Annales scientifiques de l'É.N.S.

Émile Picard

Sur un exemple simple d'une équation singulière de Fredholm où la nature analytique de la solution dépend du second membre

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 28 (1911), p. 313-324

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1911_3_28__313_0>

SUR UN EXEMPLE SIMPLE

D'UNE

ÉQUATION SINGULIÈRE DE FREDHOLM

OU LA NATURE ANALYTIQUE DE LA SOLUTION DÉPEND DU SECOND MEMBRE,

Par M. Émile PICARD.

Il est aujourd'hui classique que la solution de l'équation de Fredholm

$$u(x)+\lambda\int_a^b \mathrm{K}(x,y)\,u(y)\,dy=f(x)$$

est, en temps que fonction du paramètre λ, une fonction méromorphe dans tout le plan de la variable complexe λ; les pôles ne dépendent d'ailleurs pas du second membre $f(x)$, et sont les racines d'une certaine fonction entière $\mathrm{D}(\lambda)$ qui joue un rôle essentiel dans la théorie.

Ce beau résultat suppose que le noyau ne présente pas certaines singularités. Je me propose de donner ici un exemple extrêmement simple, où se présentent des circonstances toutes différentes, *et où la nature analytique de la solution, regardée comme fonction de* λ, *dépendra essentiellement de la fonction* $f(x)$ *qui est dans le second membre*.

J'ai rencontré incidemment cet exemple dans une autre recherche. La voie suivie nous donnera d'abord une équation du type de Fredholm où il y aura trois variables indépendantes, et il sera facile, en particularisant certaine fonction, d'avoir un exemple avec une seule variable. J'ai résumé cet article dans les *Comptes rendus* (30 octobre 1910 et 9 janvier 1911).

I.

1. Je pars de l'équation à trois variables

$$(1) \qquad \Delta u = \lambda u \qquad \left(\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right),$$

où λ est une constante réelle ou complexe; les trois variables x, y, z sont, bien entendu, réelles, et u pourra être une fonction complexe de ces variables réelles.

Supposons qu'il existe une fonction $u(x, y, z)$ satisfaisant à (1) et telle que $|u|$, $\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|$, $\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|$, $\left|\frac{\partial u}{\partial z}\right|$ restent dans tout l'espace inférieurs à un nombre fixe.

Envisageons d'autre part la fonction

$$v = \frac{e^{-r}}{r} \qquad [r^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2],$$

qui, regardée comme fonction de ξ, η, ζ, satisfait à l'équation

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \zeta^2} = v.$$

En appliquant la formule de Green aux fonctions $u(\xi, \eta, \zeta)$, $v(\xi, \eta, \zeta)$ dans l'espace compris entre une sphère de très grand rayon et une petite sphère de centre (x, y, z), on est immédiatement conduit à la relation

$$(2) \qquad 4\pi u(x, y, z) - (1-\lambda)\int\int\int \frac{e^{-r}}{r} u(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta = 0,$$

l'intégrale triple étant étendue à tout l'espace, comme toutes les intégrales qui vont suivre.

2. On montre facilement que c'est seulement *pour λ réel et négatif*, que peut exister une solution de (1), non nulle identiquement, et ayant les propriétés indiquées pour son module et celui de ses dérivées premières.

Supposons en effet que λ ne soit pas un nombre réel et négatif. Désignons par $\sqrt{\lambda}$ la détermination de la racine carrée de λ, dont la partie réelle est positive, et posons

$$v = \frac{e^{-r\sqrt{\lambda}}}{r},$$

qui satisfait à $\Delta v = \lambda v$. L'application de la formule de Green, dans les mêmes conditions que plus haut, donne immédiatement

$$4\pi u(x, y, z) = 0,$$

ce qui démontre la remarque énoncée.

D'ailleurs, si λ est réel et négatif, il y aura certainement des solutions jouissant des propriétés indiquées. Telle est par exemple

$$u(x, y, z) = \sin ax . \sin by . \sin cz,$$

les constantes réelles a, b, c satisfaisant à la relation

$$a^2 + b^2 + c^2 = -\lambda.$$

3. Prenons maintenant l'équation

$$\Delta u = k^2 u + \varphi(x, y, z), \tag{3}$$

$\varphi(x, y, z)$ étant une fonction bornée dans tout l'espace. S'il existe pour cette équation une solution u de module limité, ainsi que ses dérivées du premier ordre, la formule de Green donne encore le résultat

$$u(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi}\int\int\int \frac{e^{-kr}}{r}\varphi(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta, \tag{4}$$

et réciproquement d'ailleurs, on sait que l'on peut passer de (4) à (3) (généralisation de la formule de Poisson pour le potentiel newtonien); mais il faut cependant, comme pour le cas de Poisson, faire sur la fonction φ quelque autre hypothèse que la continuité, admettre par exemple l'existence des dérivées premières de φ. Supposons, pour le moment, remplie cette condition.

On peut de l'équation (3) déduire une équation intégrale. Envisageons en effet les deux équations

$$\Delta u = \Phi(x, y, z),$$
$$\Delta v = v \qquad \left(v = \frac{e^{-r}}{r}\right).$$

L'application de la formule de Green, toujours dans les mêmes conditions, nous donne

$$4\pi u(x, y, z) = \int\int\int \frac{e^{-r}}{r} u(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta - \int\int\int \frac{e^{-r}}{r} \Phi(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta.$$

En remplaçant Φ par $k^2 u + \varphi$, on a

$$4\pi u(x, y, z) \\ = (1 - k^2) \int\int\int u(\xi, \eta, \zeta) \frac{e^{-r}}{r}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta - \int\int\int \frac{e^{-r}}{r} \varphi(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta.$$

En posant $k^2 = \lambda$ et (λ n'étant pas supposé réel et négatif) en désignant par $\sqrt{\lambda}$ la même valeur du radical que plus haut, nous avons le résultat suivant :

L'équation intégrale en u

$$(5) \qquad 4\pi u(x, y, z) - (1 - \lambda) \int\int\int u(\xi, \eta, \zeta) \frac{e^{-r}}{r}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta \\ = -\int\int\int \frac{e^{-r}}{r} \varphi(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta$$

admet comme solution

$$(6) \qquad u(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi} \int\int\int \frac{e^{-r\sqrt{\lambda}}}{r} \varphi(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta.$$

Ce résultat suppose que la fonction $\varphi(x, y, z)$ est bornée dans tout l'espace, et a des dérivées premières.

4. Nous arrivons enfin à l'équation fonctionnelle

$$(\mathrm{E}) \qquad u(x, y, z) - \frac{1-\lambda}{4\pi} \int\int\int \frac{e^{-r}}{r} u(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta = f(x, y, z),$$

qui s'est présentée à nous, mais sans second membre, au début de ce travail. Nous venons de la rencontrer au paragraphe précédent, $f(x, y, z)$ ayant la forme

$$(7) \qquad f(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi} \int\int\int \frac{e^{-r}}{r} \varphi(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta,$$

φ étant bornée et ayant des dérivées du premier ordre. Ces hypothèses maintenues, nous déduisons de (7)

$$\varphi(x, y, z) = \Delta f - f,$$

ce qui va nous permettre de transformer la formule (6). Elle devient en effet

$$u(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi}\int\int\int \frac{e^{-r\sqrt{\lambda}}}{r}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \zeta^2} - f\right) d\xi\, d\eta\, d\zeta,$$

qui, à l'aide de la formule de Green, se transforme de suite en

$$u(x, y, z) = f(x, y, z) + \frac{1-\lambda}{4\pi}\int\int\int \frac{e^{-r\sqrt{\lambda}}}{r} f(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta. \tag{8}$$

La formule (8) nous donne donc la solution de (E). Il a fallu toutefois faire sur $f(x, y, z)$ l'hypothèse que f était de la forme (7) avec les conditions indiquées pour φ. Les conditions imposées à f sont peu restrictives, et l'on est naturellement conduit à penser que (8) donnera la solution de (E), pour λ non réel négatif, sous la seule condition que $f(x, y, z)$ soit une fonction continue bornée dans tout l'espace. C'est ce que nous allons facilement établir.

5. Il suffira de faire une vérification, en substituant l'expression (8) dans l'équation (E). On trouve ainsi, de suite, en posant

$$r'^2 = (\xi' - x)^2 + (\eta' - y)^2 + (\zeta' - z)^2, \qquad \rho^2 = (\xi - \xi')^2 + (\eta - \eta')^2 + (\zeta - \zeta')^2,$$

qu'on doit avoir identiquement

$$\begin{aligned} &\frac{1-\lambda}{4\pi}\int\int\int\left[\frac{e^{-r'\sqrt{\lambda}}}{r'} - \frac{e^{-r'}}{r'}\right] f(\xi', \eta', \zeta')\, d\xi'\, d\eta'\, d\zeta' \\ &\quad - \left(\frac{1-\lambda}{4\pi}\right)^2 \int\cdots\int \frac{e^{-\rho\sqrt{\lambda}}}{\rho}\,\frac{e^{-r}}{r} f(\xi', \eta', \zeta')\, d\xi\, d\eta\, d\zeta\, d\xi'\, d\eta'\, d\zeta' = 0; \end{aligned} \tag{9}$$

la seconde intégrale est une intégrale sextuple. Dans celle-ci, on aura d'abord à calculer l'intégrale triple

$$\int\int\int \frac{e^{-\rho\sqrt{\lambda}}}{\rho}\,\frac{e^{-r}}{r}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta,$$

étendue nécessairement à tout l'espace. C'est une fonction A de $(x - \xi')$, $y - \eta'$ et $z - \zeta'$, dont on pourrait calculer directement la valeur, mais qui va dans un instant résulter de notre analyse même. L'identité à vérifier (9) devient alors

$$\int\int\int\left[\frac{e^{-r'\sqrt{\lambda}}}{r'} - \frac{e^{-r'}}{r'} - \frac{(1-\lambda)A}{4\pi}\right] f(\xi', \eta', \zeta')\, d\xi'\, d\eta'\, d\zeta' = 0. \tag{10}$$

Cette identité sera certainement vérifiée, si f satisfait aux conditions très larges dites plus haut, en particulier si f est bornée et a des dérivées continues des trois premiers ordres. Or (a, b, c) étant un point déterminé pris d'ailleurs arbitrairement, supposons qu'on ait

$$f(\xi', \eta', \zeta') = [(\xi' - a)^2 + (\eta' - b)^2 + (\zeta' - c)^2]^4,$$

à l'intérieur d'une sphère de centre (a, b, c) et d'un petit rayon l; et qu'on ait à l'extérieur $f = 0$; les conditions indiquées seront remplies. Quant à (x, y, z) donnons-lui une position arbitraire. Il faut que la différence

$$\frac{e^{-r'\sqrt{\lambda}} - e^{-r'}}{r'} - \frac{(1-\lambda)\mathrm{A}}{4\pi}$$

soit nulle, quels que soient x, y, z et ξ', η', ζ'; car autrement elle aurait un signe constant dans le voisinage de $\xi' = a$, $\eta' = b$, $\zeta' = c$, et la condition (10) ne serait pas vérifiée. Il s'ensuit que les hypothèses faites sur $f(x, y, z)$ n'ont aucune influence sur la vérification. Nous voyons de plus qu'on a

$$\mathrm{A} = \frac{4\pi\left[e^{-r'\sqrt{\lambda}} - e^{-r'}\right]}{r'(1-\lambda)}.$$

Il résulte de l'analyse précédente que, *sous la seule condition que la fonction $f(x, y, z)$ soit continue et bornée dans tout l'espace, l'équation fonctionnelle*

$$(\mathrm{E}) \qquad u(x, y, z) - \frac{1-\lambda}{4\pi}\iiint u(\xi, \eta, \zeta)\frac{e^{-r}}{r}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta = f(x, y, z),$$

l'intégrale triple étant étendue à tout l'espace et r^2 désignant

$$(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2,$$

admet la solution

$$(\mathrm{S}) \qquad u(x, y, z) = f(x, y, z) + \frac{1-\lambda}{4\pi}\iiint \frac{e^{-r\sqrt{\lambda}}}{r} f(\xi, \eta, \zeta)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta$$

pour λ non réel et négatif, $\sqrt{\lambda}$ étant la détermination du radical ayant sa partie réelle positive.

II.

6. On doit considérer, d'après ce qui précède, que l'on a la solution de (E), quand on a tracé dans le plan du paramètre complexe λ une

coupure formée par la partie négative de l'axe réel. La solution (S) est dans ces conditions une fonction holomorphe de λ, mais on doit tout naturellement se demander ce qui arrive *quand on cherche à faire l'extension analytique à travers la coupure.*

Des circonstances très différentes peuvent se présenter, comme nous l'avons dit au début. La fonction $f(x, y, z)$, dans le second membre de (E), *joue ici un rôle important*, comme vont nous le montrer des exemples variés. Mais pour avoir une équation encore plus simple que l'équation (E), nous allons la réduire à une équation à une seule variable, en supposant que $f(x, y, z)$ ne dépende que de x.

Il est facile en effet de voir ce que devient alors l'équation, si l'on suppose que u comme f ne dépend que de x. Il s'agit donc de calculer une intégrale de la forme

$$\int\int\int \frac{e^{-r\sqrt{\lambda}}}{r} f(\xi)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta.$$

L'intégrale étant étendue à tout l'espace, on peut évidemment remplacer d'abord $\eta - y$ et $\zeta - z$ respectivement par η et ζ, et l'on a à calculer

$$\int\int\int \frac{e^{-s\sqrt{\lambda}}}{s} f(\xi)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta \qquad [s^2 = (x-\xi)^2 + \eta^2 + \zeta^2].$$

On obtient de suite l'intégrale double

$$\int\int \frac{e^{-s\sqrt{\lambda}}}{s}\, d\eta\, d\zeta$$

étendue à tout le plan (η, ζ) (en se servant des coordonnées polaires); sa valeur est égale à

$$2\pi \frac{e^{-|x-\xi|\sqrt{\lambda}}}{\sqrt{\lambda}},$$

où $|x - \xi|$ désigne, suivant l'usage, la valeur absolue de $x - \xi$. L'intégrale cherchée est donc égale à

$$2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-|x-\xi|\sqrt{\lambda}}}{\sqrt{\lambda}} f(\xi)\, d\xi.$$

Nous avons donc finalement le résultat suivant :

L'équation fonctionnelle

$$\text{(E)} \qquad u(x) - \frac{1-\lambda}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x-\xi|}\, u(\xi)\, d\xi = f(x)$$

a pour solution

$$\text{(11)} \qquad u(x) = f(x) + \frac{1-\lambda}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-|x-\xi|\sqrt{\lambda}}}{\sqrt{\lambda}} f(\xi)\, d\xi,$$

ce qui n'est qu'un cas particulier du résultat du paragraphe précédent.

7. Nous allons donner à $f(x)$ diverses valeurs. Soit d'abord

$$f(x) = \cos(hx) \qquad (h = \text{const.}).$$

Le calcul est immédiat, et l'expression (11) devient

$$u(x) = \frac{1+h^2}{\lambda + h^2}\cos(hx).$$

Prenons maintenant

$$f(x) = \int_0^{\infty} \cos(hx)\, \varphi(h)\, dh,$$

en supposant que l'intégrale $\int_0^{\infty} |\varphi(h)|\, dh$ ait un sens. La solution de l'équation fonctionnelle (E) sera alors

$$\text{(12)} \qquad u(x) = \int_0^{\infty} \frac{1+h^2}{\lambda + h^2}\varphi(h)\cos(hx)\, dh.$$

Donnons un exemple où la coupure (partie négative de l'axe réel dans le plan des λ) est une coupure naturelle, et où par conséquent la fonction u, regardée comme fonction de λ, ne peut se prolonger analytiquement au delà de cet axe.

Il en sera ainsi si $\varphi(h)$ est une fonction *non analytique* de λ entre o et $-\infty$. Ce résultat se démontre aisément en posant

$$h^2 = t, \qquad \lambda = -\lambda',$$

l'intégrale devenant

$$\mathrm{I} = \int_0^{\infty} \frac{\Phi(t)}{t - \lambda'}\, dt$$

en posant

$$\Phi(t) = \frac{1+t}{2\sqrt{t}}\cos(x\sqrt{t})\, \varphi(\sqrt{t}).$$

Si $\Phi(t)$ n'est pas analytique de $t=0$ à $t=\infty$, l'intégrale I regardée comme fonction de λ' admet la coupure $(0, +\infty)$ comme coupure essentielle. En effet, si le prolongement analytique était possible dans le voisinage d'un point t_0 de l'axe réel, la différence limite des valeurs que prend I en $t_0 + i\varepsilon$ et $t_0 - i\varepsilon$, ε étant une quantité positive tendant vers zéro, serait une fonction analytique de t_0. Or il est bien connu que cette différence est égale à

$$2\pi i \Phi(t_0),$$

d'où la conclusion énoncée, que I admet la coupure essentielle $(0, +\infty)$, et, par suite, *que l'expression* (12) *admet le segment* $(-\infty, 0)$ *comme coupure essentielle au delà de laquelle le prolongement analytique est impossible.*

8. Nous avons pris un cas en quelque sorte extrême. Si l'on pose

$$f(x) = \Sigma A_n \cos(h_n x),$$

la série $\Sigma\,|A_n|$ étant convergente, et les h_n étant des quantités positives telles que

$$\lim_{n=\infty} h_n = \infty,$$

on aura

$$u(x) = \Sigma A_n \frac{1 + h_n^2}{\lambda + h_n^2} \cos(h_n x),$$

et la fonction u de λ est méromorphe dans tout le plan, avec les pôles $\lambda = -h_n^2$. Les choses se passent ici comme dans le cas de Fredholm.

9. Considérons encore le cas intéressant de

$$f(x) = \int_a^b \varphi(h) \cos(hx)\, dh \qquad (0 < a < b);$$

on aura

$$u(x) = \int_a^b \frac{1 + h^2}{\lambda + h^2} \varphi(h) \cos(hx)\, dh.$$

Si $\varphi(h)$ n'est pas analytique entre a et b, l'intervalle $(-b^2, -a^2)$ donne dans le plan de λ une coupure essentielle; ceci est analogue à ce que nous avons eu plus haut.

Prenons au contraire le cas où $\varphi(h)$ est holomorphe autour de chaque valeur réelle entre a et b, de sorte que dans le plan d'une variable complexe h, $\varphi(h)$ sera holomorphe dans un domaine comprenant le segment réel (a, b).

Posons encore

$$h^2 = z, \qquad \lambda = -\lambda',$$

nous avons l'intégrale

$$\int_{a^2}^{b^2} \frac{1+z}{z-\lambda'} \frac{\varphi(\sqrt{z})\cos(x\sqrt{z})}{\sqrt{z}} dz.$$

Il est facile de voir ce que devient cette fonction de λ' [pour laquelle la coupure (a^2, b^2) n'est plus une coupure essentielle] quand λ' tourne autour de a^2 est égale a^2. La détermination initiale étant, par exemple, celle qui correspond au plan, avec la coupure, la valeur de la fonction, après une circulation de λ' autour de a^2, est égale à la détermination initiale augmentée de

$$2\pi i \frac{1+\lambda'}{\sqrt{\lambda'}} \varphi(\sqrt{\lambda'}) \cos(x\sqrt{\lambda'}).$$

Si l'on revient à la variable λ, la fonction, quand λ aura tourné autour de $-a^2$ en restant dans une région R à contour simple comprenant la coupure $(-a^2, -b^2)$, mais ne comprenant pas l'origine, se trouvera augmentée de

$$2\pi i \frac{1-\lambda}{\sqrt{-\lambda}} \varphi(\sqrt{-\lambda}) \cos(x\sqrt{-\lambda}),$$

où $\sqrt{-\lambda}$ est la détermination qui est positive, quand λ est entre $-a^2$ et $-b^2$.

Si $\varphi(h)$ était une fonction entière dans tout le plan, on pourrait sortir de la région R; alors le point $\lambda = 0$ peut être un point critique algébrique, qui vient s'ajouter aux deux points singuliers $-a^2$ et $-b^2$.

On pourrait évidemment combiner les divers cas que nous avons signalés. Il serait possible d'en indiquer d'autres encore, mais nous avons suffisamment montré par ces exemples combien l'équation fonctionnelle étudiée diffère de celle de Fredholm, quant à la nature des singularités de la solution regardée comme fonction du paramètre.

10. Dans notre exemple, les limites ont été $-\infty$ et $+\infty$, et le noyau

était

$$e^{-|x-\xi|}.$$

On peut évidemment ramener les limites à être o et 1, en posant

$$y = \frac{1}{e^\xi + 1}.$$

On a alors à considérer le noyau

$$K(x, y) = \frac{e^{-\left|x - \log\left[\frac{1}{y} - 1\right]\right|}}{y(y-1)}$$

et l'équation fonctionnelle devient

$$u(x) + \mu \int_0^1 K(x, y)\, u(y)\, dy = f(x).$$

11. Je termine en remarquant que dans une question très élémentaire, on aurait pu trouver une intégrale du type de celle qui nous a occupé.

Prenons l'équation

$$(1) \qquad \frac{d^2 u}{dx^2} - \lambda u = f(x),$$

λ étant une constante, et $f(x)$ étant bornée entre $-\infty$ et $+\infty$.

Cherchons (λ n'étant pas une constante négative) l'intégrale de cette équation restant toujours finie.

On part de l'intégrale générale $A e^{\sqrt{\lambda} x} + B e^{-\sqrt{\lambda} x}$, où $\sqrt{\lambda}$ a toujours sa partie réelle positive, et l'on applique la méthode de la variation des constantes. On est ainsi conduit aux valeurs

$$A = \int_{+\infty}^{x} \frac{f(\xi)\, e^{-\sqrt{\lambda}\xi}}{2\sqrt{\lambda}}\, d\xi + \alpha,$$

$$B = -\int_{-\infty}^{x} \frac{f(\xi)\, e^{\sqrt{\lambda}\xi}}{2\sqrt{\lambda}}\, d\xi + \beta.$$

On a donc l'intégrale générale de (1) avec les deux constantes arbitraires α et β :

$$2\sqrt{\lambda}\, u = e^{\sqrt{\lambda} x}\left[\int_{+\infty}^{x} f(\xi)\, e^{-\sqrt{\lambda}\xi}\, d\xi + \alpha\right] + e^{-\sqrt{\lambda} x}\left[-\int_{-\infty}^{x} f(\xi)\, e^{\sqrt{\lambda}\xi}\, d\xi + \beta\right].$$

α et β doivent être nuls pour que u reste toujours moindre qu'un nombre fixe; nous avons alors

$$2\sqrt{\lambda}\, u = e^{\sqrt{\lambda}.x}\int_{+\infty}^{x} f(\xi)\, e^{-\xi\sqrt{\lambda}}\, d\xi - e^{-\sqrt{\lambda}.x}\int_{-\infty}^{x} f(\xi)\, e^{\xi\sqrt{\lambda}}\, d\xi,$$

et il est aisé de voir, en appliquant le théorème de la moyenne, que u ainsi déterminé reste borné. On peut encore écrire

$$2\, u\sqrt{\lambda} = \int_{+\infty}^{x} f(\xi\; e^{-(\xi-x)\sqrt{\lambda}}\, d\xi + \int_{x}^{-\infty} f(\xi)\, e^{-(x-\xi)\sqrt{\lambda}}\, d\xi$$

et enfin

$$2u\sqrt{\lambda} = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\, e^{-|x-\xi|\sqrt{\lambda}}\, d\xi,$$

ce qui conduit au noyau et aux limites rencontrés plus haut.