Annales scientifiques de l'É.N.S.

Serge Bernstein

Sur les surfaces définies au moyen de leur courbure moyenne ou totale

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 27 (1910), p. 233-256
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1910_3_27__233_0>

SUR LES SURFACES

DÉFINIES

AU MOYEN DE LEUR COURBURE MOYENNE OU TOTALE,

PAR M. SERGE BERNSTEIN.

1. Dans un Mémoire *Sur la généralisation du problème de Dirichlet* qui vient de paraître dans les *Mathemat. Annalen*, 1910, j'ai développé une méthode générale pour l'étude et l'intégration des équations aux dérivées partielles du type elliptique ([1]).

Je me propose d'appliquer ici cette méthode à quelques équations particulières. Il me semble inutile de reproduire les démonstrations assez compliquées des résultats généraux obtenus à l'endroit cité. Je me bornerai donc à résumer les principes fondamentaux, sur lesquels va être fondée notre étude actuelle.

Étant donnée une équation analytique du type elliptique

$$F(r, s, t, p, q, z, x, y) = 0 \qquad [4F'_r F'_t - (F'_s)^2 > 0], \tag{1}$$

on donne le nom de *problème de Dirichlet* au problème qui consiste à *déterminer une solution de l'équation* (1) *analytique (holomorphe) à l'intérieur d'un certain contour* C *sur lequel la solution cherchée est assujettie à se réduire à une fonction donnée de l'arc.*

Pour fixer les idées, nous nous bornerons au cas où le contour se réduit à un cercle C de rayon R, et que la fonction donnée de l'arc est

([1]) *Voir* également mon Mémoire en russe dans les *Communications de la Société mathématique de Kharkow*, t. XI, 1908. Les résultats que j'ai obtenus après la rédaction du présent Mémoire sont résumés dans une Note présentée à l'Académie des Sciences le 28 février 1910.

analytique. Dans ces conditions, nous dirons qu'une solution du problème de Dirichlet est *régulière* sur le contour C, ou encore que le problème de Dirichlet est *régulièrement possible* dans ce cas là, si *les dérivées des deux premiers ordres de la solution sont bornées sur le contour comme à son intérieur.*

J'indiquerai, d'abord, une propriété remarquable des solutions régulières :

Une solution régulière sur le contour C *peut être prolongée analytiquement à l'extérieur de ce contour.*

Le théorème fondamental sur lequel va reposer notre étude est le suivant :

Théorème fondamental. — *Étant donnée une équation analytique du type elliptique*

$$(1') \qquad F(r, s, t, p, q, z, x, y) = 0 \qquad [F'_r F'_z \leqq 0,\ 4F'_r F'_t - (F'_s)^2 > 0],$$

la condition nécessaire et suffisante pour que cette équation admette une solution régulière d'un problème particulier de Dirichlet est qu'il soit possible d'introduire dans l'équation (ou dans les données sur le contour) *un paramètre* α *de telle sorte que pour* $\alpha = 0$, *on ait une solution évidente ; que, pour* $\alpha \leqq 1$, *on puisse indiquer* a priori *une limite supérieure des modules des dérivées des deux premiers ordres de la solution, et que, pour* $\alpha = 1$, *le problème se réduise au problème donné.*

Un cas particulier important, où le théorème fondamental se simplifie notablement, est celui qui correspond à la forme

$$(2) \qquad Ar + 2Bs + Ct = D \qquad (AC - B^2 > 0,\ AD'_z \geqq 0)$$

de l'équation (1′), A, B, C étant des fonctions analytiques de (p, q, x, y), et D étant une fonction analytique de (p, q, x, y, z). Dans ce cas les mots de l'énoncé *dérivées des deux premiers ordres* doivent être remplacés par *dérivées du premier ordre.*

Nous dirons que l'équation (1′), ou (2), est *régulière lorsqu'elle admet toujours une solution régulière du problème de Dirichlet.* On déduit alors du théorème fondamental *la condition nécessaire et suffisante pour qu'une équation soit régulière.*

Pour que l'équation (1') *soit régulière, il faut et il suffit que la limite supérieure, à l'intérieur d'un contour* C, *des modules des dérivées des deux premiers ordres d'une solution analytique quelconque de cette équation, soit une fonction bornée de* d *et* K, $n!\,K^n$ *étant, quel que soit* n, *la limite supérieure du module de la dérivée d'ordre* n *de la fonction de l'arc à laquelle se réduit la solution sur le contour* C, d *désignant la distance maxima d'un point du contour* C *à l'origine* [1].

La modification à apporter à l'énoncé est évidente, si l'équation générale (1') est remplacée par l'équation (2).

Étude des équations des surfaces définies par leur courbure moyenne $\left(\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\rho_1}\right)$.

2. Les plus simples des surfaces définies par leur courbure moyenne sont les surfaces à courbure moyenne nulle, ou les *surfaces minima*. Leur équation est

$$(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t=0.$$

Cette équation étant de la forme (2), il est facile de reconnaître qu'elle est *régulière*; ou en d'autres termes que, *pour l'équation des surfaces minima, le problème de Dirichlet (Plateau) est toujours régulièrement possible*.

En effet, la courbure totale $\frac{1}{\rho\rho_1}$ d'une surface minima est, en général, négative; d'une façon plus précise, l'ensemble des points à courbure totale négative est partout dense sur la surface. Par conséquent, si l'on considère un morceau d'une telle surface, ayant pour projection sur le plan des (x, y) le cercle C de rayon R, le plan tangent à la surface en un point (intérieur ou situé sur le bord) de ce morceau rencontre le *bord* au moins en *trois* points distincts ou confondus.

On en conclut, sans aucun calcul, que, du moment qu'on connaît

---

(1) Il est clair que la condition de *régularité* sera *a fortiori* remplie si une limite supérieure des modules des dérivées secondes peut être indiquée sans l'intervention des dérivées de la fonction du contour supérieures à un ordre fixe (3, par exemple).

une limite supérieure de l'inclinaison (par rapport au plan des x, y) du plan osculateur au bord, on peut en déduire une limite supérieure de l'inclinaison du plan tangent à la surface. Analytiquement parlant, cela revient à dire que la limite supérieure de $|p|$ et $|q|$ sur le contour C, comme à son intérieur, est une fonction bornée [1] de la limite supérieure du module de la dérivée seconde de la fonction de l'arc, à laquelle la solution considérée de l'équation (3) se réduit sur le contour. La condition de *régularité* de l'équation (3) se trouve ainsi réalisée (p. 235).

Il est aisé de voir que le même raisonnement permet de démontrer d'une façon générale la régularité de l'équation (2), dans laquelle on fait $D = 0$.

Grâce à cette remarque on se rend compte immédiatement de la possibilité du problème de Dirichlet, si le contour circulaire est remplacé par un contour analytique convexe quelconque.

Considérons encore une autre classe de surfaces dont l'équation est régulière.

3. *Surfaces dont la courbure moyenne en chaque point est proportionnelle à la projection de la hauteur de ce point sur la normale en ce point.*

Ces surfaces ont manifestement pour équation

$$(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t = z(1+p^2+q^2), \tag{4}$$

en posant le facteur de proportionnalité égal à 1.

Pour prouver la *régularité* de cette équation qui rentre également dans le type (2), il suffira, comme précédemment, d'indiquer une limite supérieure de $|p|$, $|q|$ au moyen des données sur le contour.

Dans ce but, remarquons d'abord que z ne peut pas devenir plus grand en valeur absolue, à l'intérieur du contour, qu'il ne l'est sur le contour. En effet, en un point, où il atteint son maximum ou minimum, on a $p = q = 0$ et, en vertu de l'équation (3),

$$r + t = z;$$

[1] Le calcul montre, d'ailleurs, que l'inclinaison du plan tangent à la surface, $\sqrt{p^2+q^2}$, est nécessairement inférieure à $4\pi RN$, où N est la limite supérieure du module de la dérivée seconde de la fonction de l'arc sur le contour.

ce qui montre que z ne peut avoir ni maxima positifs, ni minima négatifs.

Montrons ensuite que le carré de l'inclinaison du plan tangent à la surface

$$w = p^2 + q^2$$

ne peut avoir de maxima à l'intérieur du contour C.

En effet, en un point où w est maximum, on doit avoir

$$(5) \qquad \frac{1}{2}\frac{\partial w}{\partial x} = pr + qs = 0, \qquad \frac{1}{2}\frac{\partial w}{\partial y} = ps + qt = 0$$

et aussi

$$2T = (1+q^2)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2pq\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} + (1+p^2)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \leqq 0.$$

Or, un calcul facile nous donne

$$\begin{aligned} T = \quad & p\left[(1+q^2)\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - 2pq\frac{\partial^2 p}{\partial x\,\partial y} + (1+p^2)\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}\right] \\ & + q\left[(1+q^2)\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} - 2pq\frac{\partial^2 q}{\partial x\,\partial y} + (1+p^2)\frac{\partial^2 q}{\partial y^2}\right] \\ & + (1+q^2)r^2 - 2pqsr + (1+p^2)s^2 + (1+q^2)s^2 - 2pqst + (1+p^2)t^2. \end{aligned}$$

On fera disparaître les dérivées secondes de p, q dans l'expression de T, en différentiant (4) par rapport à x, y respectivement, et tenant compte des relations (5).

On aura ainsi

$$\begin{aligned} T = (p^2+q^2)(1+p^2+q^2) + (1+q^2)r^2 - 2pqsr \\ + (1+p^2)s^2 + (1+q^2)s^2 - 2pqst + (1+p^2)t^2 > 0, \end{aligned}$$

ce qui est incompatible avec le maximum.

Il nous reste donc à trouver une limite supérieure de w sur le contour lui-même. A cet effet, nous allons procéder de la façon suivante. Introduisons à la place de z une nouvelle fonction u définie par l'égalité

$$z = -n - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n}\log u,$$

où n est la plus grande valeur absolue de z.

On voit alors que u varie toujours dans le même sens que z, depuis e jusqu'à e^{4n^2+1}, lorsque z varie de $-n$ à $+n$. D'autre part, on voit sans peine que u satisfait à l'équation

$$\begin{aligned}(1+q^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2pq\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + (1+p^2)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ = \frac{1}{u}\left[\left(1+q^2+\frac{z}{2n}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - 2pq\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\right. \\ \left. + \left(1+p^2+\frac{z}{2n}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] + 2nuz = Q,\end{aligned}$$

puisque

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2nu}\frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{2nu}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{2nu^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \cdots$$

Donc, quels que soient $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, on a

$$Q > -2n^2 e^{4n^2+1}.$$

Soit ensuite h la fonction qui satisfait à l'équation linéaire

$$(1+q^2)\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - 2pq\frac{\partial^2 h}{\partial x\,\partial y} + (1+p^2)\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0$$

et se confond sur le contour C avec u.

En posant alors $v = u - h$, nous constatons que

$$(1+q^2)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - 2pq\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} + (1+p^2)\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} > -2n^2 e^{4n^2+1};$$

et enfin, en faisant

$$v = v_0 - \frac{n^2}{2}e^{4n^2+1}(x^2+y^2),$$

nous aurons

$$(1+q^2)\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} - 2pq\frac{\partial^2 v_0}{\partial x\,\partial y} + (1+p^2)\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} > 0.$$

Il en résulte que v_0 ne peut pas avoir de maximum à l'intérieur du contour C. Comme, d'autre part, il est constant sur le contour, nous en concluons que v_0 s'approche du contour en croissant; de sorte qu'on doit avoir

$$\frac{\partial v_0}{\partial \rho} \geqq 0,$$

en tout point du contour (en désignant par ρ, θ les coordonnées polaires.

Donc

$$\frac{\partial v}{\partial \rho} \geqq - n^2 \mathrm{R} e^{4n^2+1}.$$

Or, en vertu du raisonnement de la page 236, on peut fixer un nombre P, tel que $\left|\frac{\partial h}{\partial \rho}\right| < \mathrm{P}$ sur le contour. Il en résulte finalement

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} > - n^2 \mathrm{R} e^{4n^2+1} - \mathrm{P}, \qquad \frac{\partial z}{\partial \rho} > - \frac{n \mathrm{R} e^{4n^2}}{2} - \frac{\mathrm{P}}{2ne}.$$

On a ainsi une limite supérieure des valeurs absolues de $\frac{\partial z}{\partial \rho}$, lorsque $\frac{\partial z}{\partial \rho}$ est négatif. Mais il est clair qu'on aura aussi

$$\left|\frac{\partial z}{\partial \rho}\right| < \frac{n \mathrm{R} e^{4n^2}}{2} + \frac{\mathrm{P}}{2ne},$$

puisque $-z$ satisfait à la même équation que z. $\frac{\partial z}{\partial \theta}$ étant connue sur le contour, nous avons immédiatement une limite supérieure de la fonction

$$w = p^2 + q^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\rho\, \partial \theta}\right)^2,$$

sur le contour C. Comme, d'autre part, il a été établi que cette fonction n'a pas de maxima à l'intérieur du contour, notre démonstration de la régularité de l'équation (4) se trouve achevée. Remarquons que, comme dans le cas des surfaces minima, nos conclusions subsistent, si le contour circulaire est remplacé par un contour analytique convexe quelconque.

4. Le résultat ainsi obtenu n'est d'ailleurs qu'un cas particulier de la proposition :

L'équation (2) *est toujours régulière, lorsque* D *est au plus du second* *degré par rapport à p, q, et* $A - \frac{B^2}{C}$, $C - \frac{B^2}{A}$, D'_z *ont une limite supérieure positive différente de zéro.*

Le cas où D'_z peut s'annuler demanderait un examen spécial qui ne semble pas bien difficile, car la régularité de l'équation dépendra de l'existence ou de la non-existence d'une solution régulière quelconque de l'équation dans une région aussi grande qu'on voudra. Il est certain que les deux circonstances peuvent se présenter. Ainsi, l'équation

$$(5) \qquad r + t = (x^2 + y^2 - 2)(p^2 + q^2) - 4$$

n'est pas régulière ; je l'appelle *pseudo-régulière*, car ces solutions du problème de Dirichlet, lorsqu'elles existent, sont nécessairement régulières. On vérifie, en effet, immédiatement que l'équation (5) n'admet pas de solution qui s'annule sur une circonférence de rayon $R \geqq 1$, étant analytique à son intérieur (¹).

Au contraire, l'équation

$$(6) \qquad (1 + q^2) r - 2pqs + (1 + p^2) t = 1 + p^2 + q^2$$

des surfaces, dont la courbure en chaque point est proportionnelle (égale) au cosinus de l'angle de la normale en ce point avec l'axe des z, est *régulière*.

Nous pourrons reproduire le raisonnement qui nous a permis d'établir la régularité de l'équation (4), du moment que nous connaîtrons la limite supérieure n de $|z|$. A cet effet, tâchons de trouver une solution z_0 quelconque de (6) régulière dans tout le plan. Cherchons-la parmi les surfaces de révolution; en d'autres termes, supposons z_0

(¹) On est amené à chercher une solution de l'équation

$$\frac{\partial^2 t}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial t}{\partial \rho} = (\rho^2 - 2)\left(\frac{\partial t}{\partial \rho}\right)^2 - 4,$$

régulière à l'origine et s'annulant pour $\rho = R$. On trouve

$$t = \log \frac{1 - \rho^2}{1 - R^2}.$$

indépendant de l'angle θ; nous aurons l'équation

$$\frac{d^2 z_0}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dz_0}{d\rho}\left[1 + \left(\frac{dz_0}{d\rho}\right)^2\right] = 1 + \left(\frac{dz_0}{d\rho}\right)^2.$$

Posons $\frac{dz_0}{d\rho} = u$, nous obtenons l'équation du premier ordre

$$\frac{du}{d\rho} = (1 + u^2)\left(1 - \frac{u}{\rho}\right),$$

qui n'admet qu'une seule solution régulière à l'origine (1); il est aisé de voir que, pour aucune valeur finie de ρ, u ne devient infini. En effet, si à un moment donné u dépassait ρ par valeurs positives, le second membre deviendrait négatif, u décroîtrait tant qu'il n'atteindrait pas ρ. D'autre part, si u devenait négatif, $\frac{du}{d\rho}$ serait positif et, par conséquent, u tendrait (2) vers o. En vertu de la théorie classique des équations différentielles ordinaires, nous voyons que u est holomorphe pour toute valeur positive de ρ. Ayant démontré ainsi l'existence de la solution z_0 dans tout le plan des x, y, désignons par n_1 la limite supérieure de $|z_0|$. Nous en déduirons immédiatement la limite supérieure n de $|z|$ à l'intérieur de C, du moment qu'on nous donne les valeurs de z sur le contour C. Il nous suffira de nous appuyer sur la remarque suivante :

Si z et z_0 sont des solutions d'une même équation du type elliptique

$$(1') \qquad F(r, s, t, p, q, z, x, y) = 0 \qquad (F'_r F'_z \leqq 0),$$

leur différence ne peut avoir ni de maxima positifs, ni de minima négatifs; le module de cette différence atteint sa plus grande valeur sur le contour.

En effet, en retranchant

$$F(r_0, s_0, t_0, p_0, q_0, z_0, x, y) = 0 \qquad \text{de} \qquad F(r, s, t, p, q, z, x, y) = 0,$$

(1) *Voir* E. Picard, *Traité d'Analyse*, t. III, p. 26.

(2) Il est d'ailleurs facile de vérifier que $0 < u < \rho$ et $\frac{du}{d\rho} > 0$.

nous obtenons l'équation linéaire

$$F'_r \frac{\partial^2 \delta}{\partial x^2} + F'_s \frac{\partial^2 \delta}{\partial x \, \partial y} + F'_t \frac{\partial^2 \delta}{\partial y^2} + F'_p \frac{\partial \delta}{\partial x} + F'_q \frac{\partial \delta}{\partial y} + F'_z \delta = 0,$$

où l'on a posé $\delta = z - z_0$; les valeurs des variables qu'on a à substituer à la place de r, s, t, p, q, z dans les coefficients F'_r, F'_s, F'_t, ... sont inconnues, il est essentiel seulement que ce soient les mêmes pour tous les coefficients. Puisque les relations

$$4F'_r F'_t - (F'_s)^2 > 0, \qquad F'_r F'_z \leqq 0,$$

sont vérifiées identiquement, on voit qu'en un point où $\frac{\partial \delta}{\partial x} = \frac{\partial \delta}{\partial y} = 0$, l'expression

$$F'_r \frac{\partial^2 \delta}{\partial x^2} + F'_s \frac{\partial^2 \delta}{\partial x \, \partial y} + F'_t \frac{\partial^2 \delta}{\partial y^2}$$

est, ou bien nulle, ou bien a le même signe que $F'_r \delta$, ce qui prouve que δ n'a ni maximum positif, ni minimum négatif à l'intérieur du contour. La valeur absolue de la différence $z - z_0$ atteint donc son maximum sur le contour. Par conséquent, si sur le contour $|z| < N$, on aura constamment $|\delta| < N + n_1$; d'où, à l'intérieur du contour $|z| < N + 2n_1$. On pourra donc poser $n = N + 2n_1$ et en déduire la régularité de l'équation (6) par le procédé employé pour l'équation (4).

5. Examinons encore l'équation des surfaces *à courbure moyenne constante* (1)

$$(7) \qquad (1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t = k(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}},$$

k étant la valeur constante de la courbure.

Nous allons voir que dans certains cas le problème de Dirichlet pour cette équation est régulièrement possible; dans d'autres, la solution est irrégulière et, enfin, dans une dernière catégorie de cas le problème est absolument impossible. Nous dirons que l'équation (7) est *irré-*

---

(1) Dans la Note présentée le 13 mai 1907 à l'Académie des Sciences, l'équation (7) a été placée, par erreur, à la place de l'équation (6), comme exemple d'équation régulière.

gulière. Il est remarquable que *les problèmes de Dirichlet admettant des solutions irrégulières servent, en général, de frontières entre l'ensemble de problèmes régulièrement possibles et celui des problèmes impossibles.*

On vérifie sans peine que $z_0 = -\frac{1}{k}\sqrt{4-(x^2+y^2)k^2}$ est une solution de l'équation (7) analytique à l'intérieur de la circonférence C de rayon $R = \frac{2}{k}$, où elle s'annule. On voit d'ailleurs que cette solution particulière est une demi-sphère, ayant son centre à l'origine; le plan tangent en un point quelconque de l'équateur, qui sert de bord à la surface([1]), est vertical; les dérivées premières de la solution deviennent infinies sur le contour C, la solution est *irrégulière* sur ce contour.

De l'irrégularité de z_0 on déduit l'impossibilité du problème de Dirichlet pour un contour C' *contenant à son intérieur tout le cercle* C que nous appellerons cercle *caractéristique*.

En effet, construisons un cylindre vertical, ayant pour base la circonférence caractéristique; si la solution z du problème relatif au contour C' existait, elle serait représentée par une surface qui ne pourrait pas avoir de plans tangents verticaux en aucun de ses points situés sur notre cylindre. Or, considérons un des points de hauteur maxima de la courbe d'intersection de la surface avec le cylindre, de telle sorte qu'aucun point de cette courbe ne se trouve au-dessus de la circonférence C_1, section horizontale du cylindre menée par le point considéré. Il résulterait alors de la remarque de la page 241, que la demi-sphère inférieure passant par C_1, qui est aussi un cercle caractéristique, est située entièrement *au-dessus* de notre surface hypothétique; par conséquent le plan tangent à cette surface en un point qui lui est commun avec l'hémisphère devrait être nécessairement vertical, ce qui est contraire à l'hypothèse. La solution considérée ne peut donc pas exister.

Dans le cas, où le contour C' sur lequel sont données les valeurs de

---

([1]) Je remarquerai, en passant, que si l'on ne spécifie pas le signe du radical dans le second membre de l'équation (7), on trouvera aussi comme solution la deuxième demi-sphère. Ainsi, tandis que notre équation ne peut pas admettre plus d'une solution du problème de Dirichlet, le problème géométrique correspondant, lorsqu'il est possible, admettra, en général, deux solutions.

la solution cherchée, ne comprend à son intérieur aucun cercle caractéristique, une étude plus ou moins minutieuse est nécessaire dans chaque cas particulier pour décider de la possibilité du problème posé. Le principe qu'on doit prendre comme point de départ dans cette étude est le suivant :

Si le problème de Dirichlet avec certaines données sur un contour déterminé C′ *est possible pour l'équation*

$$(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t = f(x,y)(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}, \tag{8}$$

le problème avec les mêmes données sera également possible pour l'équation

$$(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t = k(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}, \tag{7}$$

si, pour toute valeur de x, y à l'intérieur du contour C′, *on a*

$$0 \leqq k \leqq f(x,y).$$

Il y aurait intérêt de donner de cette proposition, presque évidente géométriquement, une démonstration purement géométrique. Nous en donnerons une autre démonstration qui se rattache simplement à notre étude générale.

Considérons le nombre k dans l'équation (7), comme un paramètre variable. Pour $k = 0$, l'équation se réduira à celle des surfaces minima qui admet certainement une solution du problème de Dirichlet avec les données aux limites proposées. Lorsque k sera très petit, le problème sera encore possible, en vertu de la théorie générale ; on pourra affirmer sa possibilité, tant qu'on saura indiquer *a priori* une limite supérieure de $|p|$, $|q|$ de la solution supposée, ou géométriquement, tant qu'on parviendra à limiter supérieurement l'inclinaison $\sqrt{p^2+q^2}$ du plan tangent à la surface correspondante. Or, en reprenant le calcul de la page 237, on voit sans peine que le carré de l'inclinaison

$$w = p^2 + q^2,$$

n'est jamais maximum à l'intérieur d'une surface à courbure moyenne constante, car cela exigerait que l'expression

$$T = (1+q^2)r^2 - 2pqrs + (1+p^2)s^2 + (1+q^2)s^2 - 2pqst + (1+p^2)t^2$$

soit négative. Il reste donc à montrer que l'inclinaison du plan tangent peut être limitée supérieurement sur le bord, lorsque les conditions du théorème sont remplies.

A cet effet, remarquons que la surface à courbure moyenne satisfaisant à l'équation (7) est entièrement comprise (dans sa partie qui a pour projection sur le plan des x, y l'aire limitée par le contour C′) entre la surface minima et la surface satisfaisant à l'équation (8), si toutes ces surfaces ont, comme il a été supposé, une courbe fermée commune qui se projette suivant C′. Cela résulte du fait que la différence $z' - z = \delta$ entre une solution de l'équation (8) et une solution de l'équation (7) satisfait à une équation linéaire du type elliptique de la forme

$$A\frac{\partial^2\delta}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2\delta}{\partial x\,\partial y} + C\frac{\partial^2\delta}{\partial y^2} + 2D\frac{\partial\delta}{\partial x} + 2E\frac{\partial\delta}{\partial y} = [f(x, y) - k]P,$$

dans laquelle P est essentiellement positif; le second membre étant positif, δ n'a pas de maximum; $z' - z = \delta$ n'est donc jamais positif à l'intérieur du contour C′, s'il s'annule sur ce contour. Pour la même raison, la différence $z'' - z$ entre la hauteur d'un point de la surface minima et celle du point correspondant de la surface à courbure constante K n'est pas négative. On a donc

$$z'' \geqq z \geqq z'.$$

Il est clair ainsi que le plan tangent à la surface satisfaisant à l'équation (7) est, en un point quelconque du bord situé dans l'angle dièdre (qui ne contient pas de plan vertical à son intérieur), formé par les plans tangents en ce même point à la surface minima et à la surface satisfaisant à l'équation (8). Le plan tangent à notre surface ne peut donc pas avoir une inclinaison qui soit à la fois supérieure à l'inclinaison des plans tangents à ces deux surfaces données. C. Q. F. D.

On reconnaît également, par un raisonnement identique, que *l'équation (7) n'admet certainement pas de solutions du problème posé, si l'on a constamment*

$$0 \leqq f(x, y) \leqq k,$$

et si le problème est impossible pour l'équation (8).

Il serait, sans doute, intéressant d'indiquer la marche systématique à suivre pour pouvoir décider dans chaque cas particulier, par un nombre fini d'essais, si le problème est possible, ou non. Je n'ai pas l'intention de m'occuper ici de cette question. Je me bornerai de donner, comme exemple, une condition *suffisante* pour qu'on puisse faire passer par une *ellipse donnée une surface à courbure moyenne donnée.*

Le problème revient à trouver une solution de l'équation (7) qui s'annule sur le contour ayant pour équation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0.$$

Le problème sera possible si l'on parvient à mener par ce contour une surface de la nature exigée par notre principe, telle que sa courbure moyenne soit constammant supérieure à K. A cet effet, envisageons l'ellipsoïde de révolution allongé ayant pour méridien l'ellipse donnée.

Un calcul facile montre que la courbure moyenne de l'ellipsoïde a pour expression

$$f(x)=\frac{a\left[b^2+a^2-x^2\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)\right]}{b\left[a^2-x^2\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)\right]^{\frac{3}{2}}}.$$

Si l'on suppose $a>b$, le minimum de la courbure moyenne de l'ellipsoïde aura lieu pour $x=0$; on a alors

$$f(0)=\frac{a(b^2+a^2)}{ba^3}=b\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\cdot$$

On pourra donc certainement mener, par l'ellipse donnée, une surface à courbure moyenne K, si

$$k<b\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\cdot$$

Sur les surfaces définies par leur courbure totale.

6. Je commencerai ce Chapitre par l'étude de l'équation

(9) $$rt-s^2=k^2.$$

Cette équation est du type elliptique; mais elle a, aussi bien que l'équation des surfaces à courbure totale positive constante, cela de particulier, que l'inégalité caractéristique

$$4F'_r F'_t - (F'_s)^2 = 4(rt - s^2) > 0$$

n'est pas vérifiée identiquement; elle n'a lieu, en général, que pour les fonctions représentées par des surfaces à courbure totale positive et, en particulier, pour toutes les solutions de l'équation.

Nous remarquerons d'abord que le problème de Dirichlet pour cette équation, dans le cas où il est possible, ne peut avoir plus de deux solutions.

En effet, en aucun point, la dérivée seconde r d'une solution de l'équation (9) ne peut s'annuler et ne peut, par conséquent, changer de signe. Considérons alors une solution z, dont la dérivée seconde $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ est constamment positive; il ne pourra pas exister d'autre solution u jouissant de la même propriété qui se confondrait avec la première en tous les points d'un contour fermé, car la différence $\delta = z - u$, satisfait à l'équation linéaire

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\frac{\partial^2 \delta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \delta}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\right)\frac{\partial^2 \delta}{\partial x\,\partial y} = 0, \tag{10}$$

qui est du type elliptique [1], lorsque $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ sont de même signe; et par conséquent, si cette différence était nulle sur le contour, elle serait nulle identiquement. Il ne peut donc exister plus d'une solution, pour laquelle $r > 0$; de même, il ne pourra pas exister plus d'une solution pour laquelle $r < 0$. En tout, il n'y aura jamais plus de deux solutions.

Nous allons montrer à présent que *l'équation* (9) *est régulière*, *que*

---

[1] Il pourrait se faire que l'équation (10) ne soit pas du type elliptique. Il est certain alors que l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial^2 \delta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \delta}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\right)\frac{\partial^2 \delta}{\partial x\,\partial y} = 0,$$

à laquelle δ satisfait également, est du type elliptique.

le problème de Dirichlet avec des données quelconques sur un cercle C *de rayon arbitraire* R *admet toujours deux solutions distinctes.*

Notre proposition sera démontrée, si nous arrivons à indiquer *a priori*, au moyen des données sur le contour, des limites supérieures des modules des dérivées de deux premiers ordres de la solution dont on admet l'existence.

Examinons d'abord le cas où r est positif. Le raisonnement serait tout pareil, si l'on supposait r négatif. La surface hypothétique S tournera donc sa concavité vers le haut, tout aussi bien que le paraboloïde de révolution

$$z_1 = \frac{k}{2}(x^2+y^2)$$

qui satisfait également à l'équation (9). Il en résulte, grâce à l'équation (10), que le point le plus bas de notre surface S ne peut pas tomber au-dessous de $z_0 - \frac{k}{2}R^2$, en désignant par z_0 la hauteur donnée du point le plus bas du bord de cette surface. Le point le plus haut de la surface se trouvera manifestement sur le bord, puisque, par hypothèse, notre surface tourne sa concavité vers le haut.

Passons à la recherche des limites supérieures des modules des dérivées premières. Il est évident que ni le $|p|$, ni le $|q|$ ne peuvent avoir de maximum, car r et t ne s'annulent jamais. D'autre part, r étant positif, on aura sur le contour $\frac{\partial z}{\partial \rho} > -\frac{\partial^2 z}{R\partial\theta^2}$, ce qui nous donne une limite supérieure des modules des valeurs négatives de la dérivée $\frac{\partial z}{\partial \rho}$ suivant le rayon. Il n'est pas plus difficile d'indiquer une limite supérieure des valeurs positives de $\frac{\partial z}{\partial \rho}$. Dans ce but, prenons un point quelconque M du bord donné (ayant pour projection la circonférence C) de notre surface S; menons, par la tangente au bord en ce point, un plan de telle sorte que la section elliptique E du cylindre vertical, ayant pour base la circonférence C, soit entièrement au-dessous du bord de la surface S. Soit $Z = ax + by + d$ l'équation de ce plan; la surface Σ satisfaisant à l'équation (9) et passant par l'ellipse E, en tournant sa concavité vers le haut, aura pour équation

$$z' = \frac{k}{2}(x^2+y^2-R^2) + ax + by + d.$$

Cette surface, étant entièrement au-dessous de la surface S, doit avoir en leur point commun M le plan tangent plus incliné que celui de la surface S (si ce dernier va en montant de l'intérieur du contour à l'extérieur); on aura donc

$$\left(\frac{\partial z}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\mathrm{R}\,\partial \theta}\right)^2 < \left(\frac{\partial z'}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial z'}{\mathrm{R}\,\partial \theta}\right)^2$$

ou

$$\frac{\partial z}{\partial \rho} < \frac{\partial z'}{\partial \rho} = \mathrm{KR} + a\cos\theta + b\sin\theta.$$

Il nous reste donc à nous occuper des dérivées secondes. Il est clair d'abord que leurs modules n'ont pas de maxima à l'intérieur du contour. En effet, si $r = \frac{\partial p}{\partial x}$, par exemple, est maximum, on a

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 p}{\partial x\,\partial y} = 0\,;$$

or, en différentiant l'équation (9) par rapport à x, on trouve

$$r\frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + t\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - 2s\frac{\partial^2 p}{\partial x\,\partial y} = 0\,;$$

et, en différentiant encore une fois, en tenant compte des conditions du maximum écrites plus haut, on a

$$r\frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + t\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} - 2s\frac{\partial^2 r}{\partial x\,\partial y} = 0,$$

ce qui rend le maximum (ou le minimum) de r impossible.

Pour avoir des limites supérieures des modules des dérivées secondes sur le contour, différentions l'équation (9) par rapport à θ; nous obtenons l'équation, à laquelle satisfait $\frac{\partial z}{\partial \theta} = z_1$,

$$r\frac{\partial^2 z_1}{\partial y^2} + t\frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2} - 2s\frac{\partial^2 z_1}{\partial x\,\partial y} = 0.$$

Nous en concluons que la courbure totale

$$\frac{\frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z_1}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z_1}{\partial x\,\partial y}\right)^2}{\left[1 + \left(\frac{\partial z_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z_1}{\partial y}\right)^2\right]^2}$$

de la surface représentée par la fonction z_1 est, en général, négative (l'ensemble des points à courbure négative est partout dense); par conséquent, en vertu d'un raisonnement plusieurs fois appliqué, la limite supérieure de $\left|\frac{\partial z_1}{\partial \rho}\right| = \left|\frac{\partial^2 z}{\partial \rho\, \partial \theta}\right|$ dépend uniquement de la limite supérieure du module de la dérivée troisième, $\varphi'''(\theta)$, de la fonction $\varphi(\theta)$ donnée, à laquelle z se réduit sur le contour.

Connaissant ainsi les limites supérieures de $\left|\frac{\partial^2 z}{\partial \rho\, \partial \theta}\right|$ et $\left|\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}\right|$, on déduira de l'équation (9), écrite en coordonnées polaires,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial^2 \rho}\left(\frac{\partial^2 z}{\rho^2\, \partial \theta^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial z}{\partial \rho}\right) - \left(\frac{\partial^2 z}{\rho\, \partial \rho\, \partial \theta} - \frac{\partial z}{\rho^2\, \partial \theta}\right)^2 = k^2,$$

une limite supérieure du module $\left|\frac{\partial^2 z}{\partial \rho^2}\right|$ de la dernière dérivée du second ordre. Seulement il nous faudra indiquer pour cela une limite inférieure sur le contour de l'expression positive $\frac{\partial^2 z}{\rho^2\, \partial \theta^2} + \frac{\partial z}{\rho \partial \rho}$. Nous pouvons naturellement nous borner à indiquer cette limite inférieure au point $\theta = 0$.

Désignons par $\varphi_0, \varphi'_0, \varphi''_0, \varphi'''_0$ les valeurs données de z et de ses dérivées des trois premiers ordres au point considéré. D'autre part, envisageons le paraboloïde S ayant pour équation

$$\begin{aligned} u = {} & \left(\frac{d - \varphi_0 - \varphi''_0}{R^2}\right)x^2 - \frac{\varphi'_0 + \varphi'''_0}{3R^2}xy + \alpha(x^2 + y^2 - R^2) \\ & + \left(\frac{2\varphi_0 + \varphi''_0 - 2d}{R}\right)x + \frac{4\varphi'_0 + \varphi'''_0}{3R}y + d, \end{aligned}$$

en supposant que α et d sont reliés par la relation

$$(11) \qquad 4\alpha(d - \varphi_0 - \varphi''_0 + \alpha R^2) - \left(\frac{\varphi'_0 + \varphi'''_0}{3R}\right)^2 = k^2 R^2.$$

On voit alors que u satisfait à l'équation (9) et, de plus, on a pour $\theta = 0$ sur le contour,

$$u = \varphi_0, \qquad \frac{\partial u}{\partial \theta} = \varphi'_0, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = \varphi''_0, \qquad \frac{\partial^3 u}{\partial \theta^3} = \varphi'''_0.$$

Par conséquent, si l'on compare z et u sur le contour, on voit que

$$z - u = \varphi + (\varphi_0 + \varphi'_0)\cos^2\theta + \frac{\varphi'_0 + \varphi'''_0}{3}\cos\theta\sin\theta - (2\varphi_0 + \varphi'_0)\cos\theta - \frac{4\varphi'_0 + \varphi''_0}{3}\sin\theta - d(1-\cos\theta)^2;$$

et puisque

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\mu\theta^4}{24}, \qquad \sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{6} + \frac{\mu'\theta^5}{120},$$
$$\varphi(\theta) = \varphi_0 + \varphi'_0\theta + \frac{\varphi''_0}{2}\theta^2 + \frac{\varphi'''_0}{6}\theta^3 + \frac{F}{24}\theta^4;$$

où μ et μ' sont inférieurs à 1, et $|F|$ est inférieur à la limite supérieure des modules des dérivées *quatrièmes*, $\varphi^{\text{IV}}(\theta)$, de $\varphi(\theta)$, on trouve

$$z - u = H\theta^4 - (1-\cos\theta)^2 d,$$

la limite supérieure de $|H|$ étant un nombre bien déterminé qu'il est inutile de calculer. Or, tant que $|\theta| < \pi$, on a

$$\frac{\theta^4}{(1-\cos\theta)^2} < \frac{\pi^4}{4}.$$

Il suffira donc de prendre

$$d > \frac{H\pi^4}{4},$$

pour être certain que z n'est jamais supérieur à u; par conséquent, on a au point considéré

$$\frac{\partial z}{\partial\rho} > \frac{\partial u}{\partial\rho}.$$

Il en résulte que $\frac{\partial^2 z}{\rho^2\partial\theta^2} + \frac{\partial z}{\rho\partial\rho}$ aura une borne inférieure parfaitement déterminée, égale à

$$\frac{\partial^2 u}{\rho^2\partial\theta^2} + \frac{\partial u}{\rho\,\partial\rho} = 2\alpha$$

au point considéré. [α est déterminé au moyen de l'égalité (11), du moment que nous avons fixé d.]

Notre démonstration se trouve ainsi achevée. On prouve de la même façon l'existence d'une solution dont la concavité est dirigée vers le bas.

7. Nous appliquerons encore notre méthode à l'étude des surfaces à *courbure totale constante*, définies par l'équation

$$(12) \qquad rt - s^2 = k^2(1 + p^2 + q^2)^2.$$

On sait que ces surfaces sont intimement liées aux surfaces à courbure moyenne constante ; il faut donc s'attendre à trouver des résultats analogues à ceux que nous avons obtenus au paragraphe 5. Par le fait, nous allons démontrer le théorème suivant :

Théorème. — *Étant donnée une courbe fermée* S *dans l'espace, ayant pour projection sur un certain plan (des xy) une circonférence* C, *on peut faire passer par cette courbe deux surfaces à courbure constante positive donnée, pourvu que cette courbure, k^2, soit suffisamment petite. En particulier, pour que le problème soit possible, il faut et il suffit qu'il existe au moins une surface à courbure positive f (variable), passant par la courbe* S, *et telle qu'on ait*

$$f \geqq k^2.$$

Il résulte du paragraphe précédent qu'on peut mener par n'importe quel contour à projection circulaire une surface à courbure totale positive f (f ayant une limite inférieure différente de zéro). D'autre part, il est évident que la condition de la possibilité du problème, indiquée dans l'énoncé du théorème, est nécessaire. Il faut démontrer seulement qu'elle est suffisante.

Dans ce but je remarquerais d'abord que, comme pour l'équation (9), les modules des dérivées premières d'une solution de l'équation (12) n'ont pas de maximum.

Envisageons la solution représentée par une surface qui tourne sa concavité vers le haut pour laquelle on a, par conséquent $r > 0$, $t > 0$.

Montrons que la fonction positive

$$w = r + t$$

ne peut pas avoir de maximum à l'intérieur du contour C.

A cet effet, écrivons les conditions nécessaires du maximum

$$\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial t}{\partial x}=0, \qquad \frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial t}{\partial y}=0,$$

ou encore

$$\frac{\partial r}{\partial x}=-\frac{\partial s}{\partial y}=-\frac{\partial t}{\partial x}=\lambda,$$
$$\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{\partial s}{\partial x}=-\frac{\partial t}{\partial y}=\mu.$$

En tenant compte de ces égalités, différentions l'équation (12) deux fois par rapport à x. Nous aurons

$$r\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}+t\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}-2s\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}$$
$$=2(\lambda^2+\mu^2)+4k^2(pr+qs)^2+4k^2(1+p^2+q^2)(r^2+s^2+p\lambda+q\mu),$$

et de même, en différentiant deux fois par rapport à y,

$$r\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}+t\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}-2s\frac{\partial^2 s}{\partial y^2}$$
$$=2(\lambda^2+\mu^2)+4k^2(ps+qt)^2+4k^2(1+p^2+q^2)(s^2+t^2-p\lambda-q\mu).$$

D'où, en additionnant membre à membre,

$$r\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+t\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-2s\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}=4(\lambda^2+\mu^2)+4k^2(pr+qs)^2+4k^2(ps+qt)^2$$
$$+4k^2(1+p^2+q^2)(r^2+2s^2+t^2)>0.$$

Donc, $w=r+t$ ne peut pas avoir de maximum.

Il est clair que, du moment qu'on connaîtra une limite supérieure de $r+t$, on tirera immédiatement de l'équation (12) une limite supérieure de $|r|$, $|t|$, $|s|$.

Il nous reste donc à chercher des limites supérieures des dérivées des deux premiers ordres sur le contour. A cet effet, considérons la surface (concave vers le haut) passant par la même courbe, S, que notre surface à courbure constante, en satisfaisant à l'équation

$$rt-s^2=f(1+p^2+q^2)^2,$$

où $f\geqq k^2$.

Il est facile de voir qu'en un point quelconque du contour cette nouvelle surface a un plan tangent plus incliné que notre surface étudiée, car cette dernière est certainement entièrement au-dessus de la première. En effet, on vérifie, comme dans le Chapitre précédent, que la différence δ entre la hauteur d'un point de notre surface à courbure constante et celle du point correspondant de la surface auxiliaire satisfait à une inégalité de la forme

$$A\frac{\partial^2\delta}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2\delta}{\partial x\,\partial y}+C\frac{\partial^2\delta}{\partial y^2}+D\frac{\partial\delta}{\partial x}+E\frac{\partial\delta}{\partial y}\leqq 0 \qquad (AC-B^2>0),$$

qui montre que δ ne peut être négatif s'il s'annule sur le contour.

Ainsi l'existence de la surface auxiliaire permet de limiter supérieurement l'inclinaison du plan tangent de la surface cherchée. C'est d'ailleurs le seul point de la démonstration où cette hypothèse essentielle intervient.

Cherchons enfin une limite supérieure de

$$w=r+t=\frac{\partial^2 z}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial z}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 z}{\partial\theta^2},$$

en un point du contour, où cette fonction atteint sa plus grande valeur.

On aura en ce point

$$(13)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial w}{\partial\theta}=\frac{\partial^3 z}{\partial\rho^2\,\partial\theta}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 z}{\partial\rho\,\partial\theta}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial^3 z}{\partial\theta^3}=0,\\ &\frac{\partial w}{\partial\rho}=\frac{\partial^3 z}{\partial\rho^3}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 z}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^3 z}{\partial\rho\,\partial\theta^2}-\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial z}{\partial\rho}-\frac{2}{\rho^3}\frac{\partial^2 z}{\partial\theta^2}\geqq 0.\end{aligned}\right.$$

Dans la suite nous représenterons par des lettres quelconques de l'alphabet grec les expressions dont on connaît des limites supérieures, c'est-à-dire des fonctions bornées de $\frac{\partial z}{\partial\rho}, \frac{\partial z}{\partial\theta}, \frac{\partial^2 z}{\partial\theta^2}, \frac{\partial^3 z}{\partial\theta^3}$.

Remarquons de suite qu'on connaît une limite supérieure à l'expression positive

$$\frac{1}{\frac{\partial z}{\partial\rho}+\frac{1}{R}\frac{\partial^2 z}{\partial\theta^2}}=\varepsilon^2,$$

sur le contour C, car cette expression est en chaque point inférieure à

$$\frac{1}{\frac{\partial u}{\partial\rho}+\frac{1}{R}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}},$$

où u est la solution de l'équation (9) prenant sur le contour C les mêmes valeurs que z.

Ceci posé, différentions l'équation (12), écrite en coordonnées polaires,

$$(12\,bis)\quad \frac{\partial^2 z}{\partial\rho^2}\left(\frac{\partial^2 z}{\rho^2\,\partial\theta^2}+\frac{\partial z}{\rho\,\partial\rho}\right)-\left(\frac{\partial^2 z}{\rho\,\partial\rho\,\partial\theta}-\frac{\partial z}{\rho^2\,\partial\theta}\right)^2=\mathrm{K}^2\left[1+\left(\frac{\partial z}{\partial\rho}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\rho\,\partial\theta}\right)^2\right]^2,$$

par rapport à ρ et θ respectivement. En employant les lettres grecques de la façon convenue et en posant

$$c=\frac{\partial^2 z}{\rho\,\partial\rho\,\partial\theta}-\frac{\partial z}{\rho^2\,\partial\theta},$$

nous aurons

$$(w-\alpha)\left(\frac{\partial c}{\rho\,\partial\theta}+\frac{w}{\rho}+\beta\right)+\frac{\partial^3 z}{\partial\rho^3}\alpha-2c\left(\frac{\partial^3 z}{\rho\,\partial\rho^2\,\partial\theta}-\frac{2c}{\rho}\right)=\alpha' w+\beta' c+\gamma',$$

$$(w-\alpha)(c+\gamma)+\frac{\partial^3 z}{\partial\rho^2\,\partial\theta}\alpha-2c\frac{\partial c}{\partial\theta}=\alpha' c+\delta'.$$

En vertu des relations (13), ces égalités prendront la forme

$$(14)\quad \begin{cases} (w-2\alpha)\left(\dfrac{\partial c}{\rho\,\partial\theta}+\dfrac{w}{\rho}+\beta\right)+6c\left(\dfrac{c}{\rho}+\delta\right)\leqq\alpha' w+\beta' c+\gamma', \\ (w-2\alpha)(c+\gamma)-2c\dfrac{\partial c}{\partial\theta}=\alpha' c+\delta'. \end{cases}$$

D'autre part, de l'équation (12 *bis*) nous tirons

$$w=\varepsilon^2 c^2+\varepsilon'.$$

Par conséquent, pour avoir une limite supérieure de w, il nous suffira de connaître celle de $|c|$.

Supposons, pour fixer les idées, $c>0$.

Des relations (14) nous tirons alors, en éliminant d'abord $\frac{\partial c}{\partial\theta}$ et ensuite w,

$$(w-2\alpha)\left(\frac{3wc+\gamma w}{2\rho}+\eta c+\eta'\right)+6c^2\left(\frac{c}{\rho}+\delta\right)\leqq c(\alpha' w+\beta' c+\gamma')$$

et

$$c^5+\lambda c^4+\lambda' c^3+\mu c^2+\mu' c+\pi\leqq 0.$$

On en déduit immédiatement que

$$c < 1 + |\lambda| + |\lambda'| + |\mu| + |\mu'| + |\pi|.$$

Un calcul identique donnerait une limite supérieure de $|c|$ dans l'hypothèse de c négatif.

La démonstration est ainsi achevée.

Je n'insisterai pas sur les applications du théorème démontré. Je me bornerai seulement à attirer l'attention sur le fait suivant :

D'après ce qui précède, on peut toujours mener, par une courbe fermée à projection circulaire, deux surfaces à courbure totale constante suffisamment petite. Il est facile de se rendre compte que, lorsque la courbure tendra vers zéro, chaque surface tendra vers une surface limite bien déterminée. On voit également que sur chacune de ces surfaces limites z est une fonction, à variation bornée, de x, y. Il en résulte que ces surfaces, qui sont limites de surfaces applicables sur des sphères de rayon de plus en plus grand, sont elles-mêmes *applicables sur le plan*.

Il y a lieu de remarquer que ces surfaces ne sont pas, en général, *régulières*, ce sont probablement des surfaces de M. Lebesgue.

En effet, prenons, par exemple, comme fonction donnée sur le contour C,

$$\varphi(\theta) = \cos^2 2\theta.$$

La courbe par laquelle devra passer la surface aura *quatre* plans de symétrie ; il en sera donc de même de la surface. Or une surface développable sans point singulier ne peut avoir plus de *deux* plans de symétrie sans se réduire à un plan.

Je terminerai par la remarque qu'une circonstance analogue se présente, en général, lorsqu'on veut traiter les équations du type parabolique comme un cas limite des équations du type elliptique.