ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

W. STEKLOFF

# Problème du mouvement d'une masse fluide incompressible de la forme ellipsoïdale les parties s'attirent suivant la loi de Newton

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série*, tome 25 (1908), p. 469-528

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1908_3_25__469_0>

# PROBLÈME DU MOUVEMENT

D'UNE

# MASSE FLUIDE INCOMPRESSIBLE

DE LA

## FORME ELLIPSOÏDALE DONT LES PARTIES S'ATTIRENT

SUIVANT LA LOI DE NEWTON;

PAR M. W. STEKLOFF.

### Introduction.

1. Le problème a été posé par Dirichlet en 1860.

Supposant que les coordonnées $x$, $y$, $z$ de chaque point de la masse fluide soient des fonctions linéaires et homogènes de leurs valeurs initiales $x_0$, $y_0$, $z_0$, correspondant au moment initial $t = 0$, il a déduit les équations générales d'un cas possible du mouvement, où la surface extérieure de la masse fluide incompressible conserve, sous la pression constante, la forme d'un ellipsoïde dont les axes changent, pendant le mouvement, la direction ainsi que leur grandeur.

Dirichlet a découvert et étudié certains cas les plus simples du mouvement; par exemple, le cas où la surface extérieure du liquide conserve toujours la forme d'un ellipsoïde solide de révolution ainsi que le cas où le mouvement se compose de deux mouvements simples : d'un mouvement relatif par rapport à un corps solide ($\mathcal{A}$) et d'un mouvement d'entraînement se réduisant à la rotation du corps (A) autour de l'axe de révolution de l'ellipsoïde.

Un an après, en 1861, Riemann a repris le problème dans son Mémoire connu : *Ein Beitrag zu den Untersuchungen über die Bewegung eines flüssigen gleichartigen Ellipsoïdes* (*Werke*, 1876, Leipzig, p. 168).

Il a employé une méthode différente de celle de Dirichlet, en se servant des équations du mouvement du liquide dans la forme d'Euler, tandis que Dirichlet a pris pour le point de départ de ses recherches les équations de Lagrange.

Riemann décompose le mouvement du liquide en deux mouvements particuliers : 1° en mouvement relatif par rapport aux axes mobiles $\xi$, $\eta$, $\zeta$, qui se tournent autour du centre de l'ellipsoïde, pris pour l'origine commune de coordonnées mobiles $\xi$, $\eta$, $\zeta$ et de coordonnées fixes dans l'espace $x$, $y$, $z$, et 2° en mouvement d'entraînement se réduisant au mouvement du trièdre $\xi$, $\eta$, $\zeta$.

En supposant ensuite que les coordonnées relatives $\xi$, $\eta$, $\zeta$ de chaque point du liquide soient des fonctions homogènes et linéaires de valeurs initiales $x_0$, $y_0$, $z_0$ des coordonnées absolues $x$, $y$, $z$ du point $\xi$, $\eta$, $\zeta$, il obtient, d'une manière artificielle, les équations du mouvement d'une masse fluide ellipsoïdale, qui permettent de déterminer le mouvement intérieur du liquide ainsi que la loi, suivant laquelle les axes de l'ellipsoïde changent leur direction et leur grandeur.

Riemann a étudié ensuite le cas où les demi-axes $a$, $b$, $c$ de l'ellipsoïde restent constants pendant le mouvement; il a indiqué deux cas différents du mouvement de l'espèce considérée et il a énoncé, sans démonstration détaillée, la proposition que ces cas sont les seuls possibles dans l'hypothèse faite sur $a$, $b$ et $c$.

Si nous citons encore, outre ces travaux fondamentaux, les recherches de Dedekind (*Crelle's Journ.*, Bd. LVIII, 1861); Brioschi, *Ibid.*, Bd. LIX) ainsi que celles de MM. Greenhill (*Proceed. of Cambr. philos. Soc.*, t. III et IV) et Basset (*Proceed. of Lond. mathem. Society*, t. XVII) consacrées à l'étude plus détaillée de divers cas particuliers, nous épuisons, si je ne me trompe pas, presque tout le plus essentiel que nous savons, en ce moment, dans la question dont il s'agit.

2. Je me permets, dans le Mémoire qui va suivre, de publier cer-

tains résultats de mes recherches sur ce sujet, qui me semblent nouveaux et non dénués d'intérêt.

Dans le premier Chapitre, j'indique une méthode générale pour déduire les équations du mouvement d'une masse fluide incompressible contenue dans une membrane ellipsoïdale.

En y ajoutant la condition que la pression reste constante en tous les points de cette membrane, on obtient les équations du mouvement d'un ellipsoïde fluide libre sous une forme très commode pour l'étude de diverses questions qui se rattachent au problème de Dirichlet et de Riemann.

En supposant, d'un autre côté, que la membrane se réduit à une cavité appartenant à un corps solide, on en déduit les équations du mouvement d'un corps solide ayant la cavité de la forme ellipsoïdale, remplie par le liquide incompressible, ce qui nous conduit à un problème d'hydrodynamique dont le cas particulier (pour l'ellipsoïde de révolution) a été étudié par M. Joukowsky en 1878.

Moyennant les équations obtenues dans le premier Chapitre, je donne ensuite, dans le Chapitre II, la solution complète du problème suivant :

*Trouver tous les cas possibles du mouvement d'un ellipsoïde fluide lorsqu'il conserve pendant le mouvement la forme d'un ellipsoïde de révolution.*

L'analyse détaillée de ce problème m'a conduit aux cas nouveaux du mouvement non stationnaire, où la surface libre de l'ellipsoïde ne change pas sa forme pendant le mouvement.

Ce résultat ne s'accorde pas avec l'assertion de Riemann que « mit der Beständigkeit der Gestalt notwendig eine Beständigkeit des Bewegungszuständes verbunden ist » (*Werke*, p. 187), énoncée sans aucune restriction.

Ce désaccord et le manque d'analyse détaillée de ce problème chez Riemann m'ont poussé de le reprendre.

Après avoir résolu le problème du mouvement de l'ellipsoïde de révolution (Chap. II), je me borne, dans le Chapitre III, au cas où le produit

$$\delta = (b-c)(c-a)(a-b)$$

est différent de zéro.

Je retrouve, sous cette supposition, le théorème de Riemann qui perd, cependant, son sens, lorsque $\delta$ s'annule, ce qui a lieu toujours dans le cas de l'ellipsoïde de révolution.

Après la discussion plus détaillée de tous les mouvements possibles, où l'ellipsoïde à trois axes inégaux se tourne, comme un corps solide, autour de son centre, je résous ensuite les questions suivantes :

1° Trouver tous les cas possibles, où le mouvement de translation du liquide se réduit à la rotation de l'ellipsoïde, comme s'il était un corps solide, autour d'un de ses axes principaux ;

2° Trouver tous les mouvements possibles, où l'ellipsoïde fluide ne change pas la direction de ses axes pendant le mouvement.

Je termine mes recherches par quelques remarques sur certaines propriétés générales des équations différentielles du problème.

Quant au problème du mouvement d'un corps solide ayant une cavité de la forme ellipsoïdale, remplie par un liquide incompressible, il fera l'objet d'un Mémoire particulier.

## CHAPITRE I.

### ÉQUATIONS DU MOUVEMENT D'UNE MASSE FLUIDE IMCOMPRESSIBLE DE LA FORME ELLIPSOÏDALE DONT LES MOLÉCULES S'ATTIRENT SUIVANT LA LOI DE NEWTON.

1. Envisageons une masse du liquide parfait et incompressible remplissant un domaine (D) de l'espace, limité par une surface (S).

Supposons, pour plus de simplicité, que la densité du liquide soit égale à l'unité.

Désignons par $x$, $y$, $z$ les coordonnées d'un point quelconque $\mu$ du liquide par rapport à un système $(\mathcal{A})$, fixe dans l'espace, par $u$, $v$, $w$ les composantes suivant les axes $x$, $y$, $z$ de la vitesse absolue du point $\mu$, par P la pression du liquide au point $\mu$, par $t$ le temps.

Supposons enfin que les forces, rapportées à l'unité de masse, dérivent d'une fonction $U(x, y, z)$ de forces.

Les équations du mouvement du liquide parfait peuvent s'écrire sous la forme suivante (équations d'Euler) :

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{\partial(\mathrm{P}-\mathrm{U})}{\partial x},\\ \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} &= \frac{\partial(\mathrm{P}-\mathrm{U})}{\partial y},\\ \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} &= \frac{\partial(\mathrm{P}-\mathrm{U})}{\partial z}, \end{aligned}\right.$$

$$(2)\qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

où il faut ajouter encore certaines conditions aux limites dont nous allons parler plus loin.

Si nous posons

$$(3)\qquad \mathrm{V}^2 = u^2 + v^2 + w^2,$$

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z},\\ \omega_2 &= \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x},\\ \omega_3 &= \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}, \end{aligned}\right.$$

les équations (1) deviennent

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial \mathrm{S}}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial t} + \omega_2 w - \omega_3 v,\\ \frac{\partial \mathrm{S}}{\partial y} &= \frac{\partial v}{\partial t} + \omega_3 u - \omega_1 w,\\ \frac{\partial \mathrm{S}}{\partial z} &= \frac{\partial w}{\partial t} + \omega_1 v - \omega_2 u, \end{aligned}\right.$$

où

$$(6)\qquad \mathrm{S} = \mathrm{U} - \mathrm{P} - \frac{\mathrm{V}^2}{2}.$$

Envisageons un trièdre mobile ($\mathfrak{B}$) avec les axes $\xi$, $\eta$, $\zeta$ dont l'origine coïncide avec celle du système fixe ($\mathfrak{A}$).

Désignons par $p$, $q$, $r$ les composantes suivant les axes $\xi$, $\eta$, $\zeta$ de la vitesse angulaire de la rotation du trièdre ($\mathfrak{B}$) autour de l'origine des coordonnées.

Désignons ensuite par $\xi$, $\eta$, $\zeta$ les coordonnées relatives du point

$\mu(x, y, z)$ du liquide, par $u'$, $v'$, $w'$ les composantes suivant les axes $\xi$, $\eta$, $\zeta$ de la vitesse V [l'égalité (3)] du point $\mu$, par $\omega'_1$, $\omega'_2$, $\omega'_3$ les composantes suivant les mêmes axes du tourbillon au point $\mu$ du liquide et, enfin, par

$$\alpha_i, \quad \beta_i, \quad \gamma_i \qquad (i = 1, 2, 3)$$

les cosinus directeurs de trois axes $x$, $y$, $z$ par rapport aux axes mobiles $\xi$, $\eta$, $\zeta$; il est aisé de s'assurer que

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} \omega'_1 &= \frac{\partial w'}{\partial \eta} - \frac{\partial v'}{\partial \zeta}, \\ \omega'_2 &= \frac{\partial u'}{\partial \zeta} - \frac{\partial w'}{\partial \xi}, \\ \omega'_3 &= \frac{\partial v'}{\partial \xi} - \frac{\partial u'}{\partial \eta}. \end{aligned}\right.$$

Posons

$$\mathfrak{M}_x = \omega_2 w - \omega_3 v, \qquad S_x = \frac{\partial S}{\partial x},$$
$$\mathfrak{M}_y = \omega_3 u - \omega_1 w, \qquad S_y = \frac{\partial S}{\partial y},$$
$$\mathfrak{M}_z = \omega_1 v - \omega_2 u, \qquad S_z = \frac{\partial S}{\partial z}.$$

En considérant $\mathfrak{M}_x$, $\mathfrak{M}_y$, $\mathfrak{M}_z$ et $S_x$, $S_y$, $S_z$ comme les projections sur les axes $x$, $y$, $z$ de certains vecteurs $\mathfrak{M}$ et S, et en désignant leurs projections sur les axes $\xi$, $\eta$, $\zeta$ par $\mathfrak{M}$ et S avec les indices correspondants $\xi$, $\eta$, $\zeta$, on trouve

$$S_\xi = \frac{\partial S}{\partial \xi}, \qquad S_\eta = \frac{\partial S}{\partial \eta}, \qquad S_\zeta = \frac{\partial S}{\partial \zeta},$$
$$\mathfrak{M}_\xi = \omega'_2 w' - \omega'_3 v',$$
$$\mathfrak{M}_\eta = \omega'_3 u' - \omega'_1 w',$$
$$\mathfrak{M}_\zeta = \omega'_1 v' - \omega'_2 u'.$$

Quant aux équations (5), elles se remplacent par trois suivantes :

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \xi} &= \frac{\partial u}{\partial t}\alpha_1 + \frac{\partial v}{\partial t}\beta_1 + \frac{\partial w}{\partial t}\gamma_1 + \mathfrak{M}_\xi, \\ \frac{\partial S}{\partial \eta} &= \frac{\partial u}{\partial t}\alpha_2 + \frac{\partial v}{\partial t}\beta_2 + \frac{\partial w}{\partial t}\gamma_2 + \mathfrak{M}_\eta, \\ \frac{\partial S}{\partial \zeta} &= \frac{\partial u}{\partial t}\alpha_3 + \frac{\partial v}{\partial t}\beta_3 + \frac{\partial w}{\partial t}\gamma_3 + \mathfrak{M}_\zeta. \end{aligned}\right.$$

Il ne nous reste qu'à exprimer $u$, $v$, $w$ en $u'$, $v'$, $w'$ et substituer au lieu de $x$, $y$, $z$ leurs expressions en $\xi$, $\eta$, $\zeta$ pour transformer les équations du mouvement aux variables $\xi$, $\eta$, $\zeta$.

On a

$$(9)\quad \begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \left(\frac{\partial u'}{\partial t}\right)\alpha_1 + \left(\frac{\partial v'}{\partial t}\right)\alpha_2 + \left(\frac{\partial w'}{\partial t}\right)\alpha_3 \\ &\quad + [q(w') - r(v')]\alpha_1 + [r(v') - p(w')]\alpha_2 + [p(v') - q(u')]\alpha_3\end{aligned}$$

et encore deux formules analogues pour $\frac{\partial v}{\partial t}$ et $\frac{\partial w}{\partial t}$, où les symboles

$$\left(\frac{\partial u'}{\partial t}\right),\quad \ldots,\quad (u'),\quad \ldots,\quad (w')$$

désignent qu'on considère les fonctions entre les crochets comme fonctions des variables $x$, $y$, $z$.

Les mêmes quantités, exprimées en variables $\xi$, $\eta$, $\zeta$, nous les désignerons simplement par $\frac{\partial u'}{\partial t}$, ..., $u'$, ..., $w'$.

Il est aisé de s'assurer que

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned}&\left(\frac{\partial u'}{\partial t}\right) = \frac{\partial u'}{\partial t} - \frac{\partial u'}{\partial \xi}(q\zeta - r\eta) - \frac{\partial u'}{\partial \eta}(r\xi - p\zeta) - \frac{\partial u'}{\partial \zeta}(p\eta - q\xi), \\ &\qquad \left(\frac{\partial v'}{\partial t}\right) = \frac{\partial v'}{\partial t} - \ldots,\qquad \left(\frac{\partial w'}{\partial t}\right) = \frac{\partial w'}{\partial t} - \ldots.\end{aligned}\right.$$

Les relations (9) donnent

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}\alpha_1 + \frac{\partial v}{\partial t}\beta_1 + \frac{\partial w}{\partial t}\gamma_1 &= \left(\frac{\partial u'}{\partial t}\right) + q(w') - r(v'), \\ \frac{\partial u}{\partial t}\alpha_2 + \frac{\partial v}{\partial t}\beta_2 + \frac{\partial w}{\partial t}\gamma_2 &= \left(\frac{\partial v'}{\partial t}\right) + r(u') - p(w'), \\ \frac{\partial u}{\partial t}\alpha_3 + \frac{\partial v}{\partial t}\beta_3 + \frac{\partial w}{\partial t}\gamma_3 &= \left(\frac{\partial w'}{\partial t}\right) + p(v') - q(u').\end{aligned}$$

Moyennant ces équations et celles de (10), on trouve

$$\begin{aligned}\frac{\partial S}{\partial \xi} &= \frac{\partial u'}{\partial t} - \frac{\partial u'}{\partial \xi}(q\zeta - r\eta) - \frac{\partial u'}{\partial \eta}(r\xi - p\zeta) \\ &\quad - \frac{\partial u'}{\partial \zeta}(p\eta - q\xi) + w'q - v'r + \omega'_2 w' - \omega'_3 v'\end{aligned}$$

et encore deux équations qu'on en déduit par la permutation circulaire des lettres

$$\xi,\quad \eta,\quad \zeta;\qquad u',\quad v',\quad w';\qquad p,\quad q,\quad r$$

et des indices 1, 2, 3.

En remarquant que

$$\frac{\partial u'}{\partial \eta} = \frac{\partial v'}{\partial \xi} - \omega'_3, \qquad \frac{\partial w'}{\partial \zeta} = \frac{\partial w'}{\partial \xi} + \omega'_2,$$

on peut écrire l'équation précédente sous la forme

$$\begin{aligned}\frac{\partial S}{\partial \xi} = \frac{\partial u'}{\partial t} - \frac{\partial u'}{\partial \xi} - (q\zeta - r\eta) - \frac{\partial v'}{\partial \xi}(r\xi - p\zeta) - \frac{\partial w'}{\partial \xi}(p\eta - q\xi)\\ + w'q - v'r + \omega'_2(w' - p\eta + q\xi) - \omega'_3(v' - r\xi + p\zeta),\end{aligned}$$

d'où, en posant

$$(10_1)\qquad T = S + u'(q\zeta - r\eta) + v'(r\xi - p\zeta) + w'(p\eta - q\xi),$$

on tire finalement

$$(11)\qquad \frac{\partial T}{\partial \xi} = \frac{\partial u'}{\partial t} + \omega'_2(w' - p\eta + q\xi) - \omega'_3(v' - r\xi + p\zeta).$$

On trouvera de même

$$(12)\qquad \left\{\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial \eta} &= \frac{\partial v'}{\partial t} + \omega'_3(u' - q\zeta + r\eta) - \omega'_1(w' - p\eta + q\xi),\\ \frac{\partial T}{\partial \zeta} &= \frac{\partial w'}{\partial t} + \omega'_1(v' - r\xi + p\zeta) - \omega'_2(u' - q\zeta + r\eta).\end{aligned}\right.$$

En appliquant enfin la même transformation à l'équation (2), on obtient

$$(13)\qquad \frac{\partial u'}{\partial \xi} + \frac{\partial v'}{\partial \eta} + \frac{\partial w'}{\partial \zeta} = 0.$$

Soit

$$f(\xi, \eta, \zeta, t) = 0$$

l'équation de la surface (S) qui limite la masse fluide.

On doit avoir pour tout point $\xi$, $\eta$, $\zeta$ de cette surface

$$\frac{\partial f}{\partial \xi}\frac{d\xi}{dt}+\frac{\partial f}{\partial \eta}\frac{d\eta}{dt}+\frac{\partial f}{\partial \zeta}\frac{d\zeta}{dt}+\frac{\partial f}{\partial t}=0,$$

ou

$$(14)\quad \frac{\partial f}{\partial \xi}(u'-q\zeta+r\eta)+\frac{\partial f}{\partial \eta}(v'-r\xi+p\zeta)+\frac{\partial f}{\partial \zeta}(w'-p\eta+q\xi)+\frac{\partial f}{\partial t}=0,$$

car

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt}&=u'-q\zeta+r\eta,\\ \frac{d\eta}{dt}&=v'-r\xi+p\zeta,\\ \frac{d\zeta}{dt}&=w'-p\eta+q\xi.\end{aligned}\right.$$

Le problème se ramène à la détermination de quatre fonctions P, $u'$, $v'$, $w'$ de variables indépendantes $\xi$, $\eta$, $\zeta$ et $t$ à l'aide des équations différentielles (11), (12) et (13) jointes à la condition (14) qui doit être satisfaite en tout point $\xi$, $\eta$, $\zeta$ de la surface (S).

Les composantes $u'$, $v'$, $w'$ dépendent des quantités $p$, $q$, $r$ qui déterminent le mouvement du trièdre ($\mathcal{M}$).

Connaissant $u'$, $v'$, $w'$ en fonction de $\xi$, $\eta$, $\zeta$ et $t$, nous obtiendrons, à l'aide de (15), les expressions des composantes suivant les axes $\xi$, $\eta$, $\zeta$ de la vitesse relative, par rapport au trièdre ($\mathcal{M}$), du point $\xi$, $\eta$, $\zeta$ du liquide.

Le mouvement de la masse fluide se compose de deux mouvements suivants : du mouvement relatif par rapport au trièdre mobile ($\mathcal{M}$) et du mouvement d'entraînement se réduisant à la rotation du trièdre ($\mathcal{M}$) autour de l'origine des coordonnées.

Les composantes $u'$, $v'$, $w'$ étant déterminées en fonctions de $\xi$, $\eta$, $\zeta$, $t$, les composantes $p$, $q$, $r$ en fonction de $t$, nous trouverons ensuite $\xi$, $\eta$, $\zeta$ en fonction de $t$ en intégrant le système de trois équations différentielles ordinaires (15).

Pour achever la solution du problème, il ne reste qu'à intégrer les équations connues de Cinématique

$$\frac{d\alpha_1}{dt}=r\alpha_2-q\alpha_3,\qquad \ldots,$$

ce qui donnera les expressions de cosinus directeurs $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i (i=1,2,3)$ en $t$.

Les coordonnées relatives $\xi$, $\eta$, $\zeta$ et cosinus $\alpha_i$, $\beta_i$, $\gamma_i$ étant déterminés, les formules de transformation de coordonnées fourniront enfin les expressions de coordonnées absolues $x$, $y$, $z$ de chaque point du liquide en fonction du temps $t$.

2. Remplaçons maintenant $u'$, $v'$, $w'$, $\omega_1'$, $\omega_2'$, $\omega_3'$ par $u$, $v$, $w$, $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$, en omettant, pour plus de simplicité, l'indice $(')$.

Supposons que $u$, $v$, $w$ soient les fonctions linéaires et homogènes des variables $\xi$, $\eta$, $\zeta$ et posons

$$(16)\qquad \begin{cases} u = \alpha\xi + y_3\eta + x_2\zeta, \\ v = x_3\xi + \beta\eta + y_1\zeta, \\ w = y_2\xi + x_1\eta + \gamma\zeta, \end{cases}$$

d'où

$$\omega_1 = \frac{\partial w}{\partial \eta} - \frac{\partial v}{\partial \zeta} = x_1 - y_1,$$

$$\omega_2 = \frac{\partial u}{\partial \zeta} - \frac{\partial w}{\partial \xi} = x_2 - y_2,$$

$$\omega_3 = \frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta} = x_3 - y_3,$$

$\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $x_i$, $y_i (i=1, 2, 3)$ étant des fonctions d'une seule variable $t$.

Substituant ces expressions de $u$, $v$, $w$ et $\omega_i (i=1, 2, 3)$ dans les équations (11) et (12), on trouve

$$(17)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial T}{\partial \xi} = \mathcal{A}_{11}\xi + \mathcal{A}_{12}\eta + \mathcal{A}_{13}\zeta, \\[2ex] \dfrac{\partial T}{\partial \eta} = \mathcal{A}_{21}\xi + \mathcal{A}_{22}\eta + \mathcal{A}_{23}\zeta, \\[2ex] \dfrac{\partial T}{\partial \zeta} = \mathcal{A}_{31}\xi + \mathcal{A}_{32}\eta + \mathcal{A}_{33}\zeta, \end{cases}$$

où l'on a posé

$$(18)\qquad \begin{cases} \mathcal{A}_{11} = \dfrac{d\alpha}{dt} + (q + y_2)(x_2 - y_2) - (x_3 - r)(x_3 - y_3), \\[2ex] \mathcal{A}_{12} = \dfrac{dy_3}{dt} + (x_1 - p)(x_2 - y_2) - \beta(x_3 - y_3), \\[2ex] \mathcal{A}_{13} = \dfrac{dx_2}{dt} + \gamma(x_2 - y_2) - (y_1 + p)(x_3 - y_3). \end{cases}$$

Quant aux coefficients $\mathcal{A}_{22}$, $\mathcal{A}_{33}$; $\mathcal{A}_{23}$, $\mathcal{A}_{31}$; $\mathcal{A}_{21}$, $\mathcal{A}_{32}$, on déduira leurs expressions des formules écrites par la permutation circulaire des lettres

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma;\quad p,\ q,\ r$$

et des indices 1, 2, 3.

Les équations (17) exigent qu'on ait

$$\mathcal{A}_{23} = \mathcal{A}_{32},\qquad \mathcal{A}_{31} = \mathcal{A}_{13},\qquad \mathcal{A}_{12} = \mathcal{A}_{21} \tag{19}$$

et conduisent à l'intégrale suivante,

$$\mathrm{T} - \mathrm{F} = f(t), \tag{20}$$

où l'on a posé

$$2\mathrm{F} = \mathcal{A}_{11}\xi^2 + \mathcal{A}_{22}\eta^2 + \mathcal{A}_{33}\zeta^2 + 2\mathcal{A}_{23}\zeta\eta + 2\mathcal{A}_{31}\xi\zeta + 2\mathcal{A}_{12}\xi\eta; \tag{21}$$

quant à $f(t)$, c'est une fonction arbitraire de $t$.

Substituant enfin (16) dans (13), on trouve

$$\alpha + \beta + \gamma = 0. \tag{22}$$

3. Transformons maintenant l'équation (20).

On a, eu égard à (6) et ($10_1$),

$$\mathrm{T} = \mathrm{U} - \mathrm{P} - \frac{\mathrm{V}^2}{2} + u(q\zeta - r\eta) + v(r\xi - p\zeta) + w(p\eta - q\xi).$$

Les équations (16) donnent

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{V}^2}{2} &= \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2)\\ &= \frac{\mathfrak{M}_{11}}{2}\xi^2 + \frac{\mathfrak{M}_{22}}{2}\eta^2 + \frac{\mathfrak{M}_{33}}{2}\zeta^2 + \mathfrak{M}_{23}\zeta\eta + \mathfrak{M}_{31}\xi\zeta + \mathfrak{M}_{12}\xi\eta,\end{aligned}$$

où l'on a posé

$$\left\{\begin{aligned}\mathfrak{M}_{11} &= \alpha^2 + x_3^2 + y_2^2, &\quad \mathfrak{M}_{23} &= x_2 y_3 + \beta y_1 + \gamma x_1,\\ \mathfrak{M}_{22} &= y_3^2 + x_1^2 + \beta^2, &\quad \mathfrak{M}_{31} &= \alpha x_2 + x_3 y_1 + \gamma y_2,\\ \mathfrak{M}_{33} &= x_2^2 + y_1^2 + \gamma^2, &\quad \mathfrak{M}_{12} &= \alpha y_3 + \beta x_3 + x_1 y_2.\end{aligned}\right. \tag{23}$$

D'autre part,

$$
\begin{aligned}
& u(q\zeta - r\eta) + v(r\xi - p\zeta) + w(p\eta - q\xi) \\
& \quad = (x_3 r - y_2 q)\xi^2 + (x_1 p - y_3 r)\eta^2 + (x_2 q - y_1 p)\zeta^2 \\
& \qquad + [y_3 q - x_2 r + p(\gamma - \beta)]\eta\zeta \\
& \qquad + [y_1 r - x_3 p + q(\alpha - \gamma)]\zeta\xi + [y_2 p - x_1 q + r(\beta - \alpha)]\xi\eta.
\end{aligned}
$$

On a donc

$$
\begin{aligned}
\mathrm{T} = \mathrm{U} - \mathrm{P} & + \left(\mathfrak{N}_{11} - \frac{\mathfrak{M}_{11}}{2}\right)\xi^2 + \left(\mathfrak{N}_{22} - \frac{\mathfrak{M}_{22}}{2}\right)\eta^2 + \left(\mathfrak{N}_{33} - \frac{\mathfrak{M}_{33}}{2}\right)\zeta^2 \\
& + (\mathfrak{N}_{23} - \mathfrak{M}_{23})\zeta\eta + (\mathfrak{N}_{31} - \mathfrak{M}_{31})\xi\zeta + (\mathfrak{N}_{12} - \mathfrak{M}_{12})\xi\eta,
\end{aligned}
$$

en posant, pour simplifier l'écriture,

$$
(24) \qquad \left\{
\begin{array}{ll}
\mathfrak{N}_{11} = x_3 r - y_2 q, & \mathfrak{N}_{23} = y_3 q - x_2 r + p(\gamma - \beta), \\
\mathfrak{N}_{22} = x_1 p - y_3 r, & \mathfrak{N}_{31} = y_1 r - x_3 p + q(\alpha - \gamma), \\
\mathfrak{N}_{33} = x_2 q - y_1 p, & \mathfrak{N}_{12} = y_2 p - x_1 q + r(\beta - \alpha).
\end{array}
\right.
$$

L'équation (20) peut donc s'écrire comme il suit :

$$
\begin{aligned}
(25) \quad \mathrm{P} = \mathrm{U} - f(t) & + \left(\mathfrak{N}_{11} - \frac{\mathfrak{L}_{11} + \mathfrak{M}_{11}}{2}\right)\xi^2 \\
& + \left(\mathfrak{N}_{22} - \frac{\mathfrak{L}_{22} + \mathfrak{M}_{22}}{2}\right)\eta^2 + \left(\mathfrak{N}_{33} - \frac{\mathfrak{L}_{33} + \mathfrak{M}_{33}}{2}\right)\zeta^2 \\
& + (\mathfrak{N}_{23} - \mathfrak{M}_{23} - \mathfrak{L}_{23})\zeta\eta \\
& + (\mathfrak{N}_{31} - \mathfrak{M}_{31} - \mathfrak{L}_{31})\xi\zeta + (\mathfrak{N}_{12} - \mathfrak{M}_{12} - \mathfrak{L}_{12})\xi\eta.
\end{aligned}
$$

4. Remarquons qu'à tout système de fonctions de $t$

$$\alpha, \quad \beta, \quad \gamma, \qquad x_1, \quad x_2, \quad x_3, \qquad y_1, \quad y_2, \quad y_3; \qquad p, \quad q \quad \text{et} \quad r,$$

satisfaisant aux équations (19), (22) et à la condition

$$
\begin{aligned}
(26) \qquad & \frac{\partial f}{\partial \xi}[\alpha\xi + (y_3 + r)\eta + (x_2 - q)\zeta] \\
& + \frac{\partial f}{\partial \eta}[(x_3 - r)\xi + (y_1 + p)\zeta + \beta\eta] \\
& + \frac{\partial f}{\partial \zeta}[(x_1 - p)\eta + (y_2 + q)\xi + \gamma\zeta] + \frac{\partial f}{\partial t} = 0,
\end{aligned}
$$

à laquelle se réduit l'équation (14), correspond un mouvement possible du liquide, limité par la surface (S) ayant pour équation

$$f(\xi, \eta, \zeta, t) = 0. \tag{27}$$

La pression hydrodynamique en tout point $\xi$, $\eta$, $\zeta$ du liquide sera déterminée par l'équation (25).

Supposons que la surface (S) soit un ellipsoïde.

L'équation (27) devient

$$\frac{\xi^2}{a} + \frac{\eta^2}{b} + \frac{\zeta^2}{c} = 1, \tag{28}$$

$a$, $b$, $c$ étant les carrés de demi-axes.

Supposant que $a$, $b$, $c$ soient des fonctions de $t$, on trouve, en vertu de (26),

$$\begin{aligned}\frac{2\xi}{a}[\alpha\xi + (y_3 + r)\eta + (x_2 - q)\zeta] + \frac{2\eta}{b}[\beta\eta + (x_3 - r)\xi + (y_1 + p)\zeta] \\ + \frac{2\zeta}{c}[\gamma\zeta + (x_1 - p)\eta + (y_2 + q)\xi] - \frac{\xi^2}{a^2}\frac{da}{dt} - \frac{\eta^2}{b^2}\frac{db}{dt} - \frac{\zeta^2}{c^2}\frac{dc}{dt} = 0,\end{aligned}$$

l'équation qui sera satisfaite pour toutes les valeurs de $\xi$, $\eta$ et $\zeta$, si l'on pose

$$2\alpha a = \frac{da}{dt}, \qquad 2\beta b = \frac{db}{dt}, \qquad 2\gamma c = \frac{dc}{dt}, \tag{29}$$

$$\left\{\begin{aligned}(b - c)p &= bx_1 + cy_1,\\ (c - a)q &= cx_2 + ay_2,\\ (a - b)r &= ax_3 + by_3.\end{aligned}\right. \tag{30}$$

Supposons maintenant que les molécules du liquide, contenu dans la membrane ellipsoïdale (28), s'attirent suivant la loi de Newton. On a

$$U = \mathfrak{D} - \mathfrak{A}\xi^2 - \mathfrak{B}\eta^2 - \mathfrak{C}\zeta^2,$$

où, comme on sait,

$$(\alpha)\quad \left\{\begin{aligned}&\mathfrak{D} = \pi\sqrt{abc}\int_0^\infty \frac{du}{\sqrt{\Delta(u)}}, && \mathfrak{A} = \pi\sqrt{abc}\int_0^\infty \frac{du}{(a+u)\sqrt{\Delta(u)}},\\ &\mathfrak{B} = \pi\sqrt{abc}\int_0^\infty \frac{du}{(b+u)\sqrt{\Delta(u)}}, && \mathfrak{C} = \pi\sqrt{abc}\int_0^\infty \frac{du}{(c+u)\sqrt{\Delta(u)}},\\ &\Delta(u) = (a+u)(b+u)(c+u).\end{aligned}\right.$$

Dans ce cas, l'équation (25), qui détermine la pression hydrodynamique en tout point du liquide, devient

$$(31)\quad \begin{aligned} P = H &+ \left(\mathfrak{N}_{11} - \mathfrak{A} - \frac{\mathfrak{A}_{11} + \mathfrak{M}_{11}}{2}\right)\xi^2 \\ &+ \left(\mathfrak{N}_{22} - \mathfrak{B} - \frac{\mathfrak{A}_{22} + \mathfrak{M}_{22}}{2}\right)\eta^2 + \left(\mathfrak{N}_{33} - \mathfrak{C} - \frac{\mathfrak{A}_{33} + \mathfrak{M}_{33}}{2}\right)\zeta^2 \\ &+ (\mathfrak{N}_{23} - \mathfrak{M}_{23} - \mathfrak{A}_{23})\zeta\eta \\ &+ (\mathfrak{N}_{31} - \mathfrak{M}_{31} - \mathfrak{A}_{31})\xi\zeta + (\mathfrak{N}_{12} - \mathfrak{M}_{12} - \mathfrak{A}_{12})\xi\eta, \end{aligned}$$

où l'on a posé

$$H = \Theta - f(t).$$

Les variables $a$, $b$, $c$; $p$, $q$ et $r$, qui déterminent le mouvement de la membrane, et les variables $\alpha$, $\beta$, $\gamma$; $x_1$, $x_2$, $x_3$; $y_1$, $y_2$, $y_3$, qui déterminent le mouvement du liquide y contenu, doivent satisfaire aux équations (22), (29), (30) et aux suivantes,

$$(32)\quad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} + \beta(x_1 - y_1) - (y_3 + r)(x_2 - y_2) = \dfrac{dy_1}{dt} + (x_2 - q)(x_3 - y_3) - \gamma(x_1 - y_1), \\ \dfrac{dx_2}{dt} + \gamma(x_2 - y_2) - (y_1 + p)(x_3 - y_3) = \dfrac{dy_2}{dt} + (x_3 - r)(x_1 - y_1) - \alpha(x_2 - y_2), \\ \dfrac{dx_3}{dt} + \alpha(x_3 - y_3) - (y_2 + q)(x_1 - y_1) = \dfrac{dy_3}{dt} + (x_1 - p)(x_2 - y_2) - \beta(x_3 - y_3), \end{cases}$$

qui résultent des équations (19) du n° 2.

5. La méthode que nous avons employée conduit à la solution de divers problèmes du mouvement du liquide, limité par une surface ellipsoïdale.

1° On peut donner à l'avance le mouvement de la membrane ellipsoïdale, c'est-à-dire on peut donner les quantités

$$a,\quad b,\quad c;\qquad p,\quad q,\quad r,$$

en fonctions arbitraires de $t$, assujetties à une seule condition

$$abc = \text{const.}$$

Les équations (29), (30) et (32) détermineront complètement le mouvement du liquide.

olution du problème se ramène, évidemment, à l'intégration de
quations différentielles du premier ordre.
osant, en particulier, que $a$, $b$, $c$ soient des constantes, nous
un cas du mouvement du liquide contenu dans un vase solide
ne ellipsoïdale, animé d'un mouvement de rotation autour de
itre.

upposons que (28) représente l'équation de la surface d'une
remplie par le liquide, et appartenant à un corps solide, qui se
autour de l'origine fixe des coordonnées [ou, ce qui revient au
autour du centre de l'ellipsoïde (28)] sous l'action de certaines
appliquées aux divers points du corps.
eut poser le problème suivant :

*forces appliquées au corps solide étant données, trouver le mou-
du corps et du liquide remplissant la cavité.*

i, en termes généraux, la méthode de la solution du problème :
ous ajoutons aux forces données les forces de la pression hydro-
ique, agissant aux divers points de la surface de la cavité, le
me se ramène au problème connu de la Dynamique générale du
ment d'un corps solide, sous l'action des forces données, autour
oint fixe.
moments des forces de pression par rapport aux axes $\xi$, $\eta$, $\zeta$

$$\left\{\begin{aligned}
\mathfrak{M}'_\xi &= -\int \mathrm{P}[\zeta\cos(n,\eta)-\eta\cos(n,\zeta)]\,ds,\\
\mathfrak{M}'_\eta &= -\int \mathrm{P}[\xi\cos(n,\zeta)-\zeta\cos(n,\xi)]\,ds,\\
\mathfrak{M}'_\zeta &= -\int \mathrm{P}[\eta\cos(n,\xi)-\xi\cos(n,\eta)]\,ds,
\end{aligned}\right.$$

égrales étant étendues à la surface de l'ellipsoïde (28), $n$ dési-
la normale extérieure à cette surface au point $\xi$, $\eta$, $\zeta$.
stituant au lieu de P son expression (31), nous obtiendrons sans
les expressions déterminées des moments $\mathfrak{M}'_\xi$, $\mathfrak{M}'_\eta$, $\mathfrak{M}'_\zeta$.
ignant par $\mathfrak{M}_\xi$, $\mathfrak{M}_\eta$, $\mathfrak{M}_\zeta$ les moments des forces données, appli-
au corps solide, par A, B, C les moments d'inertie du corps cor-

respondant au point fixe, on obtient les équations du mouvement sous la forme

$$
(34)\qquad \left\{
\begin{aligned}
A\frac{dp}{dt} &= (B - C)qr + \mathcal{M}_\xi + \mathcal{M}'_\xi,\\
B\frac{dq}{dt} &= (C - A)rp + \mathcal{M}_\eta + \mathcal{M}'_\eta,\\
C\frac{dr}{dt} &= (A - B)pq + \mathcal{M}_\zeta + \mathcal{M}'_\zeta.
\end{aligned}
\right.
$$

En y ajoutant les trois équations connues de Cinématique et les équations (22), (29), (30) et (32) du mouvement du liquide, nous aurons un nombre des équations suffisant pour déterminer toutes les inconnues qui définissent le mouvement du corps et du liquide remplissant la cavité.

3° Supposons enfin que la pression P reste constante en tous les points de la surface (28).

Cette condition sera remplie, si nous posons

$$
(35)\qquad \left\{
\begin{aligned}
\mathcal{T}_{23} - \mathcal{M}_{23} - \mathcal{A}_{23} &= 0,\\
\mathcal{T}_{31} - \mathcal{M}_{31} - \mathcal{A}_{31} &= 0,\\
\mathcal{T}_{12} - \mathcal{M}_{12} - \mathcal{A}_{12} &= 0,
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(36)\qquad \left\{
\begin{aligned}
\mathcal{T}_{11} - \mathcal{A} - \frac{\mathcal{A}_{11} + \mathcal{M}_{11}}{2} &= \frac{\lambda}{a},\\
\mathcal{T}_{22} - \mathcal{B} - \frac{\mathcal{A}_{22} + \mathcal{M}_{22}}{2} &= \frac{\lambda}{b},\\
\mathcal{T}_{33} - \mathcal{C} - \frac{\mathcal{A}_{33} + \mathcal{M}_{33}}{2} &= \frac{\lambda}{c},
\end{aligned}
\right.
$$

$$\Pi + \lambda = \text{const.} = p_0,$$

$\lambda$ désignant un paramètre arbitraire.

Les équations (35) et (36), jointes aux équations (22), (29), (30) et (32), forment un système de 15 équations, suffisantes pour déterminer 15 inconnues

$$a,\ b,\ c;\quad p,\ q,\ r;\quad \alpha,\ \beta,\ \gamma;\quad x_1,\ x_2,\ x_3;\quad y_1,\ y_2,\ y_3.$$

On obtient ainsi le problème du mouvement d'une masse fluide sous la condition que sa surface libre conserve pendant le mouvement la forme d'un ellipsoïde, c'est-à-dire le problème de Dirichlet et de Riemann dont nous avons parlé dans l'Introduction.

L'étude de ce dernier problème fera le but principal des recherches qui vont suivre.

Quant au second des trois problèmes que nous venons d'indiquer, il fera l'objet d'un Mémoire particulier.

6. Transformons les équations (35) et (32) de la manière suivante :

La première des équations (35) donne

$$\mathcal{N}_{23} - \mathcal{M}_{23} = \mathcal{A}_{32}.$$

En substituant au lieu de $\mathcal{N}_{23}$, $\mathcal{M}_{23}$ et $\mathcal{A}_{32}$ leurs expressions, qui résultent des formules (23), (24) et (18), on trouve, en tenant compte de (22),

$$\frac{dx_1}{dt} + y_2 y_3 + r y_2 - q y_3 - x_1 \alpha = p(\gamma - \beta). \tag{37}$$

Retranchons cette équation de la première des équations (32).

Il viendra

$$\frac{dy_1}{dt} + x_2 x_3 + r x_2 - q x_3 - y_1 \alpha = p(\gamma - \beta). \tag{38}$$

La même transformation, appliquée à la seconde et à la troisième des équations (32) et (35), conduira aux équations analogues qu'on peut déduire de (37) et (38) par la permutation circulaire des lettres

$$\alpha, \quad \beta, \quad \gamma; \qquad p, \quad q \quad r$$

et des indices 1, 2, 3.

Substituons enfin, dans la première des équations (36), au lieu de $\mathcal{N}_{11}$, $\mathcal{A}_{11}$ et $\mathcal{M}_{11}$, leurs expressions (18), (23) et (24); on trouve, après des réductions simples,

$$(x_3 + y_3) r - (x_2 + y_2) q - x_2 y_2 - x_3 y_3 - \alpha^2 - \alpha' = \frac{2\lambda}{a} + 2\mathcal{B}.$$

Les deux autres des équations (36) conduisent aux équations analogues qu'on obtient, comme précédemment, par la permutation circulaire des lettres

$$\alpha, \quad \beta, \quad \gamma; \qquad p, \quad q, \quad r$$

et des indices 1, 2, 3.

L'analyse précédente montre que le problème se ramène à la détermination de 15 inconnues

$$a, \quad b, \quad c; \qquad p, \quad q, \quad r; \qquad \alpha, \quad \beta, \quad \gamma; \qquad x_1, \quad x_2, \quad x_3; \qquad y_1, \quad y_2, \quad y_3$$

à l'aide des équations suivantes que nous allons écrire, pour plus de clarté, dans un Tableau :

$$(39) \qquad \alpha + \beta + \gamma = 0,$$

$$(40) \begin{cases} (a) & (b - c)p = bx_1 + cy_1, \\ (b) & (c - a)q = cx_2 + ay_2, \\ (c) & (a - b)r = ax_3 + by_3; \end{cases}$$

$$(41) \begin{cases} (a) & \dfrac{dx_1}{dt} + y_2 y_3 + r y_2 - q y_3 - x_1 \alpha = p(\gamma - \beta), \\[2ex] (b) & \dfrac{dx_2}{dt} + y_3 y_1 + p y_3 - r y_1 - x_2 \beta = q(\alpha - \gamma), \\[2ex] (c) & \dfrac{dx_3}{dt} + y_1 y_2 + q y_1 - p y_2 - x_3 \gamma = r(\beta - \alpha); \end{cases}$$

$$(42) \begin{cases} (a) & \dfrac{dy_1}{dt} + x_2 x_3 + r x_2 - q x_3 - y_1 \alpha = p(\gamma - \beta), \\[2ex] (b) & \dfrac{dy_2}{dt} + x_3 x_1 + p x_3 - r x_1 - y_2 \beta = q(\alpha - \gamma), \\[2ex] (c) & \dfrac{dy_3}{dt} + x_1 x_2 + q x_1 - p x_2 - y_3 \gamma = r(\beta - \alpha); \end{cases}$$

$$(43) \begin{cases} (a) & (x_3 + y_3)r - (x_2 + y_2)q - x_2 y_2 - x_3 y_3 - \alpha^2 - \alpha' = \dfrac{2\lambda}{a} + 2\mathcal{A}, \\[2ex] (b) & (x_1 + y_1)p - (x_3 + y_3)r - x_3 y_3 - x_1 y_1 - \beta^2 - \beta' = \dfrac{2\lambda}{b} + 2\mathcal{B}, \\[2ex] (c) & (x_2 + y_2)q - (x_1 + y_1)p - x_1 y_1 - x_2 y_2 - \gamma^2 - \gamma' = \dfrac{2\lambda}{c} + 2\mathcal{C}, \end{cases}$$

$$(44) \qquad 2a\alpha = \frac{da}{dt}, \qquad 2b\beta = \frac{db}{dt}, \qquad 2c\gamma = \frac{dc}{dt},$$

$\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$ désignant les dérivées du premier ordre de $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ par rapport à $t$, $\lambda$ un paramètre arbitraire.

7. Indiquons une transformation de ces équations qui nous sera utile plus loin.

Posons

$$(45)\qquad \left\{\begin{aligned} z_1 &= 2b x_1 - p(b-c),\\ z_2 &= 2c x_2 - q(c-a),\\ z_3 &= 2a x_3 - r(a-b). \end{aligned}\right.$$

On obtient le système d'équations suivantes pour déterminer les inconnues

$$z_1,\ z_2,\ z_3;\quad p,\ q,\ r,\ a,\ b,\ c:$$

$$(46)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dz_1}{dt} &= r z_2 - q z_3,\\ \frac{dz_2}{dt} &= p z_3 - r z_1,\\ \frac{dz_3}{dt} &= q z_1 - p z_2; \end{aligned}\right.$$

$$(47)\qquad \left\{\begin{aligned} 2a\frac{d}{dt}[p(b-c)] &= 2a[z_1 - p(b+c)](\beta-\gamma)\\ &\quad - z_2 z_3 + q(c-a)z_3 - r(a-b)z_2 + \mu_1 qr,\\ 2b\frac{d}{dt}[q(c-a)] &= 2b[z_2 - q(c+a)](\gamma-\alpha)\\ &\quad - z_3 z_1 + r(a-b)z_1 - p(b-c)z_3 + \mu_2 rp,\\ 2c\frac{d}{dt}[r(a-b)] &= 2c[z_3 - r(a+b)](\alpha-\beta)\\ &\quad - z_1 z_2 + p(b-c)z_2 - q(c-a)z_1 + \mu_3 pq; \end{aligned}\right.$$

$$(48)\qquad \left\{\begin{aligned} &c(a-b)(3b+a)r^2 - b(c-a)(a+3c)q^2\\ &\quad + 2b(c-a)q z_2 - 2c(a-b)r z_3 + b z_2^2 + c z_3^2 - 4v_0(\alpha^2+\alpha') = 8v_0\left(\frac{\lambda}{a} + \mathcal{A}\right),\\ &a(b-c)(3c+b)p^2 - c(a-b)(b+2a)r^2\\ &\quad + 2c(a-b)r z_3 - 2a(b-c)p z_1 + c z_3^2 + a z_1^2 - 4v_0(\beta^2+\beta') = 8v_0\left(\frac{\lambda}{b} + \mathcal{B}\right),\\ &b(c-a)(3a+c)q^2 - a(b-c)(c+3b)p^2\\ &\quad + 2a(b-c)p z_1 - 2b(c-a)q z_2 + a z_1^2 + b z_2^2 - 4v_0(\gamma^2+\gamma') = 8v_0\left(\frac{\lambda}{c} + \mathcal{C}\right), \end{aligned}\right.$$

où l'on a posé

$$(49)\qquad \left\{\begin{aligned} &\mu_1 = 3a^2 - \omega,\qquad \mu_2 = 3b^2 - \omega,\qquad \mu_3 = 3c^2 - \omega,\\ &\qquad \omega = bc + ca + ab,\qquad v_0 = abc. \end{aligned}\right.$$

A ces équations il faut encore ajouter les équations (39) et (44).

8. Les équations du problème que nous avons données aux nos 6 et 7 diffèrent de celles de Riemann [*voir* son Mémoire, cité plus haut, p. 174, les équations ($\alpha$)].

Or, il suffit de remplacer, par exemple, dans les équations du no 7, $a$, $b$, $c$ par $a^2$, $b^2$ et $c^2$ et d'introduire au lieu de $p$, $q$, $r$; $z_1$, $z_2$ et $z_3$ les nouvelles inconnues $u$, $u'$; $v$, $v'$; $w$ et $w'$ en posant

$$p = u + u', \qquad q = v + v', \qquad r = w + w',$$
$$z_1 = u(b-c)^2 + u'(b+c)^2,$$
$$z_2 = v(c-a)^2 + v'(c+a)^2,$$
$$z_3 = w(a-b)^2 + w'(a+b)^2,$$

pour réduire les équations (46), (47) et (48) aux équations ($\alpha$) de Riemann.

Il est aisé de trouver trois intégrales des équations (41), (42), (43) et (44).

Les équations (46) donnent tout de suite l'intégrale suivante,

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = k^2 = \text{const.},$$

d'où l'on tire, à l'aide de (40) et (45),

$$(bx_1 - cy_1)^2 + (cx_2 - ay_2)^2 + (ax_3 - by_3)^2 = k = \text{const.} \tag{50}$$

C'est la première des trois intégrales tout à l'heure mentionnées.

Retranchons de l'équation ($a$) (41) celle de ($a$) (42) et multiplions le résultat par $\dfrac{2(x_1-y_1)}{a}$; appliquons ensuite la même transformation aux équations ($b$) (41) et ($b$) (42) et, enfin, aux équations ($c$) (41) et ($c$) (42) $\left[\text{en multipliant les résultats de soustraction respectivement par } \dfrac{2(x_2-y_2)}{b} \text{ et } \dfrac{2(x_3-y_3)}{c}\right]$.

Additionnant les résultats ainsi obtenus, on trouve, en effectuant l'intégration,

$$bc(x_1-y_1)^2 + ca(x_2-y_2)^2 + ab(x_3-y_3)^2 = \mathrm{L} = \text{const.} \tag{51}$$

C'est la deuxième des trois intégrales dont nous avons parlé plus haut.

La troisième intégrale exprime la loi des forces vives et s'écrira comme il suit :

$$(52)\quad \begin{aligned} &\frac{v_0}{a}\left(\frac{da}{dt}\right)^2 + \frac{v_0}{b}\left(\frac{db}{dt}\right)^2 + \frac{v_0}{c}\left(\frac{dc}{dt}\right)^2 \\ &\quad + z_1^2 a(b+c) + p^2 a(b-c)^2(b+c) - 2pz_1 a(b-c)^2 \\ &\quad + z_2^2 b(c+a) + q^2 b(c-a)^2(c+a) - 2qz_2 b(c-a)^2 \\ &\quad + z_3^2 c(a+b) + r^2 c(a-b)^2(a+b) - 2rz_3 c(a-b)^2 = 16 v_0 \Phi + \text{const.} \end{aligned}$$

ou, en introduisant au lieu de $z_1$, $z_2$, $z_3$ et $p$, $q$, $r$ les variables $x_1$, $x_2$, $x_3$, $y_1$, $y_2$ et $y_3$,

$$(52_1)\quad \begin{aligned} &\frac{1}{4a}\left(\frac{da}{dt}\right)^2 + \frac{1}{4b}\left(\frac{db}{dt}\right)^2 + \frac{1}{4c}\left(\frac{dc}{dt}\right)^2 \\ &\quad + bx_1^2 + cy_1^2 + cx_2^2 + ay_2^2 + ax_3^2 + by_3^2 = 4\Phi + h, \end{aligned}$$

$h$ désignant une constante arbitraire.

## CHAPITRE II.

### MOUVEMENT D'UNE MASSE FLUIDE, LIMITÉE PAR UN ELLIPSOÏDE DE RÉVOLUTION.

1. Appliquons les équations générales, obtenues dans le Chapitre précédent, au cas particulier, lorsque la surface libre du liquide est un ellipsoïde de révolution.

Proposons-nous de résoudre le problème suivant :

*Trouver tous les cas possibles du mouvement du liquide parfait et incompressible, dont les molécules s'attirent suivant la loi de Newton, en supposant que sa surface libre conserve pendant le mouvement, sous la pression constante, la forme d'un ellipsoïde de révolution.*

Supposons, pour fixer les idées, que

$$(1)\qquad a = b.$$

On en tire, en différentiant,

$$(2)\qquad a' = b',$$

c'est-à-dire, en vertu de (44),

$$(2_1) \qquad \alpha = \beta,$$

d'où, en vertu de (39),

$$(3) \qquad \gamma = -2\alpha.$$

Les équations (40) deviennent

$$(4) \qquad (a-c)p = ax_1 + cy_1,$$
$$(5) \qquad (c-a)q = cx_2 + ay_2,$$
$$(6) \qquad x_3 + y_3 = 0.$$

Les équations $(c)$ (41) et $(c)$ (42) du Chapitre précédent conduisent, en vertu de (6), à la relation suivante :

$$(7) \qquad y_1 y_2 + x_1 x_2 + q(x_1 + y_1) - p(x_2 + y_2) = 0.$$

D'autre part, en remarquant que dans le cas considéré

$$\mathcal{A} = \mathcal{B},$$

on obtient, eu égard à $(a)$ (43), $(b)$ (43) (Chap. I), (2) et (6),

$$(8) \qquad x_2 y_2 - x_1 y_1 + q(x_2 + y_2) + p(x_1 + y_1) = 0.$$

Substituant dans (7) les expressions de $p$ et $q$, tirées de (4) et (5), on trouve

$$(9) \qquad x_1(cx_2 + ay_2) + cy_1(x_2 + y_2) = 0,$$

ou, si l'on veut,

$$(9_1) \qquad cx_2(x_1 + y_1) + y_2(ax_1 + cy_1) = 0.$$

La même transformation de l'équation (8) donne ensuite

$$2c(x_2 y_2 - x_1 y_1) + cx_2^2 + ay_2^2 - ax_1^2 - cy_1^2 = 0,$$

d'où

$$(10) \qquad c(x_2 + y_2)^2 - (c-a)y_2^2 - c(x_1 + y_1)^2 + (c-a)x_1^2 = 0.$$

Supposons d'abord que *la somme* $x_2 + y_2$ *ainsi que les variables* $x_1$

*et $y_1$ soient différentes de zéro;* le cas exceptionnel, où l'une de ces quantités se réduit à zéro, nous le considérerons séparément plus tard.

En résolvant l'équation (9) par rapport à $y_1$ et en substituant la valeur obtenue de $y_1$ dans (10), il viendra

$$[c(x_2+y_2)^2-(c-a)y_2^2][c(x_2+y_2)^2+(c-a)x_1^2]=0. \tag{11}$$

Nous avons deux cas à distinguer :

1° Supposons d'abord que, pour le moment initial du temps,

$$a>c. \tag{12}$$

Cette condition sera satisfaite pendant une durée de temps au moins assez voisine du moment initial, en vertu de la continuité de mouvement.

*La surface libre du liquide aura la forme d'un ellipsoïde de révolution aplati dont l'axe de révolution coïncide avec l'axe des $\zeta$.*

Dans cette hypothèse, on aura nécessairement, eu égard à (11),

$$c(x_2+y_2)^2-(a-c)x_1^2=0, \tag{13}$$

car, d'après la supposition faite plus haut et en vertu de (12), l'expression

$$c(x_2+y_2)^2+(a-c)y_2^2$$

reste toujours différente de zéro.

2° Supposons ensuite que

$$c>a \tag{14}$$

pour le moment initial du mouvement.

Dans ce cas on aura nécessairement

$$c(x_2+y_2)^2-(c-a)y_2^2=0, \tag{15}$$

car le facteur

$$c(x_2+y_2)^2-(a-c)x_1^2$$

reste toujours positif, en vertu de (14), et différent de zéro.

Nous avons ici le cas où *la surface libre conserve pendant le mouvement la forme d'un ellipsoïde de révolution allongé.*

Étudions d'abord le premier de ces deux cas différents.

### MOUVEMENT D'UN ELLIPSOÏDE DE RÉVOLUTION APLATI.

2. Les équations (10) et (13) donnent

$$(a-c)y_2^2 = c(x_1+y_1)^2.$$

Résolvant cette équation et (13) par rapport à $x_1$ et $y_2$, on trouve

$$x_1 = \varepsilon_1 \sigma(x_2+y_2), \qquad y_2 = \varepsilon_2 \sigma(x_1+y_1),$$

où l'on a posé

$$\varepsilon_1 = \pm 1, \qquad \varepsilon_2 = \pm 1, \qquad \sigma = +\sqrt{\frac{c}{a-c}}.$$

On a donc, en vertu de (13),

$$x_2 = \frac{\varepsilon_1 x_1}{\sigma} - \varepsilon_2 \sigma(x_1+y_1).$$

Substituant les valeurs trouvées de $y_2$ et $x_2$ dans (9), il viendra

$$\sigma(x_1+y_1)(\varepsilon_1+\varepsilon_2) = 0,$$

ce qui exige qu'on ait

$$\varepsilon_1+\varepsilon_2 = 0,$$

c'est-à-dire

$$\varepsilon_1 = +1, \qquad \varepsilon_2 = -1$$

ou

$$\varepsilon_1 = -1, \qquad \varepsilon_2 = +1.$$

On peut donc écrire

(16) $$x_2 = \frac{x_1}{\sigma} + \sigma(x_1+y_1),$$

(17) $$y_2 = -\sigma(x_1+y_1),$$

en introduisant la notation suivante:

(18) $$\sigma = \pm\sqrt{\frac{c}{a-c}}.$$

Substituant (15) et (17) dans (4) et (5), on trouve

$$(19)\qquad p = \frac{a}{a-c}x_1 + \frac{c}{a-c}y_1 = (1+\sigma^2)x_1 + \sigma^2 y_1 = x_1 + \sigma^2(x_1+y_1),$$

$$(20)\qquad q = -\frac{c}{a-c}x_2 - \frac{a}{a-c}y_2 = -\sigma^2 x_2 - (1+\sigma^2)y_2 = \sigma y_1.$$

La solution du problème se ramène à la détermination des inconnues $x_1$, $y_1$, $\sigma$, $x_3$ et $y_3$ en fonction de $t$ à l'aide des équations (41), (42), (43) et (44) (Chap. I).

3. Substituant (16), (17), (19) et (20) dans $(a)$ (41) et $(a)$ (42) [Chap. I], on trouve

$$(21)\qquad \begin{aligned} &x'_1 + \sigma x_3(x_1 + 2y_1) - \sigma r(x_1+y_1) - x_1\alpha \\ &\quad = -3\alpha p = -3\alpha[x_1 + \sigma^2(x_1+y_1)], \end{aligned}$$

$$(22)\qquad \begin{aligned} &y'_1 + \frac{1+\sigma^2}{\sigma}x_1 x_3 + \frac{r}{\sigma}[x_1 + \sigma^2(x_1+y_1)] - y_1\alpha \\ &\quad = -3\alpha p = -3\alpha[x_1 + \sigma^2(x_1+y_1)]. \end{aligned}$$

Transformons maintenant les équations $(b)$ (41) et $(b)$ (42) du Chapitre précédent.

On a, eu égard à (18),

$$2\sigma\sigma' = \frac{c'(a-c) - c(a'-c')}{(a-c)^2} = \frac{ac' - ca'}{(a-c)^2},$$

d'où, en se rappelant que, en vertu de (44) (Chap. I) et (3),

$$c' = 2c\gamma = -4c\alpha, \qquad a' = 2a\alpha,$$

on tire

$$(23)\qquad \sigma\sigma' = -\frac{3ac}{(a-c)^2}\alpha = -3\sigma^2(1+\sigma^2)\alpha.$$

Substituant $x_2$, $y_2$ et $\sigma'$ dans $(b)$ (41) et $(b)$ (42) (Chap. I), on trouve

$$(24)\qquad \begin{aligned} &\frac{x'_1}{\sigma} + \sigma'(x_1+y_1) + \sigma(x'_1+y'_1) + \frac{3(1+\sigma^2)}{\sigma}x_1\alpha \\ &\quad - x_3(1+\sigma^2)(x_1+y_1) - ry_1 - \frac{\alpha}{\sigma}[x_1 + \sigma^2(x_1+y_1)] = 3\alpha\sigma y_1, \\ &-\sigma'(x_1+y_1) - \sigma(x'_1+y'_1) \\ &\quad + x_3[2x_1 + \sigma^2(x_1+y_1)] - rx_1 + \sigma\alpha(x_1+y_1) = 3\alpha\sigma y_1, \end{aligned}$$

d'où l'on tire, en additionnant,

$$\frac{x'_1}{\sigma} + x_3(x_1 - y_1) - r(x_1 + y_1) + \frac{2 + 3\sigma^2}{\sigma}\alpha x_1 = 6\alpha\sigma y_1. \tag{25}$$

Donc les équations ($a$) et ($b$) (41) et (42) (Chap. I) se réduisent au système d'équations (21), (22), (24) et (25).

4. La comparaison d'équations (21) et (25) conduit à cette relation simple

$$3\sigma y_1(x_3 + 3\alpha\sigma) = 0. \tag{26}$$

Additionnons maintenant les équations (21) et (22).

On trouve, après avoir multiplié le résultat par $\sigma$,

$$\begin{aligned}\sigma(x'_1 + y'_1) + x_3[x_1 + 2\sigma^2(x_1 + y_1)] + r x_1 - \sigma\alpha(x_1 + y_1)\\ = -6\alpha\sigma[x_1 + \sigma^2(x_1 + y_1)].\end{aligned}$$

D'autre part, l'équation (24) donne, en vertu de (23),

$$\begin{aligned}-\sigma(x'_1 + y'_1) + x_3[2x_1 + \sigma^2(x_1 + y_1)]\\ - r x_1 + \sigma\alpha(x_1 + y_1) + 3\sigma^2(1 + \sigma^2)\alpha(x_1 + y_1) = 3\alpha\sigma y_1.\end{aligned}$$

Additionnant ces équations, on trouve

$$(x_3 + 3\alpha\sigma)[x_1 + \sigma^2(x_1 + y_1)] = 0. \tag{27}$$

On voit donc que le système d'équations (21), (22), (24) et (25) peut être remplacé par le système équivalent d'équations (21), (22), (26) et (27).

Il est aisé de voir ensuite que les équations (26) et (27) se réduisent à une seule équation

$$x_3 + 3\alpha\sigma = 0, \tag{28}$$

car, d'après l'hypothèse faite plus haut, $x_1$ et $y_1$ sont différents de zéro.

Substituant enfin $-3\alpha\sigma$ au lieu de $x_3$ dans (21) et (22), il viendra

$$x'_1 - \sigma r(x_1 + y_1) + 2\alpha x_1 - 3\alpha\sigma^2 y_1 = 0, \tag{29}$$

$$y'_1 + \frac{r}{\sigma}[x_1 + \sigma^2(x_1 + y_1)] + (3\sigma^2 - 1)\alpha y_1 = 0. \tag{30}$$

5. Transformons maintenant les équations $(c)$ (41) et $(c)$ (42) (Chap. I), qui se réduisent à une seule, en vertu de (9) et (4), (5) et (6).

En effet, la relation (9) donne

$$c y_1 x_2 + a y_2 x_1 = -c(x_1 x_2 + y_1 y_2). \tag{31}$$

D'autre part, les équations $(c)$ (41) et $(c)$ (42) (Chap. I) peuvent s'écrire, eu égard à (4) et (5),

$$\frac{dx_3}{dt} + \frac{2c y_1 y_2 + c y_1 x_2 + a y_2 x_1}{c-a} = 0,$$
$$\frac{dy_3}{dt} + \frac{2c x_1 x_2 + c y_1 x_2 + a y_2 x_1}{c-a} = 0,$$

d'où, en vertu de (31),

$$\frac{dx_3}{dt} + \frac{c(y_1 y_2 - x_1 x_2)}{c-a} = 0, \tag{31$_1$}$$
$$\frac{dy_3}{dt} + \frac{c(x_1 x_2 - y_1 y_2)}{c-a} = 0.$$

Ces équations se réduisent à une seule, car, en vertu de (6),

$$y_3 = -x_3.$$

Substituant dans l'équation ($31_1$) les expressions de $x_2$, $y_2$ (16) et (17), on trouve, eu égard à (18), (2) et (3),

$$x'_3 + 2\sigma Q + 2x_3\alpha = 0, \tag{32}$$

où l'on a posé

$$2Q = x_1^2 + \sigma^2(x_1 + y_1)^2. \tag{32$_1$}$$

L'équation (32) montre, en outre, que $x_3$ et, par suite, $\alpha$ ne peuvent pas être égaux à zéro, car la quantité Q ne s'annule que pour

$$x_1 = y_1 = 0,$$

ce qui contredit l'hypothèse faite plus haut.

La différentiation de ($32_1$) donne

$$Q' = x_1 x'_1 + \sigma^2(x_1 + y_1)(x'_1 + y'_1) + \sigma\sigma'(x_1 + y_1)^2,$$

d'où, en vertu de (23),

$$Q' = x_1 x'_1 + \sigma^2 (x_1 + y_1)(x'_1 + y'_1) - 3\sigma^2(1+\sigma^2)\alpha(x_1+y_1)^2.$$

Substituons dans le second membre de cette égalité les valeurs des dérivées $x'_1$ et $y'_1$, tirées des équations (29) et (30).

On obtient, après des réductions simples,

$$Q' = -\alpha(2+3\sigma^2)[x_1^2 + \sigma(x_1+y_1)^2] = -2\alpha(2+3\sigma^2)Q,$$

ou, en vertu de (23),

$$\frac{Q'}{Q} = \frac{2(2+3\sigma^2)}{3\sigma(1+\sigma^2)}\sigma' = \frac{2\sigma'}{\sigma} - \frac{2\sigma'}{3\sigma(1+\sigma^2)} = \frac{2\sigma'}{\sigma} - \frac{2\sigma'}{3\sigma^3\left(\frac{1}{\sigma^2}+1\right)}.$$

On en tire, en intégrant,

$$\log Q = \log\sigma^2 + \log\left(1+\frac{1}{\sigma^2}\right)^{\frac{1}{3}} + \text{const.},$$

et, enfin,

$$Q = \mathfrak{M}[\sigma^4(1+\sigma^2)]^{\frac{1}{3}},$$

$\mathfrak{M}$ désignant une constante arbitraire.

Moyennant l'expression (18) de $\sigma$, on peut présenter Q sous la forme suivante,

$$Q = \frac{\mathfrak{M}_1}{2a(a-c)},$$

$\mathfrak{M}_1$ désignant une autre constante arbitraire, car on a toujours, d'après la condition d'incompressibilité du liquide,

$$abc = a^2 c = v_0 = \text{const.}$$

L'équation (32) peut s'écrire maintenant

$$x'_3 + 2\alpha x_3 + \frac{\mathfrak{M}_1\sigma}{a(a-c)} = 0.$$

Or, l'équation (28) donne, en vertu de (23),

$$x'_3 = -3\sigma\alpha' - 3\alpha\sigma' = -3\sigma\alpha' + 9\sigma(1+\sigma^2)\alpha^2.$$

Par suite,

$$-3\alpha' + 3\alpha^2(1+3\sigma^2) = -\frac{\mathfrak{M}_1}{a(a-c)},$$

ou, plus simplement,

$$\alpha^2(1+3\sigma^2)-\alpha'=-\frac{\mathfrak{N}}{a(a-c)}, \tag{33}$$

où l'on a posé

$$\mathfrak{N}=\frac{\mathfrak{M}_1}{3}.$$

En se rappelant, enfin, que

$$\alpha=\frac{a'}{2a}, \qquad c=\frac{c_0}{a^2}, \tag{34}$$

on peut donner à l'équation précédente la forme suivante :

$$2\left(a-\frac{c_0}{a^2}\right)a''-3a'^2=4\mathfrak{N}. \tag{35}$$

C'est une équation différentielle du second ordre dont l'intégration détermine $a$ en fonction de $t$; l'autre demi-axe $\sqrt{c}$ se déterminera par la seconde des équations (34).

6. Le problème est donc ramené à la détermination des variables $x_1$, $y_1$, $x_3$ et $a$ à l'aide des équations (28), (29), (30), (34) et (35).

Quant à la composante $r$, on peut la donner à l'avance en fonction arbitraire de $t$.

Remarquons, en passant, que ces équations déterminent un mouvement possible d'une masse fluide ellipsoïdale sous la pression extérieure qui s'exprime comme il suit :

$$p=m+n\zeta^2,$$

$m$ et $n$ étant des fonctions de $t$.

Pour achever le problème qui nous intéresse, il ne nous reste qu'à satisfaire à la condition que la pression P reste toujours constante en tous les points de la surface

$$\frac{\xi^2}{a}+\frac{\eta^2}{b}+\frac{\zeta^2}{c}=1,$$

ou, ce qui revient au même, vérifier les équations (43) du Chapitre I.

Ces équations se réduisent, en vertu de (16), (17), (19), (20), (28), (6) et (32), aux deux équations suivantes :

$$\alpha^2(9\sigma^2-1)-\alpha'=\frac{2\lambda}{a}+2\mathcal{A}-\frac{3\mathfrak{M}}{a(a-c)},$$
$$-4\alpha^2+2\alpha'=\frac{2\lambda}{c}+2\mathfrak{C},$$

d'où l'on tire, en éliminant la fonction inconnue $\lambda$,

$$(36)\qquad \alpha^2(9a\sigma^2-a+4c)-(a+2c)\alpha'=2\mathrm{R}-\frac{3\mathfrak{M}}{a-c},$$

où

$$\mathrm{R}=\mathcal{A}a-\mathfrak{C}c.$$

On voit que $a$ doit satisfaire à la fois aux deux équations différentielles (35) et (36), qui doivent être compatibles.

Résolvant ces équations par rapport à $\alpha^2$ et $\alpha'$, on trouve

$$(37)\qquad \alpha^2=\frac{\mathrm{P}}{a(a-c)(1-3\sigma^2)}-\frac{\mathrm{R}}{(a-c)(1-3\sigma^2)},$$

$$(38)\qquad \alpha'=\frac{2\mathrm{P}}{a(a-c)(1-3\sigma^2)}-\frac{\mathrm{R}(1+3\sigma^2)}{(a-c)(1-3\sigma^2)},$$

où P désigne une constante.

Pour que ces équations soient compatibles, il faut que la première d'elles représente une intégrale de la seconde, ce qui est impossible.

On a, en effet,

$$\mathcal{A}=\pi(1+\sigma^2)\sigma\operatorname{arc\,tang}\frac{1}{\sigma}-\pi\sigma^2,$$
$$\mathfrak{C}=2\pi(1+\sigma^2)-2\pi(1+\sigma^2)\sigma\operatorname{arc\,tang}\frac{1}{\sigma},$$

d'où

$$\frac{\mathrm{R}}{a-c}=\frac{\mathcal{A}a-\mathfrak{C}c}{a-c}=\pi\sigma(1+\sigma^2)(1+3\sigma^2)\operatorname{arc\,tang}\frac{1}{\sigma}-3\pi\sigma^2(1+\sigma^2).$$

Les équations (37) et (38) peuvent s'écrire sous la forme

$$(39)\qquad \alpha^2=\mathrm{S}+\mathrm{T}\operatorname{arc\,tang}\frac{1}{\sigma},$$

$$(40)\qquad \alpha'=\mathrm{S}_1+\mathrm{T}_1\operatorname{arc\,tang}\frac{1}{\sigma},$$

où l'on a posé

$$(40_1)\qquad T = \frac{\pi\sigma(1+\sigma^2)(1+3\sigma^2)}{3\sigma^2-1},\qquad T_1 = \frac{\pi\sigma(1+\sigma^2)(1+3\sigma^2)^2}{3\sigma^2-1};$$

quant à S et $S_1$, ils sont les fonctions algébriques en $a$.

La différentiation de l'équation (39) conduit à l'équation suivante :

$$2\alpha\alpha' = \frac{dS}{da}\frac{da}{dt} + \frac{T\sigma^2}{1+\sigma^2}\sigma' + \frac{dT}{d\sigma}\sigma' \operatorname{arc\,tang}\frac{1}{\sigma}.$$

Multipliant (40) par $2\alpha$ et retranchant le résultat de cette équation, on trouve la relation suivante,

$$2a\frac{dS}{da} - 3T\sigma^3 - 3\sigma(1+\sigma^2)\frac{dT}{d\sigma}\operatorname{arc\,tang}\frac{1}{\sigma} = 2S_1 + 2T_1 \operatorname{arc\,tang}\frac{1}{\sigma},$$

qui exige qu'on ait identiquement

$$2T_1 + 3\sigma(1+\sigma^2)\frac{dT}{d\sigma} = 0,$$

ce qui est impossible, comme il est aisé de s'assurer en effectuant le calcul.

L'analyse précédente conduit à la conclusion suivante :

*La supposition que les quantités*

$$x_1,\quad y_1\quad \text{et}\quad x_2 + y_2$$

*restent différentes de zéro est incompatible avec l'hypothèse que la surface libre du liquide conserve pendant le mouvement la forme d'un ellipsoïde de révolution aplati.*

7. Il ne nous reste qu'à étudier les cas exceptionnels, où certaines des quantités $x_1$, $y_1$ et $x_2+y_2$ s'annulent.

Reprenons les équations fondamentales (9) [ou $(9_1)$] et (10).

L'équation (9) sera satisfaite dans les cas suivants :

| | | |
|---|---|---|
| 1° | $x_2+y_2=0,$ | $x_1=0;$ |
| 2° | $y_1=0,$ | $cx_2+ay_2=0;$ |
| 3° | $y_1=0,$ | $x_1=0;$ |
| 4° | $x_2+y_2=0,$ | $cx_2+ay_2=0,$ |

c'est-à-dire

$$x_2 = y_2 = 0.$$

Examinons chacune de ces quatre hypothèses.

Supposons que

$$(41) \qquad x_1 = 0, \qquad x_2 + y_2 = 0.$$

L'équation (10) devient

$$(a-c)y_2^2 - cy_1^2 = 0,$$

d'où

$$(42) \qquad x_2 = -\sigma y_1, \qquad y_2 = \sigma y_1, \qquad \sigma = \pm\sqrt{\frac{c}{a-c}}$$

et, en vertu de (9) et (20),

$$(43) \qquad p = \sigma^2 y_1, \qquad q = x_2 = -\sigma y_1.$$

Les équations (41) et (42) du Chapitre I donnent alors, en vertu de (42),

$$(44) \qquad \sigma r y_1 - 2\sigma y_1 x_3 = -3\alpha\sigma^2 y_1,$$

$$(45) \qquad \sigma y_1' + \sigma' y_1 + (1+\sigma^2) y_1 x_3 + r y_1 = 4\alpha\sigma y_1,$$

$$(46) \qquad y_1' - r\sigma y_1 - y_1\alpha = -3\alpha\sigma y_1,$$

$$(47) \qquad \sigma y_1' + \sigma' y_1 + \sigma^2 y_1 x_3 = -2\alpha\sigma y_1,$$

$$(48) \qquad x_3' - \sigma^3 y_1^2 + 2x_3\alpha = 0.$$

La première de ces équations conduit à la relation

$$(49) \qquad 2x_3 - r = 3\alpha\sigma,$$

car $y_1$ est différent de zéro.

En retranchant ensuite (47) de (45), on obtient

$$(50) \qquad x_3 + r = 6\alpha\sigma.$$

On a donc, eu égard à (49) et (50),

$$(51) \qquad x_3 = r = 3\alpha\sigma.$$

Les équations (45), (46) et (47) se réduisent, à l'aide de (23), à une seule,

$$y_1' - y_1 \alpha = 0$$

ou, en vertu de (34),

$$y_1' = \frac{y_1 a'}{2a},$$

d'où l'on tire, en intégrant,

$$y_1 = \rho\sqrt{a}, \tag{52}$$

$\rho$ désignant une constante arbitraire.

Substituant les expressions (51) et (52) de $x_3$ et $y_1$ dans (48), on obtient, eu égard à (23),

$$\alpha' - \alpha^2(1 + 3\sigma^2) = \mathfrak{M}\sigma^2 a, \tag{53}$$

où l'on a posé

$$3\mathfrak{M} = \rho^2.$$

8. Passons maintenant aux équations (43) du Chapitre précédent. Elles se réduisent dans le cas considéré aux suivantes,

$$\alpha^2(9\sigma^2 - 1) - \alpha' = \frac{2\lambda}{a} + 2\mathfrak{A} - 3\mathfrak{M}\sigma^2 a,$$

$$-4\alpha^2 + 2\alpha' = \frac{2\lambda}{c} + 2\mathfrak{C},$$

d'où l'on tire, en éliminant la fonction inconnue $\lambda$,

$$\begin{gathered}\alpha^2(9\sigma^2 a - a + 4c) - (a + 2c)\alpha' = 2R - 3\mathfrak{M}\sigma^2 a^2,\\ R = \mathfrak{A}a - \mathfrak{C}c.\end{gathered} \tag{54}$$

Donc, la fonction $a$ doit satisfaire à la fois à deux équations différentielles (53) et (54), qui peuvent s'écrire sous la forme (*voir* n° 6)

$$\alpha^2 = P + T \operatorname{arc tang}\frac{1}{\sigma},$$

$$\alpha' = P_1 + T_1 \operatorname{arc tang}\frac{1}{\sigma},$$

où $P$ et $P_1$ sont les fonctions algébriques en $a$; $T$ et $T_1$ s'expriment, comme au n° 6, à l'aide des formules ($40_1$).

Nous avons déjà vu (n° 6) que ces équations sont incompatibles.

Donc, le mouvement correspondant à l'hypothèse (1) est impossible au moins, si $x_3$, $r$ et $\alpha$ sont différents de zéro.

Or, la dernière supposition est aussi inadmissible, si $y_1$ est différent de zéro, ce qui résulte immédiatement de l'équation (48).

*Donc la première hypothèse*

1° $$x_1 = 0, \qquad x_2 + y_2 = 0$$

*conduit au résultat négatif.*

9. Considérons le second cas, où

$$y_1 = 0, \qquad cx_2 + ay_2 = 0. \tag{55}$$

On a

$$y_2 = -\frac{c}{a} x_2. \tag{55$_1$}$$

Substituant cette expression de $y_2$ dans (10), il viendra

$$x_2^2 = \frac{a^2}{c(a-c)} x_1^2,$$

d'où l'on tire

$$x_2 = \frac{1+\sigma^2}{\sigma} x_1, \tag{56}$$

en posant

$$\sigma = \pm\sqrt{\frac{c}{a-c}}. \tag{56$_1$}$$

Substituant ensuite (56) dans (55$_1$), on trouve

$$y_2 = -\sigma x_1. \tag{57}$$

Les équations (19) et (20) donnent

$$p = (1+\sigma_2) x_1, \qquad q = 0. \tag{57$_1$}$$

Les équations (41) et (42) du Chapitre I se réduisent, à l'aide de (56),

(57) et ($57_1$), aux suivantes :

$$x_1' + \sigma x_1 x_3 - r x_1 \sigma - x_1 \alpha = -3\alpha x_1(1+\sigma^2), \tag{58}$$

$$\frac{1+\sigma^2}{\sigma} x_1' + x_1 \frac{d\,\dfrac{1+\sigma^2}{\sigma}}{dt} - (1+\sigma^2) x_1 x_3 = \frac{1+\sigma^2}{\sigma} x_1 \alpha, \tag{59}$$

$$\frac{1+\sigma^2}{\sigma} x_1 x_3 + \frac{1+\sigma^2}{\sigma} r x_1 = -3\alpha x_1(1+\sigma^2), \tag{60}$$

$$-\sigma x_1' - \sigma' x_1 + (2+\sigma^2) x_1 x_3 - r x_1 + \sigma x_1 \alpha = 0, \tag{61}$$

$$x_3' + \sigma(1+\sigma^2) x_1^2 + 2 x_3 \alpha = 0. \tag{62}$$

10. Multiplions (59) par $\frac{\sigma}{1+\sigma^2}$ et retranchons le résultat de (58). On trouve

$$2\sigma x_1 x_3 - r x_1 \sigma - \frac{1+\sigma^2}{\sigma} \frac{d\,\dfrac{1+\sigma}{\sigma}}{dt} x_1 = -3\alpha x_1(1+\sigma^2),$$

d'où, en tenant compte de (23) et en supprimant le facteur commun $\sigma x_1$,

$$2 x_3 - r = -6\alpha\sigma. \tag{63}$$

D'autre part, l'équation (60) peut s'écrire

$$x_3 + r = -3\alpha\sigma,$$

car le facteur commun $(1+\sigma^2) x_1$ est différent de zéro.

Cette équation et (63) montrent que

$$r = 0, \qquad x_3 = -3\alpha\sigma. \tag{64}$$

L'équation (58) devient alors

$$x_1' + 2\alpha x_1 = 0, \tag{65}$$

d'où l'on tire, en intégrant,

$$x_1 = \frac{\rho}{a}, \tag{66}$$

$\rho$ désignant une constante arbitraire.

Quant à l'équation (61), elle se vérifie identiquement, en vertu de (64), (65) et (23).

Il ne nous reste qu'à transformer l'équation (62).

On trouve, en tenant compte de (64) et (65),

$$\alpha' - \alpha^2(1 + 3\sigma^2) = \frac{\mathfrak{M}(1 + \sigma^2)}{a}, \tag{67}$$

où l'on a posé

$$3\mathfrak{M} = \rho^2.$$

11. Passons maintenant aux équations (43) du Chapitre précédent.

On obtient, en tenant compte de (55), (56), (57), ($57_1$), (64), (66) et (6) (n° 1),

$$3\mathfrak{M}\,\frac{1 + \sigma^2}{a^2} + \alpha^2(9\sigma^2 - 1) - \alpha' = \frac{2\lambda}{a} + 2\mathcal{A},$$
$$-4\alpha^2 + 2\alpha' = \frac{2\lambda}{c} + 2\mathcal{C},$$

d'où, en éliminant $\lambda$,

$$\alpha^2(9a\sigma^2 - a + 4c) - \alpha'(a + 2c) = 2\mathrm{R} - \frac{3\mathfrak{M}(1 + \sigma^2)}{\phantom{a}}, \tag{$67_1$}$$
$$\mathrm{R} = \mathcal{A}a - \mathcal{C}c.$$

En répétant presque textuellement les raisonnements des n$^{os}$ 6 et 8, on s'assure que les équations (67) et ($67_1$) ne peuvent pas être compatibles, au moins si $x_3$ et $\alpha$ restent différents de zéro.

Or, cette dernière supposition est aussi impossible, si $x_1$ est différent de zéro, ce qui résulte immédiatement de l'équation (62).

Donc, *l'hypothèse 2° du n° 7 est aussi inadmissible.*

12. Passons enfin à l'étude de deux dernières hypothèses faites au début du n° 7.

Il est évident qu'elles se réduisent à une seule,

$$\left\{\begin{aligned} x_1 &= y_1 = 0, \\ x_2 &= y_2 = 0, \end{aligned}\right. \tag{68}$$

car une paire de ces quantités, par exemple $x_1$ et $y_1$, ne peut s'annuler sans qu'il en soit de même de la seconde, $x_2$ et $y_2$, ce qui résulte immédiatement de l'équation (10), si $a > c$.

Or, si $x_1$, $y_1$, $x_2$ et $y_2$ s'annulent à la fois, l'hypothèse ne joue aucun rôle, car les équations (9) et (10) se vérifient indépendamment de cette hypothèse.

*Le cas du mouvement, défini par les conditions (68), sera possible pour l'ellipsoïde de révolution aplati aussi bien que pour l'ellipsoïde allongé.*

Dans le cas considéré, on trouve

$$p=0, \qquad q=0.$$

Les équations (41) et (42) du Chapitre I se réduisent à une seule,

$$x_3'+2\alpha x_3=0,$$

qui donne

$$x_3=\frac{\rho}{a},$$

$\rho$ étant une constante arbitraire.

Quant aux équations (43) du Chapitre précédent, elles deviennent

$$-\alpha^2-\alpha'=\frac{2\lambda}{a}+2\mathcal{A}_0-\frac{\rho^2}{a^2},$$
$$-4\alpha^2+2\alpha'=\frac{2\lambda}{c}+2\mathfrak{S},$$

d'où l'on tire, en éliminant $\lambda$,

$$\alpha^2(4c-a)-\alpha'(a+2c)=2\mathrm{R}-\frac{\rho_2}{a},$$

où il faut poser

$$\mathrm{R}=\mathcal{A}_0 a-\mathfrak{S}c, \qquad c=\frac{v_0}{a_2}, \qquad \alpha=\frac{\alpha'}{2a}.$$

C'est une équation différentielle du second ordre admettant l'intégrale

$$a'^2=\frac{8a^4\Omega+2ha^4-4\rho^2a^3}{2v_0+a^3},$$

qui résulte de l'intégrale des forces vives [l'équation (52) du Chapitre I].

Les composantes $u$, $v$, $w$ suivant les axes $\xi$, $\eta$, $\zeta$ de l'ellipsoïde (28) de la vitesse absolue de chaque point $\xi$, $\eta$, $\zeta$ du liquide s'expriment comme il suit :

$$u = \alpha\xi - \frac{\rho}{a}\eta, \qquad v = \frac{\rho}{a}\xi + \alpha\eta, \qquad w = -2\alpha\zeta.$$

Le mouvement d'entraînement se réduit à la rotation du corps (15) autour de l'axe de rotation de l'ellipsoïde avec une vitesse angulaire qui peut être donnée à l'avance en fonction arbitraire de $t$.

Nous avons ici le cas du mouvement, découvert et étudié par Dirichlet.

L'analyse des articles précédents nous conduit au résultat suivant :

*Un seul cas possible du mouvement, où la surface libre de la masse fluide parfaite, homogène, dont les molécules s'attirent suivant la loi de Newton, conserve pendant le mouvement, sous la pression extérieure constante, la forme d'un ellipsoïde de révolution aplati, est celui de Dirichlet.*

### MOUVEMENT D'UN ELLIPSOÏDE DE RÉVOLUTION ALLONGÉ.

1. Étudions maintenant tous les cas possibles du mouvement d'un ellipsoïde de révolution allongé lorsque

$$c > a. \tag{1}$$

Supposant d'abord qu'aucune des quantités

$$x_1, \quad y_1 \quad \text{et} \quad x_2 + y_2$$

ne s'annule pas, on a (*voir* n° 1 de la Section précédente)

$$y_2^2 = \sigma^2(x_2 + y_2)^2, \tag{2}$$

où l'on a posé maintenant

$$\sigma^2 = \frac{c}{c-a} > 0. \tag{3}$$

L'équation (10) donne

$$x_1^2 = \sigma^2(x_1 + y_1)^2. \tag{4}$$

Par conséquent,

$$y_2 = \varepsilon_1 \sigma (x_2 + y_2), \qquad x_1 = \varepsilon_2 \sigma (x_1 + y_1),$$
$$\sigma = + \sqrt{\frac{c}{c-a}}, \qquad \varepsilon_1 = \pm 1, \qquad \varepsilon_2 = \pm 1.$$

On a donc

$$y_1 = \frac{1 - \varepsilon_2 \sigma}{\varepsilon_2 \sigma} x_1,$$
$$y_2 = \frac{\varepsilon_1 \sigma}{1 - \varepsilon_1 \sigma} x_2.$$

Substituant ces expressions de $y_1$ et de $y_2$ dans (9) (n° 1 de la Section précédente), on trouve

$$\frac{c-a}{\varepsilon_2 \sigma (1 - \varepsilon_1 \sigma)} x_1 x_2 (1 - \varepsilon_1 \varepsilon_2) = 0,$$

ce qui exige qu'on ait

$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 = 1.$$

En entendant maintenant par $\sigma$

(5) $$\pm \sqrt{\frac{c}{c-a}},$$

on peut écrire

(6) $$y_1 = \frac{1-\sigma}{\sigma} x_1,$$

(7) $$y_2 = \frac{\sigma}{1-\sigma} x_2.$$

Dans ce cas, les équations (40) du Chapitre I donnent

(8) $$p = (1-\sigma) x_1, \qquad q = -\sigma x_2.$$

Les équations (41) et (42) du Chapitre I se réduisent aux suivantes :

(9) $$x_1' - \frac{\sigma(2-\sigma)}{1-\sigma} x_2 x_3 + \frac{\sigma}{1-\sigma} r x_2 = (3\sigma - 2) \alpha x_1,$$

(10) $$x_2' - \frac{1-\sigma^2}{\sigma} x_1 x_3 - \frac{1-\sigma}{\sigma} r x_1 = (1 - 3\sigma) \alpha x_2,$$

(11) $$x_1' + \frac{\sigma(1+\sigma)}{1-\sigma} x_2 x_3 + \frac{\sigma}{1-\sigma} r x_2 - \frac{\sigma'}{\sigma(1-\sigma)} x_1 = (1 - 3\sigma) \alpha x_1,$$

(12) $$x_2' + \frac{(2-\sigma)(1-\sigma)}{\sigma} x_1 x_3 - \frac{1-\sigma}{\sigma} r x_1 + \frac{\sigma'}{\sigma(1-\sigma)} x_2 = (3\sigma - 2) \alpha x_2,$$

(13) $$x_3' + 2\alpha x_3 = 0.$$

La différentiation de l'équation (3) donne

$$2\sigma\sigma' = \frac{a'c - c'a}{(c-a)^2} = \frac{2ac(\alpha - \gamma)}{(c-a)^2} = \frac{2.3ac}{(c-a)^2}\alpha = 2.3\,\sigma^2(\sigma^2 - 1)\alpha,$$

d'où

$$\sigma' = 3\,\sigma(\sigma^2 - 1)\alpha.$$

Substituant cette expression de $\sigma'$ dans (11) et (12), il viendra

$$(11_1)\qquad x'_1 + \frac{\sigma(1+\sigma)}{1-\sigma}x_2x_3 \qquad + \frac{\sigma}{1-\sigma}rx_2 = -2(1+3\sigma)\alpha x_1,$$

$$(12_1)\qquad x'_2 + \frac{(2-\sigma)(1-\sigma)}{\sigma}x_1x_3 - \frac{1-\sigma}{\sigma}rx_1 = (1+6\sigma)\alpha x_2.$$

Retranchons maintenant (9) de $(11_1)$.

On trouve

$$x_2x_3 + 3(1-\sigma)\alpha x_1 = 0.$$

En retranchant ensuite (10) de (12), on obtient

$$(1-\sigma)x_1x_3 - 3\sigma^2\alpha x_2 = 0.$$

Ces équations conduisent à la relation suivante,

$$(1-\sigma)x_1x_2(x_3^2 + 9\sigma^2\alpha^2) = 0,$$

d'où l'on conclut que

$$(13_1)\qquad x_3 = 0, \qquad \alpha = 0,$$

car, d'après l'hypothèse faite plus haut, $x_1$ et $x_2$ sont différents de zéro.

La seconde des équations $(13_1)$ montre que *a et, par suite, c doivent rester constants pendant le mouvement.*

Les équations (9), (10), (11), (12) et (13) se réduisent aux deux suivantes :

$$(14)\qquad x'_1 + \frac{\sigma}{1-\sigma}rx_2 = 0,$$

$$(15)\qquad x'_2 + \frac{\sigma-1}{\sigma}rx_1 = 0.$$

2. Il ne nous reste maintenant qu'à satisfaire aux équations (43) du Chapitre précédent.

En se rappelant qu'on a toujours

$$x_3 + y_3 = 0,$$

et en tenant compte de (6), (7), (8) et ($13_1$), on trouve

$$\frac{\lambda}{a} + \mathcal{A} = 0,$$

$$\frac{1-\sigma}{\sigma} x_1^2 + \frac{\sigma}{1-\sigma} x_2^2 + \frac{\lambda}{c} + \mathcal{C} = 0,$$

d'où, en éliminant $\lambda$,

$$(16) \qquad x_1^2 \frac{1-\sigma}{\sigma} + x_2^2 \frac{\sigma}{1-\sigma} = \frac{\mathcal{A} a - \mathcal{C} c}{c}.$$

D'autre part, il est aisé de s'assurer que les équations (14) et (15) admettent l'intégrale

$$x_1^2 \frac{1-\sigma}{\sigma} + x_2^2 \frac{\sigma}{1-\sigma} = \text{const.},$$

qu'on peut écrire comme il suit :

$$(17) \qquad x_1^2 \frac{1-\sigma}{\sigma} + x_2^2 \frac{\sigma}{1-\sigma} = -\rho^2,$$

$\rho$ désignant une constante arbitraire, car on a toujours

$$1 - \sigma < 0.$$

3. Désignons maintenant par $\omega$ la projection de la vitesse angulaire du mouvement d'entraînement sur le plan équatorial de l'ellipsoïde.

On trouve, eu égard à (8),

$$(17_1) \qquad \omega^2 = p^2 + q^2 = x_1^2 (1-\sigma)^2 + x_2^2 \sigma^2,$$

d'où, en vertu de (17),

$$\omega^2 = -\sigma(1-\sigma)\rho^2 = \sigma(\sigma - 1)\rho^2.$$

Il s'ensuit que $\omega$ *reste constante pendant le mouvement,* car il en est de même de $\sigma$ et de $\rho$.

L'équation (16) peut s'écrire

$$\frac{\omega^2}{\sigma(\sigma-1)} = \frac{\mathcal{C}c - \mathcal{A}a}{c}. \tag{18}$$

Or, on a, pour $c > a$,

$$\mathcal{A} = \pi\left[\sigma^2 + \frac{\sigma(\sigma^2-1)}{2}\log\frac{\sigma+1}{\sigma-1}\right],$$

$$\mathcal{C} = -\pi\left[2(\sigma^2-1) - \sigma(\sigma^2-1)\log\frac{\sigma+1}{\sigma-1}\right],$$

où l'on entend par $\sigma$ la valeur positive de racine carrée

$$\sqrt{\frac{c}{c-a}}.$$

On en tire

$$\frac{\mathcal{C}c - \mathcal{A}a}{c} = \pi(\sigma^2-1)\left(\frac{3\sigma^2-1}{2\sigma}\log\frac{\sigma+1}{\sigma-1} - 3\right),$$

et l'équation (18) se réduit à

$$\frac{\omega^2}{\pi} = \varepsilon\,\sigma(\varepsilon\sigma-1)(\sigma^2-1)\left(\frac{3\sigma^2-1}{2\sigma}\log\frac{\sigma+1}{\sigma-1} - 3\right), \tag{19}$$

où l'on a posé

$$\varepsilon = \pm 1.$$

L'équation (19) montre que *la composante suivant le plan équatorial de la vitesse angulaire du mouvement d'entrainement ne dépend que du nombre* $\sigma$, *qui peut varier entre* 1 *et* $+\infty$.

A toute valeur donnée de $\sigma$ correspond une valeur bien déterminée de $\omega$, c'est-à-dire à tout ellipsoïde donné correspond un mouvement bien déterminé du liquide.

Il importe d'étudier la question inverse : *la valeur de* $\omega$ *étant donnée, déterminer la forme de la surface libre de la masse fluide.*

4. Nous allons montrer que $\omega$ ne peut pas être donné arbitrairement

et qu'il doit être compris entre certaines limites, pour que le mouvement considéré soit possible.

Supposons d'abord que

$$\varepsilon = +1,$$

et posons

$$(20) \quad \psi(\sigma) = \sigma(\sigma - 1)(\sigma^2 - 1)\left(\frac{3\sigma^2 - 1}{2\sigma}\log\frac{\sigma + 1}{\sigma - 1} - 3\right) = \psi_1(\sigma) - \psi_2(\sigma),$$

où

$$\psi_1(\sigma) = \frac{(\sigma - 1)(\sigma^2 - 1)(3\sigma^2 - 1)}{2}\log\frac{\sigma + 1}{\sigma - 1},$$

$$\psi_2(\sigma) = 3\sigma(\sigma - 1)(\sigma^2 - 1).$$

Il est évident que

$$\psi_2(1) = 0.$$

D'autre part,

$$\psi_1(1) = \lim_{\sigma = 1}\frac{(\sigma + 1)(3\sigma^2 - 1)}{2}(\sigma - 1)^2\log\frac{\sigma + 1}{\sigma - 1} = 2\lim_{\sigma = 1}(\sigma - 1)^2\log\frac{\sigma + 1}{\sigma - 1} = 0.$$

On a donc

$$\psi(1) = \psi_1(1) - \psi_2(1) = 0.$$

Écrivons maintenant l'égalité (20) sous la forme

$$\psi(\sigma) = \frac{1}{2}\frac{R(\sigma)}{S(\sigma)},$$

en posant

$$R(\sigma) = \log\frac{\sigma + 1}{\sigma - 1} - \frac{6\sigma}{3\sigma^2 - 1},$$

$$S(\sigma) = \frac{1}{(\sigma - 1)^2(\sigma + 1)(3\sigma^2 - 1)}.$$

Chacune de ces fonctions s'annule pour $\sigma = \infty$.

On a donc

$$\psi(\infty) = \frac{1}{2}\lim_{\sigma = \infty}\frac{R'(\sigma)}{S'(\sigma)}.$$

Or,

$$R'(\sigma) = -\frac{8}{(\sigma^2 - 1)(3\sigma^2 - 1)^2},$$

$$S'(\sigma) = -\frac{15\sigma^3 + 3\sigma^2 - 9\sigma - 1}{(\sigma - 1)^3(\sigma + 1)^2(3\sigma^2 - 1)^2}.$$

Par conséquent,

$$\psi(\infty) = \frac{1}{2} \lim_{\sigma=\infty} \frac{8(\sigma-1)^2(\sigma+1)}{15\sigma^3 - 3\sigma^2 - 9\sigma - 1} = \frac{4}{15}.$$

Cela posé, formons la dérivée de la fonction $\psi(\sigma)$.

On trouve

$$\psi'(\sigma) = \frac{(\sigma-1)(15\sigma^3+3\sigma^2-9\sigma-1)}{2}\,\theta(\sigma),$$

où l'on a posé

$$\theta(\sigma) = \log\frac{\sigma+1}{\sigma-1} - 2\,\frac{15\sigma^2+3\sigma-4}{15\sigma^3+3\sigma^2-9\sigma-1}.$$

Il est évident que

$$\theta(1) = +\infty, \qquad \theta(\infty) = 0. \tag{21}$$

D'autre part, on a

$$\theta'(\sigma) = -\frac{2}{\sigma^2-1} - 2\,\frac{\mu(\mu+5)+3(10\sigma+1)}{(\mu\sigma-1)^2},$$

où l'on a posé

$$\mu = 15\sigma^2 + 3\sigma - 9.$$

Remarquant que $\mu$ reste positif pour $\sigma > 1$, on en conclut que $\theta'(\sigma)$ reste négatif pour toutes les valeurs de $\sigma$, plus grandes que l'unité.

Donc $\theta(\sigma)$ va toujours en décroissant, lorsque $\sigma$ varie entre $+1$ et $+\infty$. Il s'ensuit, en vertu de (21), que $\theta(\sigma)$ reste positif, pourvu que $\sigma > 1$.

D'autre part, il est aisé de voir que la fonction

$$\frac{(\sigma-1)(15\sigma^3+3\sigma^2-9\sigma-1)}{2}$$

reste aussi positive pour $\sigma > 1$.

Il s'ensuit que

$$\psi'(\sigma) > 0 \qquad \text{pour} \qquad \sigma > 1.$$

Donc la fonction $\psi(\sigma)$ croît lorsque $\sigma$ croît de $+1$ à $+\infty$.

En se rappelant que

$$\psi(1) = 0, \qquad \psi(\infty) = \frac{4}{15},$$

on s'assure que l'équation (19), qui peut s'écrire

$$\frac{\omega^2}{\pi} = \psi(\sigma), \tag{19}$$

devient impossible si

$$\omega^2 > \frac{4\pi}{15}.$$

Si, au contraire, on donne à $\omega^2$ une valeur quelconque positive, plus petite que $\frac{4\pi}{15}$, l'équation (19) déterminera une valeur correspondante de $\sigma$ et rien qu'une.

Donc, *la constante $\omega^2$ détermine complètement la forme de la surface libre de l'ellipsoïde fluide, pourvu que la valeur donnée de $\omega^2$ soit plus petite que $\frac{4\pi}{15}$.*

*Pour les valeurs de $\omega^2$, plus grandes que $\frac{4\pi}{15}$, le mouvement de l'espèce considérée est impossible.*

5. Supposons maintenant que

$$\varepsilon = -1.$$

Dans ce cas, l'équation (19) devient

$$\frac{\omega^2}{\pi} = \sigma(\sigma+1)(\sigma^2-1)\left(\frac{3\sigma^2-1}{2\sigma}\log\frac{\sigma+1}{\sigma-1} - 3\right).$$

Posons

$$\psi(\sigma) = \frac{(\sigma+1)(\sigma^2-1)(3\sigma^2-1)}{2}\log\frac{\sigma+1}{\sigma-1} - 3\sigma(\sigma+1)(\sigma^2-1).$$

On s'assure, comme précédemment, que

$$\psi(1) = 0, \qquad \psi(+\infty) = \frac{4}{15}.$$

Formons ensuite la dérivée de la fonction $\psi(\sigma)$.

On trouve

$$\psi'(\sigma) = \frac{(\sigma+1)(15\sigma^3-3\sigma^2-9\sigma+1)}{2}\left(\log\frac{\sigma+1}{\sigma-1} - 2\,\frac{15\sigma^2-3\sigma-4}{15\sigma^3-3\sigma^2-9\sigma+1}\right).$$

Considérons la fonction

$$\theta(\sigma) = \log \frac{\sigma + 1}{\sigma - 1} - 2 \frac{15\sigma^2 - 3\sigma - 4}{15\sigma^3 - 3\sigma^2 - 9\sigma + 1}.$$

On voit que

$$\theta(1) = +\infty, \qquad \theta(+\infty) = 0.$$

Or, il est aisé de s'assurer que

$$\theta'(\sigma) = \frac{16(3\sigma - 5)}{(\sigma^2 - 1)(15\sigma^3 - 3\sigma^2 - 9\sigma + 1)^2}.$$

On en conclut que

$$\theta'(\sigma) < 0 \qquad \text{pour} \qquad 1 < \sigma < \frac{5}{3},$$
$$\theta'(\sigma) > 0 \qquad \text{pour} \qquad \sigma > \frac{5}{3}.$$

Il s'ensuit que $\theta(\sigma)$ décroît, lorsque $\sigma$ croît de $1$ à $\frac{5}{3}$, et décroît, lorsque $\sigma$ croît de $\frac{5}{3}$ à l'infini.

En se rappelant que $\theta(\sigma)$ s'annule pour $\sigma = +\infty$, on en conclut que $\theta(\sigma)$ admet un minimum pour $\sigma = \frac{5}{3}$, auquel correspond une valeur négative de $\theta(\sigma)$.

On voit en même temps que $\theta(\sigma)$ admet une seule racine positive et rien qu'une, comprise dans l'intervalle $\left(1, \frac{5}{3}\right)$.

Désignons cette racine par $\sigma_0$.

On aura

$$\psi'(\sigma_0) = 0,$$
$$\psi'(\sigma) > 0 \qquad \text{pour} \qquad 1 < \sigma < \sigma_0,$$
$$\psi'(\sigma) < 0 \qquad \text{pour} \qquad \sigma > \sigma_0.$$

On en conclut que la fonction $\psi(\sigma)$, s'annulant pour $\sigma = 1$, croît de zéro à $\psi(\sigma_0)$, lorsque $\sigma$ varie de $1$ à $\sigma_0$, et décroît ensuite en tendant asymptotiquement vers $\frac{4}{15}$.

L'équation

$$\frac{\omega^2}{\pi} = \psi(\sigma) \tag{22}$$

n'admet pas des racines réelles, *quand*

$$\frac{\omega^2}{\pi} > \psi(\sigma_0)$$

et, dans ce cas, *le mouvement de l'espèce considérée est impossible.*

Dans le cas de

$$\frac{\omega^2}{\pi} < \psi(\sigma_0) \tag{23}$$

nous avons deux cas à distinguer. Si

$$0 < \frac{\omega^2}{\pi} < \frac{4}{15}, \tag{24}$$

l'équation (23) n'admet qu'une seule racine réelle et rien qu'une.

*A toute valeur donnée de* $\omega$, *comprise dans l'intervalle* (24), *correspond un seul cas possible du mouvement où la surface libre de la masse fluide conserve la forme d'un ellipsoïde de révolution allongé dont les axes inégaux* $c$ *et* $a$ *se déterminent complètement à l'aide des équations* (22) *et* (34) (*voir* la Section précédente).

Si

$$\frac{4}{15} < \frac{\omega^2}{\pi} < \psi(\sigma_0) \quad (^1), \tag{25}$$

à toute valeur de $\omega$ correspondent deux racines réelles de l'équation (23).

Donc, *à toute valeur donnée de* $\omega$, *comprise dans l'intervalle* (25), *correspondent deux ellipsoïdes différents dont le mouvement d'entraînement aura la même composante* $\omega$ (*suivant le plan équatorial*) *de la vitesse angulaire* $\Omega$.

Revenons aux équations (6), (7), (8), (14), (15) et ($17_1$).

---

(1) Il est évident que

$$\psi(\sigma_0) > \frac{4}{15}.$$

On peut les écrire comme il suit :

$$(26)\qquad y_1 = \frac{1-\varepsilon\sigma}{\varepsilon\sigma}x_1, \qquad y_2 = \frac{\varepsilon\sigma}{1-\varepsilon\sigma}x_2,$$

$$(27)\qquad p = (1-\varepsilon\sigma)x_1, \qquad q = -\varepsilon\sigma x_2,$$

$$(28)\qquad x'_1 + \frac{\varepsilon\sigma}{1-\varepsilon\sigma}r x_2 = 0,$$

$$(29)\qquad x'_2 - \frac{1-\varepsilon\sigma}{\varepsilon\sigma}r x_1 = 0,$$

$$(30)\qquad p^2+q^2 = (1-\varepsilon\sigma)^2 x_1^2 + \sigma^2 x_2^2 = \omega^2,$$

en entendant par $\sigma$ la valeur positive de la racine carrée

$$\sqrt{\frac{c}{c-a}}$$

et en posant

$$\varepsilon = \pm 1.$$

La valeur de $\omega$ étant donnée convenablement, l'équation (23) déterminera la forme de la surface libre de la masse fluide, si l'on se rappelle encore que

$$a^2 c = v_0,$$

$v_0$ étant une constante donnée à l'avance.

Nous pouvons ensuite donner en fonction arbitraire de $t$ la composante $r$ suivant l'axe de révolution de l'ellipsoïde de la vitesse angulaire $\Omega$ du mouvement d'entraînement de la masse fluide.

La solution du problème se ramène à l'intégration des équations (28) et (29), où l'on peut considérer $\sigma$ et $r$ comme connus.

6. Moyennant l'intégrale connue (30) des équations (28) et (29), on tire de (28)

$$-\frac{dx_1}{\sqrt{\omega^2-(1-\varepsilon\sigma)^2 x_1^2}} = \frac{\varepsilon_1}{1-\varepsilon\sigma}r\,dt,$$

où $\varepsilon_1 = \pm 1$.

On en tire ensuite, en intégrant,

$$\arccos\frac{|1-\varepsilon\sigma|x_1}{\omega} = \varepsilon_1\int r\,dt + \text{const.} = \tau,$$

d'où

$$x_1 = \frac{|1 - \varepsilon\sigma|}{\omega}\cos\tau \tag{31}$$

et, en différentiant,

$$x'_1 = -\frac{\varepsilon_1 \omega r}{|1 - \varepsilon\sigma|}\sin\tau.$$

Substituant cette expression de $x'_1$ dans (28), on trouve

$$x_2 = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}\,\frac{(1 - \varepsilon\sigma)}{|1 - \varepsilon\sigma|}\,\frac{\omega}{\sigma}\sin\tau,$$

ou, plus simplement,

$$x_2 = \varepsilon'\frac{\omega}{\sigma}\sin\tau \qquad (\varepsilon' = \pm 1). \tag{32}$$

Les variables $x_1$ et $x_2$ étant trouvées, on aura, en vertu de (26),

$$y_1 = \frac{1 - \varepsilon\sigma}{\varepsilon\,|1 - \varepsilon\sigma|}\,\frac{\omega}{\sigma}\cos\tau = -\frac{\omega}{\sigma}\cos\tau, \tag{33}$$

car on a toujours

$$\frac{1 - \varepsilon\sigma}{\varepsilon\,|1 - \varepsilon\sigma|} = -1$$

et

$$y_2 = \frac{\varepsilon\sigma}{1 - \varepsilon\sigma}\,\varepsilon'\frac{\omega}{\sigma}\sin\tau = \varepsilon_1\frac{\omega}{1 - \varepsilon\sigma}\sin\tau \qquad (\varepsilon\varepsilon' = \varepsilon_1 = \pm 1). \tag{34}$$

Substituant $x_1$ et $x_2$ (31) et (32) dans (27), on trouve ensuite

$$p = \frac{1 - \varepsilon\sigma}{|1 - \varepsilon\sigma|}\,\omega\cos\tau = -\varepsilon\omega\cos\tau, \tag{35}$$

car

$$\frac{1 - \varepsilon\sigma}{|1 - \varepsilon\sigma|} = -\varepsilon,$$

et

$$q = -\varepsilon\varepsilon'\omega\sin\tau = -\varepsilon_1\omega\sin\tau. \tag{36}$$

6. La fonction $r$ étant donnée, les équations (35) et (36) déterminent le mouvement d'entraînement du liquide.

Les composantes $p$, $q$ et $r$ de la vitesse angulaire $\Omega$ étant connues, nous déterminerons la loi de changement de la direction des axes de l'ellipsoïde, en intégrant les équations connues de Cinématique, linéaires en $\alpha_i$, $\beta_i$ et $\gamma_i$ (*voir* Chap. I).

Il ne nous reste qu'à déterminer les composantes $u$, $v$, $w$ de la vitesse absolue de chaque point $\xi$, $\eta$, $\zeta$ du liquide.

Nous avons déjà vu que dans le cas considéré [*voir* les équations ($13_1$)]

$$x_3 = -y_3 = 0, \qquad \alpha = \beta = 0, \qquad \gamma = -2\alpha = 0.$$

On a donc, en vertu de (16) du Chapitre I,

$$u = x_2\zeta, \qquad v = y_1\zeta,$$
$$w = y_2\xi + x_1\eta,$$

d'où l'on tire, en tenant compte de (31), (32), (33) et (34),

$$u = \varepsilon'\zeta\frac{\omega}{\sigma}\sin\tau, \qquad v = -\zeta\frac{\omega}{\sigma}\cos\tau,$$

$$w = \varepsilon_1\frac{\omega}{1-\varepsilon\sigma}\xi\sin\tau + \frac{\omega}{|1-\varepsilon\sigma|}\eta\cos\tau = \frac{\omega}{1-\varepsilon\sigma}(\varepsilon_1\xi\sin\tau - \varepsilon\eta\cos\tau).$$

De ces équations on déduit aisément les expressions des composantes U, V, W, suivant les axes des coordonnées fixes, de la vitesse absolue de chaque point du liquide.

En intégrant enfin les équations

$$U = x' = f_1(t), \qquad V = y' = f_2(t), \qquad W = z' = f_3(t),$$

nous obtiendrons les équations du mouvement de chaque point de la masse fluide en coordonnées fixes $x$, $y$, $z$.

7. Nous avons supposé, jusqu'à présent, que les quantités

$$x_1, \quad y_1 \quad \text{et} \quad x_2 + y_2$$

soient différentes de zéro.

Considérons maintenant les cas exceptionnels, où certaines de ces quantités s'annulent.

Nous pouvons faire, comme au n° 7 de la Section précédente, quatre hypothèses suivantes :

1° $x_2 + y_2 = 0, \quad x_1 = 0$ ($x_2$, $y_2$ et $y_3$ sont différents de zéro),

2° $y_1 = 0, \quad cx_2 + ay_2 = 0$ ($x_1$, $x_2$ et $y_2$ sont différents de zéro),

3° $y_1 = 0, \quad x_1 = 0$ ($x_2$ et $y_2$ sont différents de zéro),

4° $x_2 + y_2 = 0, \quad cx_2 + ay_2 = 0,$

ou, ce qui reviendra au même,

$$x_2 = 0, \quad y_2 = 0 \quad (x_1 \text{ et } y_1 \text{ sont différents de zéro}).$$

*La première hypothèse est impossible*; en effet, l'équation (10) de la Section précédente devient

$$(c-a)y_2^2 + cy_1^2 = 0$$

et exige, pour $c > a$, qu'on ait

$$y_1 = y_2 = 0,$$

ce qui contredit l'hypothèse faite.

*La seconde hypothèse est aussi inadmissible*, car, dans le cas considéré, l'équation (10) de la Section précédente devient

$$\frac{c(c-a)}{a} x_2^2 + a x_1^2 = 0,$$

ce qui est évidemment impossible, si $c > a$ et $x_1$, $x_2$ sont différents de zéro.

Il ne nous reste qu'à considérer les deux derniers cas.

8. Supposons que

$$x_1 = y_1 = 0.$$

L'équation (10) (Section précédente) donne

$$y_2 = \frac{\varepsilon\sigma}{1 - \varepsilon\sigma} x_2 \quad (\varepsilon = \pm 1).$$

Il est évident que nous retombons ici à un cas particulier du mouvement étudié plus haut.

En posant dans les formules générales du numéro précédent

$$x_1 = y_1 = 0,$$

on trouve, en vertu de (28) et (29),

$$r = 0, \qquad x_2 = \text{const.} = \mu$$

et puis, en vertu de (27),

$$p = 0, \qquad q = -\varepsilon\sigma x_2 = \text{const.} = \omega = -\varepsilon\sigma\mu.$$

Dans le cas considéré, *le mouvement d'entraînement du liquide se réduit à la rotation uniforme de l'ellipsoïde autour de son axe principal* $\eta$ *qui reste immobile dans l'espace.*

Tous les résultats obtenus plus haut, concernant les relations qui existent entre les constantes $\omega$ et $\sigma$, s'appliquent sans changement au cas considéré.

Les projections $u$, $v$, $w$ sur les axes $\xi$, $\eta$, $\zeta$ de la vitesse absolue de chaque point du liquide s'expriment comme il suit :

$$u = \mu\zeta, \qquad v = 0, \qquad w = \frac{\varepsilon\sigma}{1-\varepsilon\sigma}\mu\xi.$$

Quant à U, V, W, on trouve

$$U = u\cos\omega t - w\sin\omega t, \qquad V = 0, \qquad W = u\sin\omega t + w\cos\omega t,$$

en supposant, pour plus de simplicité, que les axes mobiles $\xi$, $\eta$, $\zeta$ et les axes fixes $x$, $y$, $z$ coïncident au moment initial $t = 0$ du mouvement.

*Toutes les molécules du liquide se meuvent dans des plans parallèles, perpendiculaires à l'axe des* $\eta$, *et décrivent, dans le mouvement relatif par rapport au trièdre* ($\mathfrak{M}$), *des ellipses concentriques, ayant pour centre l'origine des coordonnées.*

En se rappelant, en effet, que

$$\begin{aligned}
\xi' &= u - q\zeta + r\eta = (\mu - \omega)\zeta,\\
\eta' &= v - r\xi + p\zeta = 0,\\
\zeta' &= w - p\eta + q\xi = (\mu_1 + \omega)\xi,
\end{aligned}$$

$$\mu_1 = \frac{\varepsilon\sigma}{1-\varepsilon\sigma}x_2 = \frac{\varepsilon\sigma}{1-\varepsilon\sigma}\mu, \qquad \omega = -\varepsilon\sigma\mu,$$

on trouve

$$\eta = \text{const.} = \eta_0.$$

Les équations linéaires

$$\xi' = (1 + \varepsilon\sigma)\mu\zeta, \qquad \zeta' = \frac{\varepsilon\sigma^2}{1 - \varepsilon\sigma}\mu\xi$$

donnent, après l'intégration,

$$\xi = \frac{\sqrt{\sigma^2 - 1}}{\sigma}(B\cos\lambda t - A\sin\lambda t),$$
$$\zeta = A\cos\lambda t + B\sin\lambda t,$$

d'où l'on tire cette équation de la trajectoire relative du point $\xi$, $\eta$, $\zeta$ du liquide :

$$\frac{\xi^2}{a} + \frac{\zeta^2}{c} = \frac{\xi_0^2}{a} + \frac{\zeta_0^2}{c}.$$

Remarquons que le mouvement considéré représente un cas particulier du mouvement stationnaire, indiqué par Riemann dans son Mémoire cité plus haut.

La dernière hypothèse

$$x_2 = y_2 = 0$$

conduit aux résultats analogues.

Dans ce cas, on trouve

$$y_1 = \frac{1 - \varepsilon\sigma}{\varepsilon\sigma}x_1, \qquad x_1 = \text{const.} = \mu,$$
$$p = (1 - \varepsilon\sigma)\mu, \qquad q = 0, \qquad r = 0.$$

*Le mouvement d'entraînement se réduit à la rotation uniforme du corps solide (𝔅) autour de l'axe $\xi$ de l'ellipsoïde; tous les points du liquide se meuvent, dans le mouvement relatif par rapport au trièdre (𝔅), dans des plans perpendiculaires à l'axe des $\xi$ et décrivent dans ces plans les ellipses concentriques ayant pour centre l'origine des coordonnées (le centre de l'ellipsoïde fluide).*

9. Nous avons vu que les mouvements, correspondant aux suppo-

sitions

$$x_2 + y_2 = 0, \qquad x_1 = 0$$

ou

$$y_1 = 0, \qquad c x_2 + a y_2 = 0,$$

sont impossibles, si nous admettons en même temps que

$$(37) \qquad x_2, \quad y_2, \quad y_1,$$

dans le premier cas, et

$$(38) \qquad x_1, \quad x_2, \quad y_2$$

dans le second, restent différents de zéro.

Pour compléter l'analyse, il ne nous reste qu'à considérer le cas où au moins l'une des quantités (37) ou (38) se réduit à zéro.

Chacunede ces suppositions conduit immédiatement aux suivantes :

$$x_1 = y_1 = 0, \qquad x_2 = y_2 = 0.$$

Il est évident que dans ce cas nous retombons au mouvement de Dirichlet, dont nous avons parlé plus haut (*voir* n° 12 de la Section précédente).

10. Rapprochons maintenant, pour plus de clarté, tous les résultats des recherches précédentes.

Envisageons une masse fluide parfaite, incompressible à densité un, dont toutes les parties s'attirent suivant la loi de Newton.

Supposons qu'on exerce en tous les points de la surface, qui limite la masse fluide, une pression constante.

Proposons-nous de trouver tous les cas possibles du mouvement du liquide sous les suppositions suivantes :

$\alpha$. Les composantes de la vitesse suivant les axes des coordonnées de tout point du liquide sont les fonctions linéaires et homogènes des coordonnées.

$\beta$. La surface libre, qui limite la masse fluide, conserve pendant le mouvement la forme d'un ellipsoïde de révolution.

Voici la réponse à la question proposée.

Soient

$$a, b (a = b) \qquad \text{et} \qquad c$$

les carrés de demi-axes de l'ellipsoïde, et

$$abc = a^2c = v_0,$$

$v_0$ étant une constante donnée à l'avance.

Nous avons deux cas à distinguer.

I. Supposons que la surface libre du liquide conserve pendant le mouvement la forme d'un ellipsoïde de révolution aplati, c'est-à-dire

$$a > c.$$

Dans ce cas, il n'existe qu'un seul cas possible du mouvement et rien qu'un.

Le mouvement dont il s'agit se caractérise comme il suit.

Il se décompose en deux mouvements particuliers :

*a*. En mouvement d'entraînement qui se réduit à la rotation d'un corps solide $(\mathcal{B})$ [du trièdre $(\mathcal{B})$] autour d'axe de révolution de l'ellipsoïde, qui ne change pas sa direction, avec une vitesse angulaire $\omega$ ;

*b*. En mouvement relatif par rapport au système invariable $(\mathcal{B})$.

La vitesse $\omega$ peut être donnée à l'avance en fonction arbitraire de $t$.

Désignant par $u_r$, $v_r$, $w_r$ les projections sur les axes $\xi$, $\eta$, $\zeta$ de l'ellipsoïde [les axes du trièdre mobile $(\mathcal{B})$] de la vitesse relative d'un point quelconque $\xi$, $\eta$, $\zeta$ du liquide, on a

$$u_r = \alpha\xi - \left(\frac{\rho}{a} - \omega\right)\eta,$$

$$v_r = \left(\frac{\rho}{a} - \omega\right)\xi + \alpha\eta,$$

$$w_r = -2\alpha\zeta,$$

où

$$\alpha = \frac{a'}{2a},$$

$\rho$ désignant une constante arbitraire.

La loi de changement avec le temps de la grandeur des axes $a$ et $c$ de l'ellipsoïde fluide se détermine par l'intégration de l'équation différentielle du second ordre

$$\text{(A)}\qquad \begin{aligned} &2a''a(a^3+2v_0)-a'^2(8v_0+a^3)\\ &\quad=8a^2(v_0-a^3)\pi\sigma(1+\sigma^2)\left[(1+3\sigma^2)\operatorname{arc\,tang}\frac{1}{\sigma}-3\sigma\right]+4\rho^2a^3,\end{aligned}$$

où

$$\sigma=+\sqrt{\frac{c}{a-c}}=+\sqrt{\frac{v_0}{a^3-v_0}}.$$

Le problème se ramène à une quadrature, car l'équation (A) admet une intégrale qui exprime la loi de forces vives [l'équation ($52_1$) du Chapitre I].

On aura, après l'intégration,

$$a=f(t, C_1, C_2),$$

$C_1$ et $C_2$ étant des constantes arbitraires qui se déterminent à l'aide des valeurs initiales $a_0$ et $a'_0$ de $a$ et $a'$, données à l'avance.

La loi de la vibration de l'axe $c$ résulte de l'équation

$$c=\frac{v_0}{a^2}=\frac{v_0}{f^2(t, C_1, C_2)}.$$

Le cas considéré, indiqué par Dirichlet, est seul possible pour un ellipsoïde de révolution aplati.

B. Supposons maintenant que la surface libre du liquide conserve pendant le mouvement la forme d'un ellipsoïde de révolution allongé, c'est-à-dire qu'on ait

$$a<c,\qquad a=b.$$

Dans ce cas, il existe trois cas différents du mouvement qui se caractérisent comme il suit :

*Premier cas.* — Le mouvement se décompose en mouvement d'entraînement qui se réduit à la rotation de l'ellipsoïde, comme s'il était solide, autour de son centre, et en mouvement relatif par rapport au trièdre ($\mathfrak{M}$) dont les axes $\xi$, $\eta$, $\zeta$ coïncident avec les axes de l'ellipsoïde, $\zeta$ désignant l'axe de révolution.

Soient $p$, $q$, $r$ les projections sur les axes de l'ellipsoïde de la vitesse angulaire $\Omega$ de la rotation de l'ellipsoïde autour de son centre, $\omega$ la projection de $\Omega$ sur le plan équatorial.

On peut donner à l'avance, en fonction arbitraire de $t$, la composante $r$ de $\Omega$.

La composante $\omega$ reste constante pendant le mouvement.

Le mouvement du liquide n'est possible que sous la supposition que

$$\frac{\omega^2}{\pi} < \frac{4}{15}.$$

La valeur de la constante $\omega = \omega_0$, satisfaisant à la condition

$$0 < \frac{\omega_0^2}{\pi} < \frac{4}{15},$$

étant donnée, la forme de la surface libre du liquide sera complètement déterminée.

L'équation

$$\frac{\omega_0^2}{\pi} = \sigma(\sigma - 1)(\sigma^2 - 1)\left(\frac{3\sigma^2 - 1}{2\sigma}\log\frac{\sigma + 1}{\sigma - 1} - 3\right),$$

qui n'admet qu'une seule racine réelle $\sigma_0$ dans l'intervalle $(+1, +\infty)$, déterminera la valeur du rapport

$$\sigma_0 = \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{c} - a}.$$

Cette équation et l'équation

$$a^2 c = v_0,$$

$v_0$ désignant une constante, donnée à l'avance, déterminent les demi-axes $\sqrt{c}$ et $\sqrt{a}$ de l'ellipsoïde.

Les projections $p, q, r$ sur les axes $\xi, \eta, \zeta$ de l'ellipsoïde de la vitesse angulaire $\Omega$ de la rotation de l'ellipsoïde autour de son centre s'expriment en fonction de $t$ comme il suit :

$$\text{(B)} \qquad p = -\omega_0 \cos\tau, \qquad q = -\varepsilon\omega_0 \sin\tau, \qquad r = \text{fonct. donnée de } t,$$

où

$$\varepsilon = \pm 1, \qquad \tau = \varepsilon \int r\,dt + \text{const.}$$

Les composantes $u_r$, $v_r$, $w_r$ suivant les axes de l'ellipsoïde de la vitesse relative de chaque point $\xi$, $\eta$, $\zeta$ du liquide ont les expressions suivantes :

$$
(\mathrm{C})\qquad \left\{
\begin{aligned}
\frac{d\xi}{dt} &= u_r = -\varepsilon\omega_0\frac{\sigma_0+1}{\sigma_0}\zeta\sin\tau + r\eta,\\
\frac{d\eta}{dt} &= v_r = -\omega_0\frac{\sigma_0+1}{\sigma_0}\zeta\cos\tau - r\xi,\\
\frac{d\zeta}{dt} &= w_r = \frac{\sigma_0\omega_0}{1-\sigma_0}(\varepsilon\xi\sin\tau - \eta\cos\tau).
\end{aligned}
\right.
$$

Les formules (B) et (C) déterminent le mouvement considéré de la masse fluide.

*Deuxième cas.* — Les axes de l'ellipsoïde fluide ne changent pas, comme précédemment, leur grandeur pendant le mouvement.

Le mouvement d'entraînement se réduit à la rotation de l'ellipsoïde, comme s'il était un corps solide, autour de son centre.

La composante $r$ suivant l'axe de révolution de l'ellipsoïde de la vitesse angulaire $\Omega$ peut être donnée arbitrairement en fonction de $t$.

La projection $\omega$ sur le plan équatorial de $\Omega$ reste constante pendant le mouvement.

Désignons par $\sigma'$ la racine positive de l'équation

$$\log\frac{\sigma+1}{\sigma-1} = 2\,\frac{15\sigma^2-3\sigma-4}{15\sigma^3-3\sigma^2-9\sigma-1},$$

qui n'admet qu'une seule racine réelle, plus grande que $\frac{4}{15}$ et comprise dans l'intervalle $\left(1, \frac{5}{3}\right)$, et posons

$$\psi(\sigma) = \frac{(\sigma+1)(\sigma^2-1)(3\sigma^2-1)}{2}\log\frac{\sigma+1}{\sigma+1} - 3\sigma(\sigma+1)(\sigma^2-1).$$

Pour que le mouvement soit possible, il faut que la composante $\omega$ satisfasse à l'inégalité

$$\frac{\omega^2}{\pi} < \psi(\sigma') > \frac{4}{15}.$$

*a*. Supposons que la valeur donnée $\omega_0$ de $\omega$ satisfasse à la condition

$$0 < \frac{\omega^2}{\pi} < \frac{4}{15} < \psi(\sigma').$$

Dans ce cas, l'équation

$$\frac{\omega_0^2}{\pi} = \psi(\sigma)$$

n'admet qu'une seule racine réelle $\sigma_0$ et rien qu'une.

Résolvant cette équation, nous aurons

$$\sigma_0 = \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{c-a}}.$$

Cette équation jointe à la suivante

$$abc = a^2 c = v_0,$$

$v_0$ étant la constante donnée, détermine les demi-axes $\sqrt{a}$ et $\sqrt{c}$ de l'ellipsoïde.

Les composantes $p$, $q$, $r$ de la vitesse angulaire $\Omega$ de la rotation de l'ellipsoïde autour de son centre s'expriment en fonction de $t$ comme il suit :

$$\text{(D)} \qquad p = \omega_0 \cos\tau, \qquad q = -\varepsilon\omega_0 \sin\tau, \qquad r = \text{fonct. donnée de } t,$$

où

$$\tau = \varepsilon \int r\,dt + \text{const}, \qquad \varepsilon = \pm 1.$$

Les composantes $u_r$, $v_r$, $w_r$ suivant les axes $\xi$, $\eta$, $\zeta$ de l'ellipsoïde de la vitesse relative de chaque point $\xi$, $\eta$, $\zeta$ du liquide ont les expressions suivantes :

$$\text{(E)} \left\{ \begin{aligned} u_r &= -\varepsilon\omega_0 \frac{1+\sigma_0}{\sigma_0}\zeta \sin\tau + r\eta, \\ v_r &= \omega_0 \frac{\sigma_0 - 1}{\sigma_0}\zeta \cos\tau - r\xi, \\ w_r &= -\varepsilon \frac{\omega_0\sigma_0}{1+\sigma_0}\xi \sin\tau - \frac{\omega_0\sigma_0}{1+\sigma_0}\eta \cos\tau = -\frac{\omega_0\sigma_0}{1+\sigma_0}(\varepsilon\xi \sin\tau + \eta\cos\tau). \end{aligned} \right.$$

Les formules (D) et (E) déterminent le mouvement de la masse fluide.

*Troisième cas.* — Le mouvement d'ellipsoïde allongé est tout à fait analogue à celui de l'ellipsoïde aplati, dont les propriétés caractéristiques ont déjà été signalées au début de ce numéro.

Il faut seulement remarquer que l'équation différentielle (A), dont l'intégration détermine la loi de changement de la grandeur des axes de l'ellipsoïde, doit être remplacée, dans le cas de l'ellipsoïde de révolution allongé, par la suivante :

$$(\mathrm{A}_1) \qquad \begin{aligned} & 2a''a(a^3+2\nu_0)-a'^2(8\nu_0+a_3) \\ & \quad = 8\nu_0 a^2\pi(\sigma^2-1)\left(\frac{3\sigma^2-1}{2\sigma}\log\frac{\sigma+1}{\sigma-1}-3\right)+4\rho^2a^3. \end{aligned}$$

C'est le mouvement indiqué par Dirichlet.

L'équation $(\mathrm{A}_1)$ admet une intégrale (l'intégrale de forces vives) et le problème se ramène à une quadrature.

Les cas du mouvement, indiqués dans ce numéro, sont les seuls possibles pour l'ellipsoïde de révolution, de sorte qu'il n'existe pas d'autres, différents de ceux-ci.

Les deux premiers cas du mouvement de l'ellipsoïde de révolution allongé, que nous venons de signaler, méritent une attention particulière. Ils représentent les exemples du mouvement de la masse fluide de la forme ellipsoïdale, où le mouvement n'est pas stationnaire, tandis que la surface libre du liquide ne change pas sa forme pendant le mouvement et l'ellipsoïde fluide se tourne autour de son centre, comme un corps solide.

Ce résultat contredit l'assertion de Riemann, déjà mentionnée à l'Introduction, mais cette assertion n'est pas exacte en général, comme nous avons déjà dit plus haut.

Nous aurons l'occasion de faire encore une remarque sur ce sujet dans le Chapitre prochain.

*(A suivre.)*