ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

S. ZAREMBA

Le problème biharmonique restreint

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 26 (1909), p. 337-404

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1909_3_26__337_0>

LE

PROBLÈME BIHARMONIQUE RESTREINT;

PAR M. S. ZAREMBA.

I. — Introduction.

1. Nous appellerons *problème biharmonique* le problème suivant :

Déterminer, pour un domaine donné (D), *une fonction* w *admettant des valeurs périphériques données, telle que sa dérivée suivant la normale intérieure à la frontière* (S) *du domaine considéré soit égale à une fonction donnée et telle enfin que, à l'intérieur du domaine* (D), *elle vérifie l'équation aux dérivées partielles du quatrième ordre*

$$\Delta^2 w = 0, \tag{1}$$

où Δ *représente l'opérateur de Laplace* (¹).

Dans certains cas, comme par exemple dans celui où il s'agit de déterminer la figure d'équilibre d'une plaque élastique encastrée, on connaît à l'avance une fonction φ vérifiant les conditions aux limites de la fonction demandée w.

(¹) Le problème biharmonique a déjà fait l'objet d'importants travaux (*voir* en particulier le Mémoire de M. Korn dans le *Bulletin de l'Académie de Cracovie*, octobre 1907, ainsi que les Rapports sur les Mémoires présentés au dernier concours du prix Vaillant dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, du 2 décembre 1907), mais la méthode exposée dans ce travail est essentiellement différente de celles des autres auteurs.

Plaçons-nous dans l'hypothèse où la circonstance précédente se présenterait, et supposons que la fonction φ jouisse des propriétés suivantes :

1° Elle est continue dans tout le domaine (D) et même sur la frontière (S) de ce domaine;

2° Chacune des dérivées du premier ordre de la fonction considérée est égale à une fonction vérifiant les mêmes conditions de continuité que la fonction φ elle-même;

3° L'équation

$$\psi = \Delta\varphi \tag{2}$$

définit une fonction ψ pouvant n'être ni continue ni même bornée, mais telle que l'intégrale [1]

$$\int_{(D)} \psi^2 \, d\tau, \tag{3}$$

où $d\tau$ représente l'élément du domaine (D), ait une valeur finie, bien déterminée, et telle en outre que le potentiel [logarithmique ou newtonien suivant le nombre de dimensions du domaine (D)] dérivant d'une masse, continue dans le domaine (D) et ayant en chaque point une densité égale à la valeur correspondante de la fonction ψ, admette des dérivées du premier ordre continues, non seulement à l'intérieur du domaine considéré, mais aussi à la traversée de la frontière (S) de ce domaine.

On pourra alors énoncer les conditions aux limites relatives à la fonction demandée w de la façon suivante :

Les valeurs périphériques de cette fonction et celles de ses dérivées partielles du premier ordre devront coïncider avec les éléments analogues relatifs à la fonction φ.

C'est cette forme particulière du problème biharmonique que nous désignerons par la dénomination de *problème biharmonique restreint*.

L'énoncé de ce problème offre l'avantage de conserver un sens précis, quelles que soient les singularités de la frontière du domaine (D).

---

[1] Dans tout ce travail, nous nous placerons au point de vue des quantités réelles.

Pour plus de brièveté, nous nous bornerons au cas de deux variables indépendantes, mais on verra que, à quelques restrictions près, les considérations qui vont suivre peuvent aisément être étendues à l'espace; plus particulièrement, l'extension à l'espace de la théorie développée au Chapitre suivant est immédiate.

2. Dans tout ce Mémoire, nous représenterons par F(A) la valeur, en un point A, d'une fonction F des coordonnées rectangulaires x et y d'un point variable et nous désignerons par $d\tau$ l'élément d'aire; toutefois, lorsqu'il y aura intérêt à indiquer explicitement qu'un élément d'aire se rapporte à un point B, nous remplacerons le symbole $d\tau$ par le symbole $d\tau_B$.

Ces conventions admises, reprenons les notations du numéro précédent et posons

$$u = \varphi - w, \tag{4}$$

$$v = \Delta w. \tag{5}$$

Eu égard à l'équation (2), nous aurons

$$\Delta u = \psi - v,$$

d'où

$$u(A) = \frac{1}{2\pi} \int_{(D)} [\psi(B) - v(B)] \log \overline{AB}\, d\tau_B, \tag{6}$$

en tenant compte de ce que la fonction u et ses dérivées du premier ordre s'annulent sur la frontière (S) du domaine (D).

Les formules (4) et (6) ramènent le problème biharmonique restreint au problème suivant :

Déterminer une fonction v, harmonique à l'intérieur du domaine (D) *et telle que la fonction u et ses dérivées partielles du premier ordre restent continues, même à la traversée de la frontière* (S) *du domaine* (D), *et se réduisent sur elle à zéro.*

Nous verrons au Chapitre III que ce problème équivaut au problème suivant :

Étant donnée une fonction ψ telle que l'intégrale (3) *ait un sens,* *déterminer une fonction v, harmonique à l'intérieur du domaine* (D), *telle que l'intégrale*

$$\int v^2\, d\tau$$

ait une valeur finie et telle, en outre, que pour toute *fonction h*, harmonique *à l'intérieur du domaine* (D), *on ait*

$$\int_{(D)} \psi_1 h\, d\tau = \int_{(D)} v h\, d\tau,$$

sous l'unique condition que l'intégrale

$$\int_{(D)} h^2\, d\tau$$

ne soit pas dépourvue de signification.

Nous donnerons au problème précédent la dénomination de *problème biharmonique intermédiaire* ou, plus simplement, celle de *problème intermédiaire*.

Le Chapitre suivant sera consacré au *problème intermédiaire;* ce problème y sera traité sans introduire aucune hypothèse restrictive en dehors des suivantes : le domaine (D) ne s'étend pas à l'infini; l'aire de ce domaine a une valeur bien déterminée; enfin, la fonction donnée ψ est tout à fait quelconque, à cela près que l'intégrale

$$\int_{(D)} \psi^2\, d\tau$$

ait un sens.

Dans les Chapitres ultérieurs, nous devrons particulariser davantage la nature du domaine (D). Néanmoins la frontière (S) de ce domaine pourra se composer d'un nombre quelconque de lignes fermées, elle pourra avoir un nombre fini quelconque de points anguleux dont quelques-uns ou tous pourront dégénérer en points de rebroussement; toutefois, estimé à l'intérieur du domaine (D), l'angle formé par les deux arcs issus d'un point de rebroussement devra être égal à *zéro* et non pas à 2π.

La théorie du problème intermédiaire nous conduira à l'intéressant théorème que voici :

Désignons par σ et σ_1 deux fonctions continues définies sur la frontière (S) *du domaine* (D) *et envisageons l'ensemble* (E) *des fonctions dont chacune,* F, *jouit des propriétés suivantes :*

1° *Chacune des fonctions*

$$F, \quad \frac{\partial F}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial F}{\partial y}$$

est égale à une fonction continue à l'intérieur du domaine (D) *ainsi que* sur *la frontière elle-même de ce domaine ;*

2° *Les valeurs périphériques de la fonction* F *constituent une fonction identique à la fonction* σ ;

3° *En tout point où la frontière du domaine* (D) *admet une tangente déterminée, la dérivée de la fonction* F *prise suivant la normale intérieure à* (S) *en ce point est égale à la fonction* σ_1.

S'il existe dans l'ensemble (E) *une fonction* φ *vérifiant les mêmes conditions générales que la fonction désignée par la même lettre dans l'énoncé du problème biharmonique restreint, il existera aussi dans l'ensemble* (E) *une fonction* w *telle que, pour*

$$F = w,$$

l'intégrale

$$\int_{(D)} (\Delta F)^2 d\tau$$

atteigne son minimum ; la fonction w *vérifiera, à l'intérieur du domaine* (D), *l'équation*

$$\Delta^2 w = 0;$$

elle sera donc une fonction biharmonique.

Dans le dernier Chapitre, je ferai connaître une méthode générale pour effectuer réellement le calcul de la fonction v, solution du problème intermédiaire. Je donnerai par cela même une méthode générale pour calculer la fonction demandée dans le problème biharmonique restreint.

La méthode dont je viens de parler nous conduira à un théorème qui me paraît important et dont voici l'énoncé :

Désignons par v une fonction donnée, harmonique à l'intérieur du domaine (D) *et telle que l'intégrale*

$$\int_{(D)} v^2\, d\tau$$

*ait une valeur finie ; il sera toujours possible de faire correspondre à tout nombre donné ε, différent de zéro et positif, mais arbitrairement petit, une fonction h, régulièrement harmonique à distance finie dans tout le plan sauf en un nombre limité de points singuliers, situés à l'*extérieur *du domaine* (D), *telle qu'on ait*

$$\int_{(D)} (v-h)^2\, d\tau < \varepsilon;$$

au surplus, dans le cas où la frontière du domaine (D) *ne se compose que d'un seul contour, la fonction h se réduit à un polynome entier.*

II. — Le problème intermédiaire.

3. Le problème intermédiaire admet au plus une seule solution.

En effet, reprenons les notations de l'Introduction et supposons que deux fonctions φ' et φ'' représentent chacune une solution du problème considéré. Dans ce cas les fonctions φ' et φ'' jouiront, par hypothèse, de la propriété suivante : on aura

$$\int_{(D)} \varphi' h\, d\tau = \int_{(D)} \psi h\, d\tau,$$
$$\int_{(D)} \varphi'' h\, d\tau = \int_{(D)} \psi h\, d\tau,$$

pourvu que la fonction h soit une fonction harmonique à l'intérieur du domaine (D) et telle que l'intégrale

$$\int_{(D)} h^2\, d\tau$$

soit finie. Par conséquent, pourvu que la fonction h satisfasse à ces conditions, on aura aussi

$$\int_{(D)} h(v' - v'')\, d\tau = 0. \tag{1}$$

Or les fonctions v' et v'' sont chacune harmonique à l'intérieur du domaine (D) et les intégrales

$$\int_{(D)} v'^2\, d\tau \qquad \text{et} \qquad \int_{(D)} v''^2\, d\tau$$

sont finies par hypothèse. Il en sera donc de même de l'intégrale

$$\int_{(D)} (v' - v'')^2\, d\tau.$$

Par conséquent, nous avons le droit de poser

$$h = v' - v''.$$

L'équation (1) donnera alors

$$\int_{(D)} (v' - v'')^2\, d\tau = 0.$$

Donc les fonctions v' et v'' sont identiques. Cela prouve bien que le problème intermédiaire admet au plus une seule solution.

4. Supposons que le problème intermédiaire soit possible, et soit v la solution de ce problème. Nous aurons

$$\int_{(D)} vh\, d\tau = \int_{(D)} \psi h\, d\tau, \tag{2}$$

en désignant par h une fonction de même nature qu'au numéro précédent.

Posons, comme nous en avons le droit,

$$h = v.$$

Il viendra

$$\int_{(D)} v^2\, d\tau = \int_{(D)} \psi v\, d\tau.$$

On aura donc

$$\int_{(D)} \psi^2 \, d\tau = \int_{(D)} v^2 \, d\tau + \int_{(D)} (\psi - v)^2 \, d\tau. \tag{3}$$

Cela prouve qu'on aura

$$\int_{(D)} \psi^2 \, d\tau > \int_{(D)} v^2 \, d\tau,$$

à moins qu'on n'ait

$$\int_{(D)} (\psi - v)^2 \, d\tau = 0,$$

ce qui, lorsque la fonction ψ est continue à l'intérieur du domaine (D), ne peut arriver qu'à la condition d'avoir

$$\psi = v$$

en tout point intérieur à ce domaine.

5. Lorsque le domaine (D) coïncide avec l'aire (T) limitée par un cercle (C) de rayon r, la solution du problème intermédiaire est immédiate. En effet, désignons par ψ une fonction quelconque telle que l'intégrale

$$\int_{(T)} \psi^2 \, d\tau$$

ait un sens, et, en plaçant le pôle d'un système de coordonnées polaires (ρ, θ) au centre O du cercle (C), posons

$$\begin{aligned} v_0 &= \frac{1}{r\sqrt{\pi}}, \\ v_{2k-1} &= \frac{1}{r^{k+1}} \sqrt{\frac{2(1+k)}{\pi}} \rho^k \sin k\theta \\ v_{2k} &= \frac{1}{r^{k+1}} \sqrt{\frac{2(1+k)}{\pi}} \rho^k \cos k\theta \end{aligned} \Bigg\} \quad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

La fonction demandée v sera alors donnée par la formule suivante :

$$v = \sum_{n=0}^{\infty} A_k v_n, \tag{4}$$

en posant

(5) $$A_n = \int_{(T)} \psi v_n \, d\tau \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Si aisée que soit la démonstration de ces formules, nous ne pouvons nous dispenser de la développer, parce que ces formules serviront de base à tout ce qui va suivre.

Je fais d'abord les remarques suivantes :

1° On aura

(6) $$A_n = \int_{(T)} v v_n \, d\tau;$$

2° La série (4) sera uniformément et absolument convergente à l'intérieur de tout cercle concentrique au cercle (C) et de rayon plus petit que lui;

3° L'intégrale

(7) $$\int_{(T)} v^2 \, d\tau = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^2 \leqq \int_{(T)} \psi^2 \, d\tau$$

aura une valeur finie (¹).

Considérons maintenant une fonction h harmonique à l'intérieur du cercle (C) et telle que l'intégrale

$$\int_{(T)} h^2 \, d\tau$$

ait un sens. On aura

(8) $$h = \sum_{j=0}^{\infty} B_j v_j,$$

en posant

(9) $$B_j = \int_{(T)} h v_j \, d\tau \qquad (j = 0, 1, 2, 3, \ldots).$$

J'observe maintenant ceci : quelle que soit une fonction F, telle que

(¹) *Voir* pour tous ces points le paragraphe 7, page 15 de mon Mémoire *Sur l'intégration de l'équation biharmonique* (*Bulletin de l'Académie de Cracovie*, janvier 1908).

l'intégrale

$$\int_{(T)} F^2\,d\tau$$

ait une valeur finie, on aura [1]

$$\int_{(T)} \varphi F\,d\tau = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \int_{(T)} \varphi_n F\,d\tau, \tag{10}$$

ainsi que

$$\int_{(T)} h F\,d\tau = \sum_{j=0}^{\infty} B_j \int_{(T)} \varphi_n F\,d\tau.$$

Posons dans cette dernière relation $F = \psi$, il viendra

$$\int_{(T)} h\psi\,d\tau = \sum_{j=0}^{\infty} B_j A_j, \tag{11}$$

en vertu des formules (5). D'autre part, si, dans l'égalité (10), on pose $F = h$, il viendra

$$\int_{(T)} \varphi h\,d\tau = \sum_{n=0}^{\infty} A_n B_n, \tag{12}$$

en vertu des formules (9).

Les équations (11) et (12) entraînent la suivante :

$$\int_{(T)} \varphi h\,d\tau = \int_{(T)} \psi h\,d\tau.$$

Cette équation exprime précisément que la fonction φ est bien la solution du problème intermédiaire pour l'aire (T) par rapport à la fonction ψ.

6. Supposons que le domaine (D) puisse être défini comme l'ensemble des points dont chacun est intérieur à l'un au moins de deux autres domaines (D_1) et (D_2) ayant des points intérieurs communs et

---

[1] *Voir* le paragraphe 6, page 10 du Mémoire cité à la page précédente; se reporter en particulier à la remarque qui termine le paragraphe indiqué.

tels que, pour chacun d'eux, on sache résoudre le problème intermédiaire. Je vais montrer qu'une méthode, que j'appellerai *procédé alterné* à cause de son analogie avec la méthode connue sous ce nom et imaginé par M. Schwarz pour le problème de Dirichlet, permettra de résoudre, dans ce cas, le problème intermédiaire pour le domaine (D) lui-même.

Désignons par ψ la fonction donnée par rapport à laquelle il s'agit de résoudre le problème intermédiaire. Formons une suite infinie de fonctions

$$\psi_0,\quad \psi_1,\quad \psi_2,\quad \psi_3,\quad \ldots, \tag{13}$$

définies dans les limites du domaine (D) de la façon suivante. On a

$$\psi_0 = \psi$$

dans tout le domaine (D), et, d'une façon générale, si l'on désigne par α l'un des nombres 1 ou 2, la fonction $\psi_{2k+\alpha}$ se déduira de la fonction $\psi_{2k+\alpha-1}$ de la manière que voici : à l'intérieur du domaine (D_α) elle sera égale à la fonction harmonique qui, pour ce domaine et par rapport à la fonction $\psi_{2k+\alpha-1}$, représente la solution du problème intermédiaire; dans tout le reste du domaine (D) on aura

$$\psi_{2k+\alpha} = \psi_{2k+\alpha-1}.$$

Je dis tout d'abord qu'il n'y aura pas d'obstacle à prolonger la suite (13) autant qu'on le voudra. En effet, s'il devait s'en produire un, il ne pourrait consister qu'en ce que l'intégrale

$$\int_{(D)} \psi_n^2\, d\tau,$$

pour une certaine valeur de l'indice n, cesserait d'avoir un sens. Or on a évidemment

$$\int_{(D)} \psi_0^2\, d\tau = \int_{(D)} \psi^2\, d\tau. \tag{14}$$

D'autre part (n° 4), nous avons

$$\int_{(D_\alpha)} \psi_{2k+\alpha}^2\, d\tau \leqq \int_{(D_\alpha)} \psi_{2k+\alpha-1}^2\, d\tau;$$

nous avons donc aussi

$$\int_{(D)} \psi^2_{2k+\alpha}\, d\tau \leqq \int_{(D)} \psi^2_{2k+\alpha-1}\, d\tau,$$

ce qui peut s'écrire ainsi :

$$(15) \qquad \int_{(D)} \psi_n^2\, d\tau \leqq \int_{(D)} \psi_{n-1}^2\, d\tau.$$

Par conséquent, l'intégrale

$$\int_{(D)} \psi_n^2\, d\tau$$

aura une valeur finie quel que soit n, et, comme nous l'avons annoncé, la suite (13) pourra être prolongée autant qu'on le voudra.

Désignons, comme précédemment, par α l'un quelconque des nombres 1 ou 2. Je dis qu'on aura

$$(16) \qquad \int_{(D)} \psi_{2k+\alpha}\psi_{2t+\alpha}\, d\tau = \int_{(D)} \psi_{2k+\alpha}\psi_{2t+\alpha-1}\, d\tau$$

pour toutes les valeurs non négatives des entiers k et t. En effet, il résulte immédiatement de la définition de la fonction $\psi_{2t+\alpha}$ et de ce que la fonction $\psi_{2k+\alpha}$ est une fonction harmonique à l'intérieur du domaine (D_α) et telle que l'intégrale

$$\int_{(D_\alpha)} \psi^2_{2k+\alpha}\, d\tau$$

ait un sens, qu'on aura

$$\int_{(D_\alpha)} \psi_{2k+\alpha}\psi_{2t+\alpha}\, d\tau = \int_{(D_\alpha)} \psi_{2k+\alpha}\psi_{2t+\alpha-1}\, d\tau.$$

D'autre part, dans le domaine $(D - D_\alpha)$ on a, par définition,

$$\psi_{2t+\alpha} = \psi_{2t+\alpha-1}.$$

On conclut immédiatement de là que la relation (16) sera bien vérifiée. Cette relation exprime qu'on aura

$$(17) \qquad \int_{(D)} \psi_p\psi_q\, d\tau = \int_{(D)} \psi_p\psi_{q-1}\, d\tau,$$

pourvu que les entiers p et q vérifient les conditions suivantes ;

$$\text{(18)} \qquad \begin{cases} p \equiv q \qquad (\text{mod. } 2), \\ p > 0, \\ q > 0. \end{cases}$$

Supposons que l'entier q vérifie l'inégalité

$$q > 1.$$

Dans ce cas, d'après ce qui précède, on pourra changer, dans l'équation (17), p en $q - 1$ et q en $p + 1$. Il viendra

$$\int_{(\mathrm{D})} \psi_{p+1} \psi_{q-1} \, d\tau = \int_{(\mathrm{D})} \psi_p \psi_{q-1} \, d\tau.$$

Cette équation et l'équation (17) entraînent la suivante :

$$\int_{(\mathrm{D})} \psi_{p+1} \psi_{q-1} \, d\tau = \int_{(\mathrm{D})} \psi_p \psi_q \, d\tau,$$

laquelle sera valable pourvu que les entiers p et q vérifient les conditions que voici :

$$\begin{aligned} & p \equiv q \qquad (\text{mod. } 2), \\ & p > 0, \\ & q > 1. \end{aligned}$$

Nous arrivons donc à la conclusion suivante : lorsque les entiers p et q sont de même parité et lorsque aucun d'eux n'est nul, l'intégrale

$$\text{(19)} \qquad \int_{(\mathrm{D})} \psi_p \psi_q \, d\tau$$

ne dépend que de leur somme. Moyennant la relation (17) on conclura immédiatement de là qu'il en est encore de même dans le cas où les indices p et q sont de parité différente, et cela sans que la valeur zéro pour l'un des indices p ou q soit alors à exclure. Il est donc permis de poser

$$\text{(20)} \qquad \mathrm{I}_{p+q} = \int_{(\mathrm{D})} \psi_p \psi_q \, d\tau,$$

à condition de ne donner, dans le cas où les indices p et q seraient de même parité, la valeur zéro à aucun d'eux.

Les notations qui viennent d'être définies permettent d'écrire l'équation (17) de la façon suivante :

(21) $$I_{2n} = I_{2n-1}.$$

Les I_{2n} sont évidemment tous positifs, et les relations (14) et (15) nous apprennent qu'on a

$$\int_{(D)} \psi^2 \, d\tau \geqq I_2 \geqq I_4 \geqq I_6 \geqq \ldots.$$

On a donc

(22) $$\lim_{n=\infty} I_{2n} = I,$$

en désignant par I un nombre parfaitement déterminé vérifiant les inégalités suivantes :

(23) $$0 \leqq I \leqq \int_{(D)} \psi^2 \, d\tau.$$

L'équation (22) entraîne, à cause de l'égalité (21), l'égalité plus générale

(24) $$\lim_{n=\infty} I_p = I.$$

Observons maintenant qu'on a

$$\int_{(D)} (\psi_{n+q} - \psi_n)^2 \, d\tau = I_{2n+2q} - 2 I_{2n+q} + I_{2n}.$$

Donc, en vertu de l'équation (24), il est possible de faire correspondre à tout nombre non nul et positif ε, si petit qu'il soit d'ailleurs, un nombre entier et positif N, tel que l'inégalité

(25) $$n \geqq N$$

entraîne la suivante

(26) $$\int_{(D)} (\psi_{n+q} - \psi_n)^2 \, d\tau < \varepsilon$$

pour toute valeur entière et positive de l'entier q.

Cette proposition servira de base aux considérations du numéro suivant.

7. Le nombre N étant déterminé de façon que l'inégalité (25) entraîne l'inégalité (26), l'inégalité (25) entraînera à plus forte raison chacune des inégalités suivantes :

$$\int_{(D_1)} (\psi_{n+q} - \psi_n)^2 \, d\tau < \varepsilon$$

et

$$\int_{(D_2)} (\psi_{n+q} - \psi_n)^2 \, d\tau < \varepsilon.$$

Or, chacune des fonctions

$$\psi_{2k+1} \qquad (k = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

est une fonction harmonique à l'intérieur du domaine (D_1), et chacune des fonctions

$$\psi_{2m} \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots)$$

jouit de la même propriété à l'intérieur du domaine (D_2). Donc, en s'appuyant sur des théorèmes que j'ai eu l'occasion d'établir dans un travail récent (1), on peut énoncer les propositions suivantes :

1° La série

$$\psi_1 + \sum_{k=0}^{\infty} (\psi_{2k+3} - \psi_{2k+1})$$

est uniformément convergente dans tout domaine *intérieur* (2) au domaine (D_1), elle a pour somme une fonction v_1 harmonique à l'intérieur du domaine (D_1) et l'on a

$$(27) \qquad \lim_{k=\infty} \int_{(D_1)} (v_1 - \psi_{2k+1})^2 \, d\tau = 0;$$

(1) S. ZAREMBA, *Sur l'integration de l'équation biharmonique* (*Bulletin de l'Académie de Cracovie*, janvier 1908, § 5, p. 9, et § 6, p. 10).

(2) Un domaine (D') est dit *intérieur* à un autre domaine (D) lorsqu'il existe une longueur non nulle λ telle que tout point intérieur à un cercle, décrit d'un point du domaine (D') comme centre avec λ comme rayon, soit intérieur au domaine (D).

2° Des circonstances tout à fait analogues se présentent pour le domaine (D_2) et pour la série

$$\psi_2+\sum_{m=1}^{\infty}(\psi_{2m+2}-\psi_{2m}) :$$

la somme de cette série sera une fonction φ_2 harmonique à l'intérieur du domaine (D_2) et l'on aura

$$\lim_{m=\infty}\int_{(D_2)}(\varphi_2-\psi_{2m})^2\,d\tau=0. \tag{28}$$

Nous avons

$$\int_{(D_1)}(\varphi_1-\psi_p)^2\,d\tau=\int_{(D_1)}[(\varphi_1-\psi_{2k+1})+(\psi_{2k+1}-\psi_p)]^2\,d\tau,$$

d'où

$$\int_{(D_1)}(\varphi_1-\psi_p)^2\,d\tau<2\int_{(D_1)}(\varphi_1-\psi_{2k+1})^2\,d\tau+2\int_{(D_1)}(\psi_{2k+1}-\psi_p)^2\,d\tau.$$

Mais chacune des intégrales entrant dans le second membre de cette équation tend vers zéro lorsque les entiers k et p croissent indéfiniment. C'est ce qui résulte de l'équation (27) et du théorème qui termine le numéro précédent. Nous avons donc

$$\lim_{p=\infty}\int_{(D_1)}(\varphi_1-\psi_p)^2\,d\tau=0. \tag{29}$$

On démontrera d'une façon analogue qu'on a

$$\lim_{p=\infty}\int_{(D_2)}(\varphi_2-\psi_p)^2\,d\tau=0. \tag{30}$$

Désignons par (D_0) le domaine formé par l'ensemble des points intérieurs à la fois aux domaines (D_1) et (D_2). Les équations (29) et (30) entraîneront évidemment les suivantes :

$$\lim_{p=\infty}\int_{(D_0)}(\varphi_1-\psi_p)^2\,d\tau=\lim_{p=\infty}\int_{(D_0)}(\varphi_2-\psi_p)^2\,d\tau=0.$$

Ces équations et l'inégalité

$$\int_{(D_0)} (v_1 - v_2)^2 \, d\tau < 2 \int_{(D_0)} (v_1 - \psi_p)^2 \, d\tau + 2 \int_{(D_0)} (v_2 - \psi_p)^2 \, d\tau,$$

qui résulte de l'identité

$$\int_{(D_0)} (v_1 - v_2)^2 \, d\tau = \int_{(D_0)} [(v_1 - \psi_p) - (v_2 - \psi_p)]^2 \, d\tau,$$

entraînent l'égalité suivante :

$$\int_{(D_0)} (v_1 - v_2)^2 \, d\tau = 0.$$

Cela prouve qu'à l'intérieur du domaine (D_0), les fonctions v_1 et v_2 coïncident. Par conséquent, nous définirons une fonction v, harmonique à l'intérieur de tout le domaine (D), en spécifiant qu'on a

$$v = v_1$$

à l'intérieur du domaine (D_1) et

$$v = v_2$$

à l'intérieur du domaine (D_2).

Je dis que la fonction v, définie de cette façon, représente la solution cherchée du problème intermédiaire pour le domaine (D) par rapport à la fonction ψ.

Pour établir ce point, partons de la remarque suivante : il résulte des équations (29) et (30) et de la définition de la fonction v qu'on aura

$$\lim_{p=\infty} \int_{(D)} (v - \psi_p)^2 \, d\tau = 0, \tag{31}$$

équation qui, à cause de l'équation (24), entraîne la suivante,

$$\int_{(D)} v^2 \, d\tau = I, \tag{32}$$

ce qui prouve que l'intégrale

$$(33) \qquad \int_{(D)} v^2\, d\tau$$

a une valeur finie.

Cela posé, considérons une fonction h, harmonique à l'intérieur du domaine (D), mais d'ailleurs quelconque à cela près que l'intégrale

$$(34) \qquad \int_{(D)} h^2\, d\tau$$

ait un sens. Il est aisé de voir qu'on a

$$(35) \qquad \int_{(D)} \psi_p h\, d\tau = \int_{(D)} \psi_{p-1} h\, d\tau$$

pour toute valeur entière et positive de p.

En effet, pour l'un des domaines (D_1) ou (D_2), soit (D_α), la fonction ψ_p représente, par définition, la solution du problème intermédiaire par rapport à la fonction ψ_{p-1}. On a donc

$$\int_{(D_\alpha)} \psi_p h\, d\tau = \int_{(D_\alpha)} \psi_{p-1} h\, d\tau.$$

D'autre part, dans le domaine $(D - D_\alpha)$, nous avons, toujours par définition,

$$\psi_p = \psi_{p-1}.$$

Par conséquent, l'égalité (35) sera bien vérifiée dans les conditions annoncées.

On conclut immédiatement de (35) que

$$\int_{(D)} \psi_p h\, d\tau = \int_{(D)} \psi_0 h\, d\tau,$$

d'où

$$(36) \qquad \int_{(D)} \psi_p h\, d\tau = \int_{(D)} \psi h\, d\tau,$$

puisque la fonction ψ_0 n'est autre chose que la fonction ψ.

On a évidemment

$$\int_{(D)} vh\,d\tau = \int_{(D)} (v-\psi_p)h\,d\tau + \int_{(D)} \psi_p h\,d\tau,$$

d'où

$$(37) \qquad \int_{(D)} vh\,d\tau = \int_{(D)} (v-\psi_p)h\,d\tau + \int_{(D)} \psi h\,d\tau,$$

à cause de (36).

Or

$$\left[\int_{(D)} (v-\psi_p)h\,d\tau\right]^2 < \int_{(D)} (v-\psi_p)^2\,d\tau \int_{(D)} h^2\,d\tau,$$

par conséquent

$$\lim_{p=\infty} \int_{(D)} (v-\psi_p)h\,d\tau = 0,$$

en vertu de l'équation (31) et de ce que l'intégrale (34) a une valeur finie. Moyennant la relation que nous venons d'établir, on conclura de l'équation (37) la suivante :

$$(38) \qquad \int_{(D)} vh\,d\tau = \int_{(D)} \psi h\,d\tau.$$

Cela prouve que la fonction harmonique v représente, comme nous l'avions annoncé, la solution du problème intermédiaire pour le domaine (D), par rapport à la fonction donnée ψ.

En résumé, sachant résoudre le problème intermédiaire pour chacun de deux domaines (D_1) et (D_2), ayant des points intérieurs communs, on saura aussi le résoudre, par le procédé alterné, pour le domaine (D) formé par l'ensemble des points dont chacun est intérieur à l'un au moins des domaines (D_1) et (D_2). Il n'est peut-être pas inutile d'ajouter que le nombre de parties séparées dont pourrait se composer le domaine (D_0), formé par l'ensemble des points intérieurs à la fois aux deux domaines (D_1) et (D_2), n'a joué aucun rôle dans la démonstration de la légitimité du procédé alterné; on aura donc le droit d'appliquer ce procédé quelle que soit la nature du domaine (D_0).

8. Passons au cas général du problème intermédiaire. Soit (D) un

domaine quelconque à cela près qu'il ne s'étende pas à l'infini et que l'aire de ce domaine ait une valeur bien déterminée. On pourra toujours définir une suite indéfinie de cercles

$$(C_1), \quad (C_2), \quad (C_3), \quad \ldots \tag{39}$$

tels que tout point intérieur à l'un de ces cercles soit intérieur au domaine (D) et que tout point intérieur à ce domaine (et par suite non situé sur la frontière) soit intérieur à l'un au moins des cercles précédents.

Cela posé, désignons d'une façon générale par (D_n) le domaine formé par l'ensemble des points dont chacun est intérieur à l'un au moins des n cercles

$$(C_1), \quad (C_2), \quad (C_3), \quad \ldots, \quad (C_n).$$

Le domaine (D_1) ne sera alors autre chose que le domaine intérieur au cercle (C_1).

Désignons par ψ une fonction donnée quelconque à cela près que l'intégrale

$$\int_{(D)} \psi^2 \, d\tau \tag{40}$$

ait une valeur finie et bien déterminée.

Supposons provisoirement que nous sachions résoudre le problème intermédiaire pour le domaine (D_n). Je dis que nous saurions aussi le résoudre pour le domaine (D_{n+1}). En effet, s'il existe des points intérieurs à la fois au domaine (D_n) et au cercle (C_{n+1}), le procédé alterné nous conduira au but puisque, pour le cercle (n° 5), nous savons résoudre le problème en question. Si au contraire les points intérieurs au cercle (C_{n+1}) sont tous extérieurs au domaine (D_n), le problème intermédiaire, pour le domaine (D_{n+1}), constituera en réalité l'ensemble de deux problèmes intermédiaires indépendants se rapportant l'un au domaine (D_n) et l'autre au domaine intérieur au cercle (C_{n+1}); donc dans ce cas aussi le problème qui nous occupe pourra être résolu pour le domaine (D_{n+1}). En résumé, sachant résoudre le problème intermédiaire pour le domaine (D_n), nous saurons, comme nous l'avions annoncé, le résoudre pour le domaine (D_{n+1}). Or nous savons résoudre le problème en question pour le domaine (D_1), puisque c'est le domaine intérieur à un cercle, au cercle (C_1). Donc nous saurons résoudre le problème intermédiaire pour le domaine (D_n), quelque valeur entière et positive qu'ait l'indice n.

Cela posé, il sera possible de former une suite infinie de fonctions

$$\Phi_0, \quad \Phi_1, \quad \Phi_2, \quad \ldots, \tag{41}$$

où le premier terme Φ_0 serait défini par l'équation

$$\Phi_0 = \psi, \tag{42}$$

le terme général Φ_n se déduisant du terme Φ_{n+1} de la façon suivante : à l'intérieur du domaine (D_n), la fonction Φ_n coïncidera avec la fonction harmonique qui, pour ce domaine et par rapport à la fonction Φ_{n-1}, représente la solution du problème intermédiaire; dans le reste du domaine (D), on aura

$$\Phi_n = \Phi_{n-1}. \tag{43}$$

J'observe tout d'abord ceci : on aura (n° 4) évidemment

$$\int_{(D_n)} \Phi_n^2 \, d\tau \leqq \int_{(D_n)} \Phi_{n-1}^2 \, d\tau,$$

l'intégrale du premier membre ayant une valeur parfaitement déterminée. On aura donc aussi

$$\int_{(D)} \Phi_n^2 \, d\tau \leqq \int_{(D)} \Phi_{n-1}^2 \, d\tau, \tag{44}$$

puisqu'à l'extérieur du domaine (D_n) on a l'égalité (43). Il est donc prouvé que, pour toute valeur entière et positive de n, l'intégrale formant le premier membre de (44) aura une valeur finie et parfaitement déterminée. Par conséquent, rien n'empêchera de prolonger la suite (41) aussi loin qu'on le voudra.

Faisons maintenant la remarque générale suivante : si l'on désigne par θ une fonction harmonique à l'intérieur du domaine (D_n), quelconque dans le reste du domaine (D) mais telle que l'intégrale

$$\int_{(D)} \theta^2 \, d\tau$$

ait un sens, on aura

$$\int_{(D)} \Phi_p \theta \, d\tau = \int_{(D)} \Phi_{p-1} \theta \, d\tau, \tag{45}$$

pourvu que l'entier p vérifie la condition

$$p \leqq n. \tag{46}$$

Pour justifier cette remarque, observons que la fonction θ, étant harmonique à l'intérieur du domaine (D_n), le sera nécessairement aussi à l'intérieur du domaine (D_p) lorsque l'inégalité (46) est vérifiée. Donc, en vertu de la définition de la fonction Φ_p, on aura

$$\int_{(D_p)} \Phi_p \theta \, d\tau = \int_{(D_p)} \Phi_{p-1} \theta \, d\tau,$$

et, comme à l'extérieur du domaine (D_p) on a

$$\Phi_p = \Phi_{p-1}$$

par définition, l'inégalité (46) entraînera bien la relation (45).

La fonction Φ_n étant harmonique à l'intérieur du domaine (D_n), nous pouvons, dans l'égalité (45), poser

$$\theta = \Phi_n.$$

Par conséquent, l'inégalité (46) entraîne la relation

$$\int_{(D)} \Phi_p \Phi_n \, d\tau = \int_{(D)} \Phi_{p-1} \Phi_n \, d\tau.$$

Cela nous amène à la conclusion suivante : pour toute valeur de p vérifiant l'inégalité (46), on aura

$$\int_{(D)} \Phi_p \Phi_n \, d\tau = T_n, \tag{47}$$

en posant

$$T_n = \int_{(D)} \Phi_n^2 \, d\tau. \tag{48}$$

Observons maintenant que les relations (42), (44) et (48) entraînent les suivantes,

$$\lim_{n=\infty} T_n = T \leqq \int_{(D)} \psi^2 \, d\tau, \tag{49}$$

en désignant par T un nombre non négatif, parfaitement déterminé.

Cela posé, il suffit de remarquer qu'en vertu de (47) on a

$$\int_{(D)} (\Phi_{n+p} - \Phi_n)^2 \, d\tau = T_{n+p} - 2T_{n+p} + T_n = T_n - T_{n+p},$$

pour conclure de l'une des relations (49) que l'intégrale

$$\int_{(D)} (\Phi_{n+p} - \Phi_n)^2 \, d\tau \tag{50}$$

tend uniformément vers zéro lorsque l'entier n croît indéfiniment, de quelque façon que varie en même temps l'entier positif p.

Ce théorème servira de base aux considérations exposées au numéro suivant.

9. Il serait aisé d'établir en toute rigueur qu'il correspond à tout domaine (D') intérieur [1] au domaine (D) un nombre entier et positif N, tel que, pour

$$n \geqq N, \tag{51}$$

le domaine (D'), intérieur au domaine (D), soit aussi intérieur au domaine (D_n).

Mais il est inutile de développer la démonstration de ce point, parce qu'il est toujours possible de former la suite (39) de façon à être certain à l'avance que la circonstance en question se présente réellement.

Cela posé, considérons la série suivante :

$$\Phi_n + \sum_{p=n}^{\infty} (\Phi_{p+1} - \Phi_p). \tag{52}$$

---

(1) La définition précise de ce terme est donnée en note à la page 351.

Chaque terme de cette série représente une fonction harmonique à l'intérieur du domaine (D_n); c'est là une conséquence immédiate de la définition de la suite (41). Cela étant, il suffira de se reporter au théorème qui termine le numéro précédent ainsi qu'à ceux qui ont été rappelés en note à la page 351, pour reconnaître qu'on peut énoncer la proposition suivante :

La série (52) *est uniformément convergente dans tout domaine intérieur au domaine* (D_n), *la somme* φ *de cette série est une fonction harmonique à l'intérieur du domaine* (D_n) *et l'on a*

$$\lim_{p=\infty}\int_{(D_n)}(\varphi-\Phi_p)^2\,d\tau=0. \tag{53}$$

Rapprochons maintenant les circonstances suivantes : d'une part, en vertu de la remarque faite au début de ce numéro on peut disposer du nombre n de façon qu'un domaine (D'), défini arbitrairement à l'avance à l'intérieur du domaine (D), se trouve être intérieur au domaine (D_n); d'autre part, la somme des k premiers termes de la série (52) est égale au terme de rang $n+k$ dans la suite (41).

Ce rapprochement conduit immédiatement à la conclusion suivante : la suite (41) est uniformément convergente dans toute l'étendue de tout domaine (D') intérieur au domaine (D), elle a pour limite une fonction φ harmonique à l'intérieur du domaine (D) et cette fonction vérifie l'équation (53), quelque valeur positive qu'on ait attribuée à l'entier n.

10. Je vais démontrer que la fonction φ, limite de la suite (41), représente la solution cherchée du problème intermédiaire pour le domaine (D) par rapport à la fonction donnée ψ.

Nous avons

$$\int_{(D_n)}(\Phi_p-\Phi_q)^2\,d\tau=\int_{(D_n)}[(\Phi_p-\varphi)+(\varphi-\Phi_q)]^2\,d\tau,$$

d'où

$$\int_{(D_n)}(\Phi_p-\Phi_q)^2\,d\tau=\int_{(D_n)}(\Phi_p-\varphi)^2\,d\tau$$
$$+2\int_{(D_n)}(\Phi_p-\varphi)(\varphi-\Phi_q)\,d\tau+\int_{(D_n)}(\varphi-\Phi_p)^2\,d\tau,$$

ce qui donne

$$(54) \qquad \lim_{p=\infty} \int_{(D_n)} (\Phi_p - \Phi_q)^2 \, d\tau = \int_{(D_n)} (v - \Phi_q)^2 \, d\tau,$$

en vertu de (53).

D'autre part, en se reportant aux relations (47), (48) et (49), on verra qu'on a

$$(55) \qquad \lim_{p=\infty} \int_{(D)} (\Phi_p - \Phi_q)^2 \, d\tau = T_q - T.$$

Il est évident d'ailleurs qu'on a

$$\int_{(D_n)} (\Phi_p - \Phi_q)^2 \, d\tau \leqq \int_{(D)} (\Phi_p - \Phi_q)^2 \, d\tau.$$

Par conséquent, les relations (54) et (55) entraînent l'inégalité suivante :

$$(56) \qquad \int_{(D_n)} (v - \Phi_q)^2 \, d\tau \leqq T_q - T$$

pour toute valeur entière et positive de n.

Considérons maintenant un domaine quelconque (D') intérieur au domaine (D). D'après ce qu'on a vu au début du numéro précédent, il sera toujours possible de donner à l'entier n une valeur assez grande pour que le domaine (D') se trouve être intérieur au domaine (D_n). Cette condition étant remplie, on aura évidemment

$$\int_{(D')} (v - \Phi_q)^2 \, d\tau \leqq \int_{(D_n)} (v - \Phi_q)^2 \, d\tau.$$

Cela permet de tirer de (56) la conclusion suivante : pour tout domaine (D') intérieur au domaine (D), on a

$$(57) \qquad \int_{(D')} (v - \Phi_q)^2 \, d\tau \leqq T_q - T.$$

Cela prouve d'abord que l'intégrale

$$\int_{(D)} (v - \Phi_q)^2 \, d\tau$$

a un sens et que, par conséquent, il en est de même de l'intégrale (¹)

$$\int_{(D)} v^2\,d\tau; \tag{58}$$

on voit en outre qu'on aura

$$\int_{(D)} (\Phi_q - v)^2\,d\tau \leqq T_q - T$$

En se reportant à l'équation (49), on conclura de cette inégalité la relation suivante :

$$\lim_{q=\infty} \int_{(D)} (\Phi_q - v)^2\,d\tau = 0. \tag{59}$$

Reportons-nous aux relations (45) et (46). La seconde entraîne la première pourvu que la fonction θ soit une fonction harmonique à l'intérieur du domaine (D_n). Par conséquent, si l'on désigne par h une fonction harmonique à l'intérieur du domaine (D) et telle que l'intégrale

$$\int_{(D)} h^2\,d\tau \tag{60}$$

ait un sens, on aura

$$\int_{(D)} \Phi_q h\,d\tau = \int_{(D)} \Phi_{q-1} h\,d\tau$$

pour toute valeur entière et positive de q; on aura donc aussi

$$\int_{(D)} \Phi_q h\,d\tau = \int_{(D)} \Phi_0 h\,d\tau$$

ou bien

$$\int_{(D)} \Phi_q h\,d\tau = \int_{(D)} \psi h\,d\tau, \tag{61}$$

puisque la fonction Φ_0 n'est autre chose que la fonction ψ.

(¹) Si l'on avait le moindre doute à ce sujet, on le lèverait sans peine au moyen d'un raisonnement analogue à celui dont j'ai eu à me servir au paragraphe 6, p. 10 et suivantes du Mémoire cité en note à la page 351.

En partant des relations (59) et (61), on n'aura plus qu'à raisonner comme à la fin du n° 7 pour établir la relation

$$\int_{(D)} v h \, d\tau = \int_{(D)} \psi h \, d\tau, \tag{62}$$

et pour démontrer par cela même que la fonction v représente, comme nous l'avions annoncé, la solution cherchée du problème intermédiaire pour le domaine (D) par rapport à la fonction donnée ψ.

Ajoutons qu'il serait très aisé de s'assurer qu'on a

$$\int_{(D)} v^2 \, d\tau = T;$$

il suffirait pour cela de poser

$$h = v$$

dans les relations (61) et (62) et de se reporter à l'équation (59).

En résumé, nous avons résolu le problème intermédiaire en nous bornant à admettre, en ce qui concerne le domaine (D), que ce domaine ne s'étende pas à l'infini et qu'il ait une aire bien déterminée et, en ce qui concerne la fonction ψ, que l'intégrale

$$\int_{(D)} \psi^2 \, d\tau$$

ait un sens.

III. — Réduction du problème biharmonique restreint au problème intermédiaire.

11. Reportons-nous aux équations (4) et (6) de l'Introduction. Pour démontrer d'une façon complète que le problème biharmonique restreint se ramène au problème intermédiaire, nous avons deux choses à établir :

1° Que la valeur

$$w = \varphi - u \tag{1}$$

de la fonction w, tirée de l'équation (4), représentera une solution du problème biharmonique restreint si l'on y porte la valeur (6) de u en regardant la lettre v comme représentant la solution du problème intermédiaire pour le domaine (D) par rapport à la fonction ψ;

2° Que, en dehors de la solution précédente, le problème biharmonique restreint n'en admet aucune autre.

Le premier de ces deux points sera établi au numéro suivant et le second plus loin.

12. Dans ce numéro, il nous suffira d'admettre que le domaine (D) vérifie, en dehors des hypothèses adoptées au Chapitre précédent, seulement la condition suivante : si l'on désigne par A un point quelconque situé à l'intérieur de ce domaine, par a sa plus courte distance à la frontière et par O un point de celle-ci situé à la distance a du point A, il existera, *dans le cas* où la longueur a ne sera pas supérieure à une certaine longueur fixe l, sur le cercle, de centre O et de rayon $a = \overline{OA}$, un point A', *extérieur* au domaine (D) et tel que sa plus courte distance a' à la frontière (S) du domaine considéré vérifie l'inégalité

$$a' \geqq ka, \tag{2}$$

où k représente une constante numérique non nulle qui, suivant la nature du domaine (D), pourra avoir une valeur quelconque inférieure ou égale à l'unité [1].

Cela posé, nous allons établir le lemme suivant :

Considérons une fonction $\mathfrak{v}$, harmonique à l'intérieur du domaine (D) et telle que l'intégrale

$$\int_{(D)} \mathfrak{v}^2 \, d\tau \tag{3}$$

ait un sens. Posons ensuite

$$\mathfrak{w}(A) = \frac{1}{2\pi} \int_{(D)} \mathfrak{v}(B) \log \overline{AB} \, d\tau_B \tag{4}$$

[1] Cette hypothèse entraine la conséquence suivante : lorsque la frontière du domaine (D) a des points de rebroussements, ces points doivent satisfaire à la condition indiquée dans l'Introduction.

et supposons qu'à l'*extérieur* du domaine (D) la fonction $\mathfrak{w}$ soit égale à une fonction Φ qui, sauf à l'infini, est, avec ses dérivées du premier ordre, continue en tout point du plan, et par conséquent aussi à la traversée de la frontière (S) du domaine considéré. Dans ces conditions, les dérivées du premier ordre de la fonction $\mathfrak{w}$ jouiront des mêmes propriétés de continuité que celles de la fonction Φ.

La fonction $\mathfrak{w}$ étant manifestement une fonction régulièrement analytique dans le voisinage de tout point qui n'est situé ni à l'infini, ni sur la frontière (S) du domaine (D), il suffira, pour démontrer le lemme, de faire voir que les dérivées du premier ordre de la fonction $\mathfrak{w}$ sont continues à la traversée de la frontière du domaine considéré.

Voici une seconde remarque préliminaire : envisageons à l'intérieur du domaine (D) un point quelconque B et soit b la plus courte distance de ce point à la frontière. Je dis que le produit

$$b\mathfrak{v}(B) \tag{5}$$

tendra uniformément vers zéro avec la longueur b. En effet, du point B comme centre, décrivons un cercle (C) de rayon b et désignons par (T) l'aire limitée par ce cercle; d'après un théorème que j'ai eu l'occasion d'établir récemment [1], nous aurons

$$[\mathfrak{v}(B)]^2 \leqq \frac{1}{\pi b^2}\int_{(T)} \mathfrak{v}^2\, d\tau. \tag{6}$$

L'intégrale (3) ayant une valeur finie, l'intégrale

$$\int_{(T)} \mathfrak{v}^2\, d\tau$$

tendra uniformément vers zéro avec b, de quelque façon que se déplace d'ailleurs le point B. Cela prouve que le produit (5) jouira bien de la propriété annoncée.

Considérons maintenant, à l'intérieur du domaine (D), un point A, tel que sa plus courte distance a à la frontière ne soit pas supérieure

---

[1] *Bulletin de l'Académie de Cracovie*, janvier 1908, p. 8, inégalité (19). *Voir* aussi T. Boggio, *Transformazioni di alcune funzioni potenziali* (*Rendiconti del Circolo mat. di Palermo*, 1906).

à la longueur l envisagée au début de ce numéro. Soit O un point situé sur (S) à la distance a du point A. Il existera par hypothèse sur le cercle de centre O et de rayon a un point A′ extérieur au domaine (D) et tel que sa plus courte distance a' à la frontière vérifie l'inégalité (2). Cela posé, décrivons du point O comme centre un cercle (C) de rayon r ($r \geqq 2a$). Désignons par (D_1) la partie du domaine (D) intérieure au cercle (C) et par (D_2) le reste de ce domaine. Posons

$$(7) \qquad \mathfrak{w}_1(M) = \frac{1}{2\pi}\int_{(D_1)} \mathfrak{v}(B)\log \overline{MB}\, d\tau_B,$$

$$(8) \qquad \mathfrak{w}_2(M) = \frac{1}{2\pi}\int_{(D_2)} \mathfrak{v}(B)\log \overline{MB}\, d\tau_B.$$

Nous aurons

$$\mathfrak{w}(M) = \mathfrak{w}_1(M) + \mathfrak{w}_2(M);$$

par conséquent,

$$\left(\frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial x}\right)_A - \left(\frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial x}\right)_{A'} = \left(\frac{\partial \mathfrak{w}_1}{\partial x}\right)_A - \left(\frac{\partial \mathfrak{w}_1}{\partial x}\right)_{A'} + \left(\frac{\partial \mathfrak{w}_2}{\partial x}\right)_A - \left(\frac{\partial \mathfrak{w}_2}{\partial x}\right)_{A'},$$

où les indices font connaître les points pour lesquels les dérivées doivent être calculées. L'équation précédente donne

$$(9) \quad \left|\left(\frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial x}\right)_A - \left(\frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial x}\right)_{A'}\right| < \left|\left(\frac{\partial \mathfrak{w}_1}{\partial x}\right)_A\right| + \left|\left(\frac{\partial \mathfrak{w}_1}{\partial x}\right)_{A'}\right| + \left|\left(\frac{\partial \mathfrak{w}_2}{\partial x}\right)_A - \left(\frac{\partial \mathfrak{w}_2}{\partial x}\right)_{A'}\right|.$$

Lorsque le point B est à l'*extérieur* du cercle (C), on a

$$\left|\left(\frac{\partial \log \overline{MB}}{\partial x}\right)_A - \left(\frac{\partial \log \overline{MB}}{\partial x}\right)_{A'}\right| < 8\frac{a}{\overline{OB}^2},$$

puisque, par construction, on a

$$r \geqq 2a.$$

Par conséquent, la formule (8) nous donnera

$$\left[\left(\frac{\partial \mathfrak{w}_2}{\partial x}\right)_A - \left(\frac{\partial \mathfrak{w}_2}{\partial x}\right)_{A'}\right]^2 < \frac{16a^2}{\pi^2}\int_{(D_2)} \frac{d\tau_B}{\overline{OB}^4}\int_{(D_2)} \mathfrak{v}^2\, d\tau.$$

On aura donc *a fortiori*

$$(10) \qquad \left|\left(\frac{\partial \mathfrak{w}_2}{\partial x}\right)_A - \left(\frac{\partial \mathfrak{w}_2}{\partial x}\right)_{A'}\right| < \frac{4C}{\sqrt{\pi}}\frac{a}{r},$$

en posant

$$C = \sqrt{\int_{(D)} \mathfrak{v}^2 \, d\tau}.$$

On déduit de la formule (7)

$$\left[\left(\frac{\partial \mathfrak{w}_1}{\partial x}\right)_{A'}\right]^2 < \frac{1}{4\pi^2} \int_{(D_1)} \frac{d\tau_B}{\overline{A'B}^2} \int_{(D_1)} \mathfrak{v}^2 \, d\tau,$$

en tenant compte de ce que le point A′ est extérieur au domaine (D). Or la distance a' du point A′ à la frontière vérifie l'inégalité (2). Donc, dans l'intégrale

$$\int_{(D_1)} \frac{d\tau_B}{\overline{A'B}^2},$$

la longueur $\overline{A'B}$ vérifie l'inégalité

$$\overline{A'B} \geqq ka.$$

Dans la même intégrale, on a évidemment encore

$$\overline{A'B} \leqq a + r < 2r.$$

Il est donc aisé de voir qu'on aura

$$\left[\left(\frac{\partial \mathfrak{w}_1}{\partial x}\right)_{A'}\right]^2 < \frac{1}{2\pi} \log \frac{2r}{ka} \int_{(D_1)} \mathfrak{v}^2 \, d\tau. \tag{11}$$

Reste encore à déterminer une limite supérieure du premier terme du second membre de l'inégalité (9). Pour y arriver, décrivons du point A comme centre un cercle (C′) de rayon $\frac{a}{2}$. Désignons par (D'_1) le domaine intérieur à ce cercle et par (D''_1) le reste du domaine (D_1). La formule (7) nous donnera

$$\left|\left(\frac{\partial \mathfrak{w}_1}{\partial x}\right)_{A}\right| \leqq \frac{1}{2\pi} \int_{(D'_1)} \frac{|\mathfrak{v}(B)|}{\overline{AB}} d\tau_B + \frac{1}{2\pi} \int_{(D''_1)} \frac{|\mathfrak{v}(B)|}{\overline{AB}} d\tau_B. \tag{12}$$

Dans la première intégrale du second membre de cette inégalité, la plus courte distance du point B à la frontière du domaine (D) varie entre $\frac{a}{2}$ et $\frac{3a}{2}$. Donc, puisque le produit (5) tend uniformément vers zéro avec b, on aura

$$|\mathfrak{v}(\mathrm{B})| < \frac{\varepsilon(a)}{a}$$

dans l'intégrale en question, en désignant par $\varepsilon(a)$ une quantité positive, tendant vers zéro avec a, mais indépendante des autres éléments qui déterminent la position du point A dans le domaine (D). Nous aurons donc

$$(13) \qquad \int_{(\mathrm{D}'_1)} \frac{|\mathfrak{v}(\mathrm{B})|}{\overline{\mathrm{AB}}}\, d\tau_{\mathrm{B}} < 2\pi\varepsilon(a).$$

Passons au second terme du second membre de l'inégalité (12). L'inégalité de Schwarz donnera

$$\left[\int_{(\mathrm{D}''_1)} \frac{|\mathfrak{v}(\mathrm{B})|}{\overline{\mathrm{AB}}}\, d\tau_{\mathrm{B}}\right]^2 < 2\pi \log\frac{4r}{a} \int_{(\mathrm{D}''_1)} \mathfrak{v}^2\, d\tau.$$

On aura donc *a fortiori*

$$(14) \qquad \left[\int_{(\mathrm{D}''_1)} \frac{|\mathfrak{v}(\mathrm{B})|}{\overline{\mathrm{AB}}}\, d\tau_{\mathrm{B}}\right]^2 < 2\pi \log\frac{4r}{a} \int_{(\mathrm{D}_1)} \mathfrak{v}^2\, d\tau.$$

Les inégalités (12), (13) et (14) entrainent la suivante :

$$(15) \qquad \left|\left(\frac{\partial \mathfrak{w}_1}{\partial x}\right)_{\mathrm{A}}\right| < \varepsilon(\mathrm{A}) + \sqrt{\frac{1}{2\pi}\log\frac{4r}{a}\int_{(\mathrm{D}_1)} \mathfrak{v}^2\, d\tau}.$$

J'observe maintenant ceci : puisque l'intégrale (3) a une valeur finie, on aura

$$\int_{(\mathrm{D}_1)} \mathfrak{v}^2\, d\tau < \varepsilon_1(r),$$

en désignant par $\varepsilon_1(r)$ une fonction positive et décroissante, tendant vers zéro avec r, mais *indépendante* de la position du point O sur la frontière du domaine (D). On pourra donc, en faisant tendre a vers zéro, établir entre a et r une relation telle que les quantités

$$\frac{a}{r} \qquad \text{et} \qquad \log\frac{r}{a}\int_{(\mathrm{D}_1)} \mathfrak{v}^2\, d\tau$$

tendent l'une et l'autre uniformément vers zéro avec a de quelque façon que se déplace d'ailleurs le point A dans le domaine (D); il suffirait par exemple de poser

$$\log\frac{r}{a} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1(r)}}.$$

La relation précédente entre a et r étant établie, voici ce que l'on conclura immédiatement des relations (9), (10), (11) et (15) : la différence

$$\left(\frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial x}\right)_A - \left(\frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial x}\right)_{A'}$$

tend uniformément vers zéro avec a de quelque façon que se déplace d'ailleurs le point A dans le domaine (D).

La position des axes dans le raisonnement précédent n'ayant été particularisée en aucune façon, ce raisonnement prouve que la différence

$$\left(\frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial y}\right)_A - \left(\frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial y}\right)_{A'}$$

tend aussi uniformément vers zéro avec a.

Or, à l'extérieur du domaine (D), la fonction $\mathfrak{w}$ est, par hypothèse, égale à une fonction Φ dont les dérivées du premier ordre sont continues à la traversée de la frontière. Il en est donc de même des dérivées du premier ordre de la fonction $\mathfrak{w}$. C'est ce que nous avions à établir.

Revenons au problème biharmonique restreint, et désignons, comme dans l'Introduction, par w la fonction demandée, par φ la fonction donnée vérifiant les conditions aux limites de la fonction demandée et par ψ la fonction définie par l'équation

$$\psi = \Delta\varphi.$$

Posons ensuite

$$u(A) = \frac{1}{2\pi}\int_{(D)} [\psi(B) - v(B)] \log\overline{AB}\, d\tau_B, \tag{16}$$

en désignant par v la fonction harmonique qui constitue, pour le domaine (D) et par rapport à la fonction ψ, la solution du problème intermédiaire. Il n'y a qu'à se reporter à l'énoncé de ce problème pour reconnaître que la fonction u (A) sera nulle identiquement à l'extérieur du domaine (D).

Or les dérivées du premier ordre de la fonction représentée par l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi}\int_{(D)} \psi(B) \log \overline{AB}\, d\tau_B$$

sont, par hypothèse, continues même à la traversée de la frontière du domaine (D). Par conséquent, en vertu du lemme qui vient d'être démontré, il en sera de même des dérivées du premier ordre de la fonction que représente l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi}\int_{(D)} v(B) \log \overline{AB}\, d\tau_B;$$

il en sera donc encore de même des dérivées du premier ordre de la fonction u. Mais, comme nous avons eu déjà à le faire remarquer, la fonction u est nulle identiquement à l'extérieur du domaine (D); elle est d'ailleurs continue dans tout le plan à distance finie. Nous arrivons donc à la conclusion suivante :

Les quantités

$$u, \quad \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial y}$$

calculées pour un point quelconque A, intérieur au domaine (D), tendent uniformément vers zéro avec la plus courte distance de ce point à la frontière. Il résulte de là que la formule

$$w = \varphi - u \tag{17}$$

fera connaître une solution w du problème biharmonique. Donc, le premier des deux points indiqués au numéro précédent est établi.

13. Il nous reste à démontrer que le problème biharmonique ne peut admettre qu'une *seule* solution.

Pour démontrer ce théorème, nous serons obligés de restreindre dans une certaine mesure la généralité du domaine (D). Cela ne tient, il faut le craindre, qu'à une imperfection de notre méthode. En revanche, nous aurons à établir des inégalités qui pourront certainement être utiles dans d'autres questions.

La frontière du domaine (D) pourra se composer d'un nombre quelconque de contours; chacun de ces contours pourra avoir un nombre fini quelconque de points anguleux et même de points de rebroussement; toutefois, estimé à l'intérieur du domaine (D), l'angle formé par les deux arcs issus d'un point de rebroussement devra être égal à zéro et non pas à 2π.

Les points singuliers dont nous venons de parler s'appelleront *sommets* de la frontière (S) du domaine (D); les autres points de cette frontière, points *ordinaires*.

Nous admettrons que l'arc de (S), compris entre deux sommets consécutifs, jouit des propriétés suivantes :

1° L'angle aigu formé par deux normales sera inférieur au produit d'une constante par la distance des pieds des deux normales;

2° Si d'un point O choisi arbitrairement sur l'arc considéré on décrit un cercle ayant ce point pour centre et pour rayon, une longueur non supérieure à une longueur fixe, ce cercle rencontrera l'arc au plus en deux points et la portion de cet arc située à l'intérieur du cercle précédent satisfera à la condition que voici : une parallèle à l'une quelconque de ses normales ne pourra le rencontrer qu'en un seul point au plus.

Pour achever l'énoncé des hypothèses que nous adoptons au sujet de la frontière du domaine (D), il nous reste encore à dire qu'elle devra satisfaire aux deux conditions suivantes :

1° Tout cercle décrit d'un sommet comme centre avec un rayon plus petit ou égal à une longueur fixe δ, inférieure dans tous les cas à la moitié du minimum de distance de deux sommets, rencontrera la frontière précisément en deux points;

2° Tout cercle ayant pour rayon une longueur non supérieure à une longueur fixe et pour centre un point situé sur (S) et tel que sa distance au sommet le plus voisin soit supérieure ou égale à la longueur δ, considérée tout à l'heure, rencontrera la frontière (S) précisément en deux points et interceptera sur elle un arc ne comprenant aucun sommet.

14. En vue des considérations qui vont suivre, il est utile de faire correspondre à tout point A, intérieur au domaine (D), une longueur R. Nous appellerons cette longueur *rayon relatif au point* A, et nous la définirons en introduisant deux longueurs constantes δ_1 et δ_2 ainsi qu'une constante numérique k_1. Le choix de ces trois éléments sera précisé tout à l'heure; pour le moment, il suffira de dire que la longueur δ_1 satisfera à la condition

$$(18) \qquad \delta_1 \leqq \delta,$$

où δ représente la même longueur qu'au numéro précédent.

Lorsque la distance d d'un point A du domaine (D) au sommet le plus voisin vérifiera l'inégalité

$$(19) \qquad d \geqq \delta_1,$$

le rayon R relatif au point A sera simplement défini par l'équation

$$(20) \qquad R = \delta_2.$$

Si au contraire on avait

$$(21) \qquad d < \delta_1,$$

on aurait

$$(22) \qquad R = k_1 s,$$

en désignant par s la longueur de l'arc intercepté par le domaine (D) sur le cercle mené par le point A et ayant pour centre le sommet de (S) le plus voisin de ce point

On s'assurera aisément que les longueurs δ_1 et δ_2 et la constante numérique k_1 pourront être choisies de façon que pour tout point A, situé à l'intérieur du domaine (D) et tel que sa plus courte distance a à la frontière soit inférieure ou égale au rayon R, relatif à ce point, les circonstances suivantes se présentent à la fois :

1° Il n'existe sur la frontière (S) du domaine (D) qu'un *seul* point A_0 situé à la distance a du point A.

2° Si du point A_0 comme centre on décrit un cercle (Σ) de rayon 7R, ce cercle rencontrera la frontière du domaine (D) précisément en deux points; l'arc (S_0) qu'il interceptera sur elle ne comprendra aucun sommet; une parallèle à une normale à l'arc (S_0) ne le rencontrera qu'en un seul point au plus; enfin, l'angle aigu formé par deux normales à cet arc ne pourra pas être supérieur à $\frac{\pi}{4}$.

3° Il correspondra sur (S) à tout point M, situé à la fois à l'intérieur du domaine (D) et du cercle (Σ), un point unique M' tel que la longueur $\overline{MM'}$ soit la plus petite possible, et, par le point M', on pourra faire passer deux cercles de rayon R, tels que les points intérieurs à l'un de ces cercles soient tous *intérieurs* au domaine (D) et les points intérieurs au second, *extérieurs* à ce domaine.

Nous supposerons, dans la suite, que le choix des longueurs δ_1 et δ_2 et de la constante numérique k_1 satisfasse aux conditions précédentes.

15. Les considérations ultérieures reposeront sur un théorème relatif au cercle et que nous allons établir rapidement.

Considérons un cercle (C) de centre O et de rayon R, limitant une aire (T), et désignons par $\mathfrak{v}$ une fonction harmonique à l'intérieur de ce cercle et telle que l'intégrale

$$\int_{(T)} \mathfrak{v}^2 \, d\tau$$

ait une valeur finie.

Posons

$$\mathfrak{w}_1(P) = \frac{1}{2\pi} \int_{(T)} \mathfrak{v}(M) \log \overline{PM} \, d\tau.$$

Le plan étant rapporté à un système de coordonnées polaires (ρ, θ) ayant le centre O du cercle (C) pour pôle, on aura, pour la fonction $\mathfrak{w}$, le développement en série bien connu

$$\mathfrak{v} = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) \left(\frac{\rho}{R}\right)^n.$$

On conclura facilement de cette formule qu'à *l'extérieur* de l'aire (T) la fonction $\mathfrak{w}_1$ pourra être représentée au moyen de la série suivante :

$$\mathfrak{w}_1 = \frac{A_0 R^2}{2} \log \rho - \frac{R^2}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta}{n(n+1)} \left(\frac{R}{\rho}\right)^n.$$

Au moyen de ces formules, on établira avec la plus grande facilité le théorème suivant :

Si l'on désigne par B *un point quelconque situé à l'intérieur du cercle* (C), *à une distance non nulle du centre, et par* B' *le point inverse au point* B *par rapport au cercle considéré, on aura*

$$(23) \qquad \mathfrak{v}(B) = -4 \frac{R^2}{\overline{OB}^2} \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{w}_1}{\partial \rho^2}\right)_{B'} - \mathfrak{v}(o),$$

où l'indice B' *sert à indiquer que la dérivée*

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{w}_1}{\partial \rho^2}$$

doit être calculée pour le point B'.

16. Considérons une fonction $\mathfrak{v}$ définie à l'intérieur du domaine (D), pouvant ne *pas* vérifier l'équation

$$\Delta \mathfrak{v} = o$$

dans toute l'étendue du domaine (D), mais jouissant cependant de cette propriété à l'intérieur de la partie du domaine (D) constituée par l'ensemble des points M tels que la plus courte distance m, de chacun d'eux à la frontière (S) du domaine (D), vérifie l'inégalité

$$(24) \qquad m < \lambda,$$

où λ représente une longueur déterminée différente de zéro. Supposons de plus que l'intégrale

$$(25) \qquad C^2 = \int_{(D)} \mathfrak{v}^2 \, d\tau$$

ait un sens, et posons

$$(26) \qquad \mathfrak{w}(P) = \frac{1}{2\pi} \int_{(D)} \mathfrak{v}(M) \log \overline{MP} \, d\tau_M.$$

Nous nous proposons d'étudier la façon dont se comportent, dans le voisinage de la frontière du domaine (D) et à *l'intérieur* de ce domaine, les dérivées du second ordre de la fonction $\mathfrak{w}$, la fonction $\mathfrak{v}$ et les dérivées du premier ordre de cette fonction dans le cas où, à *l'extérieur* du domaine (D), les dérivées partielles de la fonction $\mathfrak{w}$ jusqu'au troisième ordre inclusivement admettraient chacune, par rapport à la frontière (S) de ce domaine, des valeurs périphériques définissant sur (S) une fonction continue [1].

En se reportant au n° 13, on reconnaîtra de suite que la longueur R, que nous avons appelée *rayon* relatif à un point A du domaine (D), pourra toujours être définie de façon que, pour toute position du point A, on ait

$$2R < \lambda, \tag{26 a}$$

où λ représente la même longueur qu'au second membre de l'inégalité (24). Nous supposerons que cette condition soit vérifiée.

Considérons un point A situé à l'intérieur du domaine (D) et tel que sa plus courte distance a à la frontière vérifie l'inégalité

$$a \leqq R, \tag{26 b}$$

en désignant par R le rayon relatif au point A. Soit A_0 le point de (S) le plus voisin du point A. Du point A_0 comme centre décrivons un cercle (Σ) de rayon $7R$ et considérons un point B, intérieur à la fois au domaine (D) et au cercle (Σ). Il existera alors sur (S) un point unique B_0 dont la distance au point B soit la plus petite possible. Par le point B_0 on pourra faire passer deux cercles de rayon R (rayon relatif au point A), l'un (C) de centre O, tel que tous les points intérieurs à ce cercle soient intérieurs au domaine (D), et l'autre (C′) de centre O′, tel que les points situés à son intérieur soient tous extérieurs au domaine considéré. Désignons par (T) la portion du domaine (D) intérieure au cercle (C) et par (D_1) le reste de ce domaine. Décrivons du point B_0 comme centre un cercle (C_0) de même rayon R que les cercles (C) et (C′). Le cercle (C_0) partagera le domaine (D_1) en deux

---

[1] On trouvera les résultats de cette étude à la fin du n° 21.

autres : l'un (D_2), intérieur à ce cercle, et l'autre (D_3), qui lui sera extérieur. Notons en passant que le domaine (D_2) se composera de deux parties dont les frontières n'auront qu'un seul point commun : le point B_0, lequel sera un point de rebroussement pour la frontière de chacune des deux parties dont se compose le domaine (D_2).

Posons

$$\mathfrak{w}_1(P) = \frac{1}{2\pi}\int_{(T)} \mathfrak{v}(M)\log\overline{MP}\,d\tau_M, \tag{27}$$

$$\mathfrak{w}_2(P) = \frac{1}{2\pi}\int_{(D_2)} \mathfrak{v}(M)\log\overline{MP}\,d\tau_M, \tag{28}$$

$$\mathfrak{w}_3(P) = \frac{1}{2\pi}\int_{(D_3)} \mathfrak{v}(M)\log\overline{MP}\,d\tau_M. \tag{29}$$

Nous aurons

$$\mathfrak{w}(P) = \mathfrak{w}_1(P) + \mathfrak{w}_2(P) + \mathfrak{w}_3(P). \tag{30}$$

Nous admettrons qu'on ait

$$b = \overline{B_0 B} \leqq R, \tag{31}$$

et, dans cette hypothèse, nous allons chercher une limite supérieure de la quantité $|\mathfrak{v}(B)|$.

Dans le cas où l'on aurait

$$b = \overline{B_0 B} \geqq \frac{R}{2}, \tag{32}$$

nous pourrions nous borner à appliquer le théorème rappelé en note à la page 365.

D'après ce théorème nous aurons

$$[\mathfrak{v}(B)]^2 < \frac{1}{\pi b^2}\int_{(T)} \mathfrak{v}^2\,d\tau,$$

d'où *a fortiori*

$$|\mathfrak{v}(B)| < \frac{C}{b\sqrt{\pi}}, \tag{33}$$

où C représente le nombre positif défini par l'équation (25). Mais, pour établir une inégalité qui puisse nous servir utilement pour toutes les valeurs de b vérifiant l'inégalité (31), il faut soumettre d'abord à une étude spéciale le cas où l'on aurait

$$(34)\qquad b = \overline{B_0B} < \frac{R}{2}.$$

Prenons le point B_0 pour origine d'un système de coordonnées rectangulaires (x, y), en ayant soin de diriger l'axe des y suivant la normale en B_0 à (S), vers l'intérieur du domaine (D). Si l'on désigne alors par B′ le point inverse du point B par rapport au cercle (C), l'ordonnée y' du point B′ sera liée à b par l'équation

$$(35)\qquad y' = -\frac{Rb}{R-b},$$

et, en se reportant aux relations (23) et (27), on verra qu'on a

$$(36)\qquad \mathfrak{v}(B) = -4\frac{R^2}{(R-b)^2}\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{w}_1}{\partial y^2}\right)_{B'} - \mathfrak{v}(0).$$

D'autre part, l'équation (30) donne

$$(37)\qquad \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{w}_1}{\partial y^2}\right)_{B'} = \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{w}}{\partial y^2}\right)_{B'} - \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{w}_3}{\partial y^2}\right)_{B'} - \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{w}_2}{\partial y^2}\right)_{B'}.$$

D'après les hypothèses adoptées au sujet de la fonction $\mathfrak{w}$, nous aurons

$$(38)\qquad \left|\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{w}}{\partial y^2}\right)_{B'}\right| < M_2,$$

en désignant par M_2 une constante positive qui devra être regardée comme donnée. Pour estimer le second terme du second membre de l'équation (37), j'observe que la formule (29) donne

$$\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{w}_3}{\partial y^2}\right)_{B'}^2 < \frac{1}{4\pi^2}\int_{(D_3)} \mathfrak{v}^2\, d\tau \int_{(D_3)} \frac{d\tau_M}{\overline{B'M}^4}.$$

En se reportant à l'équation (25) on verra de suite qu'on a

$$\int_{(D_3)} \mathfrak{v}^2\, d\tau < C^2$$

et, d'autre part, on trouve facilement

$$\int_{(D_3)} \frac{d\tau_M}{\overline{B'M}^4} < \frac{4\pi}{3R^2},$$

en tenant compte de ce qu'en vertu des relations (34) et (35) on a

$$-R \leqq y' = \overline{B_0 B'} < 0. \tag{39}$$

On aura donc finalement

$$\left|\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{w}_3}{\partial y^2}\right)_{B'}\right| < \frac{V_1 C}{R}, \tag{40}$$

en désignant par V_1 une constante numérique.

17. Reste à estimer le troisième terme du second membre de (37). Nous allons faire usage de trois approximations successives en restreignant à chaque nouvelle approximation la limite supérieure de la distance du point B au point A_0.

Pour trouver une première approximation, nous raisonnerons comme nous l'avons fait déjà pour établir l'inégalité (40). Il vient

$$\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{w}_2}{\partial y^2}\right)^2_{B'} < \frac{C^2}{4\pi^2}\int_{(D_2)} \frac{d\tau_M}{\overline{B'M}^4}.$$

Le domaine (D_2) étant contenu dans le domaine (T_2) formé par l'ensemble des points *intérieurs* au cercle (C_0) mais *extérieurs* aux cercles (C) et (C') tangents entre eux en B_0, on trouve

$$\int_{(D_2)} \frac{d\tau_M}{\overline{B'M}^4} < \int_{(T_2)} \frac{d\tau_M}{\overline{B'M}^4} < \frac{b^4}{R b},$$

en tenant compte des relations (34) et (35). Nous arrivons donc à l'inégalité

$$\left|\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{w}_2}{\partial y^2}\right)_{B}\right| < \frac{V_2 C}{\sqrt{R b}}, \tag{41}$$

en désignant par V_2 une nouvelle constante numérique.

Les relations (38), (40) et (41) entraînent la suivante,

$$\left|\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{w}_1}{\partial y^2}\right)_{B'}\right| < M_2 + \frac{V_1 C}{R} + \frac{V_2 C}{\sqrt{R b}},$$

laquelle, en vertu de l'équation (36) et de ce que l'inégalité (33) donne

$$|v(o)| < \frac{C}{R\sqrt{\pi}}, \tag{42}$$

entraîne à son tour

$$|v(B)| < 16\left(M_2 + \frac{V_1 C}{R} + \frac{V_2 C}{\sqrt{Rb}}\right) + \frac{C}{R\sqrt{\pi}},$$

pour les valeurs de b vérifiant l'inégalité (34).

Mais, puisque pour les valeurs de b comprises entre $\frac{R}{2}$ et R l'inégalité (33) entraîne celle-ci :

$$|v(B)| < \frac{2C}{R\sqrt{\pi}},$$

on voit qu'on peut énoncer la proposition suivante : lorsque le point B ne sort pas du cercle (Σ), l'inégalité (31) entraîne l'inégalité

$$|v(B)| < \frac{Q}{\sqrt{Rb}} \tag{43}$$

en posant

$$Q = V_3 M_2 L + V_4 C, \tag{44}$$

où l'on a désigné par V_3 et V_4 des constantes numériques et par L une limite supérieure de R, soit, pour plus de simplicité, le maximum de distance de deux points du domaine (D).

18. Pour passer à la seconde approximation, supposons que le point B ne sorte pas du cercle (Σ_1), concentrique au cercle (Σ), mais ayant 5R au lieu de 7R pour rayon. Supposons en outre que la longueur b vérifie l'inégalité (34) et observons que la formule (28) donne

$$\left|\left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2}\right)_{B'}\right| < \frac{1}{2\pi}\int_{(D_2)} |v(M)| \frac{d\tau_M}{\overline{B'M}^2}. \tag{45}$$

Il est aisé de voir que pour aucun élément de l'intégrale précédente le point M ne sortira du cercle (Σ) et que, pour chacun d'eux, la plus courte distance m du point M à la frontière du domaine (D) satisfera à l'inégalité

$$m < R. \tag{46}$$

Il est donc permis de changer, dans (43), B en M et b en m; on trouve alors

$$|\mathfrak{v}(M)| < \frac{Q}{\sqrt{Rm}}. \tag{47}$$

Les inégalités (45) et (47) donnent aisément

$$\left|\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{w}_2}{\partial y^2}\right)_{B'}\right| < \frac{Q'}{R}\log\frac{2R}{b}, \tag{48}$$

en désignant par Q′ une quantité qui ne diffère de la quantité Q, définie par l'équation (44), que par les constantes numériques.

Raisonnons maintenant comme nous l'avons fait à la fin du numéro précédent, en ayant soin toutefois de substituer l'inégalité (48) à l'inégalité (41). Nous arriverons au résultat suivant : lorsque le point B ne sort pas du cercle (Σ_1), l'inégalité (31) entraîne la suivante,

$$|\mathfrak{v}(B)| < \frac{Q_1}{R}\log\frac{2R}{b}, \tag{49}$$

en posant

$$Q_1 = V_5 M_2 L + V_6 C, \tag{50}$$

où les symboles V_5 et V_6 ont une signification analogue à celle qu'ont les symboles V_3 et V_4 dans (44).

19. Pour passer à la troisième approximation, astreignons le point B à ne pas sortir du cercle (Σ_2), concentrique aux cercles (Σ) et (Σ_1), mais ayant seulement 3R pour rayon, et reprenons l'inégalité (45).

L'inégalité (46) sera vérifiée comme précédemment, et, puisque le point B ne sort pas du cercle (Σ_2), le point M ne sortira du cercle (Σ_1) pour aucun élément de l'intégrale qui entre au second membre de l'inégalité (45). Nous pourrons donc, dans l'inégalité (49), changer B en M et b en m; il viendra alors

$$|\mathfrak{v}(M)| < \frac{Q_1}{R}\log\frac{2R}{m}.$$

Substituons, dans les calculs indiqués au numéro précédent, cette inégalité à l'inégalité (47).

Nous arriverons aisément au résultat suivant : lorsque le point B ne sort pas du cercle (Σ_2), l'inégalité (31) entraine l'inégalité suivante :

$$|\mathfrak{v}(B)| < \frac{Q_2}{R}, \tag{51}$$

en posant

$$Q_2 = V_7 M_2 L + V_8 C, \tag{52}$$

où V_7 et V_8 représentent de nouvelles constantes numériques.

20. Il nous faut maintenant examiner la façon dont se comportent les dérivées du premier ordre de la fonction $\mathfrak{v}$ dans le voisinage de la frontière du domaine (D).

Les notations précédentes étant conservées, ce seront les quantités

$$\left(\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial x}\right)_B \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial y}\right)_B \tag{53}$$

que nous aurons à étudier.

Nous supposerons que le point B ne sorte pas du cercle (Σ_3), concentrique aux cercles (Σ), (Σ_1) et (Σ_2), mais ayant R pour rayon, et, bien entendu, nous admettrons que l'inégalité (31) soit vérifiée.

Nous aurons à nous appuyer sur une remarque d'ordre général : considérons une fonction h harmonique à l'intérieur d'un cercle (C) de centre O et de rayon R, limitant une aire (T), et supposons que l'intégrale

$$\int_{(T)} h^2 \, d\tau$$

ait une valeur finie. Il suffira de partir du développement classique de la fonction h à l'intérieur du cercle (C) pour reconnaître que la valeur

$$\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)_0$$

de la dérivée

$$\frac{\partial h}{\partial x}$$

au centre O du cercle (C) peut être représentée par la formule suivante :

$$(54) \qquad \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)_0 = \frac{3}{\pi R^3}\int_{(T)} h(M)\cos(OM, Ox')\,d\tau_M,$$

en désignant par Ox' un axe de même sens que l'axe des x.

L'équation (54) entraîne l'inégalité

$$(55) \qquad \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)_0^2 < \frac{9}{\pi R^4}\int_{(T)} h^2\,d\tau.$$

C'est cette inégalité qui constitue la remarque que nous avions en vue.

Revenons aux quantités (53). Une application facile de l'inégalité (55) nous donnera

$$(56) \qquad \left|\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_B\right|, \qquad \left|\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_B\right| < \frac{3C}{b^2\sqrt{\pi}},$$

où C représente, comme précédemment, le nombre positif défini par l'équation (25).

Les inégalités (56) ne pourraient pas être utilement employées pour toutes les valeurs de b comprises entre zéro et R. Pour en établir d'autres, ne présentant pas l'inconvénient précédent, il est nécessaire de soumettre à une étude spéciale le cas où b ne sortirait pas de l'intervalle $\left(0, \frac{R}{2}\right)$.

La formule (36) donne immédiatement

$$(57) \qquad \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_B = -8\frac{R^2}{(R-b)^3}\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2}\right)_{B'} + 4\frac{R^4}{(R-b)^4}\left(\frac{\partial^3 w_1}{\partial y^3}\right)_{B'}.$$

En partant des théorèmes qu'exprime l'équation (23), on trouve tout aussi aisément

$$(58) \qquad \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_B = -4\frac{R^4}{(R-b)^4}\left(\frac{\partial^3 w_1}{\partial y^2\,\partial x}\right)_{B'}.$$

D'autre part, l'équation (30) donne

$$(59) \qquad \left\{\begin{aligned} \left(\frac{\partial^3 w_1}{\partial y^3}\right)_{B'} &= \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}\right)_{B'} - \left(\frac{\partial^3 w_3}{\partial y^3}\right)_{B'} - \left(\frac{\partial^3 w_2}{\partial y^3}\right)_{B'}, \\ \left(\frac{\partial^3 w_1}{\partial y^2\,\partial x}\right)_{B'} &= \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}\right)_{B'} - \left(\frac{\partial^3 w_3}{\partial y^2\partial x}\right)_{B'} - \left(\frac{\partial^3 w_2}{\partial y^2\,\partial x}\right)_{B'}.\end{aligned}\right.$$

Cela posé, il n'y a plus qu'à estimer les différents termes des seconds membres des équations (59).

En vertu des hypothèses adoptées au sujet de la fonction $\mathfrak{w}$, nous aurons

$$(60) \qquad \left|\left(\frac{\partial^3 \mathfrak{w}}{\partial y^3}\right)_{B'}\right|, \qquad \left|\left(\frac{\partial^3 \mathfrak{w}}{\partial y^2\, \partial x}\right)_{B'}\right| < M_3,$$

en désignant par M_3 une constante positive qui devra être regardée comme donnée.

D'autre part, la formule (29) donne

$$(61) \qquad \left(\frac{\partial^3 \mathfrak{w}_3}{\partial y^3}\right)_{B'}^2, \qquad \left(\frac{\partial^3 \mathfrak{w}_3}{\partial y^2\, \partial x}\right)^2 < \frac{8\, C^2}{9\pi R^4},$$

où C représente, comme plus haut, la constante positive définie par l'équation (25).

Enfin, on déduit de l'équation (28) les inégalités

$$(62) \qquad \left|\left(\frac{\partial^3 \mathfrak{w}_2}{\partial y^3}\right)_{B'}\right|, \qquad \left|\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{w}_2}{\partial y^2\, \partial x}\right)_{B'}\right| < \frac{1}{\pi}\int_{(D_2)} \frac{|\mathfrak{v}(M)|}{\overline{B'M}^4}\, d\tau_M.$$

Or le point B ne sort pas du cercle (Σ_3) de centre A_0 et de rayon R. Donc, pour aucun élément de l'intégrale ci-dessus, le point M ne sort du cercle (Σ_2); d'ailleurs la plus courte distance m du point M à la frontière du domaine (D) reste, pour chaque élément de cette intégrale, inférieure à R. Par conséquent rien n'empêche de remplacer, dans l'inégalité (51), la lettre B par la lettre M; cela donne

$$|\mathfrak{v}(M)| < \frac{Q_2}{R}.$$

En s'appuyant sur cette inégalité, on déduira des inégalités (62) les suivantes :

$$(63) \qquad \left|\left(\frac{\partial^3 \mathfrak{w}_2}{\partial y^3}\right)_{B'}\right|, \qquad \left|\left(\frac{\partial^3 \mathfrak{w}_2}{\partial y^2\, \partial x}\right)_{B'}\right| < \frac{32\, Q_2}{\pi R^2} \log \frac{2R}{b}.$$

Il est aisé de voir qu'en développant les calculs indiqués au numéro précédent, on aurait obtenu, entre autres, une inégalité de la forme

$$(64) \qquad \left|\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{w}_1}{\partial y^2}\right)_{B'}\right| < \frac{Q'_2}{R},$$

en désignant par Q'_2 une quantité de même genre que la quantité Q_2.

Cela posé, les relations (59), (60), (61) et (63) permettront de trouver une limite supérieure commune des quantités

$$\left|\left(\frac{\partial^3 \mathfrak{w}_1}{\partial y^3}\right)_{B'} \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial^3 \mathfrak{w}_1}{\partial y^2\, \partial x}\right)_{B'}\right|.$$

A l'aide de ce résultat et de l'inégalité (64) on déduira des équations (57) et (58) une limite supérieure commune des quantités

$$\left(\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial y}\right)_B \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial x}\right)_B. \tag{65}$$

Cette limite supérieure des quantités précédentes ne sera sûrement valable que pour les valeurs de b comprises entre zéro et $\frac{R}{2}$; mais, en se reportant aux inégalités (56), on trouvera une limite supérieure commune des quantités (65), valable pour toutes les valeurs de b comprises entre zéro et R. Le résultat final pourra être présenté de la façon suivante : lorsque le point B ne sort pas du cercle (Σ_3), on a

$$\left|\left(\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial x}\right)_B \cos\alpha + \left(\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial y}\right)_B \sin\alpha\right| < \frac{Q_3}{R^2} \log \frac{2R}{b}, \tag{66}$$

quelque valeur qu'on donne à l'angle α, en posant

$$Q_3 = V_9 M_3 L^2 + V_{11} M_2 L + V_{12} C, \tag{67}$$

où l'on a désigné par L, comme précédemment, le maximum de distance de deux points du domaine (D) et par V_9, V_{11} et V_{12} des constantes numériques ne dépendant que de la nature du domaine (D).

Il va sans dire que l'inégalité (66) est indépendante de l'orientation des axes.

21. Il résulte immédiatement de l'inégalité (66) qu'en tout point *ordinaire* P de la frontière (S) du domaine (D), la fonction $\mathfrak{v}$ admet une valeur périphérique déterminée $\mathfrak{v}(P)$ variant d'une façon continue tant que le point P se déplace continûment sans passer par un sommet de (S).

Cela posé, considérons le centre A_0 du cercle (Σ_3), à l'intérieur duquel on a l'inégalité (66), et cherchons une limite supérieure de l'expression

$$|v(M) - v(A_0)|,$$

en supposant, bien entendu, que le point M ne sorte pas du cercle (Σ_3).

A cet effet, suivons, pour aller du point A_0 au point M, le chemin suivant : déplaçons-nous d'abord le long de la normale en A_0 à (S), en nous dirigeant vers l'intérieur du domaine (D), jusqu'au point E, tel qu'on ait

$$\overline{A_0 E} = \overline{A_0 M};$$

suivons ensuite de E à M la circonférence du cercle du centre A_0, mené par les points E et M. Nous aurons

$$v(M) - v(A_0) = \int \left(\frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy \right),$$

en supposant que l'intégrale du second membre soit prise suivant le chemin que nous venons de définir. En s'appuyant sur l'inégalité (66), on établira aisément l'inégalité suivante,

$$(68) \qquad |v(M) - v(A_0)| < \frac{Q'_3}{R} \sqrt{\frac{\overline{A_0 M}}{R}},$$

en désignant par Q'_3 une quantité de même genre que la quantité Q_3.

L'inégalité (68) va nous permettre de trouver, pour l'expression

$$\left| \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_A \cos\alpha + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) \sin\alpha \right|,$$

une limite supérieure plus approchée que celle qui résulterait de l'inégalité (66).

Pour arriver à ce résultat considérons la formule (28) en nous plaçant dans l'hypothèse où le point B, qui, on se le rappelle, intervient dans la définition du domaine (D_2), se serait confondu avec le point A. Nous pouvons écrire cette formule de la façon suivante :

$$w_2(P) = \frac{1}{2\pi} \int_{(D_2)} [v(M) - v(A_0)] \log \overline{PM}\, d\tau_M + \frac{v(A_0)}{2\pi} \int_{(D_2)} \log \overline{PM}\, d\tau_M.$$

Dans les conditions où nous nous sommes placés, le domaine (D_2)

sera contenu dans le cercle (Σ_3); nous pourrons donc faire usage de l'inégalité (68) pour trouver une limite supérieure des dérivées de la première intégrale du second membre de cette équation. D'ailleurs, l'inégalité (51) nous donnera

$$|v(A_0)| < \frac{Q^2}{R}.$$

En s'appuyant sur ces remarques, on trouvera facilement

$$(69) \qquad \left|\left(\frac{\partial^3 w_2}{\partial y^3}\right)_{A'}\right|, \qquad \left|\left(\frac{\partial^3 w_2}{\partial y^2\,\partial x}\right)_{A'}\right| < \frac{Q'_3}{R^2},$$

en désignant par Q'_3 une quantité de même genre que la quantité Q_3 définie par l'équation (67) et par A' le point avec lequel se confond le point B' lorsque le point B vient en A.

Cela posé, il suffira de supposer, dans les calculs indiqués à la fin du numéro précédent, que le point B se confond avec le point A et de remplacer en outre les inégalités en lesquelles se transformeraient alors les inégalités (63) par les inégalités (69), pour arriver à l'inégalité suivante,

$$(70) \qquad \left|\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_A \cos\alpha + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_A \sin\alpha\right| < \frac{Q_4}{R^2},$$

en désignant par α un arc arbitraire et par Q_4 une quantité qui ne diffère de la quantité Q_3 que par les valeurs des constantes numériques.

Il convient d'ajouter que les relations qui nous ont permis d'établir l'inégalité (70) amènent aisément à la conclusion suivante : chacune des quantités

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_A \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_A$$

tend vers une limite déterminée lorsque le segment $\overline{A_0A}$ tend vers zéro; il est même facile de voir que la limite de chacune de ces quantités pour

$$\overline{A_0A} = 0$$

varie continûment lorsque le point A_0 se déplace sur (S) sans passer par un sommet. Pour achever cette longue étude de la fonction w, il nous reste seulement à faire remarquer que l'inégalité (66) permet de démontrer sans peine qu'on a

$$(71)\qquad \left|\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{w}}{\partial x^2}\right)_A\right|, \qquad \left|\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{w}}{\partial x\,\partial y}\right)_A\right|, \qquad \left|\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{w}}{\partial y^2}\right)_A\right| < \frac{Q_5}{R},$$

en désignant par Q_5 une quantité de même genre que les quantités Q_3'' et Q_4.

En résumé, voici les résultats que nous avons obtenus en étudiant la fonction $\mathfrak{w}$ introduite au n° 15 : lorsque la plus courte distance a du point A situé dans le domaine (D) à la frontière de ce domaine n'est pas supérieure à la longueur R que nous avons appelée (n° 13) *rayon relatif au point* A et qui devra vérifier l'inégalité (26a), on a les inégalités (70) et (71) ainsi que l'inégalité

$$(72)\qquad |\mathfrak{v}(A)| < \frac{Q^2}{R},$$

qui résulte de l'inégalité (51) en faisant coïncider le point B avec le point A; en outre, en tout point ordinaire P de la frontière (S) du domaine (D), chacune des quantités

$$\mathfrak{v}, \quad \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial y}$$

admet une valeur périphérique déterminée, et la valeur périphérique en P de chacune de ces trois quantités varie d'une façon continue lorsque le point P se déplace continûment sur (S) sans passer par un sommet.

22. Pour établir l'unicité de la solution du problème biharmonique restreint nous nous servirons de la fonction appelée par certains auteurs *fonction de Green du deuxième ordre* et nous consacrerons ce numéro à établir celles des propriétés de cette fonction sur lesquelles nous aurons à nous appuyer dans la suite.

Considérons un point quelconque Q situé à l'intérieur du domaine (D) et désignons par H(Q, M) la fonction qui, considérée comme fonction des coordonnées du point M, est la fonction harmonique qui représente, pour le domaine (D) et par rapport à la fonction

$$\frac{1}{2\pi}\log\overline{QM},$$

regardée, elle aussi, comme fonction des coordonnées du point M, la solution du problème intermédiaire. Posons ensuite

$$R(Q, M) = \frac{1}{2\pi} \log \overline{QM} - H(Q, M), \tag{74}$$

$$G_2(Q, P) = \frac{1}{2\pi} \int_{(D)} R(Q, M) \log \overline{PM} \, d\tau_M. \tag{75}$$

La fonction $G_2(Q, P)$ ne sera autre chose que la *fonction de Green du second ordre.*

En effet, considérée comme fonction des coordonnées *du point* P, elle jouit manifestement des propriétés suivantes :

1° Dans tout le domaine (D) *sauf* en Q on a

$$\Delta^2 G_2 = 0;$$

2° On a

$$\Delta G_2(Q, P) = R(Q, P);$$

donc la différence

$$\Delta G_2(Q, P) - \frac{1}{2\pi} \log \overline{QM}$$

est continue dans le voisinage du point Q;

3° La fonction $G_2(Q, P)$ et ses dérivées du premier ordre s'annulent sur la frontière du domaine (D); c'est ce qui résulte immédiatement du lemme du n° 11.

Cela posé, il suffit de considérer les formules (74) et (75) et de tenir compte de ce que la valeur (75) de la fonction $G_2(Q, P)$ est nulle identiquement lorsque le point P se trouve à l'extérieur du domaine (D), pour apercevoir immédiatement que les théorèmes énoncés à la fin du numéro précédent sont applicables à la fonction $G_2(Q, P)$, regardée comme fonction des coordonnées du point P. On arrive de cette façon aux conclusions suivantes : si l'on désigne par A un point intérieur au domaine (D) et par R le rayon relatif au point A; si l'on admet de plus qu'en définissant la longueur R, on se soit arrangé de façon que l'inégalité

$$2R < q,$$

où q représente la plus courte distance du point Q à la frontière du domaine (D), soit vérifiée pour toute position du point A dans le domaine (D), dans ce cas l'inégalité

$$a \leqq R, \tag{76}$$

où a représente la plus courte distance du point A à la frontière du domaine (D), entraînera les inégalités suivantes :

$$|R(Q, A)| < \frac{K(Q)}{R}, \tag{77}$$

ainsi que

$$\left|\left(\frac{\partial R}{\partial x}\right)_A\right|, \quad \left|\left(\frac{\partial R}{\partial y}\right)_A\right| < \frac{K(Q)}{R^2} \tag{78}$$

et

$$\left|\left(\frac{\partial^2 G_2}{\partial x^2}\right)_A\right|, \quad \left|\left(\frac{\partial^2 G_2}{\partial x\, \partial y}\right)_A\right|, \quad \left|\left(\frac{\partial^2 G_2}{\partial y^2}\right)_A\right| < \frac{K(Q)}{R}, \tag{79}$$

où les dérivations se rapportent aux coordonnées du point A et où l'on a désigné par K(Q) une quantité positive finie dépendant uniquement de la nature du domaine (D) et de la position du point Q dans ce domaine.

Il nous reste encore à faire la remarque suivante : si l'on désigne, comme tout à l'heure, par a la plus courte distance d'un point A, situé dans le domaine (D), à la frontière (S) de ce domaine, les produits

$$a\, R(Q, A), \quad a^2 \frac{\partial R(Q, A)}{\partial x} \quad \text{et} \quad a^2 \frac{\partial R(Q, A)}{\partial y}, \tag{80}$$

où les dérivées doivent être prises par rapport aux coordonnées du point a, tendent *uniformément* vers zéro avec a.

Cette proposition ne résulte nullement des inégalités (77) et (78), parce que la longueur R tend vers zéro lorsque le point A tend vers un sommet; mais elle résulte immédiatement des théorèmes exprimés par les inégalités (6) et (55) et des circonstances suivantes : 1° la fonction R(Q, A) considérée comme fonction des coordonnées du point A est, *sauf* en Q, régulièrement harmonique dans tout le domaine (D), et, par conséquent, elle jouit de cette propriété en tout point assez voisin de la frontière ; 2° l'intégrale

$$\int_{(D)} [R(Q, M)]^2 d\tau_M = \frac{1}{4\pi^2} \int_{(D)} (\log \overline{QM})^2 d\tau_M - \int_{(D)} [H(Q, M)]^2 d\tau_M \quad (^1)$$

est finie.

Les théorèmes relatifs aux fonctions $G_2(Q, M)$ et $R(Q, M)$ que nous venons d'établir permettraient de démontrer en toute rigueur, par le théorème de Green, la symétrie de la fonction $G_2(Q, M)$ par rapport aux points Q et M. Nous ne développerons pourtant pas la démonstration de ce théorème, parce que, d'une part, nous n'aurons pas à en faire usage et parce que, d'autre part, les précautions avec lesquelles il faudrait appliquer le théorème de Green sont identiques à celles avec lesquelles nous aurons à nous servir de ce théorème au numéro suivant.

23. Pour établir l'unicité de la solution du problème biharmonique restreint nous n'avons qu'à démontrer le théorème suivant :

Lorsqu'une fonction w satisfait à l'intérieur du domaine (D) *à l'équation*

$$\Delta^2 w = 0,$$

et lorsque les quantités

$$(81) \qquad w, \quad \frac{\partial w}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial w}{\partial y},$$

calculées pour un point intérieur du domaine considéré, tendent, avec la plus courte distance de ce point à la frontière, uniformément vers zéro, la fonction w est nulle identiquement dans tout le domaine (D).

Pour établir ce théorème, posons

$$(82) \qquad v = \Delta w$$

et commençons par faire la remarque suivante : si l'on désigne par a la plus courte distance d'un point A, situé dans le domaine (D), à la

(1) Se reporter à l'équation (3), p. 343.

frontière de ce domaine, les produits

$$a v(\mathrm{A}), \quad a^2 \frac{\partial v(\mathrm{A})}{\partial x} \quad \text{et} \quad a^2 \frac{\partial v(\mathrm{A})}{\partial y} \tag{83}$$

tendent uniformément vers zéro avec a.

La justification de cette remarque est immédiate : du point A comme centre décrivons un cercle (C) de rayon a. La formule bien connue pour la solution générale du problème biharmonique pour le cercle donne

$$v(\mathrm{A}) = \frac{-1}{\pi a^2} \int_{(\mathrm{C})} \frac{dw}{d\mathrm{N}} ds,$$

$$\frac{\partial v(\mathrm{A})}{\partial x} = \frac{-4}{\pi a^4} \int_{(\mathrm{C})} w \cos\theta\, ds - \frac{4}{\pi a^3} \int_{(\mathrm{C})} \frac{dw}{d\mathrm{N}} \cos\theta\, ds,$$

$$\frac{\partial v(\mathrm{A})}{\partial y} = \frac{-4}{\pi a^4} \int_{(\mathrm{C})} w \sin\theta\, ds - \frac{4}{\pi a^3} \int_{(\mathrm{C})} \frac{dw}{d\mathrm{N}} \sin\theta\, ds,$$

en désignant par θ l'angle formé, avec l'axe des x, par la demi-droite allant du centre A du cercle (C) vers l'élément ds.

Eu égard aux propriétés dont jouissent, par hypothèse, les quantités (81), on s'assurera immédiatement, au moyen des formules précédentes, que les produits (83) jouissent bien de la propriété annoncée.

Cela posé, retranchons du domaine (D) les parties intérieures à des petits cercles (Σ) de rayon commun ρ, décrits des sommets de la frontière (S) comme centres, et soit (D_ρ) le domaine ainsi obtenu. Retranchons ensuite du domaine (D_ρ) l'ensemble des points tels que la distance de chacun d'eux à la frontière du domaine (D) soit inférieure à une petite longueur λ. Nous obtiendrons de la sorte un nouveau domaine ($\mathrm{D}_{\rho,\lambda}$).

Désignons par σ' l'ensemble des arcs des cercles (Σ) faisant partie de la frontière du domaine ($\mathrm{D}_{\rho,\lambda}$), par (S') le reste de cette frontière et par ($\sigma' + \mathrm{S}'$) toute la frontière en question.

Considérons maintenant un point quelconque Q intérieur au domaine (D) et envisageons les fonctions $\mathrm{G}_2(\mathrm{Q}, \mathrm{A})$ et $\mathrm{R}(\mathrm{Q}, \mathrm{A})$, définies au numéro précédent, en les regardant comme *fonctions des coordonnées du point* A.

Appliquons ensuite le théorème de Green, par rapport au domaine $(D_{\rho,\lambda})$, une première fois aux fonctions $G_2(Q, A)$ et $v(A)$, et une seconde fois aux fonctions $R(Q, A)$ et $w(A)$, en donnant, aux longueurs ρ et λ, des valeurs assez petites pour que le point Q soit situé à l'intérieur du domaine $(D_{\rho,\lambda})$. On trouvera facilement

$$(84)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_{(\sigma'+s')} G_2(Q,A)\frac{dv}{dN}\,ds = \int_{(D_{\rho,\lambda})} v(A)\,R(Q,A)\,d\tau_A + \int_{(\sigma'+s')} v(A)\frac{dG_2}{dN}\,ds,\\ &\int_{(D_{\rho,\lambda})} R(Q,A)\,v(A)\,d\tau_A + \int_{(\sigma'+s')} R(Q,A)\frac{dw}{dN}\,ds = w(Q) + \int_{(\sigma'+s')} w(A)\frac{dR}{dN}\,ds\cdot \end{aligned}\right.$$

Faisons tendre la longueur λ vers zéro et considérons en même temps les intégrales curvilignes entrant dans les équations précédentes. Celles des parties de ces intégrales qui se rapportent à la portion (S') de la frontière du domaine $(D_{\rho,\lambda})$ tendront vers zéro. On le vérifiera aisément en tenant compte des propriétés des quantités (81) et (83) et en se reportant aux inégalités (77), (78) et (79).

Par conséquent, le passage à la limite, pour $\lambda = 0$, donne

$$(85)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_{(\sigma)} G_2(Q,A)\frac{dv}{dN}\,ds = \int_{(D_\rho)} v(A)\,R(Q,A)\,d\tau_A + \int_{(\sigma)} v(A)\frac{dG_2}{dN}\,ds,\\ &\int_{(D_\rho)} R(Q,A)\,v(A)\,d\tau_A + \int_{(\sigma)} R(Q,A)\frac{dw}{dN}\,ds = w(Q) + \int_{(\sigma)} w(A)\frac{dR}{dN}\,ds, \end{aligned}\right.$$

en désignant par (σ) l'ensemble des arcs des cercles (Σ) faisant partie de la frontière du domaine (D_ρ).

Je dis que les intégrales curvilignes entrant dans les équations (85) tendent vers zéro en même temps que la longueur ρ. Pour le démontrer, supposons que la longueur ρ soit assez petite pour que la valeur $d = \rho$ de la longueur d vérifie l'inégalité (21) (p. 372). Dans ce cas, chacun des cercles (Σ) rencontrera la frontière (S) du domaine (D) précisément en deux points, et ce domaine lui-même interceptera sur chacun de ces cercles un seul arc. L'ensemble de ces arcs formera la portion (σ) de la frontière du domaine (D_ρ). Désignons par (s) l'un des arcs précédents. D'après les définitions du n° 14 (p. 372 et suivantes), les rayons relatifs aux différents points de l'arc (s) auront une même valeur R définie par l'équation

$$R = k_1 s,$$

en désignant par k_1 une constante numérique non nulle et par s la longueur de l'arc (s). Désignons par (s'') l'ensemble des points de (s) tels que la plus courte distance de chacun d'eux à la frontière du domaine (D) soit supérieure à la longueur R. Le reste de l'arc (s) se composera de deux arcs (s') et (s''') séparés par l'arc (s'').

Envisageons maintenant, dans les équations (85), les intégrales curvilignes se rapportant à la portion (s) de (σ), et soit

$$\int_{(s)}$$

l'une de ces intégrales. Décomposons-la en trois parties comme l'indique l'équation symbolique

$$\int_{(s)} = \int_{(s')} + \int_{(s'')} + \int_{(s''')}.$$

On trouve aisément

$$\lim_{\rho=0} \int_{(s'')} = 0,$$

en tenant compte de ce que les quantités (80), (81), (83) et les suivantes

$$G_2(Q, A), \quad \frac{\partial G_2(Q, A)}{\partial x}, \quad \frac{\partial G_2(Q, A)}{\partial y} \tag{85}$$

tendent uniformément vers zéro avec la plus courte distance a du point A à la frontière du domaine (D).

D'autre part, en se reportant aux inégalités (77), (78), (79) et aux propriétés, rappelées tout à l'heure, des quantités (81) et (83), on s'assurera immédiatement qu'on a aussi

$$\lim_{\rho=0} \int_{(s')} = \lim_{\rho=0} \int_{(s''')} = 0.$$

On a donc

$$\lim_{\rho=0} \int_{(s)} = 0.$$

Cela prouve que le passage à la limite, pour $\rho = 0$, permet de déduire des équations (85) la suivante :

$$w(Q) = 0.$$

Donc, comme nous voulions l'établir, la fonction w est nulle identiquement dans tout le domaine (D).

Il résulte de là que le second des deux points indiqués au n° 11 (p. 363) est établi.

En résumé, la réduction du problème biharmonique restreint au problème intermédiaire est complètement effectuée.

IV. — Sur le minimum d'une intégrale double.

24. Considérons deux fonctions continues σ et σ_1 définies sur la frontière (S) du domaine (D), et envisageons l'ensemble (E) des fonctions des coordonnées rectangulaires x et y, telles que chacune de ces fonctions F jouisse des propriétés suivantes :

1° Les quantités

$$F, \quad \frac{\partial F}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial F}{\partial y}$$

sont continues à l'intérieur du domaine (D), et chacune d'elles admet des valeurs périphériques qui constituent une fonction continue sur la frontière du domaine considéré;

2° Les valeurs périphériques de la fonction F définissent sur (S) une fonction identique à la fonction σ;

3° La dérivée $\frac{dF}{dN}$ de la fonction F, prise suivant la normale intérieure à la frontière du domaine (D), est égale à la fonction σ_1.

Cela posé, je vais démontrer le théorème suivant : *S'il existe dans l'ensemble* E *une fonction* φ *vérifiant les hypothèses du n°* 1, *il existera aussi dans cet ensemble une fonction* w, *telle que pour*

$$F = w \tag{1}$$

l'intégrale

$$\int_{(D)} (\Delta F)^2 \, d\tau \tag{2}$$

atteigne sa borne inférieure. J'ajoute qu'*à l'intérieur du domaine* (D) *la fonction* w *satisfera à l'équation*

$$\Delta^2 w = 0 \quad (^1).$$

Pour démontrer ce théorème considérons, dans l'ensemble (E), une fonction F telle que la valeur correspondante de l'intégrale (2) soit finie et bien déterminée. Nous aurons

$$\int_{(D)} \Phi^2 \, d\tau = \int_{(D)} (\Delta F)^2 \, d\tau, \tag{3}$$

en posant

$$\Phi = \Delta F. \tag{4}$$

Posons, comme dans l'Introduction,

$$\psi = \Delta \varphi \tag{5}$$

et désignons par v' la solution du problème intermédiaire, pour le domaine (D), par rapport à la fonction Φ.

Soit v l'élément analogue relatif à la fonction ψ. Je dis que, dans tout le domaine (D), on a identiquement

$$v' = v. \tag{6}$$

Pour établir cette relation, posons

$$u = v - v', \tag{7}$$

$$P = \varphi - F, \tag{8}$$

$$Q = \psi - \Phi. \tag{9}$$

L'intégrale

$$\int_{(D)} Q^2 \, d\tau \tag{10}$$

ayant évidemment une valeur finie et bien déterminée, la fonction

$$\frac{1}{2\pi} \int_{(D)} Q(B) \log \overline{AB} \, d\tau \tag{11}$$

(¹) Comparer Fubini, *Il principio di minimo, etc.* (*Rendiconti del Circolo mat. di Palermo*, 1er semestre 1907).

des coordonnées du point A sera continue dans tout le plan à distance finie.

Or il résulte des équations (4), (5), (8) et (9) :

1° Qu'on a

$$\Delta P = Q$$

à l'intérieur du domaine (D);

2° Que les dérivées du premier ordre de la fonction P, ainsi que cette fonction elle-même, admettent en tout point de la frontière du domaine (D) des valeurs périphériques égales à zéro. On en conclura de suite, au moyen du théorème de Green, que la fonction (11) jouit des propriétés suivantes : à l'intérieur du domaine (D) on a

$$\text{(12)} \qquad P(A) = \frac{1}{2\pi}\int_{(D)} Q(B)\log\overline{AB}\,d\tau_B$$

et, à l'extérieur de ce domaine, la fonction représentée par l'intégrale (11) est nulle identiquement. Si l'on rapproche de ces remarques ce fait que les dérivées du premier ordre de la fonction P s'annulent sur (S), on arrivera à la conclusion suivante : les dérivées premières de la fonction (11) sont, comme cette fonction elle-même, continues dans tout le plan à distance finie. On pourra donc substituer, dans l'énoncé du problème biharmonique restreint, tel qu'il a été traité au n° 11, la fonction (11) à la fonction φ. Soit alors $\mathfrak{w}$ la solution de ce problème. D'après la théorie développée au Chapitre précédent, la quantité

$$\Delta\mathfrak{w}$$

sera égale à la fonction représentant la solution du problème intermédiaire pour le domaine (D) par rapport à la fonction Q. Or cette fonction n'est autre chose que la fonction $\mathfrak{v}$ définie par l'équation (7). Nous aurons donc

$$\text{(13)} \qquad \mathfrak{v} = \Delta\mathfrak{w}.$$

Mais puisque, comme nous avons déjà eu à le faire remarquer, la fonction (11) et ses dérivées de premier ordre s'annulent sur (S), il en sera de même de la fonction $\mathfrak{w}$. Cette fonction sera donc nulle identiquement. Donc, en vertu de (13), il en sera de même de la fonction υ.

Eu égard à (7), cette circonstance prouve que la relation (6) sera vérifiée dans tout le domaine (D). C'est ce que nous avions annoncé.

D'après ce qui vient d'être établi, la fonction φ peut être regardée comme la solution du problème intermédiaire pour le domaine (D) aussi bien par rapport à la fonction Φ que par rapport à la fonction ψ.

En se reportant au n° 4, on conclura de là qu'on a

$$\int_{(\mathrm{D})} \Phi^2\, d\tau = \int_{(\mathrm{D})} \varphi^2\, d\tau + \int_{(\mathrm{D})} (\Phi - \varphi)^2\, d\tau, \tag{14}$$

et, en se reportant au n° 11, on verra ceci : si l'on désigne par ϖ la fonction qui, à l'intérieur du domaine (D) et par rapport à la fonction φ, représente la solution du problème biharmonique restreint, on aura

$$\varphi = \Delta\varpi. \tag{15}$$

Or, il est aisé de conclure des équations (4) et (15), en tenant compte des conditions aux limites que vérifient les fonctions F et ϖ, que l'intégrale

$$\int_{(\mathrm{D})} (\Phi - \varphi)^2\, d\tau$$

ne peut s'annuler sans que les fonctions F et ϖ ne se confondent. Par conséquent, en vertu des relations (4), (14) et (15), on aura

$$\int_{(\mathrm{D})} (\Delta \mathrm{F})^2\, d\tau > \int_{(\mathrm{D})} (\Delta\varpi)^2\, d\tau,$$

à moins que la fonction F ne se confonde avec la fonction ϖ. Donc, on le voit aisément, le théorème énoncé au début de ce Chapitre est démontré.

V. — Méthode pratique pour résoudre le problème biharmonique restreint.

25. Le domaine (D), tel que nous l'avons envisagé dans les deux derniers Chapitres, est une portion de plan limitée par un contour

extérieur (C_0) et un certain nombre p de contours intérieurs

$$(1) \qquad (C_1), \quad (C_2), \quad \ldots, \quad (C_p).$$

Désignons par (D_0) la région du plan s'étendant à l'infini à l'extérieur du contour (C_0) et par

$$(2) \qquad (D_1), \quad (D_2), \quad \ldots, \quad (D_p)$$

les portions de plan limitées par les contours (1).

D'après ce qui précède, tout le plan se composera du domaine (D) et des $p+1$ régions qu'on obtient en adjoignant la région (D_0) aux p domaines (2).

Introduisons pour un instant l'unité imaginaire i et, en désignant par ξ et η des variables réelles, posons

$$(\xi + i\eta)^k = u_k(\xi, \eta) + i\, v_k(\xi, \eta),$$

en désignant par u_k et v_k des polynomes réels.

Le plan étant rapporté à un système de coordonnées rectangulaires (x, y), désignons par a_α et b_β les coordonnées d'un point déterminé, choisi arbitrairement à l'*intérieur* du domaine (D_α).

Posons

$$r_\alpha = \sqrt{(x-a_\alpha)^2 + (y-b_\alpha)^2},$$

en ayant soin de prendre la détermination positive du radical, et considérons l'ensemble des fonctions harmoniques définies par les formules suivantes :

$$(3) \quad \begin{cases} h_{0,0} = 1, \qquad h_{0,2k-1} = v_k(x, y), \qquad h_{0,2k} = u_k(x, y), \\ h_{\alpha,0} = \log r_\alpha, \quad h_{\alpha,2k-1} = \dfrac{v_k(x-a_\alpha, y-b_\alpha)}{r_\alpha^{2k}}, \quad h_{\alpha,2k} = \dfrac{u_k(x-a_\alpha, y-b_\alpha)}{r_\alpha^{2k}} \\ \qquad\qquad (\alpha = 1, 2, 3, \ldots, p), \\ \qquad\qquad (k = 1, 2, 3, \ldots). \end{cases}$$

Nous composerons avec les fonctions précédentes des fonctions nouvelles qui permettront de résoudre, au moyen d'une méthode se prêtant au calcul effectif, le problème intermédiaire et par suite aussi le problème biharmonique restreint.

26. D'après les premiers éléments de la théorie des ensembles, il sera possible de former une suite infinie de fonctions

$$(4) \qquad U_0, \quad U_1, \quad U_3, \quad \ldots$$

de façon que chaque terme U_n de cette suite soit égal à une des fonctions de l'ensemble (3) et que, de plus, la suite considérée contienne sans omission ni répétition toutes les fonctions de cet ensemble.

Je vais établir le lemme suivant :

Désignons par $\mathfrak{v}$ une fonction harmonique à l'intérieur du domaine (D) et telle que l'intégrale

$$(5) \qquad \int_{(D)} \mathfrak{v}^2 \, d\tau$$

ait une valeur finie. Lorsqu'on a

$$(6) \qquad \int_{(D)} \mathfrak{v} U_n \, d\tau = 0$$

pour toutes les valeurs entières et non négatives de l'indice n, on a

$$(7) \qquad \mathfrak{v} = 0$$

dans tout le domaine (D).

Pour le démontrer, posons

$$(8) \qquad \mathfrak{w}(A) = \frac{1}{2\pi} \int_{(D)} \mathfrak{v}(B) \log \overline{AB} \, d\tau_B,$$

et envisageons un cercle (Σ) ayant l'origine des coordonnées pour centre et un rayon assez grand pour que tout le domaine (D) lui soit intérieur. A l'extérieur de ce cercle nous aurons, pour la fonction $\mathfrak{w}$, le développement classique suivant :

$$(9) \qquad \mathfrak{w} = A_0 \log r + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k u_k(x, y) + B_k v_k(x, y)}{r^{2k}},$$

en posant

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Or, les équations (6) entraînent les suivantes,

$$\int_{(D)} \mathfrak{v}\, h_{0,n}\, d\tau = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

et celles-ci, en vertu de formules classiques, entraînent à leur tour la conséquence que voici : les coefficients de la série (9) sont tous nuls. Donc, la fonction $\mathfrak{w}$ sera nulle à l'extérieur du cercle (Σ) et, par conséquent aussi, dans tout le domaine (D_0).

D'autre part, il suffirait d'envisager le développement classique de la fonction $\mathfrak{w}$, procédant suivant les fonctions

$$u_k(x - a_\alpha, y - b_\alpha), \quad v_k(x - a_\alpha, y - b_\alpha) \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

et valable à l'intérieur d'un cercle (Σ_α) assez petit et ayant le point (a_α, b_α) pour centre, à l'effet de s'assurer que, en vertu des équations (6), la fonction $\mathfrak{w}$ sera nulle à l'intérieur du cercle (Σ_α) et, par suite, dans tout le domaine (D_α).

En résumé, il est établi que, en vertu des équations (6), la fonction $\mathfrak{w}$ est nulle à l'extérieur du domaine (D). Il résulte de là, moyennant le lemme établi au n° 12, que les dérivées du premier ordre de la fonction $\mathfrak{w}$ seront continues à la traversée de la frontière du domaine (D) et seront, par conséquent, sur elle égales à zéro.

Cela prouve (n° 23) que la fonction $\mathfrak{w}$ sera nulle identiquement. Donc, en vertu de l'équation

$$\mathfrak{v} = \Delta \mathfrak{w},$$

il en sera de même de la fonction $\mathfrak{v}$. C'est ce que nous avions à démontrer.

27. Posons

$$(10) \qquad \begin{cases} V_0 = a_{00} U_0, \\ V_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_{n,k} U_k \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots). \end{cases}$$

Comme il n'existe aucune relation linéaire et homogène à coefficients constants entre un nombre fini de fonctions de la suite (4), il sera possible de déterminer les constantes $a_{n,k}$ de façon qu'on ait [1]

$$(11)\qquad \int_{(D)} V_n^2\, d\tau = 1 \qquad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

et que l'inégalité

$$(12)\qquad n \neq j$$

entraîne la suivante :

$$(13)\qquad \int_{(D)} V_n V_j\, d\tau = 0.$$

Il arrivera alors qu'on aura

$$(14)\qquad a_{nn} \neq 0$$

pour toutes les valeurs entières et non négatives de n.

Il résulte des inégalités (14), qu'il sera possible d'exprimer les fonctions U_n au moyen des fonctions V_k de la façon suivante :

$$U_0 = b_{00} V_0,$$
$$U_n = \sum_{k=0}^{n} b_{nk} V_k,$$

en désignant par les $b_{n,k}$ des constantes.

Par conséquent, les équations

$$(15)\qquad \int_{(D)} \mathfrak{v} V_n\, d\tau = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

entraînent les équations (6). Nous avonc donc, en vertu de lemme établi au numéro précédent, le théorème suivant :

Lorsque pour une fonction $\mathfrak{v}$, *harmonique à l'intérieur du domaine* (D), *l'intégrale*

$$\int_{(D)} \mathfrak{v}^2\, d\tau$$

---

(1) *Voir* mon Mémoire *Sur l'intégration de l'équation biharmonique* (*Bulletin de l'Académie de Cracovie*, janvier 1908, p. 4 et 5).

a une valeur finie et lorsque, de plus, cette fonction satisfait aux équations (15), *elle est nulle identiquement dans le domaine* (D).

28. Admettons que, pour une fonction h, harmonique à l'intérieur du domaine (D), l'intégrale

$$\int_{(D)} h^2\, d\tau \tag{16}$$

ait une valeur finie et posons

$$C_n = \int_{(D)} h V_n\, d\tau \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{17}$$

Les théorèmes rappelés en note (p. 351) permettent d'énoncer les propositions suivantes :

1° La série

$$h' = \sum_{n=0}^{\infty} C_n V_n \tag{18}$$

sera absolument et uniformément convergente dans toute l'étendue de tout domaine *intérieur* au domaine (D); la somme h' de cette série sera donc une fonction harmonique à l'intérieur du domaine (D);

2° L'intégrale

$$\int_{(D)} h'^2\, d\tau$$

aura une valeur finie;

3° Si l'on désigne par F une fonction quelconque, à cela près que l'intégrale

$$\int_{(D)} F^2\, d\tau$$

ait un sens, on aura

$$\int_{(D)} h' F\, d\tau = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \int_{(D)} F V_n\, d\tau. \tag{19}$$

Posons

$$v = h - \sum_{n=0}^{\infty} C_n V_n. \tag{20}$$

Si l'on tient compte, d'une part, des trois propositions qui viennent d'être énoncées et, d'autre part, des formules (17), on reconnaît sans peine que le théorème du numéro précédent est applicable à la valeur (20) de la fonction $\mathfrak{v}$.

Nous avons donc, pour la fonction h, le développement en série suivant :

$$h = \sum_{n=0}^{\infty} C_n V_n. \tag{21}$$

Il est permis d'ajouter qu'on aura

$$\int_{(D)} h^2\, d\tau = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^2; \tag{22}$$

cela résulte du théorème exprimé par l'équation (19) et de ce qu'on a

$$h' = h.$$

En résumé, pourvu que pour une fonction h, harmonique à l'intérieur du domaine (D), l'intégrale (16) ait une valeur finie, cette fonction pourra être développée en une série de la forme (21).

Le théorème précédent entraîne l'intéressant corollaire suivant : étant donnée une fonction h harmonique à l'intérieur du domaine (D) et telle que l'intégrale (16) ait une valeur finie, il sera toujours possible de trouver une fonction h_1, régulièrement harmonique dans tout le plan sauf à l'infini et aux points

$$(a_\alpha, b_\alpha) \qquad (\alpha = 1, 2, 3, \ldots, p),$$

régulièrement harmonique par conséquent dans le domaine (D) et sur la frontière de ce domaine, telle qu'on ait

$$\int_{(D)} (h - h_1)^2\, d\tau < \varepsilon,$$

en désignant par ε un nombre positif, donné à l'avance, différent de zéro, mais arbitrairement petit. Au surplus, dans le cas où le domaine (D) ne serait limité que par un seul contour, il sera possible de satisfaire aux conditions précédentes en prenant pour h_1 un polynome entier par rapport aux variables x et y.

Pour justifier cette proposition, il suffit de remarquer qu'on pourra prendre

$$h_1 = \sum_{n=0}^{q} C_n V_n,$$

en donnant à l'entier q une valeur assez grande.

29. Appliquons le théorème du numéro précédent au problème intermédiaire. Soient, comme précédemment, ψ la fonction donnée et v la fonction demandée.

D'après le théorème du numéro précédent, nous aurons

$$v = \sum_{n=0}^{\infty} A_n V_n, \tag{23}$$

de sorte que le problème se réduira à la détermination des coefficients A_n du développement précédent. Or on a

$$\int_{(D)} \psi h \, d\tau = \int_{(D)} v h \, d\tau \tag{24}$$

pour toute fonction h, harmonique à l'intérieur du domaine (D) et telle que l'intégrale

$$\int_{(D)} h^2 \, d\tau$$

soit finie. Posons

$$h = V_n.$$

La relation (24) nous donnera

$$A_n = \int_{(D)} \psi V_n \, d\tau,$$

en vertu de l'équation (23). Donc, le problème intermédiaire et, par conséquent, le problème biharmonique restreint peuvent facilement être résolus dans le cas général au moyen des fonctions V_n.