

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

E. BELTRAMI

Essai d'interprétation de la géométrie noneuclidéenne. Trad. par J. Hoüel

Annales scientifiques de l'É.N.S. 1^{re} série, tome 6 (1869), p. 251-288

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1869_1_6__251_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1869, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ESSAI D'INTERPRÉTATION
DE
LA GÉOMÉTRIE NON EUCLIDIENNE,

PAR M. E. BELTRAMI,
PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE BOLOGNE.

Traduit de l'italien par M. J. HOÛEL.

Extrait du *Giornale di Matematiche*, t. VI, 1868.

Dans ces derniers temps, le public mathématicien a commencé à s'occuper de nouvelles idées, qui semblent destinées à modifier profondément les notions que l'on s'est formées jusqu'à présent sur l'origine des vérités géométriques.

Ces idées ne sont pas de date récente. L'illustre Gauss les avait adoptées dès ses premiers pas dans la carrière scientifique, et bien qu'aucun de ses écrits n'en contienne l'exposition développée, ses lettres nous montrent à quel point il s'y était attaché, et nous témoignent de sa pleine adhésion à la doctrine de Lobatchefsky.

Nous avons cherché à nous rendre compte à nous-même des résultats auxquels conduit cette nouvelle doctrine; et, suivant un procédé qui nous semble tout à fait conforme aux bonnes traditions de l'investiga-

tion scientifique, nous avons essayé de lui trouver une base réelle. Nous croyons y avoir réussi pour la partie planimétrique; mais il nous semble impossible d'y parvenir dans le cas de trois dimensions.

Le présent Mémoire est destiné principalement à développer la première de ces thèses; quant à la seconde, nous nous contenterons pour le moment de quelques indications, pour que l'on puisse mieux juger du sens que nous attachons à notre interprétation.

Pour ne pas interrompre trop souvent la suite de notre exposition, nous avons renvoyé à des Notes spéciales, placées à la fin du Mémoire, les explications relatives à certains résultats analytiques sur lesquels nous devons nous appuyer.

I.

Le critérium fondamental des démonstrations de la Géométrie élémentaire consiste dans la *superposition des figures égales*.

Ce critérium n'est pas seulement applicable au plan, mais aussi à toutes les surfaces sur lesquelles il peut exister des figures égales dans différentes positions, c'est-à-dire à toutes les surfaces dont une portion quelconque peut être appliquée exactement, par simple flexion, sur une autre portion quelconque de la surface elle-même. On voit, en effet, que la rigidité des surfaces sur lesquelles les figures sont tracées, n'est pas une condition essentielle de l'application de ce critérium; par exemple, l'exactitude des démonstrations de la Géométrie plane euclidienne ne serait en rien altérée, si l'on venait à concevoir les figures comme tracées sur la surface d'un cylindre ou d'un cône, au lieu de l'être sur un plan.

Les surfaces pour lesquelles se vérifie sans restriction la propriété dont il s'agit, sont, en vertu d'un théorème célèbre de Gauss, toutes celles qui ont en chacun de leurs points le produit de leurs deux rayons de courbure principaux constant, ou, en d'autres termes, toutes celles dont la mesure de courbure est constante. Les autres surfaces n'admettent pas sans restriction l'application du principe de superposition pour la comparaison des figures qui y sont tracées, et, par suite, ces figures ne peuvent avoir une structure entièrement indépendante de leur position.

L'élément le plus essentiel des figures et des constructions de la Géométrie est la ligne droite. Le caractère spécifique de cette ligne est d'être complètement déterminée par deux de ses points seulement, en sorte que deux droites ne peuvent passer par deux points donnés de l'espace sans coïncider dans toute leur étendue. Cependant, dans la Géométrie plane, ce caractère n'est pas employé dans toute son extension, puisque, en regardant les choses de près, on voit que la droite n'est introduite dans les considérations de la Planimétrie qu'en vertu du *postulat* suivant : « En faisant coïncider deux plans, sur chacun desquels existe une droite, il suffit que les deux droites se superposent en deux points pour qu'elles se confondent dans toute leur étendue. »

Or ce caractère, ainsi limité, n'est pas particulier aux lignes droites par rapport au plan ; il subsiste encore (en général) pour les lignes géodésiques d'une surface de courbure constante, par rapport à ces surfaces. Une ligne géodésique a déjà sur une surface quelconque la propriété d'être (généralement parlant) déterminée sans ambiguïté par deux de ses points. Mais pour les surfaces de courbure constante, et pour elles seules, subsiste intégralement la propriété analogue à celle de la droite dans le plan, c'est-à-dire que : « Si l'on a deux surfaces dont la courbure soit constante en chaque point, et égale pour les deux surfaces, et si sur chacune d'elles existe une ligne géodésique, en faisant coïncider les deux surfaces de manière que les lignes géodésiques aient deux points communs, ces lignes coïncideront (généralement) dans toute leur étendue. »

Il s'ensuit de là que, sauf les cas dans lesquels cette propriété est sujette à des exceptions, les théorèmes que la Planimétrie démontre, au moyen du principe de superposition et du postulat de la droite, pour les figures formées sur le plan, subsistent également pour les figures formées d'une manière analogue sur une surface de courbure constante par des lignes géodésiques.

C'est sur cela que sont fondées les analogies multiples de la Géométrie de la sphère avec celle du plan, les droites de celui-ci correspondant aux lignes géodésiques, c'est-à-dire aux grands cercles de celle-là, et ces analogies ont été depuis longtemps déjà remarquées par les géomètres. Si d'autres analogies, d'espèce différente, mais de même origine, n'ont pas été pareillement remarquées tout d'abord, il faut l'at-

tribuer à ce que la notion de surfaces flexibles et applicables les unes sur les autres n'est devenue familière que dans ces derniers temps.

Nous avons fait allusion à des exceptions qui peuvent détruire ou restreindre l'analogie en question. Ces exceptions existent réellement. Sur la surface sphérique, par exemple, deux points cessent de déterminer un grand cercle sans ambiguïté, quand ils sont diamétralement opposés. C'est pour cette raison que certains théorèmes de la Planimétrie n'ont pas leurs analogues sur la sphère, comme, par exemple, le suivant : « Deux droites perpendiculaires à une troisième ne peuvent se rencontrer. »

Ces réflexions ont été le point de départ de nos recherches actuelles. Nous avons commencé par remarquer que les conséquences d'une démonstration embrassent nécessairement la catégorie entière des êtres dans lesquels existent toutes les conditions nécessaires pour sa légitimité. Si la démonstration a été conçue en vue d'une catégorie déterminée d'êtres, sans que l'on y ait effectivement introduit les déterminations qui particularisent la catégorie elle-même vis-à-vis d'une catégorie plus étendue, il est clair que les conséquences de la démonstration acquièrent une généralité plus grande que celle que l'on cherchait. Dans ce cas, il peut très-bien arriver que quelques-unes de ces conséquences semblent inconciliables avec la nature des êtres que l'on a eus spécialement en vue, d'autant que certaines propriétés, qui subsistent généralement pour une catégorie donnée d'êtres, peuvent se modifier notablement, ou même disparaître tout à fait, pour quelques-uns de ces êtres en particulier. S'il en est ainsi, les résultats des recherches auxquelles on s'est livré présentent des contradictions apparentes, que l'esprit ne peut comprendre, s'il ne commence par s'apercevoir de la trop grande généralité de la base de son investigation.

Cela dit, considérons les démonstrations de la Planimétrie qui se fondent uniquement sur l'usage du principe de superposition et sur le postulat de la droite, telles que sont précisément celles de la Planimétrie non euclidienne. Les résultats de ces démonstrations subsistent sans restriction dans tous les cas pour lesquels subsistent ce principe et ce postulat. Ces cas sont nécessairement tous compris, d'après ce qu'on a vu, dans la doctrine des surfaces de courbure constante; mais ils ne peuvent se vérifier que pour celles de ces surfaces dans lesquelles au-

cune exception n'a lieu aux hypothèses de ces démonstrations. L'existence du principe de superposition ne souffre d'exception pour aucune de ces surfaces. Mais pour ce qui regarde le postulat de la droite (ou pour mieux dire, de la ligne géodésique), nous avons déjà remarqué qu'il se rencontre des exceptions sur la sphère, et par conséquent sur toutes les surfaces de courbure constante positive. Maintenant ces exceptions existent-elles aussi sur les surfaces de courbure constante négative? En d'autres termes, peut-il arriver, sur ces dernières surfaces, que deux points ne déterminent pas une ligne géodésique unique?

Cette question n'a pas été examinée, que je sache. Si l'on peut prouver que de telles exceptions ne sont pas possibles, il devient évident *a priori* que les théorèmes de la Planimétrie non euclidienne subsistent sans restriction pour toutes les surfaces de courbure constante négative. Alors certains résultats qui semblaient incompatibles avec l'hypothèse du plan peuvent devenir conciliables avec celle d'une surface de l'espèce en question, et recevoir par là une explication non moins simple que satisfaisante. En même temps, les déterminations qui produisent le passage de la Planimétrie non euclidienne à la Planimétrie euclidienne peuvent s'expliquer avec celles qui spécifient les surfaces de courbure nulle dans la série des surfaces de courbure constante négative.

Telles sont les considérations qui nous ont servi de guides dans les recherches suivantes.

II.

La formule

$$(1) \quad ds^2 = R^2 \frac{(a^2 - v^2) du^2 + 2uv du dv + (a^2 - u^2) dv^2}{(a^2 - u^2 - v^2)^2}$$

représente le carré de l'élément linéaire d'une surface dont la courbure sphérique est partout constante, négative et égale à $-\frac{1}{R^2}$. La forme de cette expression, bien que moins simple que celles d'autres expressions équivalentes, que l'on pourrait obtenir en introduisant d'autres variables, a l'avantage particulier (très-important pour notre but actuel), que toute équation linéaire par rapport à u et à v représente une ligne géodésique, et que, réciproquement, toute ligne géodésique est

représentée par une équation linéaire entre ces variables. (Voyez la Note I à la fin de cet article.)

En particulier aussi les deux systèmes coordonnés

$$u = \text{const.}, \quad v = \text{const.}$$

sont formés de lignes géodésiques dont il est facile de reconnaître la disposition mutuelle. En appelant, en effet, θ l'angle des deux courbes coordonnées au point (u, v) , on a

$$(2) \quad \cos \theta = \frac{uv}{\sqrt{(a^2 - u^2)(a^2 - v^2)}}, \quad \sin \theta = \frac{a\sqrt{a^2 - u^2 - v^2}}{\sqrt{(a^2 - u^2)(a^2 - v^2)}},$$

d'où l'on tire $\theta = \frac{\pi}{2}$, tant pour $u = 0$ que pour $v = 0$. Donc les lignes géodésiques formant le système $u = \text{const.}$ sont toutes orthogonales à la ligne géodésique $v = 0$ de l'autre système, et les lignes géodésiques du système $v = \text{const.}$ sont toutes orthogonales à la ligne géodésique $u = 0$ de l'autre système. Cela revient à dire que, au point $u = v = 0$, concourent deux lignes géodésiques orthogonales entre elles

$$u = 0, \quad v = 0,$$

que nous appellerons *fondamentales*, et chaque point de la surface est déterminé comme intersection de deux lignes géodésiques menées par ce point perpendiculairement aux deux lignes fondamentales : ce qui constitue évidemment une généralisation de la méthode cartésienne ordinaire.

Les formules (2) font voir que les valeurs admissibles pour les variables u, v sont limitées par la relation

$$(3) \quad u^2 + v^2 \leq a^2.$$

Entre ces limites, les fonctions E, F, G sont réelles, monodromes, continues et finies, et, de plus, les quantités E, G, $EG - F^2$ sont positives et différentes de zéro. Donc, d'après ce que nous avons établi au commencement du Mémoire *Sur les variables complexes dans une surface quelconque* (*), la portion de surface terminée au contour qui a pour équation

$$(4) \quad u^2 + v^2 = a^2$$

(*) *Annali di Matematica*, 2^e série, t. I.

est simplement connexe, et le réseau formé sur cette portion par les lignes géodésiques coordonnées présente autour de chaque point le caractère de celui qui est formé par deux systèmes de droites parallèles sur un plan; c'est-à-dire que deux lignes géodésiques de même système n'ont jamais aucun point commun, et deux lignes géodésiques de système différent ne sont jamais tangentes entre elles. Il s'ensuit de là que, sur la région considérée, à chaque couple de valeurs réelles de u, v satisfaisant à la condition (3) correspond un point réel, unique et déterminé; et réciproquement, à chaque point correspond un couple unique et déterminé de valeurs réelles de u, v satisfaisant à la condition en question.

Si donc nous désignons par x, y les coordonnées rectangulaires des points d'un plan auxiliaire, les équations

$$x = u, \quad y = v$$

établissent une représentation de la région considérée, représentation dans laquelle à chaque point de cette région correspond un point unique et déterminé du plan, et réciproquement; et toute la région se trouve représentée à l'intérieur d'un cercle de rayon a , ayant pour centre l'origine des coordonnées, et que nous appellerons *cercle-limite*. Dans cette représentation, aux lignes géodésiques de la surface correspondent les cordes du cercle-limite, et, en particulier, aux lignes géodésiques coordonnées correspondent les lignes parallèles aux deux axes coordonnés.

Voyons maintenant comment est limitée, sur la surface, la région à laquelle s'appliquent les considérations précédentes.

Une ligne géodésique issue du point ($u = 0, v = 0$) peut être représentée par les équations

$$(5) \quad u = r \cos \mu, \quad v = r \sin \mu,$$

r et μ étant les coordonnées polaires du point correspondant au point (u, v) de la droite qui représente (sur le plan auxiliaire) la ligne géodésique considérée. Pour de telles valeurs, on tire de (1), μ étant constant,

$$d\rho = R \frac{adr}{a^2 - r^2}, \quad \text{d'où} \quad \rho = \frac{R}{2} \log \frac{a+r}{a-r},$$

ρ étant l'arc de la ligne géodésique, compté à partir du point ($u = v = 0$).
On peut encore écrire

$$(6) \quad \rho = \frac{R}{2} \log \frac{a + \sqrt{u^2 + v^2}}{a - \sqrt{u^2 + v^2}},$$

u, v étant les coordonnées de la seconde extrémité de l'arc ρ . Le radical $\sqrt{u^2 + v^2}$ doit être pris ici positivement, si l'on veut obtenir la valeur absolue de la distance ρ .

Cette valeur est nulle pour $r = 0$; elle va en croissant indéfiniment, lorsqu'on fait croître r ou $\sqrt{u^2 + v^2}$ depuis 0 jusqu'à a ; elle devient infinie pour $r = a$, c'est-à-dire pour les valeurs de u, v qui satisfont à l'équation (4), et elle est imaginaire quand $r > a$. Il est donc clair que le contour exprimé par l'équation (4), et représenté sur le plan auxiliaire par le cercle-limite, n'est autre chose que le lieu des points à l'infini de la surface, lieu qui peut être considéré comme un cercle géodésique ayant pour centre le point ($u = v = 0$), et dont le rayon (géodésique) est infini. Au delà de ce cercle géodésique de rayon infini, il n'existe plus que les régions imaginaires ou idéales de la surface, de sorte que la région considérée ci-dessus s'étend indéfiniment, et d'une manière continue dans tous les sens, et embrasse la totalité des points réels de la surface. Ainsi à l'intérieur du cercle limite se trouve représentée toute la région réelle de notre surface, et cela de telle sorte que, tandis que le même cercle-limite correspond à la ligne de ses points à l'infini, les cercles concentriques et intérieurs au cercle-limite correspondent aux cercles géodésiques de la surface ayant leur centre au point ($u = v = 0$).

Si dans les équations (5) on regarde r comme constant, μ comme variable, ces équations conviennent à un cercle géodésique, et la formule (1) donne

$$(7) \quad \sigma = \frac{R r \mu}{\sqrt{a^2 - r^2}},$$

σ étant l'arc de cercle géodésique représenté sur le plan auxiliaire par l'arc de cercle dont r est le rayon, et μ l'angle au centre. σ étant proportionnel à μ , quel que soit r , on voit aisément que les lignes géodésiques ρ font entre elles, à l'origine commune, les mêmes angles que les rayons qui leur correspondent sur le plan auxiliaire, et que la portion

de surface infiniment petite qui entoure immédiatement le point ($u = v = 0$) est semblable à sa représentation plane, propriété qui n'a lieu pour aucun autre point.

De l'équation (6) on tire

$$(7') \quad r = \sqrt{u^2 + v^2} = a \operatorname{tanh} \frac{\rho}{R}, \quad \text{et} \quad \cosh \frac{\rho}{R} = \frac{a}{\omega},$$

ω désignant la valeur positive du radical $\sqrt{a^2 - u^2 - v^2}$. En vertu de la valeur précédente de r , l'équation (7) peut s'écrire

$$\sigma = \mu R \sinh \frac{\rho}{R},$$

de sorte que le demi-périmètre de la circonférence géodésique de rayon ρ est donné par la formule

$$(8) \quad \pi R \sinh \frac{\rho}{R}, \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2} \pi R \left(e^{\frac{\rho}{R}} - e^{-\frac{\rho}{R}} \right).$$

De ce qui précède il résulte que les lignes géodésiques de la surface sont représentées, dans leur développement total (réel), par les cordes du cercle-limite, tandis que les prolongements de ces cordes en dehors de ce même cercle n'ont aucune représentation (réelle). D'autre part, deux points réels de la surface sont représentés par deux points, également réels, intérieurs au cercle-limite, lesquels déterminent une corde de ce cercle. On voit donc que deux points réels de la surface, choisis d'une manière quelconque, déterminent toujours une ligne géodésique unique, qui est représentée sur le plan auxiliaire par la corde passant par leurs points correspondants.

Ainsi les surfaces de courbure constante négative ne sont pas sujettes aux exceptions qui ont lieu sous ce rapport dans les surfaces de courbure constante positive, et, par suite, on peut leur appliquer les théorèmes de la Planimétrie non euclidienne. Il y a plus, ces théorèmes, en grande partie, ne sont susceptibles d'une interprétation concrète que si on les rapporte précisément à ces surfaces, au lieu du plan, comme nous allons le démontrer tout à l'heure avec détail. Pour éviter les circonlocutions, nous appellerons *pseudosphériques* les surfaces de courbure constante négative, et nous conserverons le nom de *rayon* à la constante R , dont dépend la valeur de leur courbure.

III.

Cherchons premièrement la relation générale qui existe entre l'angle de deux lignes géodésiques et l'angle des cordes qui les représentent.

Soient (u, v) un point d'une surface, (U, V) un point quelconque d'une des lignes géodésiques qui partent du premier point; représentons les équations de deux de ces lignes par

$$V - v = m(U - u), \quad V - v = n(U - u).$$

En appelant α l'angle des lignes géodésiques au point (u, v) , on a, par une formule connue,

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{(n - m)\sqrt{EG - F^2}}{E + (n + m)F + mnG},$$

ou, pour les valeurs actuelles de E, F, G,

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{\alpha(n - m)\omega}{(1 + mn)a^2 - (v - mu)(v - nu)}.$$

En désignant par α' l'angle des deux cordes, et par μ, ν les angles que font ces cordes avec l'axe des x , on a

$$m = \operatorname{tang} \mu, \quad n = \operatorname{tang} \nu, \quad \alpha' = \nu - \mu,$$

et, par suite,

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{a\omega \sin \alpha'}{a^2 \cos \alpha' - (v \cos \mu - u \sin \mu)(v \cos \nu - u \sin \nu)}.$$

Le dénominateur du second membre reste toujours fini en tout point réel de la surface; partant, l'angle α ne peut être nul que lorsque le numérateur est égal à zéro. Mais $\sin \alpha'$ n'est pas nul, puisque les deux cordes se coupent à l'intérieur du cercle limite et ne se confondent pas en une seule droite. Donc α n'est nul que pour $\omega = 0$, c'est-à-dire quand le point de rencontre des deux lignes géodésiques s'en va à l'infini.

On peut donc formuler les règles suivantes :

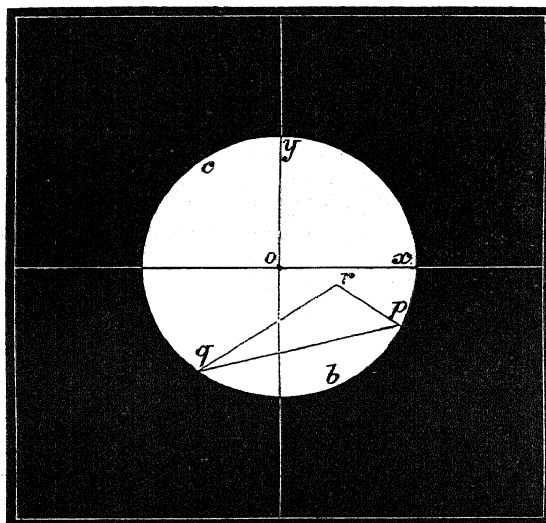
I. A deux cordes distinctes qui se coupent à l'intérieur du cercle-limite correspondent deux lignes géodésiques qui se coupent en un point à une distance finie, sous un angle différent de 0 et de 180 degrés.

II. A deux cordes distinctes qui se coupent sur la circonférence du cercle-limite correspondent deux lignes géodésiques qui concourent vers un même point à une distance infinie, et qui font en ce point un angle nul.

III. Enfin, à deux cordes distinctes qui se coupent hors du cercle-limite, ou qui sont parallèles, correspondent deux lignes géodésiques qui n'ont aucun point commun dans toute l'étendue (réelle) de la surface.

Soient maintenant pq (*fig. 1*) une corde quelconque du cercle-limite,

Fig. 1.



r un point de l'intérieur du cercle, non situé sur la corde. A cette corde correspond sur la surface une ligne géodésique $p'q'$, dirigée vers les points à l'infini p' , q' (correspondants à p , q); au point r correspond un point r' , situé à une distance finie et hors de la ligne géodésique $p'q'$. De ce point on peut tirer une infinité de lignes géodésiques, dont les unes rencontrent la ligne géodésique $p'q'$, et les autres ne la rencontrent pas. Les premières sont représentées par les droites qui vont du point r aux divers points de l'arc pbq (< 180 degrés); les autres sont représentées par les droites qui vont du même point aux divers points de l'arc pcq (> 180 degrés). Deux lignes géodésiques particulières forment le passage de l'une des catégories à l'autre : ce sont

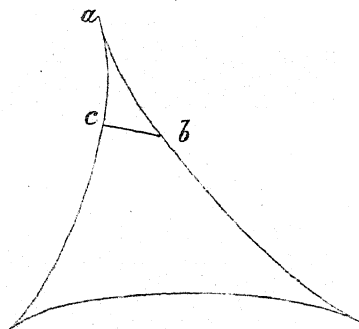
celles qui sont représentées par les droites rp , rq , c'est-à-dire les deux lignes géodésiques qui partent de r' et rencontrent $p'q'$ à l'infini, l'une d'un côté, l'autre de l'autre côté. Comme les angles rectilignes rpq , rqp ont leurs sommets sur la circonférence du cercle-limite, il s'ensuit de là (II) que les angles géodésiques correspondants $r'p'q'$, $r'q'p'$ sont nuls, bien que les premiers soient finis. Au contraire, r étant intérieur au cercle en question, et situé hors de la corde pq , l'angle prq est différent de 0 et de 180 degrés, et par suite (I) les lignes géodésiques correspondantes $r'p'$, $r'q'$ forment en r' un angle qui diffère aussi de 0 et de 180 degrés. Donc si les lignes géodésiques $r'p'$, $r'q'$ sont dites *parallèles* à $p'q'$, à cause qu'elles marquent le passage de la catégorie de celles qui rencontrent $p'q'$ à la catégorie de celles qui ne la rencontrent pas, on peut énoncer le résultat en disant que : « Par un point (réel) quelconque de la surface, on peut toujours mener *deux* lignes géodésiques (réelles), parallèles à une même ligne géodésique (réelle) qui ne passe pas par ce point, et ces deux lignes géodésiques font entre elles un angle qui diffère à la fois de 0 et de 180 degrés. »

Ce résultat s'accorde, sauf la différence des termes employés, avec ce qui forme la base de la géométrie non euclidienne. Pour apercevoir immédiatement, dans la géométrie pseudosphérique, l'interprétation des autres énoncés de la géométrie non euclidienne, considérons un triangle géodésique. On sait que, lorsqu'on étudie des figures tracées sur une surface non développable sur un plan, il est souvent à propos, pour faciliter l'intelligence, de dessiner sur un plan une autre figure, qui, sans être déduite de la première suivant une loi géométrique déterminée, sert toutefois à en *indiquer* approximativement la disposition générale, en reproduisant les relations de situation les plus essentielles. Pour que la figure indicative remplisse cette condition, il faut que toutes les grandeurs, tant linéaires qu'angulaires, de la figure donnée s'y trouvent remplacées par des grandeurs de même espèce respectivement; il faut, en outre, que les longueurs de deux lignes correspondantes, et les sinus de deux angles correspondants aient toujours entre eux un rapport fini; peu importe, d'ailleurs, que ce rapport varie arbitrairement d'une partie de la figure à l'autre, pourvu qu'il ne devienne jamais ni nul ni infini. Il est évident, du reste, qu'avec une telle latitude de choix, il convient de faire en sorte que, dans la figure

indicative, le rapport en question ne s'écarte pas trop d'une certaine valeur moyenne.

Cela posé, si le triangle géodésique dont nous parlions tout à l'heure a tous ses sommets à des distances finies, il est clair qu'un triangle plan quelconque peut lui servir de représentation. Ce triangle plan pourrait être le triangle rectiligne même qui en est la représentation sur le plan auxiliaire, triangle qui serait totalement intérieur au cercle-limite. On pourrait encore, suivant les circonstances, préférer un triangle curviligne, dont les angles seraient, par exemple, égaux à ceux du triangle géodésique. Mais si l'on suppose que les sommets du triangle géodésique aillent en s'éloignant indéfiniment et passent à une distance infinie, il est clair que, tandis que le triangle lui-même continue à être une figure existant sur la surface, et dont tous les points, sauf les sommets, sont à des distances finies, la figure indicative ne saurait être finie dans tous les sens, sans violer quelques-unes des conditions que nous avons formulées. Par exemple, le triangle rectiligne représentant le triangle géodésique sur le plan auxiliaire aurait ses angles finis, tandis que ceux du triangle géodésique seraient nuls. Et un triangle curviligne dont les côtés seraient tangents entre eux aux sommets violerait pareillement les conditions en question, en ce que, si l'on prenait deux points b, c (*fig. 2*) sur les côtés qui se rencontrent en un

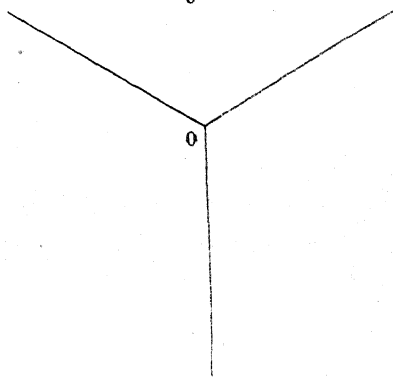
Fig. 2.



sommet a , on obtiendrait des intervalles ab, bc dont le rapport serait fini dans le triangle indicatif, infini dans le triangle géodésique. Pour faire disparaître ce désaccord, il faudrait que tous les intervalles analogues à bc fussent nuls dans la figure indicative, ce qui ne pourrait

se réaliser qu'en donnant à celle-ci la disposition de la *fig. 3*, où le point O concentre en lui seul la représentation de tous les points situés à distance finie dans le triangle géodésique. Une telle figure pourrait être conçue comme résultant de l'observation du triangle géodésique au moyen d'une lentille douée de la propriété (fictive) de produire

Fig. 3.



un rapetissement infini. En effet, dans une telle hypothèse, tous les intervalles finis apparaîtraient comme nuls, et les intervalles infinis comme finis.

Cela s'accorde en substance avec ce que Gauss a remarqué dans sa lettre du 12 juillet 1831 à Schumacher (*), dans laquelle il ajoute encore que le demi-périmètre du cercle non euclidien de rayon ρ a pour valeur

$$\frac{1}{2} \pi k \left(e^{\frac{\rho}{k}} - e^{-\frac{\rho}{k}} \right),$$

k étant une constante. Cette constante, que Gauss dit nous être indiquée par l'expérience comme ayant une valeur très-grande par rapport à tout ce que nous pouvons mesurer, n'est autre chose, suivant notre point de vue actuel, et en vertu de la formule (8), que le rayon de la surface pseudosphérique que nous introduisons à notre insu dans la Planimétrie à la place du plan euclidien, toutes les fois que nos considérations

(*) Voyez l'Appendice à la traduction des *Études géométriques sur la Théorie des Parallèles* de Lobatchefsky, par M. HOÜEL.

s'appuient sur les seules prémisses qui sont vraies à la fois pour le plan et pour les surfaces de la classe en question.

IV.

Si nous voulons maintenant établir d'une manière plus concrète l'accord de la Géométrie pseudosphérique avec la Planimétrie non euclidienne, il est nécessaire d'examiner attentivement l'expression analytique que nous avons employée pour représenter l'élément linéaire de la surface pseudosphérique. Et avant tout envisageons la question suivante : « Les deux lignes géodésiques que nous avons appelées *fondamentales* doivent-elles être choisies de quelque manière particulière, pour que l'élément linéaire ait la forme indiquée ci-dessus ? » Il semblerait, à la vérité, qu'on pût les choisir arbitrairement, puisque, si toute portion de surface est superposable d'une manière quelconque à la surface elle-même, il est clair que deux lignes géodésiques orthogonales quelconques, situées sur cette portion, peuvent être amenées à coïncider avec deux autres quelconques pareillement orthogonales. Comme la question que nous venons de soulever est essentielle pour notre but, nous avons cru convenable d'y consacrer la Note II, dans laquelle, en démontrant directement que les lignes géodésiques fondamentales sont arbitraires, nous prouvons en même temps, sans qu'il soit besoin d'admettre aucunes connaissances préliminaires sur ce sujet, que toute portion de surface est applicable d'une manière quelconque sur la surface elle-même.

En conséquence de ce fait et des raisons déjà exposées, les théorèmes de la Planimétrie non euclidienne, relatifs aux figures planes rectilignes, ont lieu nécessairement aussi pour les figures géodésiques analogues tracées sur la surface pseudosphérique. Telles sont, par exemple, celles des nos 3-10, 16-24, 29-30, etc., de la *Théorie des Parallèles* de Lobatchefsky.

Considérons maintenant les deux lignes géodésiques tirées d'un point donné, parallèlement à une ligne géodésique donnée. Soit δ la longueur de la normale géodésique abaissée de ce point sur cette ligne géodésique. Cette normale divise en deux parties égales l'angle des

deux parallèles. En effet, si l'on détache la bande superficielle comprise entre la ligne géodésique normale, une des parallèles et la moitié correspondante de la ligne géodésique donnée; si on la retourne, et qu'on l'applique de nouveau sur la surface, de manière que la normale coïncide avec elle-même, tandis qu'une moitié de la ligne géodésique donnée se superpose à l'autre moitié, il est clair que la parallèle qui limite la bande doit se superposer à l'autre parallèle, sans quoi par le point donné on pourrait mener plus de deux parallèles à la ligne géodésique donnée. Appelons *angle de parallélisme* l'angle formé par chacune des parallèles avec la normale, et désignons-le par Δ . Pour calculer cet angle, faisons usage de notre analyse habituelle, en plaçant l'origine ($u = v = 0$) au point donné, et dirigeant la ligne géodésique fondamentale $v = 0$ normalement à la ligne géodésique donnée, de telle sorte que cette dernière se trouve représentée par l'équation

$$u = a \operatorname{tanh} \frac{\delta}{R},$$

comme on le déduit facilement de la formule (7).

A cette ligne géodésique correspond, dans le plan auxiliaire, une corde perpendiculaire à l'axe des x , coupée en deux parties égales par cet axe, et dont une des extrémités a pour ordonnée la quantité $\frac{a}{\cosh \frac{\delta}{R}}$.

Ce point du cercle-limite détermine le rayon qui a pour équation

$$y = \frac{x}{\sinh \frac{\delta}{R}},$$

et auquel correspond sur la surface une des parallèles considérées; et puisque les angles autour de l'origine sont égaux sur la surface et sur le plan auxiliaire, on doit évidemment avoir

$$(9) \quad \operatorname{tang} \Delta \sinh \frac{\delta}{R} = 1,$$

formule qui contient la relation cherchée entre la distance normale δ et l'angle de parallélisme Δ . Elle coïncide avec celle qui a été trouvée

par M. Battaglini (*). Pour la comparer avec celle de Lobatchefsky, il suffit de l'écrire sous la forme

$$e^{-\frac{\delta}{R}} + 2e^{-\frac{\delta}{R}} \cot \Delta - 1 = 0,$$

et d'en tirer

$$e^{-\frac{\delta}{R}} = \frac{-\cos \Delta \pm 1}{\sin \Delta}.$$

Le signe inférieur est inadmissible, puisque $\frac{\delta}{R}$ est une quantité réelle ; donc

$$\text{tang } \frac{1}{2} \Delta = e^{-\frac{\delta}{R}},$$

ce qui est précisément la formule de Lobatchefsky (**), sauf la différence des symboles, et celle qui provient du choix de l'unité.

En désignant, comme le fait Lobatchefsky (n° 16), par $\Pi(z)$ l'angle de parallélisme relatif à la distance normale z , on a, par l'équation (9),

$$(10) \quad \cosh \frac{z}{R} = \frac{1}{\sin \Pi(z)}, \quad \sinh \frac{z}{R} = \cot \Pi(z).$$

Or, d'après une observation de M. Minding (***), développée par M. Codazzi (****), on sait que les formules ordinaires relatives aux triangles sphériques se changent dans celles qui se rapportent aux triangles géodésiques des surfaces de courbure constante négative, lorsqu'on multiplie par $\sqrt{-1}$ les rapports des côtés au rayon, et qu'on n'altère en rien les angles, ce qui revient à changer les fonctions circulaires des côtés en fonctions hyperboliques. Par exemple, la première formule de la Trigonométrie sphérique

$$\cos \frac{a}{R} = \cos \frac{b}{R} \cos \frac{c}{R} + \sin \frac{b}{R} \sin \frac{c}{R} \cos A$$

(*) *Giornale di Matematiche*, t. V, p. 225. — *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2^e série, t. VII, p. 267.

(**) *Études géométriques*, n° 38.

(***) *Journal de Crelle*, t. XX, p. 325.

(****) *Annales de Tortolini*, 1857, p. 354 et suiv.

devient

$$\cosh \frac{a}{R} = \cosh \frac{b}{R} \cosh \frac{c}{R} - \sinh \frac{b}{R} \sinh \frac{c}{R} \cos A.$$

En introduisant, à la place des côtés a , b , c , les angles de parallélisme correspondants, au moyen des formules (10), cette relation se change dans la suivante,

$$\cos A \cos \Pi(a) \cos \Pi(c) + \frac{\sin \Pi(b) \sin \Pi(c)}{\sin \Pi(a)} = 1,$$

ce qui est une des équations fondamentales de la Planimétrie non euclidienne (*). Les autres s'obtiennent d'une manière analogue (**).

Les résultats précédents nous semblent faire pleinement ressortir la correspondance qui a lieu entre la Planimétrie non euclidienne et la Géométrie pseudosphérique. Pour vérifier la même chose d'un autre point de vue, nous allons encore établir directement, avec notre analyse, le théorème relatif à la somme des trois angles d'un triangle.

Considérons le triangle rectangle formé par la ligne géodésique fondamentale $v = 0$, par une des lignes géodésiques perpendiculaires $u = \text{const.}$, et par la ligne géodésique issue de l'origine sous l'angle μ , et dont l'équation est

$$v = u \operatorname{tang} \mu.$$

Appelons μ' le troisième angle de ce triangle. L'angle qui lui correspond dans le plan auxiliaire est $90^\circ - \mu$, et par suite la relation établie précédemment entre les angles correspondants sur la surface et sur le plan donne

$$\operatorname{tang} \mu' = \frac{a \cos \mu}{a \sin \mu},$$

d'où l'on voit que, quand μ est un angle aigu, il en est de même de μ' . Comme on a $v = u \operatorname{tang} \mu$, cette formule peut s'écrire, en prenant le radical positivement,

$$\operatorname{tang} \mu' = \frac{\sqrt{a^2 \cos^2 \mu - u^2}}{a \sin \mu}, \quad \text{d'où} \quad d\mu' = - \frac{a \sin \mu \cdot u \, du}{(a^2 - u^2) \sqrt{a^2 \cos^2 \mu - u^2}},$$

(*) *Études géométriques*, n° 37.

(**) Le passage inverse de ces équations à celles de la Trigonométrie sphérique a été indiqué par Lobatchefsky (p. 34), mais comme un simple fait analytique.

expression de l'accroissement que reçoit μ' , lorsque, μ restant constant, on déplace le côté de l'angle droit opposé à cet angle. Cela posé, si l'on intègre l'élément superficiel

$$du dv \sqrt{EG - F^2} = R^2 u \frac{du dv}{(a^2 - u^2 - v^2)^{\frac{3}{2}}},$$

par rapport à v , entre $v = 0$ et $v = u \operatorname{tang} \mu$, ce qui donne

$$\frac{R^2 a \sin \mu u du}{(a^2 - u^2) \sqrt{a^2 \cos^2 \mu - u^2}}, \quad \text{ou} \quad -R^2 d\mu',$$

on a l'accroissement que reçoit l'aire du triangle considéré, lorsqu'on déplace le côté de l'angle droit opposé à l'angle μ . En intégrant de nouveau entre $\mu' = 90^\circ - \mu$ et $\mu' = \mu'$ (valeurs dont la première correspond évidemment à $u = 0$), on trouve

$$R^2 \left(\frac{\pi}{2} - \mu - \mu' \right),$$

expression de l'aire totale du triangle rectangle. De cette expression on passe aisément à celle de l'aire d'un triangle géodésique quelconque ABC, en le partageant en deux triangles rectangles par une ligne géodésique menée par un des sommets normalement au côté opposé, et l'on trouve

$$R^2(\pi - A - B - C).$$

Cette expression, devant être positive, montre que la somme des trois angles d'un triangle géodésique quelconque ne peut jamais surpasser 180 degrés. Si cette somme était égale à 180 degrés dans un seul triangle de dimensions finies, il faudrait que l'on eût $R = \infty$, et alors dans tout autre triangle fini on aurait de même $A + B + C = \pi$. Mais pour $R = \infty$ l'équation (9) donne $\Delta = \frac{\pi}{2}$; donc l'angle de parallélisme serait nécessairement droit, et réciproquement. Ce sont là les conclusions auxquelles parvient aussi la Géométrie non euclidienne.

Le triangle formé par une ligne géodésique et par les deux lignes géodésiques menées parallèlement à la première par un point extérieur a deux angles nuls, et le troisième égal à 2Δ ; donc son aire est finie, et donnée par la formule

$$R^2(\pi - 2\Delta),$$

ou, en vertu de l'équation (9),

$$2R^2 \operatorname{arc tang} \left(\sinh \frac{\delta}{R} \right),$$

δ étant la distance du point à la ligne géodésique. Pour R très-grand, cette quantité est à peu près égale à $2\delta R$, et, par suite, infinie pour le plan, comme on sait, mais infinie dans ce cas seulement.

Un triangle géodésique dont les sommets sont tous à l'infini a une aire finie et déterminée, dont la valeur $= \pi R^2$ est indépendante de sa forme.

Un polygone géodésique de n côtés, dont les angles intérieurs sont A, B, C, \dots , a pour aire

$$R^2[(n-2)\pi - A - B - C - \dots].$$

Si le polygone a tous ses sommets à l'infini, son aire, qui ne cesse pas d'être finie, se réduit à $(n-2)\pi R^2$, et est par conséquent indépendante de sa forme.

V.

Passons maintenant à l'étude des courbes que nous avons appelées, d'après l'usage reçu aujourd'hui, des *circonférences géodésiques*.

A la fin de la Note II, nous avons trouvé que la circonférence géodésique ayant pour centre un point quelconque (u_0, v_0) et pour rayon géodésique ρ est représentée par l'équation

$$(11) \quad \frac{a^2 - uu_0 - vv_0}{\sqrt{(a^2 - u^2 - v^2)(a^2 - u_0^2 - v_0^2)}} = \cosh \frac{\rho}{R}.$$

Cette équation générale nous sera utile dans la suite; mais actuellement nous pouvons profiter des simplifications qui résultent de la supposition que l'origine ($u = v = 0$) est placée au centre de la circonférence considérée. En donnant à l'expression de l'élément linéaire (comme dans la Note II) la forme

$$ds^2 = R^2 \frac{\omega^2 (du^2 + dv^2) + (udu + vdv)^2}{\omega^4},$$

et posant

$$u = r \cos \varphi, \quad v = r \sin \varphi,$$

on en déduit immédiatement l'expression équivalente

$$ds^2 = R^2 \left[\left(\frac{adr}{a^2 - r^2} \right)^2 + \frac{r^2 d\varphi^2}{a^2 - r^2} \right].$$

Mais en appelant ρ la distance géodésique du point (u, v) ou (r, φ) à l'origine, on a, comme on sait,

$$\frac{adr}{a^2 - r^2} = \frac{d\rho}{R}, \quad \frac{r^2}{a^2 - r^2} = \sinh^2 \frac{\rho}{R};$$

donc

$$(12) \quad ds^2 = d\rho^2 + \left(R \sinh \frac{\rho}{R} \right)^2 d\varphi^2,$$

expression déjà connue de l'élément linéaire de la surface pseudosphérique.

Cette expression rentre dans la forme canonique de l'élément linéaire d'une surface de révolution. Mais il faut observer que, dans le cas actuel, on ne pourrait pas appliquer effectivement sur une surface de révolution la calotte pseudosphérique qui entoure le point $(u = v = 0)$, sans altérer la continuité au moyen de quelque section opérée dans cette calotte à partir de ce même point. En effet, la surface de révolution supposée, si elle existait sans cette condition, rencontrerait son propre axe au centre commun $(\rho = 0)$ de toutes les circonférences géodésiques $\rho = \text{const.}$, et aurait par suite en ce point ses deux courbures de même sens, ce qui est impossible, puisqu'une surface pseudosphérique a tous ses points *hyperboliques*. La même impossibilité résulte de la considération de cette circonstance, que, si l'on ne voulait pas exécuter la section dont nous venons de parler, la variable φ représenterait la longitude du méridien variable, et, partant, le rayon du parallèle correspondant à l'arc méridien serait $R \sinh \frac{\rho}{R}$. La variation de ce rayon serait par conséquent $= \cosh \frac{\rho}{R} d\rho$, c'est-à-dire $> d\rho$, ce qui est absurde, puisque la variation en question est égale à la projection de $d\rho$ sur le plan du parallèle.

L'expression (12) de l'élément linéaire, bien que privée des avantages inhérents à l'usage de nos variables u, v , peut être parfois utile

à cause de sa simplicité. Elle se prête, par exemple, à la détermination de la courbure tangentielle des circonférences géodésiques, laquelle, dans la circonférence de rayon ρ , a pour valeur $\frac{1}{R \operatorname{tanh} \frac{\rho}{R}}$; cette

courbure est donc constante tout le long de la périphérie du cercle géodésique, et ne dépend que du rayon. Cette propriété peut encore s'apercevoir *a priori*, en observant que la portion de surface terminée par un cercle géodésique peut s'appliquer d'une manière quelconque sur la surface elle-même, sans que son contour cesse jamais d'être un cercle géodésique ayant son centre au point où est venu s'appliquer son centre primitif.

Le théorème que « les lignes géodésiques élevées normalement sur » les milieux des cordes d'une circonférence géodésique concourent » toutes en son centre, » se démontre comme le théorème correspondant de la Planimétrie ordinaire, et l'on en conclut que la construction du centre de la circonférence passant par trois points non situés sur une même ligne géodésique est tout à fait analogue à la construction ordinaire, en sorte que cette circonférence est toujours unique et déterminée.

Mais ici se présente une difficulté. Trois points de la surface étant choisis arbitrairement, il peut arriver que les lignes géodésiques perpendiculaires sur les milieux des lignes de jonction ne se coupent en aucun point *réel* de la surface; et par suite, si l'on restreint la dénomination de *circonférences géodésiques* aux courbes décrites par l'extrémité d'un arc géodésique invariable qui tourne autour d'un point *réel* de la surface, il faut nécessairement admettre qu'on ne peut pas toujours faire passer une circonférence géodésique par trois points de la surface choisis d'une manière quelconque. Cela encore est d'accord, *mutatis mutandis*, avec les principes de Lobatchefsky (*).

Néanmoins, puisque les lignes géodésiques de la surface sont toujours représentées par les cordes du cercle-limite, si plusieurs cordes sont telles que, prolongées, elles se rencontrent en un point extérieur au cercle, il est permis de regarder les lignes géodésiques correspon-

(*) *Études géométriques*, n° 29.

dantes comme ayant un point *idéal* commun, et leurs trajectoires orthogonales comme quelque chose d'analogue aux circonférences géodésiques proprement dites.

Cherchons directement l'équation de ces trajectoires.

L'équation

$$v - v_0 = k(u - u_0)$$

représente le système des lignes géodésiques issues du point (u_0, v_0) , réel ou idéal, suivant que $u_0^2 + v_0^2$ est plus petit ou plus grand que a^2 . L'équation différentielle de ce système est

$$\frac{du}{u - u_0} = \frac{dv}{v - v_0}$$

et, par suite, celle du système orthogonal sera

$$[E(u - u_0) + F(v - v_0)] du + [F(u - u_0) + G(v - v_0)] dv = 0,$$

c'est-à-dire, pour les valeurs actuelles de E, F, G,

$$d \frac{a^2 - uu_0 - vv_0}{\sqrt{a^2 - u^2 - v^2}} = 0.$$

Donc

$$(13) \quad \frac{a^2 - uu_0 - vv_0}{\sqrt{a^2 - u^2 - v^2}} = C$$

est l'équation finie des circonférences géodésiques conçues dans le sens le plus général, c'est-à-dire, quel qu'en soit le centre (u_0, v_0) , réel ou idéal.

Quand ce centre est réel, sa distance à la courbe est constante, en vertu d'un théorème bien connu; et en effet, si l'on désigne par ρ cette distance, on a, par comparaison avec l'équation (11),

$$\cosh \frac{\rho}{R} = \frac{C}{\sqrt{a^2 - u_0^2 - v_0^2}}.$$

Dans ce cas, il est clair que parmi les valeurs admissibles de la constante C n'est pas comprise la valeur zéro, puisque le lieu correspondant à cette hypothèse, étant représenté sur le plan auxiliaire par une

droite extérieure au cercle-limite, tombe tout entier dans les régions idéales de la surface.

Quand, au contraire, le centre est idéal, la notion du rayon géodésique fait défaut; mais la constante C peut recevoir la valeur zéro, puisque l'équation résultante

$$a^2 - uu_0 - vv_0 = 0$$

représente, sur le plan auxiliaire, une corde du cercle-limite, et précisément la polaire du point extérieur (u_0, v_0) . Cette équation définit une ligne géodésique réelle de la surface; on en peut donc conclure que, parmi les circonférences géodésiques en nombre infini qui ont le même centre idéal, il y a toujours une ligne géodésique réelle, et une seule, de sorte que les circonférences géodésiques à centre idéal peuvent aussi se définir comme des courbes parallèles (géodésiquement) aux lignes géodésiques réelles. Cette dernière propriété a été déjà remarquée par M. Battaglini, en des termes différents (*). On voit donc que, tandis que, sur la surface sphérique, les deux idées de *circonférence géodésique* et de *courbe parallèle à une ligne géodésique* se confondent complètement l'une avec l'autre; sur la surface pseudosphérique, au contraire, elles présentent une différence, dépendant de la réalité ou de l'idéalité du centre.

Puisque toute circonférence géodésique à centre idéal est équidistante, en tous ses points, d'une ligne géodésique déterminée, supposons que celle-ci soit la ligne $v = 0$ elle-même, ce qui est toujours permis, et appelons ξ la distance géodésique du point (u, v) à cette ligne fondamentale. Cette distance est mesurée sur une des lignes géodésiques du système $u = \text{const.}$, et est donnée par la formule

$$\xi = \frac{R}{2} \log \frac{\sqrt{a^2 - u^2} + v}{\sqrt{a^2 - u^2} - v}.$$

En supposant ξ constant, on tire de là l'équation entre u et v d'une quelconque des circonférences géodésiques qui ont leur centre au point

(*) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2^e série, t. VII, p. 272.

de concours idéal de toutes les lignes géodésiques normales à la ligne $\nu = 0$.

Appelons η l'arc de la ligne géodésique $\nu = 0$ compris entre l'origine et la normale ξ ; sa valeur est donnée par l'équation

$$\eta = \frac{R}{2} \log \frac{a + u}{a - u}.$$

De ces deux dernières équations, on tire

$$u = a \operatorname{tanh} \frac{\eta}{R}, \quad \nu = \frac{a \operatorname{tanh} \frac{\xi}{R}}{\cosh \frac{\eta}{R}},$$

d'où

$$\nu^2 = a^2 - u^2 - \nu^2 = \frac{a^2}{\cosh^2 \frac{\xi}{R} \cosh^2 \frac{\eta}{R}}.$$

En passant ainsi des variables u, ν aux variables ξ, η , l'expression (1) devient

$$(14) \quad ds^2 = d\xi^2 + \cosh^2 \frac{\xi}{R} d\eta^2,$$

expression qui convient à une surface de révolution.

En désignant par r_0 le rayon du parallèle minimum de cette surface, lequel correspond évidemment à $\xi = 0$, et par r celui du parallèle ξ , on a

$$r = r_0 \cosh \frac{\xi}{R}, \quad \text{et, par suite,} \quad \frac{dr}{d\xi} = \frac{r_0}{R} \sinh \frac{\xi}{R}.$$

Donc la zone de surface pseudosphérique qui peut être réellement transformée en surface de révolution est définie par la condition

$$\left(\frac{r_0}{R} \sinh \frac{\xi}{R} \right)^2 < 1,$$

c'est-à-dire qu'elle est renfermée entre deux circonférences géodésiques équidistantes de la ligne géodésique $\xi = 0$, laquelle se dispose suivant le parallèle minimum. La largeur de cette zone dépend du rayon que l'on veut assigner au parallèle minimum, et est d'autant plus

grande que ce rayon est plus petit. La longueur de la zone est indéfinie, et par suite la zone s'enroule un nombre infini de fois sur la surface de révolution; à cette occasion il faut observer que les points qui se superposent de cette manière les uns aux autres, doivent être toujours considérés comme distincts, sans quoi le théorème, que par deux points de la surface passe une seule ligne géodésique, cesserait d'être vrai. En d'autres termes, on devra concevoir la surface de révolution comme la limite d'un hélicoïde dont le pas converge vers zéro. Les deux parallèles extrêmes ont leur rayon $= \sqrt{R^2 + r_0^2}$, et leurs plans sont tangents circulairement à la surface.

Entre les circonférences géodésiques à centre réel et celles à centre idéal, se trouvent, comme figures intermédiaires, les circonférences géodésiques qui ont leur centre à l'infini; ces circonférences méritent d'être étudiées, à cause de leurs propriétés très-remarquables.

L'équation générale de ces circonférences conserve la forme (13), puisque la méthode qui nous y conduit subsiste pour toutes les positions du centre. Mais si l'on compare cette équation à l'équation (11), dans laquelle la quantité $\sqrt{a^2 - u_0^2 - v_0^2}$ ou ω_0 converge vers zéro quand le centre passe à l'infini, tandis que, dans la même hypothèse, le second membre croît indéfiniment, on voit que le produit $\omega_0 \cosh \frac{\rho}{R}$ tend vers une valeur finie, vers laquelle tend, évidemment, de même le produit $\frac{1}{2} \omega_0 e^{\frac{\rho}{R}}$. Or, si l'on remplace ρ par $\rho' - \rho$, l'équation (11) peut s'écrire

$$\frac{a^2 - uu_0 - vv_0}{\sqrt{a^2 - u^2 - v^2}} = \frac{\omega_0}{2} e^{\frac{\rho'}{R}} e^{-\frac{\rho}{R}} + \frac{\omega_0}{2} e^{-\frac{\rho'}{R}} e^{\frac{\rho}{R}};$$

donc, en laissant ρ fini, et faisant croître ρ' indéfiniment, tandis que ω_0 converge vers zéro, il vient, à la limite,

$$\frac{a^2 - uu_0 - vv_0}{\sqrt{a^2 - u^2 - v^2}} = k e^{-\frac{\rho}{R}},$$

k étant une constante. En représentant de cette manière le système des circonférences géodésiques qui ont leur centre à l'infini au point (u_0, v_0) , le paramètre ρ exprime l'intervalle constant entre une quel-

conque de ces circonférences et une autre d'entre elles considérée comme fixe, et croît positivement à partir de cette dernière vers le centre à l'infini. En faisant $k = a$, la circonférence $\rho = 0$ devient celle qui passe par le point ($u = v = 0$).

Si avec l'équation ainsi obtenue

$$(15) \quad \frac{a^2 - uu_0 - vv_0}{\sqrt{a^2 - u^2 - v^2}} = ae^{-\frac{\rho}{R}},$$

on combine l'équation

$$(16) \quad \frac{u_0 v - uv_0}{a^2 - uu_0 - vv_0} = \frac{\sigma}{R},$$

et que l'on tienne compte de la relation $u_0^2 + v_0^2 = a^2$, on trouve que l'élément linéaire (1) prend la forme

$$(17) \quad ds^2 = d\rho^2 + e^{-\frac{2\rho}{R}} d\sigma^2,$$

forme qui convient encore à une surface de révolution.

En désignant par r_0 le rayon du parallèle $\rho = 0$, dont σ est l'arc, et par r celui du parallèle ρ , il vient

$$r = r_0 e^{-\frac{\rho}{R}},$$

et par suite la surface de révolution n'est réelle que dans l'intervalle des limites déterminées par la relation $\rho > R \log \frac{r_0}{R}$, en sorte que la circonférence $\rho = 0$ ne peut pas devenir réellement un parallèle, si l'on ne prend pas $r_0 \leq R$. Le parallèle maximum a pour rayon R , et correspond à la valeur $\rho = R \log \frac{r_0}{R}$; donc, en déterminant convenablement r_0 , ce parallèle peut être recouvert par une quelconque des circonférences considérées; par exemple, en faisant $r_0 = R$, on a la circonférence initiale elle-même $\rho = 0$. Le parallèle minimum correspond à $\rho = \infty$, et son rayon est nul, de sorte que la surface de révolution s'approche asymptotiquement de son axe d'un seul côté, tandis que de l'autre elle est limitée par le parallèle maximum, avec lequel elle se raccorde tangentiellement. Sur cette surface s'enroule une infinité de fois la surface pseudosphérique, terminée à la ligne $\rho = 0$, si $r_0 = R$.

La courbure tangentielle d'un parallèle quelconque se trouve être $\frac{1}{R}$, c'est-à-dire qu'elle est la même pour tous. Or le rayon de la courbure tangentielle d'un parallèle n'est autre chose que la portion de tangente au méridien comprise entre le point de contact (sur le parallèle considéré) et l'axe. Donc, pour la surface de révolution dont il s'agit, cette portion de tangente est constante; la courbe méridienne est la *ligne connue aux tangentes égales*, et la surface engendrée est celle que l'on regarde ordinairement comme le type des surfaces de courbure constante négative (*).

D'autre part, les circonférences géodésiques dont le centre est à l'infini correspondent évidemment aux *horicycles* de la géométrie de Lobatchefsky (**). En conservant cette dénomination, nous pouvons donc dire qu'un système d'horicycles concentriques se transforme, par une flexion convenable de la surface, dans le système des parallèles de la surface de révolution engendrée par la ligne aux tangentes égales.

Pour avoir une vérification de la correspondance de nos horicycles avec ceux de Lobatchefsky, observons qu'à l'angle dièdre $\frac{\sigma}{R}$ de deux plans méridiens correspondant, sur les parallèles ρ_1 et ρ_2 , les deux arcs s_1 , s_2 , donnés par les équations

$$s_1 = \sigma e^{-\frac{\rho_1}{R}}, \quad s_2 = \sigma e^{-\frac{\rho_2}{R}},$$

d'où, en appelant τ la distance $\rho_2 - \rho_1$, on tire

$$s_2 = s_1 e^{-\frac{\tau}{R}},$$

formule qui coïncide avec celle de Lobatchefsky (n° 33), sauf la différence habituelle dans le choix de l'unité.

L'expression (17) de l'élément linéaire est indépendante des coordonnées (u_0, v_0) du centre des horicycles considérés; de plus, nous avons vu que chacun des horicycles d'un système donné peut prendre la place du maximum. On en peut donc conclure que deux horicycles

(*) LIOUVILLE, Note IV à l'*Analyse appliquée, etc.*, de Monge.

(**) *Études géométriques*, n°s 31 et 32.

quelconques de la surface peuvent toujours être superposés l'un à l'autre.

Par deux points de la surface pseudosphérique passent toujours deux horicycles, qui sont déterminés en menant par le milieu de la ligne géodésique de jonction une ligne géodésique perpendiculaire, dont les deux points à l'infini sont les centres des horicycles cherchés. Les arcs de ces horicycles, compris entre les points donnés, ont une même longueur, laquelle dépend uniquement de la distance géodésique des deux points. En appelant ρ cette distance, et σ la longueur de ces arcs, on trouve aisément, au moyen des équations (15) et (16) (où ρ a toutefois une signification différente),

$$\sigma = 2R \sinh \frac{\rho}{2R},$$

formule qui présente une singulière analogie avec la formule bien connue qui donne l'arc en fonction de la corde dans le cercle de rayon R (*).

VI.

Ce qui précède nous semble confirmer de tout point l'interprétation annoncée de la Planimétrie non euclidienne au moyen des surfaces de courbure constante négative.

La nature même de cette interprétation laisse facilement prévoir qu'il ne peut y avoir d'interprétation analogue, également réelle, pour la Stéréométrie non euclidienne. En effet, pour obtenir l'interprétation que nous venons d'exposer, il a fallu substituer au plan une surface irréductible au plan, c'est-à-dire dont l'élément linéaire ne peut en aucune manière se réduire à la forme

$$\sqrt{dx^2 + dy^2},$$

qui caractérise essentiellement le plan lui-même. Si donc il nous manquait la notion des surfaces non applicables sur le plan, il nous serait impossible d'attribuer une véritable signification géométrique à la con-

(*) Voyez BATTAGLINI, *loc. cit.*, p. 273, et aussi une Note que nous avons publiée dans les *Annali di Matematica*, t. VI, 1865, p. 271.

struction développée jusqu'ici. Or l'analogie porte naturellement à croire que, s'il peut exister une construction analogue pour la Stéréométrie non euclidienne, cette construction doit se tirer de la considération d'un espace dont l'élément linéaire *ne soit pas* réductible à la forme

$$\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2},$$

qui caractérise essentiellement l'espace euclidien. Et puisque jusqu'à présent la notion d'un espace différent de celui-là semble nous manquer, ou du moins semble dépasser le domaine de la Géométrie ordinaire, il est raisonnable de supposer que, lors même que les considérations analytiques sur lesquelles s'appuient les constructions précédentes seraient susceptibles d'être étendues du champ de deux variables à celui de trois, les résultats obtenus dans ce dernier cas ne pourraient toutefois être construits par la Géométrie ordinaire.

Cette conjecture acquiert un degré de probabilité très-voisin de la certitude, quand on entreprend effectivement d'étendre l'analyse précédente au cas de trois variables. Si l'on pose, en effet,

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} ds^2 = \frac{R^2}{(a^2 - t^2 - u^2 - v^2)^2} [& (a^2 - u^2 - v^2) dt^2 + (a^2 - v^2 - t^2) du^2 \\ & + (a^2 - t^2 - u^2) dv^2 + 2uv du dv \\ & + 2vt dv dt + 2tu dt du], \end{aligned} \right.$$

formule dont la composition *a priori* au moyen des trois variables t, u, v est suggérée par l'inspection de celle de la formule (1) au moyen des deux variables u, v ; il est facile de s'assurer que les déductions analytiques auxquelles l'expression (1) donnait lieu subsistent intégralement pour la nouvelle expression, et que la valeur de ds donnée par celle-ci est effectivement celle de l'élément linéaire d'un espace dans lequel la Stéréométrie non euclidienne trouve une interprétation aussi complète, *analytiquement* parlant, que celle qui a été donnée pour la Planimétrie.

Mais si aux variables t, u, v on en substitue trois nouvelles ρ, ρ_1, ρ_2 , en posant

$$t = r \cos \rho_1, \quad u = r \sin \rho_1 \cos \rho_2, \quad v = r \sin \rho_1 \sin \rho_2,$$

$$\frac{R a dr}{a^2 - r^2} = d\rho,$$

il vient

$$ds^2 = d\rho^2 + \left(R \sinh \frac{\rho}{R} \right)^2 (d\rho_1^2 + \sin^2 \rho_1 d\rho_2^2),$$

formule qui montre que ρ , ρ_1 , ρ_2 sont des coordonnées curvilignes orthogonales de l'espace considéré.

Or M. Lamé a démontré (*) qu'en prenant comme coordonnées curvilignes des points de l'espace les paramètres ρ , ρ_1 , ρ_2 de trois familles de surfaces orthogonales, auquel cas le carré de la distance de deux points infiniment voisins est représenté par une expression de la forme

$$ds^2 = H^2 d\rho^2 + H_1^2 d\rho_1^2 + H_2^2 d\rho_2^2,$$

les trois fonctions H , H_1 , H_2 de ρ , ρ_1 , ρ_2 , qui figurent dans cette expression, sont nécessairement assujetties à satisfaire à deux systèmes distincts, chacun de trois équations aux dérivées partielles, qui ont pour types les deux équations suivantes :

$$\frac{d^2 H}{d\rho_1 d\rho_2} = \frac{1}{H_1} \frac{dH}{d\rho_1} \frac{dH_1}{d\rho_2} + \frac{1}{H_2} \frac{dH}{d\rho_2} \frac{dH_2}{d\rho_1},$$

$$\frac{d}{d\rho_1} \left(\frac{1}{H_1} \frac{dH_2}{d\rho_1} \right) + \frac{d}{d\rho_2} \left(\frac{1}{H_2} \frac{dH_1}{d\rho_2} \right) + \frac{1}{H^2} \frac{dH_1}{d\rho} \frac{dH_2}{d\rho} = 0.$$

Dans le cas actuel,

$$H = 1, \quad H_1 = R \sinh \frac{\rho}{R}, \quad H_2 = R \sinh \frac{\rho}{R} \sin \rho_1,$$

et pour ces valeurs les trois premières équations sont identiquement satisfaites; mais les trois dernières ne le sont que dans le cas de $R = \infty$. Donc l'expression (18) ne peut appartenir à l'élément linéaire de l'espace euclidien ordinaire, et les formules fondées sur cette expression ne peuvent être construites au moyen des figures que nous présente la Géométrie ordinaire.

Pour compléter la démonstration de l'impossibilité d'obtenir une construction de la Stéréométrie non euclidienne sans sortir du champ de la Géométrie ordinaire, il faudrait pouvoir exclure la possibilité d'y arriver autrement que par une extension de la méthode suivie pour la Planimétrie. Nous ne prétendons pas prouver que cela soit absolu-

(*) *Leçons sur les Coordonnées curvilignes*, p. 76 et 78.

ment impossible; nous disons seulement que la chose nous semble très-invraisemblable.

Nous avons dit en passant que l'expression (18) sert de base à une interprétation analytique complète de la Stéréométrie non euclidienne. Cette interprétation sera exposée dans un autre Mémoire (*). Ici nous ferons observer seulement qu'en faisant dans la formule (18) $t = \text{const.}$, on obtient l'expression de l'élément linéaire d'une surface réelle de courbure constante négative; de sorte que cette surface, sur laquelle nous avons vu se vérifier les théorèmes de la Planimétrie non euclidienne, peut être considérée comme existant à la fois dans l'espace ordinaire et dans l'espace non euclidien.

NOTE I.

La réduction de l'élément linéaire d'une surface de courbure constante négative à la forme que nous avons employée dans les recherches précédentes, est fondée sur les résultats d'un Mémoire que nous avons publié dans le tome VII des *Annali di Matematica* (Rome, 1866), et qui a pour titre : « Ré-
» solution du problème de reporter les points d'une surface sur un plan, de
» manière que les lignes géodésiques soient représentées par des lignes
» droites. »

Le principe qui nous a servi à résoudre ce problème, est le suivant : Quand on fait correspondre, suivant une loi quelconque, les points d'une surface avec ceux d'un plan, on peut toujours prendre pour les deux variables indépendantes u, v , qui doivent déterminer chaque point de la surface, les coordonnées rectangles elles-mêmes x, y des points correspondants du plan. Cela posé, si la représentation doit être telle, qu'aux lignes géodésiques de la surface correspondent les droites du plan, il faut que l'équation différentielle du second ordre des lignes géodésiques ait pour intégrale complète une équation linéaire entre u et v , et, par suite, il faut que cette équation différentielle se réduise simplement à la suivante

$$du d^2v - dv d^2u = 0.$$

(*) Dans un travail qui doit paraître dans les *Annali di Matematica*, et où les principes les plus généraux de la Géométrie non euclidienne sont considérés indépendamment de leurs relations possibles avec les figures réelles de la Géométrie ordinaire.

Or, de la forme générale de l'équation différentielle en question, on conclut que cela ne peut avoir lieu que lorsque les fonctions E , F , G , servant à former l'élément linéaire

$$ds\sqrt{Edu^2 + 2Fdu\,dv + Gdv^2},$$

satisfont à quatre relations, lesquelles nous apprennent que ce même élément peut toujours être mis sous la forme

$$ds = R \frac{\sqrt{(a^2 + v^2)du^2 - 2uv\,du\,dv + (a^2 + u^2)dv^2}}{a^2 + u^2 + v^2},$$

R et a étant des constantes arbitraires. Pour reconnaître la nature des surfaces contenues dans cette forme, on a calculé l'expression de la courbure sphérique (l'inverse du produit des deux rayons de courbure principaux), et l'on a trouvé pour valeur de cette expression $\frac{1}{R^2}$, d'où l'on a conclu que les surfaces en question ont leur courbure sphérique constante, et par conséquent que de telles surfaces sont les seules qui admettent la représentation plane sous la condition prescrite.

Dans le Mémoire cité, nous avons supposé réelles les constantes R et a , parce que le but en vue duquel nos recherches avaient été entreprises amenait naturellement cette hypothèse. C'est pour cette raison même que nous avons observé que cet élément convient en particulier à une surface sphérique de rayon R , tangente au plan figuratif à l'origine des coordonnées, et représentée sur ce plan à l'aide de la projection centrale; auquel cas les variables u , v sont précisément les coordonnées rectangulaires de la projection du point auquel les variables se rapportent.

Mais comme les valeurs des constantes R et a sont réellement arbitraires, il est permis de les supposer imaginaires, si on le juge à propos. En effet, si l'on change ces constantes en $R\sqrt{-1}$, $a\sqrt{-1}$, l'élément linéaire résultant correspond à une surface de courbure constante négative $-\frac{1}{R^2}$, dont les lignes géodésiques ne cessent pas d'être, comme dans le cas précédent, représentées sur le plan par des lignes droites, et, partant, par des équations linéaires en u et v . C'est de cette manière que l'on passe des formules du Mémoire cité à celles du présent travail. La seule différence essentielle entre les deux cas est que, dans le premier, les variables u , v peuvent prendre toutes les valeurs réelles, tandis que, dans le second, ces variables sont comprises entre certaines limites qu'il est facile d'assigner.

NOTE II.

En écrivant l'expression de l'élément linéaire sous la forme

$$(1) \quad ds^2 = R^2 \frac{\omega^2(du^2 + dv^2) + (u du + v dv)^2}{\omega^4},$$

on voit immédiatement que, pour passer des lignes géodésiques fondamentales primitives à deux autres menées par la même origine et orthogonales entre elles, on doit se servir des formules ordinaires pour la transformation des coordonnées rectangulaires dans le plan, quand l'origine est commune, savoir :

$$u = u' \cos \mu - v' \sin \mu, \quad v = u' \sin \mu + v' \cos \mu,$$

u', v' étant les nouvelles coordonnées, et μ l'angle que la nouvelle ligne fondamentale $v' = 0$ fait avec l'ancienne $v = 0$. En effet, de ces formules on tire

$$u^2 + v^2 = u'^2 + v'^2, \quad du^2 + dv^2 = du'^2 + dv'^2,$$

et, par suite, la formule (1) devient

$$(1') \quad ds^2 = R^2 \frac{\omega'^2(du'^2 + dv'^2) + (u' du' + v' dv')^2}{\omega'^4},$$

en conservant sa forme primitive (*). La longueur d'un arc géodésique issu de l'origine conserve aussi, dans le *second* système, la forme qu'elle avait dans le *premier*, puisqu'elle est donnée par l'équation

$$(2) \quad \rho = \frac{R}{2} \log \frac{a + \sqrt{u'^2 + v'^2}}{a - \sqrt{u'^2 + v'^2}}.$$

Voyons maintenant l'influence d'un changement d'origine.

Pour cela, prenons un point quelconque (u_0, v_0) , et supposons que la ligne

(*) On voit par là que les lignes géodésiques orthogonales à celles qui partent de l'origine sont représentées par les cordes du cercle-limite perpendiculaires aux diamètres qui représentent ces dernières lignes géodésiques. Réciproquement, pour que deux lignes géodésiques se coupant au point (u, v) soient représentées sur le plan auxiliaire par deux droites orthogonales, il faut que l'une ou l'autre de ces lignes géodésiques passe par l'origine ($u = v = 0$), comme on le déduit facilement de la formule donnée dans le texte pour la transformation des angles. Cette propriété devient évidente dans la projection centrale de la sphère.

fondamentale $v' = 0$ du second système passe par ce point; c'est-à-dire, supposons $\cos \mu = \frac{u_0}{r_0}$, $\sin \mu = \frac{v_0}{r_0}$, et, par suite,

$$(3) \quad u = \frac{u_0 u' - v_0 v'}{r_0}, \quad v = \frac{v_0 u' + u_0 v'}{r_0},$$

en faisant $r_0 = \sqrt{u_0^2 + v_0^2}$. De là formons un troisième système de coordonnées u'' , v'' , ayant pour lignes fondamentales la ligne géodésique $v' = 0$, et l'autre ligne géodésique menée normalement à $v' = 0$, par le point (u_0, v_0) .

Traçons par le point quelconque (u', v') une ligne géodésique perpendiculaire à $v' = 0$; désignons par q sa longueur, et par p sa distance à l'origine primitive (mesurée sur la ligne $v = 0$). La formule (2) donne immédiatement

$$(4) \quad p = \frac{R}{2} \log \frac{\alpha + u'}{\alpha - u'},$$

tandis que de la formule (1) on tire aisément, en faisant $du' = 0$,

$$(5) \quad q = \frac{R}{2} \log \frac{\sqrt{\alpha^2 - u'^2} + v'}{\sqrt{\alpha^2 - u'^2} - v'}.$$

La distance géodésique p_0 des deux origines ($u = v = 0$), (u_0, v_0) a pour valeur

$$p_0 = \frac{R}{2} \log \frac{\alpha + r_0}{\alpha - r_0},$$

en sorte que l'arc géodésique compris sur la ligne géodésique fondamentale $v'' = 0$ du troisième système (laquelle est la même que $v' = 0$), entre le point (u_0, v_0) et la normale q , est donné par l'équation

$$(6) \quad p - p_0 = \frac{R}{2} \log \frac{(\alpha + u')(a - r_0)}{(\alpha - u')(a + r_0)}.$$

Mais, en désignant par a_0 la constante analogue à a dans le troisième système, et observant que, dans ce système, les quantités analogues aux quantités p , q du second, sont $p - p_0$ et q , il est clair que, par analogie avec (4) et (5), on doit avoir

$$p - p_0 = \frac{R}{2} \log \frac{a_0 + u''}{a_0 - u''}, \quad q = \frac{R}{2} \log \frac{\sqrt{a_0^2 - u''^2} + v''}{\sqrt{a_0^2 - u''^2} - v''}.$$

Égalant ces expressions aux expressions (6) et (5), on obtient deux relations, d'où l'on tire

$$(7) \quad u'' = \frac{a a_0 (u' - r_0)}{\alpha^2 - r_0 u'}, \quad v'' = \frac{a_0 v_0 v'}{\alpha^2 - r_0 u'}, \quad (a_0 = \sqrt{\alpha^2 - r_0^2}).$$

La constante a_0 reste, à proprement parler, indéterminée, parce qu'on ne peut avoir que des équations entre les rapports $\frac{u'}{a}$, $\frac{v'}{a}$ et les rapports $\frac{u''}{a_0}$, $\frac{v''}{a_0}$. Il semble toutefois convenable de déterminer a_0 par la condition que, pour $u'' = 0$, c'est-à-dire pour $u' = 0$, on ait $v' = v''$, et l'on trouve alors

$$a_0 = \alpha_0 = \sqrt{a^2 - u_0^2 - v_0^2}.$$

En conservant cette valeur, les formules précédentes donnent

$$u' = \frac{a(a_0 r_0 + a u'')}{a a_0 + r_0 u'}, \quad v' = \frac{a a_0 v''}{a a_0 + r_0 u''},$$

et ces valeurs, substituées dans (1'), donnent

$$ds^2 = R^2 \frac{(\alpha_0^2 - v''^2) du''^2 + 2 u'' v'' du'' dv'' + (\alpha_0^2 - u''^2) dv''^2}{(\alpha_0^2 - u''^2 - v''^2)^2}.$$

Donc la translation de l'origine n'altère pas non plus la forme de l'élément linéaire, lequel ne diffère du premier que par la substitution de a_0 au lieu de a , changement qui n'a rien de fondamental.

Pour obtenir enfin un *quatrième* système tout à fait indépendant du premier, remplaçons les deux lignes fondamentales $u'' = 0$, $v'' = 0$ par deux nouvelles lignes géodésiques orthogonales, ayant la même origine (u_0, v_0) , ce qui se fera en posant

$$u'' = u''' \cos \nu - v''' \sin \nu, \quad v'' = u''' \sin \nu + v''' \cos \nu,$$

et nous savons encore qu'une telle substitution ne change en rien la forme de l'élément. On voit donc que la forme admise primitivement pour l'élément linéaire n'est nullement particulière à un système déterminé de lignes géodésiques fondamentales; le point $(u = v = 0)$ peut être, au contraire, un point quelconque de la surface, et la ligne géodésique fondamentale $v = 0$ peut être une quelconque des lignes géodésiques menées par ce point.

En tenant compte des relations trouvées entre les coordonnées des systèmes successifs, et faisant, pour abrégé,

$$p = \frac{a u_0}{a_0 r_0} \cos \nu - \frac{v_0}{r_0} \sin \nu, \quad q = \frac{a v_0}{a_0 r_0} \cos \nu + \frac{u_0}{r_0} \sin \nu, \quad r = \frac{r_0 \cos \nu}{a a_0},$$

$$p_1 = \frac{a u_0}{a_0 r_0} \sin \nu + \frac{v_0}{r_0} \cos \nu, \quad q_1 = \frac{a v_0}{a_0 r_0} \sin \nu - \frac{u_0}{r_0} \cos \nu, \quad r_1 = \frac{r_0 \sin \nu}{a a_0},$$

on trouve les relations finales suivantes, entre les coordonnées u, v et les coordonnées u''', v''' ,

$$u = \frac{u_0 + p u''' - p_1 v'''}{1 + r u''' - r_1 v'''}, \quad v = \frac{v_0 + q u''' - q_1 v'''}{1 + r u''' - r_1 v'''}$$

En considérant u, v , aussi bien que u''', v''' , comme les coordonnées rectangulaires des points correspondants de deux plans, ces formules expriment une dépendance homographique entre les plans eux-mêmes, circonstance dont il a été parlé dans le Mémoire cité dans la Note I.

Si l'on compare l'expression primitive de l'élément linéaire en fonction de u, v , avec l'expression finale en fonction de u''', v''' , on trouve que ces deux expressions peuvent être rendues identiques, en posant

$$\frac{u}{a} = \pm \frac{u'''}{a_0}, \quad \frac{v}{a} = \pm \frac{v'''}{a_0}, \quad \text{ou encore} \quad \frac{u}{a} = \pm \frac{v'''}{a_0}, \quad \frac{v}{a} = \pm \frac{u'''}{a_0},$$

le choix du signe étant arbitraire dans chaque formule. Cela démontre que la surface pseudosphérique, considérée comme flexible et inextensible, peut se superposer à elle-même, de manière qu'un quelconque de ses points (u_0, v_0) vienne occuper la position d'un autre point quelconque ($u = v = 0$), et qu'une quelconque des lignes géodésiques partant du premier point (par exemple, la ligne $v''' = 0$) coïncide dans toute son étendue avec une quelconque des lignes géodésiques partant du second (par exemple, avec $v = 0$). De plus, l'ambiguïté des signes fait voir que la superposition de deux angles géodésiques de même grandeur, formés autour de ces deux points, peut s'opérer aussi bien directement qu'inversement. Par exemple, l'angle droit des lignes géodésiques $u''' = 0, v''' = 0$, peut être appliqué sur celui des lignes $u = 0, v = 0$, soit en faisant coïncider $u''' = 0$ avec $u = 0$, et $v''' = 0$ avec $v = 0$, soit aussi en faisant coïncider $u''' = 0$ avec $v = 0$, et $v''' = 0$ avec $u = 0$. Donc toute portion de surface peut être superposée, tant directement qu'inversement, sur une partie quelconque de la surface elle-même; par conséquent, s'il se trouve sur cette portion une figure (par exemple, un triangle géodésique), celle-ci pourra subir sur la surface tous les déplacements qu'une figure plane peut subir sur son plan, sans jamais cesser d'être égale à elle-même. Naturellement, cette égalité ne doit se rapporter qu'aux longueurs des lignes et à la grandeur des angles, puisque la courbure *absolute* des lignes n'entre point ici en considération (*).

(*) L'égalité *relative* dont il est question serait une égalité *absolute* pour un être dont les conceptions géométriques ne sortiraient pas du champ à deux dimensions de la surface considérée, comme les nôtres ne sortent pas du champ à trois dimensions de l'espace ordinaire.

La propriété que nous venons de démontrer était déjà connue, mais la démonstration précédente nous semble présenter la rigueur qu'exige la nature de notre sujet. Du reste, le théorème de Gauss établit que, si la propriété en question peut appartenir à une surface, cette surface est nécessairement une de celles dont la courbure sphérique est constante.

N'oublions pas de noter un résultat utile, qui se déduit facilement de quelques-unes des formules précédentes. Le cercle géodésique qui a pour centre le point (u_0, v_0) , et pour rayon ρ , est représenté, dans le troisième système, par l'équation

$$u''^2 + v''^2 = a_0^2 \operatorname{tanh}^2 \frac{\rho}{R},$$

comme cela résulte de la formule (5) du texte. Mais, des formules (7) de la présente Note, à cause de $\alpha_0 = \alpha'_0 = \sqrt{a^2 - r_0^2}$, on tire

$$u''^2 + v''^2 = \left(\frac{\alpha_0}{a^2 - r_0 u'} \right)^2 \{ a^2 [(u' - r_0)^2 + v'^2] - (r_0 v')^2 \},$$

et les formules (3) donnent d'ailleurs

$$u' = \frac{u u_0 + v v_0}{r_0}, \quad v' = \frac{u_0 v - u v_0}{r_0},$$

d'où

$$u' - r_0 = \frac{u_0(u - u_0) + v_0(v - v_0)}{r_0}, \quad v' = \frac{u_0(v - v_0) - v_0(u - u_0)}{r_0};$$

donc enfin

$$\frac{a^2 [(u - u_0)^2 + (v - v_0)^2] - (u_0 v - u v_0)^2}{(a^2 - u u_0 - v v_0)^2} = \operatorname{tanh}^2 \frac{\rho}{R}.$$

Cette équation fait connaître la distance géodésique ρ de deux points quelconques (u, v) , (u_0, v_0) . Quand ces points sont infiniment voisins, elle ramène immédiatement à l'expression de l'élément linéaire, d'où nous sommes partis.

En introduisant la fonction \cosh au lieu de tanh , l'équation précédente prend la forme plus élégante

$$\frac{a^2 - u u_0 - v v_0}{\sqrt{(a^2 - u^2 - v^2)(a^2 - u_0^2 - v_0^2)}} = \cosh \frac{\rho}{R}.$$