = 1, 2, \dots, p$), qui traduisent l'invariance supposée des variables z_h , et en tenant compte de ce que les dérivées $\frac{\partial x'_{p+k}}{\partial x_l}$ ($k = 1, 2, \dots, q$; $l = 1, 2, \dots, p$) sont nulles (Cf. n° 12).

On déduit $(\eta_0^{(1)})$ de (η_0) par l'adjonction des mêmes équations (105), écrites en remplaçant les lettres x par les lettres γ correspondantes. Mais il sera préférable d'imaginer qu'on emploie, dans les équations de (η_0) , les lettres x_1, \dots, x_p ; x'_1, \dots, x'_p au lieu des lettres $\gamma_1, \dots, \gamma_p$; $\gamma'_1, \dots, \gamma'_p$; et alors les équations (105) elles-mêmes interviendront dans le passage de (η_0) à $(\eta_0^{(1)})$.

Si l'on se rappelle alors que (η_0) , avec ces notations, se déduit de (h) et par conséquent de (h'') , en assujettissant les variables x_{p+k} ($k = 1, 2, \dots, q$) à rester invariantes et à prendre les valeurs constantes x_{p+k}^0 respectivement (Cf. n° 9), on constate que $(\eta_0^{(1)})$ se déduit de $(h^{(1)})$ par le même procédé, puisque cette hypothèse particulière, faite sur les variables x_{p+k} seules, n'a aucune influence sur les formules (105).

Cela posé, nous pouvons, conformément au théorème du n° 16, fonder le caractère de réductibilité du système $(A^{(1)})$ sur la seule considération des groupes en x_1, \dots, x_n prolongés, au lieu d'introduire les groupes ponctuels en x_i et z_{hl} les plus généraux. Car le plus grand groupe en x_1, \dots, x_n , prolongé, qui laisse $(A^{(1)})$ invariant, a ses équations de définition rationnelles, et contient les transformations infinitésimales prolongées $M_k^{(1)} f$ ($k = 1, 2, \dots, q$). Il peut donc jouer le rôle du groupe (K) considéré au n° 16. On peut même n'introduire, pour les prolonger, que des groupes qui échangent entre elles les variables x_{p+k} ($k = 1, 2, \dots, q$); et, plus spécialement encore, des groupes de transformations de la forme (57). Ces groupes prolongés ne peuvent

alors laisser $(A^{(1)})$ invariant, sans laisser invariante chacune des transformations $M_k^{(1)} f$, c'est-à-dire sans que les groupes dont ils proviennent, par prolongement, laissent invariante chacune des transformations $M_k f$.

On conclut de là que le groupe qui jouera, pour $(A^{(1)})$, le rôle de groupe spécifique, s'obtient en prolongeant le sous-groupe (h'') du groupe spécifique de (A) , introduit au n° 14. Ce sera le groupe $(h^{(1)})$ défini plus haut; et le groupe de rationalité correspondant sera $(\tau_0^{(1)})$.

Donc, les groupes de rationalité principaux d'un système, issu du système complet (A) par voie de prolongement, s'obtiennent en prolongeant les groupes de rationalité principaux de (A) .

En d'autres termes, quand on substitue à (A) l'un quelconque des systèmes prolongés $(A^{(i)})$ qui en dérivent, on n'altère pas la structure des groupes de rationalité.

Comme première conséquence de ce résultat, nous voyons qu'on pourra toujours ramener le cas d'un groupe spécifique quelconque au cas particulier où le groupe spécifique est un groupe intransitif entièrement défini par ses invariants d'ordre zéro.

VI. — Sur la réduction du groupe spécifique, et la méthode d'intégration qui lui correspond.

32. Si l'on suppose connu le groupe spécifique (h) d'un système complet donné (A) , le problème d'intégration, conformément aux idées directrices adoptées au n° 8, s'énoncera ainsi : *Connaissant les équations de définition du groupe (h) , trouver celles de son sous-groupe invariant (g)* . Et en continuant à appliquer ces mêmes idées, on sera conduit à essayer de résoudre ce problème par une succession d'intégrations, aussi simples que possible, dont chacune ait pour effet de remplacer, dans l'énoncé précédent, le groupe (h) par un de ses sous-groupes. L'intégration sera achevée lorsqu'on sera ainsi arrivé, par réduction progressive du groupe spécifique, à ce que ce groupe spécifique soit devenu le groupe (g) lui-même. Comme la modification du groupe spécifique ne peut se produire sans que le domaine de rationalité (\mathfrak{A}) , primitivement considéré, se trouve aussi modifié, c'est

par l'adjonction, à ce domaine (\mathcal{R}), de fonctions obtenues par des intégrations auxiliaires, qu'on devra procéder à chaque étape de la marche ainsi projetée.

Pour préciser la méthode ainsi esquissée, il importe, tout d'abord, de se rendre compte de la structure du groupe (G) et des groupes intermédiaires.

Nous établirons d'abord le théorème suivant : *Tout sous-groupe de (G), qui reste invariant par les transformations de (g), et qui ne se réduit pas à la transformation identique, contient (g), c'est-à-dire est un groupe intermédiaire.*

Il suffira de démontrer ce théorème en supposant (G) et (g) ramenés à leurs formes canoniques respectives (Γ) et (γ) (Cf. nos 3 et 4). Soit donc (Γ') un sous-groupe de (Γ), qui demeure invariant par (γ), et montrons qu'il contient (γ). Supposons, pour cela, le contraire : il ne pourra avoir en commun avec (γ) que la seule transformation identique. Car le plus grand groupe commun à (Γ') et à (γ) est invariant dans (γ), qui est simple : si ce groupe commun n'est pas (γ), il se réduit donc bien à la transformation identique.

Une transformation infinitésimale de (Γ') est donc de la forme (24); mais les fonctions ψ_h n'y peuvent être toutes identiquement nulles, sans qu'il en soit de même des fonctions φ_k .

Cela posé, formons le crochet de cette transformation (24) de (Γ') et de $\frac{\partial f}{\partial y_{p+j}}$, qui appartient à (γ) : le résultat est nul identiquement, parce que les $\frac{\partial f}{\partial y_h}$ disparaissent du résultat, qui doit encore appartenir à (Γ'), par hypothèse. Donc les φ_k ne dépendent que de y_1, \dots, y_p .

Ce premier point acquis, formons encore le crochet de la transformation (24) considérée avec $y_{p+j} \frac{\partial f}{\partial y_{p+1}}$, qui appartient à (γ) : le résultat étant $\varphi_j \frac{\partial f}{\partial y_{p+1}}$, on en conclut, de même, que les φ_j sont nuls identiquement.

Mais si l'on fait alors le crochet de (24), ainsi particularisé, avec $y_p \frac{\partial f}{\partial y_{p+1}}$, on conclut encore que les ψ_h sont nuls aussi identiquement. Le groupe (Γ') ne peut donc, dans l'hypothèse faite, contenir aucune transformation infinitésimale; donc il ne peut contenir aucune constante arbitraire.

Imaginons donc une transformation finie de ce groupe, qui serait de la forme (23), et transformons-la d'abord par la transformation de (γ)

$$(106) \quad y_{p+j} = \bar{y}_{p+j} + c, \quad y_i = \bar{y}_i \quad (i \neq p+j).$$

L'une des équations de la transformation obtenue est

$$(107) \quad \bar{y}'_{p+k} = \varphi_k(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_{h+j} + c, \dots, \bar{y}_n) \quad (k \neq j);$$

et, comme la constante c n'y peut subsister, puisqu'elle doit encore faire partie de (Γ) , on conclut que φ_k ne contient que y_1, \dots, y_p, y_{p+k} . Mais, de plus, si l'on tient compte de ce premier résultat, l'une des équations de la transformation nouvelle est aussi

$$(108) \quad \bar{y}'_{p+j} = \varphi_j(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_p, \bar{y}_{p+j} + c) - c,$$

d'où la condition

$$(109) \quad \frac{\partial \varphi_j}{\partial y_{p+j}} - 1 = 0,$$

c'est-à-dire

$$(110) \quad \varphi_k = y_{p+k} + \chi_k(y_1, \dots, y_p) \quad (k = 1, 2, \dots, q).$$

Transformons maintenant par la transformation de (γ)

$$(111) \quad y_{p+1} = \bar{y}_{p+1} + c\bar{y}_{p+j}, \quad y_i = \bar{y}_i \quad (i \neq p+1);$$

et l'une des équations obtenues étant

$$(112) \quad \bar{y}'_{p+1} = y_{p+1} + \bar{y}_1 - c\bar{y}'_j,$$

nous concluons que les χ_j sont tous identiquement nuls.

Transformons enfin par la transformation de (γ)

$$(113) \quad y_{p+1} = \bar{y}_{p+1} + c\bar{y}_p, \quad y_i = \bar{y}_i \quad (i \neq p+1),$$

et l'une des équations devenant

$$(114) \quad \bar{y}'_{p+1} = \bar{y}_{p+1} + c(\bar{y}_h - \bar{y}_k),$$

nous concluons enfin que les φ_k se réduisent aux y_h . La seule trans-

formation de (Γ) possible, dans l'hypothèse faite, est donc la transformation identique ; et cette hypothèse est à rejeter, ce qui démontre le théorème.

33. De là résulte que *tout sous-groupe invariant d'un groupe intermédiaire est lui-même un groupe intermédiaire.*

Quant au groupe (G) lui-même, nous allons montrer que (g) est son seul sous-groupe invariant, comme nous l'avons annoncé au n° 7.

Il nous suffira encore de raisonner sur (Γ) . Or (Γ) , représenté par les équations (23), est isomorphe au groupe $(\bar{\Gamma})$, représenté par les équations

$$(115) \quad y'_h = \psi_h(y_1, \dots, y_p) \quad (h = 1, 3, \dots, p; \psi_h \equiv \text{fonct. arbit.}),$$

et la transformation identique de $(\bar{\Gamma})$ correspond, dans cet isomorphisme, au sous-groupe (γ) de (Γ) , représenté par les équations (15). Comme $(\bar{\Gamma})$ est simple ⁽¹⁾, (γ) est sous-groupe invariant maximum de (Γ) . De plus (γ) est simple.

Donc *la suite*

$$(116) \quad (G), (g), 1$$

est une suite normale de sous-groupes invariants les uns dans les autres, relative à (G) .

Mais, d'après le théorème du n° 32, tout sous-groupe invariant de (G) , étant invariant en particulier par les transformations de (g) , contient (g) . Il faut donc qu'il se réduise à (G) , ou à (g) , sans quoi (g) ne serait pas sous-groupe invariant maximum.

On remarquera que *la suite (116) est la seule suite normale de sous-groupes de (G) .*

34. Occupons-nous maintenant des moyens d'obtenir une réduction du groupe spécifique. D'après les remarques du n° 29, elle ne peut résulter que de l'*adjonction*, directe ou indirecte, de certains ⁽²⁾ *inva-*

⁽¹⁾ Et même *proprement simple*, suivant la terminologie de M. Cartan (*Annales de l'Éc. Norm. sup.*, 1905, p. 284).

⁽²⁾ C'est-à-dire du type G_p [formule (100)]. On pourrait ici, et dans tout ce qui suivra,

riants différentiels des transformations $M_k f$; ou, ce qui revient au même, de certaines solutions de l'un des systèmes prolongés ($A^{(6)}$). Étudions ce qui se passe lorsqu'on adjoint, directement, certains de ces invariants. Je dis qu'après cette adjonction, le nouveau groupe spécifique sera le plus petit groupe intermédiaire (h_1) contenant le groupe (h_1''), qui est formé de toutes les transformations du groupe spécifique initial laissant invariante chacune des fonctions différentielles que l'on adjoint.

D'abord les équations différentielles de (h_1'') seront rationnelles après l'adjonction, car elles s'obtiennent en associant, aux équations de définition de l'ancien groupe spécifique (h), les équations qui expriment l'invariance des fonctions U_1, \dots, U_s que l'on adjoint; en mettant le système obtenu sous la forme d'un système en involution, on en pourra déduire un système d'invariants fondamentaux de (h_1''), par des calculs rationnels. Tous ces invariants fondamentaux pourront donc être considérés comme adjoints, ainsi que tous ceux qu'on en déduirait par voie de prolongement.

Comme, de plus, ce groupe (h_1'') contient les transformations infinitésimales $M_k f$, on en déduira, par des calculs rationnels, comme il a été expliqué au n° 15, le groupe intermédiaire (h_1) correspondant.

Tout revient donc à prouver que tout invariant différentiel W des $M_k f$, qui se trouve rationnel après l'adjonction de U_1, \dots, U_s , est aussi invariant par le groupe (h_1'').

Soit, en effet, δ l'ordre différentiel de W , que nous supposons, comme U_1, \dots, U_s , du type (100), et soient U_1, \dots, U_l tous les invariants différentiels indépendants et rationnels du groupe (h_k''), appartenant au même type, et d'ordre inférieur ou égal à δ ; on peut même supposer que l'on aille, pour ces invariants, jusqu'à un ordre supérieur à δ , suffisamment élevé; la rationalité de W , après adjonction de U_1, \dots, U_s , doit alors s'exprimer par une formule rationnelle

$$(117) \quad W = F(U_1, \dots, U_l, \dots | x_1, \dots, x_n, \dots).$$

Il est entendu que F peut contenir, outre les quantités indiquées dans

utiliser des invariants du type plus général T_p [équations (44)], et supposer que ce sont des invariants de (\mathcal{G}). Cela permettrait même de simplifier les raisonnements. Mais, pratiquement, le point de vue que nous adoptons est préférable.

la notation employée, les dérivées $\frac{\partial^{\beta_1+\dots+\beta_p} z_h}{\partial x_1^{\beta_1} \dots \partial x_p^{\beta_p}}$, qui jouent, concurremment avec x_1, \dots, x_n , le rôle de variables indépendantes et les dérivées des U_i par rapport à toutes ces variables indépendantes (x_i et dérivées des z_h).

Cela posé, si W n'est pas un invariant différentiel de (h''') , il n'est pas une fonction de U_1, \dots, U_t seuls, et l'on peut considérer un système prolongé $(A^{(\lambda)})$, dont W, U_1, \dots, U_t soient des solutions indépendantes; de sorte que, pour en avoir un système fondamental de solutions, il suffirait de leur associer, le cas échéant, quelques autres solutions W_1, \dots, W_r .

L'identité (117) est donc, pour ce système prolongé $(A^{(\lambda)})$, une relation différentielle rationnelle entre les solutions d'un système fondamental, *avant toute adjonction*, c'est-à-dire dans le domaine de rationalité (\mathfrak{A}) primitif. Et le système

$$(118) \quad \left\{ \begin{array}{l} w = F(u_1, \dots, u_t, \dots, x_1, \dots, x_n, \dots), \\ M_k^{(\lambda)} w = M_k^{(\lambda)} u_\tau = M_k^{(\lambda)} w_\rho = 0 \quad \left(\begin{array}{l} k = 1, 2, \dots, q; \tau = 1, 2, \dots, t \\ \rho = 1, 2, \dots, x \end{array} \right), \end{array} \right.$$

est pour $(A^{(\lambda)})$ un système rationnel (*Cf.* n° 22).

Ce système (118) est donc invariant par le groupe (h) , qui, considéré comme prolongé jusqu'à l'ordre λ , est contenu dans le groupe spécifique de $(A^{(\lambda)})$, et même caractérise entièrement ce groupe spécifique (*Cf.* n° 31). Il est donc, *a fortiori*, invariant par le groupe (h''') , qui est contenu dans (h) . Et si Tf est une transformation infinitésimale quelconque de (h''') , $TF(u_1, \dots, u_s, \dots | x_1, \dots, x_n, \dots)$ sera nul, pourvu qu'on y considère u_1, \dots, u_t comme des variables non transformées, c'est-à-dire qui satisfont aux conditions $Tu_\tau = 0$, ($\tau = 1, 2, \dots, t$), et pourvu que l'on tienne compte aussi des conditions $M_k^{(\lambda)} u_\tau = 0$ ($k = 1, 2, \dots, q; \tau = 1, 2, \dots, t$).

Or ces deux espèces de conditions sont réalisées, si l'on remplace les lettres u_1, \dots, u_t par les invariants U_1, \dots, U_t eux-mêmes. De sorte que Tf laisse invariante la fonction $F(U_1, \dots, U_t, \dots | x_1, \dots, x_n, \dots)$, c'est-à-dire W .

Nous arrivons donc à cette conclusion que W serait invariante par

chaque transformation infinitésimale de (h''_1) , et serait un invariant de ce groupe. L'hypothèse contraire est donc bien impossible.

35. Supposons que le groupe spécifique (h) ne soit pas simple. Et soit (h_1) un sous-groupe invariant maximum de (h) : c'est, comme nous savons, un autre groupe intermédiaire (Cf. n° 33). Nous allons montrer qu'on peut réduire le groupe spécifique (h) à son sous-groupe invariant maximum (h_1) en adjoignant au système de rationalité (\mathfrak{R}) un système fondamental de solutions d'un système complet auxiliaire (A_1) , dont le groupe spécifique est simple.

Nous allons considérer le groupe de rationalité $(\overline{\eta})$ qui correspond à (h) ; et le groupe analogue $(\overline{\eta}_1)$ qui correspond de même à (h_1) , c'est-à-dire le sous-groupe de $(\overline{\eta})$ qui exprime la loi de permutation des caractéristiques de (A) par (h_1) . Soient de plus (h'') et (h'_1) les plus grands groupes de transformations de la forme (57) contenus dans (h) et (h_1) , respectivement. On reconnaît facilement, en écrivant les équations générales de ces divers groupes [ou mieux des groupes canoniques qui correspondent à (h) , (h'') , (h_1) , (h'_1) , par la transformation canonisante (11)], que $(\overline{\eta}_1)$ est sous-groupe invariant maximum de $(\overline{\eta})$, et (h'_1) sous-groupe invariant maximum de (h'') .

D'après le théorème du n° 34, le groupe spécifique de (A) se réduira à (h_1) , si l'on adjoint à (\mathfrak{R}) les invariants différentiels de (h'_1) , qui sont du type (100) ou, du moins, un système fondamental de tels invariants. Un tel système d'invariants est défini par un système complet (A_1) qui contiendra, en particulier, les équations de l'un des systèmes prolongés $(A^{(i)})$, issus de (A) (Cf. n° 29). Comme l'on connaît les équations de définition de (h'') , on peut admettre que ce système complet (A_1) est connu rationnellement, *au moins dans le cas où (h) et (h_1) sont transitifs* ⁽¹⁾.

Au point de vue du mode de réductibilité de ce système (A_1) , remarquons que le groupe (h'') , prolongé, contient des transformations infinitésimales qui, égalées à zéro, donneraient un système équivalent à (A_1) ; de sorte que, d'après le théorème du n° 16, on peut déduire le

(1) Cf. *Annales Éc. Norm. sup.*, 1903, p. 444.

mode de réductibilité de (A_1) de la considération des seuls groupes en x_1, \dots, x_n prolongés. Et comme (h'') , qui est rationnel, laisse invariante chacune des transformations infinitésimales prolongées $M_k^{(\delta)} f$, on pourra imposer la même condition aux groupes considérés, et supposer leurs transformations du type (57) (prolongé).

Il est clair que, dans ces conditions, c'est (h'') lui-même qui joue le rôle de groupe spécifique pour (A_1) , puisque les groupes considérés sont des groupes prolongés issus de groupes en x_1, \dots, x_n qui laissent invariant (A) lui-même.

Donc le groupe de rationalité de (A_1) est le groupe qui exprime la loi d'échange d'un système d'invariants fondamentaux de (h'_1) par les transformations de (h'') . Et, puisque (h'_1) est sous-groupe invariant maximum de (h'') , ce groupe de rationalité est bien un groupe simple ⁽¹⁾.

36. Dans ce qui précède, nous avons cherché à réduire le groupe spécifique à un de ses sous-groupes invariants. Imaginons maintenant qu'on cherche à le réduire à l'un quelconque de ses sous-groupes; et, pour ne pas multiplier les notations, désignons encore ce sous-groupe par (h_1) . Soient encore (h'') et (h'_1) les groupes formés de toutes les transformations de la forme (57), qui sont contenues, respectivement, dans le groupe spécifique (h) et dans son sous-groupe (h_1) . Tout reviendra encore à déterminer un système fondamental d'invariants différentiels de (h'_1) , de la forme (100). Or imaginons que ces invariants constituent une solution quelconque d'un système différentiel rationnel quelconque (D). Soient u_1, \dots, u_s les fonctions inconnues figurant dans ce système (D); les variables indépendantes étant x_1, \dots, x_n , et les dérivées $\frac{\partial^{\beta_1 + \dots + \beta_p} \varpi_h}{\partial x_1^{\beta_1} \dots \partial x_p^{\beta_p}}$, jusqu'à un certain ordre δ . Les invariants différentiels de (h'_1) admettant, en particulier, les transformations infinitésimales prolongées $M_k^{(\delta)} f$, on obtient un système différentiel rationnel compatible en associant aux équations du sys-

(1) Ce groupe pourra être intransitif, car les invariants différentiels de (h'') sont, en particulier, des invariants de (h'_1) . Mais il se pourra aussi que les invariants nouveaux soient échangés entre eux; et ils le seront alors suivant un groupe transitif.

tème (D) les équations

$$(119) \quad M_k^{\hat{\sigma}} u_{\sigma} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, q; \sigma = 1, 2, \dots, s).$$

Le système ainsi obtenu (D') est un système auxiliaire rationnel pour le système prolongé (A⁽²⁾); ou, du moins, on en déduirait un système auxiliaire, dans le cas où il ne dépendrait pas d'un nombre suffisant de fonctions inconnues, en lui associant encore, comme on l'a fait au n° 34, des équations supplémentaires de la forme $M_k^{\hat{\rho}} v_{\rho} = 0$ ($\rho = 1, 2, \dots, r$), et nous appellerions alors (D'') le système ainsi complété.

Or nous savons (n° 31) que le groupe (h'') prolongé peut jouer pour (A⁽²⁾) le rôle de groupe spécifique. D'où il résulte que le système (D''), et par suite le système (D'), reste invariant par les diverses transformations de (h''): donc ces transformations changent toute solution de (D') en une solution de (D'). Mais ces transformations changent les invariants différentiels caractéristiques du groupe (h''_1) en invariants différentiels caractéristiques des autres sous-groupes de (h''), homologues de (h''_1).

Donc tout système différentiel rationnel admettant pour une de ses solutions les fonctions différentielles du type (100), qui définissent un sous-groupe du groupe spécifique, admet aussi, comme solution, les fonctions de la même nature définissant chaque sous-groupe du groupe spécifique, homologue du premier.

Il en résultera que l'intégration complète d'un tel système résolvant fournira à la fois les invariants différentiels de toute une classe de sous-groupes du groupe spécifique homologues entre eux et, par conséquent, tous les invariants différentiels caractéristiques du plus grand sous-groupe contenu dans tous ceux-là. Or ce dernier est un sous-groupe invariant du groupe spécifique.

On voit par là que, si l'on cherche à obtenir la réduction du groupe spécifique par l'intégration complète d'un système auxiliaire rationnel admettant comme solution un système fondamental de fonctions différentielles caractérisant un sous-groupe du groupe spécifique, on ne particularise pas réellement cette méthode, et même on l'applique de la manière la plus simple possible, en cherchant directement les fonctions différentielles qui caractérisent un sous-groupe invariant du groupe spécifique.

Il n'en serait pas de même si l'on devait calculer seulement *une solution particulière* de l'un des systèmes résolvants imaginés.

37. Les théorèmes précédents conduisent à la *méthode d'intégration* suivante.

Si le groupe spécifique est transitif et contient au moins un sous-groupe invariant transitif, on le réduira à ce sous-groupe par l'intégration d'un système complet auxiliaire à groupe simple. On opérera de même sur celui-là, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on arrive à un groupe spécifique nouveau qui soit simple ou n'admette aucun sous-groupe invariant transitif.

Les solutions des divers systèmes complets résolvants qui interviendront sont des fonctions de la forme (100), c'est-à-dire dépendent de x_1, \dots, x_n et des dérivées, prises par rapport à ces variables, de certaines variables auxiliaires z_1, \dots, z_ρ , qui n'interviennent pas elles-mêmes explicitement. Ce sont toujours des solutions de l'un des systèmes prolongés ($A^{(2)}$), qui se déduisent du système (A) donné (cf. n° 29).

Si le groupe spécifique est transitif et simple, et s'il a des sous-groupes transitifs, on cherchera à le réduire à un de ces sous-groupes, choisi parmi ceux qui ont le plus grand degré de généralité possible. On aura alors à trouver une solution particulière de certains systèmes résolvants; elle sera encore constituée par des fonctions de l'espèce précédente, satisfaisant à l'un des systèmes prolongés ($A^{(2)}$). Le nouveau groupe spécifique auquel on sera ainsi ramené pourra ne pas être simple, ce qui permettrait d'appliquer de nouveau le premier mode de réduction.

La méthode précédente pourra s'appliquer, même en supprimant la restriction, imposée aux groupes considérés, d'être transitifs, si les systèmes résolvants qui interviennent peuvent encore être formés.

On pourra aussi, dans le cas des groupes intransitifs, opérer comme on a vu au n° 20, de manière à retomber sur le cas de groupes transitifs.

Dans tous les cas, *le nombre des opérations auxquelles conduit l'application de la méthode est limité*. Car, si une opération conduit à un groupe intransitif, elle donne au moins une solution du système (A),

indépendante de celles qui pouvaient être précédemment connues, ce qui ne peut, visiblement, se renouveler qu'un nombre fini de fois, p au plus.

Et, tant qu'on opère avec des groupes transitifs, chaque opération fait connaître au moins un invariant différentiel nouveau des $M_k f$, c'est-à-dire permet d'associer au système automorphe (s) , de la forme (51), qui correspond au groupe spécifique initial, une équation nouvelle

$$(120) \quad G(x_1, \dots, x_n \mid \dots, \frac{\partial^{\beta_1 + \dots + \beta_p} z_h}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_p^{\alpha_p}}, \dots) = \theta(z_1, \dots, z_n),$$

en opérant comme il a été expliqué au n° 29; cette équation ne pourra pas être une conséquence de celles du système (s) et sera compatible avec elles.

Or on sait que le nombre d'équations que l'on peut ajouter successivement à celles d'un système différentiel, avec la condition que chacune des équations nouvelles que l'on ajoute ne soit jamais une conséquence (algébrique-différentielle) des équations précédentes, est limité.

Donc ici aussi le nombre des opérations successives possibles est limité ⁽¹⁾.

38. Dans la méthode précédente, nous avons cherché à obtenir la réduction du groupe spécifique par l'adjonction directe d'invariants différentiels de la forme (100). Mais il résulte, de la théorie générale des sous-groupes des groupes continus ⁽²⁾, que la recherche des équations de définition d'un tel sous-groupe revient au calcul de certaines fonctions des variables x_1, \dots, x_n seules, qui figurent dans les invariants différentiels correspondants. Ces fonctions seraient, dans le cas actuel, les mêmes que les fonctions ω_μ , sur la considération desquelles nous avons vu, au n° 20, qu'on pouvait fonder le caractère de réductibilité des systèmes complets.

⁽¹⁾ On démontre, par un raisonnement tout semblable, que toute *suite normale* de sous-groupes invariants les uns dans les autres, pour un groupe quelconque, est composée d'un nombre fini de groupes.

⁽²⁾ Cf. *Annales Éc. Norm. sup.*, 1903, p. 441.

On pourrait donc chercher à obtenir la réduction du groupe spécifique simplement par l'adjonction, au domaine de rationalité (\mathfrak{R}), de certaines fonctions de x_1, \dots, x_n seulement.

Ce même point de vue s'imposera si l'on veut étudier et discuter l'intégration des systèmes complets (dépendant des mêmes variables x_1, \dots, x_n) les uns par les autres.

Imaginons donc un système différentiel rationnel (Δ) dont dépendent des fonctions $\omega_1, \dots, \omega_m$ des variables x_1, \dots, x_n . Pour que l'intégration de ce système soit considérée comme produisant une réduction du groupe spécifique, il est nécessaire que des invariants différentiels de $M_k f$, indépendants de ceux qui appartiennent au domaine de rationalité considéré (\mathfrak{R}), s'expriment en fonction rationnelle de x_1, \dots, x_n , des dérivées de z_1, \dots, z_p par rapport à x_1, \dots, x_p , et des fonctions $\omega_1, \dots, \omega_m$ (et de leurs dérivées partielles) qui constituent l'une des solutions de ce système Δ .

Mais on ne peut pas considérer cette condition comme suffisante. Pour nous en rendre compte, supposons, afin de fixer les idées, que (Δ) soit, par exemple, un système complet : intégrer ce système, c'est en trouver un système fondamental de solutions quelconque; et rien ne prouve que les fonctions $\omega_1, \dots, \omega_m$ qui constituent un tel système de solutions, arbitrairement choisi, puissent fournir effectivement des invariants différentiels de l'espèce cherchée.

On devra donc, semble-t-il, se limiter au cas suivant : *Au système (Δ) se trouve associé un système de fonctions rationnelles déterminées*

$$(121) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{f}_\sigma \left(x_1, \dots, x_n \left| \dots, \frac{\partial^{\beta_1 + \dots + \beta_p} z_h}{\partial x_1^{\beta_1} \dots \partial x_p^{\beta_p}}, \dots \right| \omega_1, \dots, \omega_m \left| \dots, \frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} \omega_\mu}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}, \dots \right. \right) \\ (\sigma = 1, 2, \dots, s), \end{array} \right.$$

telles que toute solution de (Δ), portée dans ces fonctions, à la place de $\omega_1, \dots, \omega_m$ fournisse un invariant différentiel des $M_k f$.

Si le système (Δ) possédait cette propriété pour une de ses solutions au moins, il serait facile de lui adjoindre les équations $M_k \tilde{f}_\sigma = 0$ ($\sigma = 1, 2, \dots, s$; $k = 1, 2, \dots, q$); de manière que le système (Δ') qu'on en déduirait ainsi aurait bien la propriété supposée.

Appelons, pour abrégé, système (Δ) un tel système. Il lui correspond un système rationnel définissant directement les invariants

différentiels des $M_k f$ que (Δ) fournit, par hypothèse, indirectement. A ce nouveau système s'appliquent les résultats du n° 36. Nous pouvons donc conclure :

L'intégration complète d'un système (Δ) , réduisant par hypothèse le groupe spécifique, le réduit nécessairement à un de ses sous-groupes invariants.

On voit, de plus, que le nombre des invariants différentiels des $M_k f$, que peut fournir un système différentiel (Δ) , est limité : c'est-à-dire qu'ils se déduisent, par des calculs rationnels, d'un nombre limité d'entre eux. Cela résulte de ce qu'on ne peut obtenir que des invariants différentiels correspondant au nouveau groupe spécifique, et que ceux-ci sont, dans la même acception du mot, en nombre limité. Donc *l'adjonction d'un nombre limité de solutions d'un système (Δ) produit, pour la réduction du groupe spécifique, le même résultat que l'intégration complète de ce système (Δ)* , pourvu, bien entendu, que ces solutions particulières soient prises en nombre suffisant et satisfassent à certaines conditions d'inégalité qui expriment que chaque solution nouvelle successivement adjointe donne au moins un invariant différentiel indépendant de ceux que les solutions précédentes auront donnés.

Remarquons enfin que, parmi les systèmes (Δ) , figurent les systèmes résolvants qui définissent les *valeurs* des invariants fondamentaux Γ_μ considérés aux n°s 20 et 21, systèmes dont nous avons étudié la forme au n° 27.

Paris, le 15 mai 1911.