FRANCESCO SEVERI

La base minima pour la totalité des courbes tracées sur une surface algébrique

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 25 (1908), p. 449-468
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1908_3_25__449_0>

LA BASE MINIMA

POUR LA TOTALITÉ

DES COURBES TRACÉES SUR UNE SURFACE ALGÉBRIQUE;

PAR M. FRANCESCO SEVERI, à Padoue.

Je me propose de poursuivre ici mes recherches sur la base des courbes algébriques tracées sur une surface algébrique. Pour m'expliquer sur les questions dont je vais traiter, il faut que je rappelle les résultats de mes travaux antérieurs parus dans les *Comptes rendus* (1) et dans les *Mathematische Annalen* (2).

Je dis que deux courbes algébriques A, B, tracées sur une surface algébrique F, sont *algébriquement équivalentes* et j'écris

$$A \equiv B,$$

lorsqu'elles sont renfermées totalement dans un même système, dont les éléments (courbes) forment une variété algébrique irréductible.

Soient $C_1, C_2, \ldots, C_h$ h courbes tracées sur F, telles que l'on ait entre elles la relation

$$(1)\qquad \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \ldots + \lambda_t C_t \equiv \mu_{t+1} C_{t+1} + \ldots + \mu_h C_h,$$

λ, μ étant des entiers positifs non tous nuls. On dira alors que les h courbes données sont *algébriquement dépendantes*. La relation (1)

(1) Séance du 6 février 1905.

(2) Bd. LXII, 1906, p. 194.

pourra s'écrire pour plus de symétrie sous la forme symbolique

$$\sum_{i=1}^{t} \lambda_i C_i = 0,$$

où l'on a posé $\lambda_{t+1} = -\mu_{t+1}, \ldots, \lambda_h = -\mu_h$.

Eh bien, dans mes travaux cités tout à l'heure, j'ai démontré qu'il est toujours possible de fixer sur la surface F un certain nombre fini ρ de courbes $C_1, C_2, \ldots, C_\rho$, algébriquement indépendantes, telles que toute autre courbe tracée sur F dépende algébriquement des ρ courbes fixées.

On peut donc dire que *toute* courbe C de F est donnée par la relation

$$\lambda C = \lambda_1 C_1 + \ldots + \lambda_\rho C_\rho, \tag{2}$$

où les entiers λ ont des valeurs convenables.

Le groupe des courbes $C_1, C_2, \ldots, C_\rho$ se nommera, partant, une *base* des courbes tracées sur F, et ρ sera dit le *nombre base*.

Dans la démonstration de ce théorème joue un rôle fondamental la proposition remarquable, établie par M. Picard, au sujet des courbes logarithmiques des intégrales simples de troisième espèce attachées à la surface [1]. C'est ainsi que le nombre ρ, envisagé par M. Picard sous le point de vue fonctionnel, vient prendre une simple signification au point de vue géométrique.

Mais une question importante se pose d'elle-même au sujet de la relation (2). Les ρ courbes de la base ne sont pas déterminées d'une manière unique, mais on les peut choisir d'une infinité de manières, pourvu qu'il soit rempli une certaine condition arithmétique que j'ai donnée ailleurs [2].

Cela posé, est-il possible de choisir les ρ courbes mentionnées de telle façon que le coefficient λ résulte égal à l'unité en correspondance de toute courbe C tracée sur F? Une base jouissant de cette propriété sera dite une *base minima*.

Je démontre en ce Mémoire que, *étant donnée une surface algébrique*

---

(1) Picard et Simart, *Théorie des fonctions algébriques*, t. II, p. 241.

(2) *Math. Annalen*, Bd. LXII, p. 214, n° 10.

quelconque F, *il est toujours possible de construire sur* F *une base minima ;* mais à ce but il faut en général augmenter le nombre des courbes qui donnent la base.

Si l'on ne veut pas augmenter le nombre de ces courbes, en généralisant un procédé que j'ai employé autrefois pour des classes particulières de surfaces [1], on arrive à construire ce que je nomme une *base intermédiaire*, c'est-à-dire un groupe de ρ courbes $C_1, C_2, \ldots, C_\rho$ telles qu'en correspondance de toute courbe C existant sur F, l'entier λ de la relation (2) résulte un diviseur des entiers $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\rho$.

On voit que cette particulière base se réduit à une base minima lorsque la relation

$$\lambda C = \lambda(\varepsilon_1 C_1 + \varepsilon_2 C_2 + \ldots + \varepsilon_\rho C_\rho)$$

amène

$$C = \varepsilon_1 C_1 + \varepsilon_2 C_2 + \ldots + \varepsilon_\rho C_\rho,$$

c'est-à-dire lorsque *l'opération de division appliquée aux courbes d'un système algébrique* est univoque.

Cela arrive pour des surfaces particulières, dont je donne quelques exemples au n° 4 de ce Mémoire.

Je démontre en général que *le nombre des systèmes distincts qu'on obtient en divisant par un nombre entier* λ *un système algébrique donné, admet un maximum fini* σ *indépendant de* λ *et du système envisagé.*

On en tire que :

La base minima est formée par un groupe de $\rho + \sigma - 1$ *courbes.*

Toute courbe de la surface F donnée s'obtient pourtant par les opérations d'addition et de soustraction appliquées aux courbes de la base minima.

§ 1. — Construction d'une base intermédiaire.

1. Soit $(C_1 C_2 \ldots C_\rho)$ une base des courbes algébriques tracées sur la surface F. Si $\rho > 2$, on peut supposer que deux (au moins) des systèmes linéaires

$$|C_1|, \quad |C_2|, \quad \ldots, \quad |C_\rho|$$

jouissent des propriétés suivantes :

---

(1) *Sulle corrispondenze fra i punti di una curva algebrica e sopra certe classi di superficie* [*Memorie della R. Acc. delle Scienze di Torino*, (2), t. LIV, 1903].

1° L'ordre de leurs courbes est plus grand que l'ordre d'une courbe canonique de F (y compris les courbes exceptionnelles).

2° La *dimension virtuelle* attachée à chacun de ces systèmes est positive.

3° Leurs multiples d'ordre assez élevé renferment (partiellement) tout système donné à l'avance.

Ces conditions sont évidemment satisfaites si l'on prend

$$C_1 = A, \qquad C_2 = A + B,$$

A étant un multiple convenable d'une section plane (ou hyperplane) de F, et B une courbe algébriquement indépendante de A.

Cela posé, rappelons-nous la définition du *déterminant de la base* (¹). Étant

$$n_{ik} = n_{ki} = [C_i C_k]$$

le nombre des points communs aux courbes C_i, C_k (ou le degré virtuel de C_i, lorsque $k = i$), le déterminant de la base est donné par la matrice

$$\begin{vmatrix} n_{11} & n_{12} & \dots & n_{1\rho} \\ n_{21} & n_{22} & \dots & n_{2\rho} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ n_{\rho 1} & n_{\rho 2} & \dots & n_{\rho\rho} \end{vmatrix}.$$

On sait que *ce déterminant ne peut pas être nul*. Comme sa valeur est un nombre entier (positif ou négatif), *on pourra envisager une base dont le déterminant ait la valeur absolue minima. Eh bien, je dis qu'on obtient ainsi une base intermédiaire.*

Il suffira de prouver qu'étant donnée une base non intermédiaire $(C_1 C_2 \dots C_\rho)$ de déterminant D, on peut toujours construire une base nouvelle $(\Gamma_1 \Gamma_2 \dots \Gamma_\rho)$ dont le déterminant Δ ait une valeur absolue $|\Delta| < |D|$.

En effet, la base $(C_1 C_2 \dots C_\rho)$ n'étant pas intermédiaire, on pourra choisir sur F une courbe algébrique C telle que le coefficient λ de la relation

$$(3) \qquad \lambda C = \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \dots + \lambda_\rho C_\rho$$

(¹) *Math. Annalen,* Mémoire cité, paragraphe VI.

existant entre C et les courbes de la base, ne divise pas tout coefficient $\lambda_i (i = 1, 2, \ldots, \rho)$. Supposons, par exemple, que λ ne divise pas le coefficient λ_1 et désignons par θ le plus grand commun diviseur des entiers λ, λ_1. On pourra alors déterminer deux autres entiers μ, μ_1 satisfaisant à l'équation

$$\lambda\mu + \lambda_1\mu_1 = \theta.$$

Cela posé, supposons qu'il existe une courbe Γ_1 répondant au symbole

$$\mu C_1 + \mu_1 C,$$

et exprimons cette courbe au moyen des courbes $(C_1 C_2 \ldots C_\rho)$. On a tout d'abord

$$\lambda\Gamma_1 = \lambda\mu C_1 + \lambda\mu_1 C,$$

et, en comparant avec la (3),

$$\lambda\Gamma_1 = \theta C_1 + \mu_1\lambda_2 C_2 + \ldots + \mu_1\lambda_\rho C_\rho.$$

Considérons maintenant le groupe de ρ courbes

$$\Gamma_1, \quad \Gamma_2 = C_2, \quad \Gamma_3 = C_3, \quad \ldots, \quad \Gamma_\rho = C_\rho.$$

Entre le déterminant D de la base $(C_1 C_2 \ldots C_\rho)$ et le déterminant Δ de ce dernier groupe $(\Gamma_1 \ldots \Gamma_\rho)$, on a la relation [1]

$$\lambda^2\Delta = \theta^2 D. \tag{4}$$

Il s'ensuit que le déterminant Δ n'est pas nul et, par suite, que le groupe $(\Gamma_1\Gamma_2 \ldots \Gamma_\rho)$ forme une base [2]. Comme $\frac{\lambda^2}{\theta^2}$ est un entier > 1, Δ résultera un diviseur de D, et l'on aura par conséquent

$$|\Delta| < |D|.$$

Lorsque le symbole $\mu C_1 + \mu_1 C$ ne représente pas des courbes effectives, on posera

$$\Gamma_1 = \mu C_1 + \mu_1 C + k C_2, \tag{5}$$

---

[1] *Math. Annalen*, Mémoire cité, formule (19).
[2] *Ibid.*, théorème VII.

k étant un entier positif si grand qu'il existe le système

$$|\mu C_1 + \mu_1 C + k C_2|.$$

Cela est toujours possible, car, par l'hypothèse 3°, parmi les systèmes $|C_2|, \ldots, |C_\rho|$ on en trouve toujours un (au moins) dont les multiples d'ordre assez élevé renferment toute courbe donnée à l'avance.

Entre le déterminant Δ du groupe $(\Gamma_1 \Gamma_2 \ldots \Gamma_\rho)$ et le déterminant D, on a encore la relation (4), car, dans le déterminant formé par les coefficients des équivalences qui lient $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_\rho$ aux courbes de la base $(C_1 C_2 \ldots C_\rho)$, on doit changer seulement l'élément $\mu_1 \lambda_2$ en $\mu_1 \lambda_2 + \lambda k$.

Remarque I. — Le procédé de la démonstration nous prouve aussi que *le déterminant d'une base intermédiaire est un diviseur commun aux déterminants des différentes bases.*

Remarque II. — Comme la courbe Γ_2 coïncide avec C_2 et Γ_1 à cause de la relation (5) renferme un multiple arbitrairement fixé de C_2, les deux courbes Γ_1, Γ_2 de la base $(\Gamma_1 \Gamma_2 \ldots \Gamma_\rho)$ viennent satisfaire aux hypothèses 1°, 2°, 3°. En poursuivant de proche en proche, on voit que de telles hypothèses peuvent être faites au moins par rapport à deux courbes d'une base intermédiaire.

Cette remarque nous sera utile dans la suite.

2. Envisageons maintenant le cas où $\rho = 1$. On peut prendre alors pour base toute courbe C de la surface F : le déterminant relatif se réduit au degré virtuel n de C, qui résultera nécessairement un entier > 0.

S'il existe sur F une base intermédiaire (C), comme pour toute courbe D de la surface on doit avoir

$$\mu D \equiv \mu\theta C,$$

la courbe C aura le degré virtuel *minimum* parmi les courbes tracées sur F. Le degré de toute courbe D résultera un multiple de n, et le nombre [DE] des points où D coupe une autre courbe quelconque E de la surface, résultera un multiple du nombre [CE]. En particulier, en prenant pour courbe E une section plane de F, on voit que C a aussi l'ordre minimum parmi les courbes appartenant à F.

Mais *peut-on affirmer qu'en prenant sur la surface* F, *dont le nombre base a la valeur* $\rho = 1$, *une courbe de degré (ou d'ordre) minimum, on obtient toujours une base intermédiaire?*

Malheureusement nous ne sommes pas en mesure de répondre à cette demande; toutefois les exemples que nous connaissons de surfaces ayant $\rho = 1$ (le plan, les surfaces hyperelliptiques de Jacobi et de Picard, la surface la plus générale d'un ordre donné, etc.) tendent à faire pencher vers l'affirmative.

Mais cette difficulté n'empêche pas de prouver l'existence d'une base intermédiaire sur la surface F ayant $\rho = 1$; il suffit pour cela d'élever à deux le nombre des courbes donnant la base.

Si l'on part, en effet, d'une base (C) qui ne soit pas intermédiaire, on pourra toujours considérer une courbe D telle que dans la relation

$$\lambda D = \lambda_1 C$$

λ ne divise pas λ_1. En disant θ le plus grand commun diviseur de λ, λ_1, on construira, comme dans le cas $\rho > 1$, la courbe virtuelle ou effective

$$\Gamma = \mu C + \mu_1 D,$$

μ, μ_1 étant deux entiers satisfaisant à la condition $\lambda\mu + \lambda_1\mu_1 = \theta$. On en tire

$$\lambda\Gamma = \theta C,$$

c'est-à-dire que la courbe Γ peut être virtuelle, mais le multiple $\lambda\Gamma$ est toujours une courbe effective.

Comme θ est un diviseur de λ, l'ordre de Γ vient être un diviseur de l'ordre de C. En poursuivant de proche en proche *on arrive à une dernière courbe (virtuelle ou effective) dont l'ordre divise l'ordre de toute autre courbe de* F; *c'est là une base intermédiaire.*

Lorsque la dernière courbe est virtuelle, on pourra toujours la regarder comme la différence A — B de deux courbes effectives A, B [1], de sorte que *la base intermédiaire sera formée par ces deux courbes effectives.*

[1] *Voir* Severi, *Rendiconti del R. Istituto lombardo*, (2), t. XXXVIII, 1905, p. 859.

§ 2. — L'opération de division appliquée aux systèmes de courbes d'une surface algébrique.

3. Lorsque entre deux courbes A, B d'une surface F existe la relation

$$\lambda A \equiv B \qquad (\lambda \text{ entier positif}),$$

on dit que le système $\{A\}$ est obtenu en divisant par λ le système $\{B\}$.

L'opération de division n'est évidemment toujours possible; et *elle n'est pas nécessairement univoque*, comme nous le verrons plus tard sur quelques exemples.

Maintenant nous nous proposons de trouver en général une limite supérieure, dépendante seulement de la surface, pour le nombre des systèmes distincts qu'on obtient en divisant un système continu quelconque par un nombre entier.

Soit m l'ordre de la courbe composée d'une courbe canonique et des courbes exceptionnelles de F, et soit A_1 une courbe d'ordre $l > m$, tracée sur la surface F de genre numérique p_a, et donnant lieu à une dimension virtuelle

$$n - \pi + p_a + 1 \geq 0,$$

où n, π sont respectivement le degré et le genre virtuels de A_1. On pourra alors parler du système complet *bien déterminé* $\{A_1\}$ (¹).

S'il y a sur F des systèmes continus $\{A\}$ distincts de $\{A_1\}$, satisfaisant aux conditions

$$n = [A_1 A_1] = [A A_1] = [AA],$$

un multiple convenable de A_1 résultera algébriquement équivalent au même multiple de A (²), et par suite les systèmes $\{A\}$ auront le même ordre et le même genre de $\{A_1\}$; de sorte que tout système $\{A\}$ sera déterminé univoquement par une quelconque de ses courbes. Le nombre des systèmes $\{A\}$ étant évidemment fini, nous pouvons désigner ces différents systèmes par

$$\{A_2\}, \quad \{A_3\}, \quad \ldots, \quad \{A_\sigma\}.$$

(¹) SEVERI, *Atti del R. Istituto veneto*, t. LXV, 1906, p. 638.
(²) *Math. Annalen*, Mémoire cité, théorème I.

Soit $\{B_1\}$ un système continu satisfaisant aux mêmes conditions de $\{A_1\}$ (ordre $l' > m$, dimension virtuelle non négative). Alors les courbes, *a priori* virtuelles,

$$B_1 + A_1 - A_2, \quad B_1 + A_1 - A_3, \quad \ldots, \quad B_1 + A_1 - A_\sigma,$$

auront l'ordre $l' > m$ et la dimension virtuelle non négative, de sorte qu'on pourra envisager les systèmes continus

$$\{B_i\} = \{B_1 + A_1 - A_i\} \qquad (i = 2, 3, \ldots, \sigma),$$

satisfaisant aux conditions

$$[B_1 B_1] = [B_1 B_i] = [B_i B_i].$$

On en tire que le nombre σ' des systèmes $\{B_i\}$ est $\leqq \sigma$. En partant des systèmes $\{B_i\}$ on arrive analoguement à la conclusion $\sigma \leqq \sigma'$, et l'on déduit par suite $\sigma = \sigma'$.

Le nombre σ reste donc indépendant du système $\{A\}$ dont on part, pourvu que soient remplies les conditions relatives à l'ordre et à la dimension virtuelle du système.

Cela posé, considérons une courbe quelconque C de la surface et supposons qu'il existe δ courbes $D_1, D_2, \ldots, D_\delta$ telles qu'il soit

$$\lambda D_1 \equiv \lambda D_2 \equiv \ldots \equiv \lambda D_\delta \equiv C,$$

c'est-à-dire qu'en divisant par λ le système $\{C\}$, on obtient δ systèmes *distincts*. Je dis que $\delta \leqq \sigma$.

Envisageons en effet les courbes (*a priori* virtuelles)

$$A_1 + D_1 - D_2, \quad A_1 + D_1 - D_3, \quad \ldots, \quad A_1 + D_1 - D_\delta.$$

Comme l'ordre de ces courbes est $l > m$ et la dimension virtuelle en est $\geqq 0$, il s'agira de courbes effectives et les systèmes continus

$$\{A'_i\} = \{A_1 + D_1 - D_i\} \qquad (i = 2, 3, \ldots, \delta),$$

satisfaisant aux conditions

$$[A_1 A_1] = [A_1 A'_i] = [A'_i A'_i],$$

seront compris entre les systèmes $\{A_i\}$. Il faudra donc que $\delta \leqq \sigma$. On arrive, partant, à la conclusion suivante :

Le nombre des systèmes continus distincts qu'on peut obtenir en divisant un système quelconque par un nombre entier, ne peut pas surpasser une certaine limite σ dépendant seulement de la surface.

Remarque. — Considérons deux courbes C, D satisfaisant aux conditions

$$[CC] = [CD] = [DD],$$

c'est-à-dire deux sous-multiples d'un même système suivant un certain nombre entier. On démontre aisément que *le moindre entier pour lequel* $\lambda C \equiv \lambda D$ *ne peut pas surpasser la limite* σ *dont on parle ci-dessus.* En effet, les $\lambda - 1$ systèmes distincts

$$\{A_1 + iC - iD\} \qquad (i = 1, \ldots, \lambda - 1)$$

sont des systèmes $\{A_i\}$ et, par suite, $\lambda - 1 \leqq \sigma - 1$.

4. *Exemples de surfaces sur lesquelles la division est univoque.* — Un exemple de surfaces ayant $\sigma = 1$ (ainsi que $\rho = 1$) est donné, d'après M. Noether, par les surfaces (de l'espace S_3) les plus générales de leur ordre; un deuxième exemple, où ρ peut être quelconque, est donné par les surfaces des couples de points de deux courbes irrationnelles (distinctes ou coïncidentes) ([1]).

Un autre exemple très intéressant est donné par la proposition suivante :

Sur toute surface, régulière ou irrégulière, ayant la courbe canonique d'ordre zéro, la division est une opération univoque.

On sait, d'après M. Enriques ([2]), que le genre numérique d'une surface F ayant la courbe canonique d'ordre zéro (et par suite $p_g = 1$), peut recevoir seulement les valeurs

$$p_a = 1 \qquad \text{ou} \qquad p_a = -1,$$

c'est-à-dire qu'il s'agit ou bien d'une surface régulière ou bien d'une surface hyperelliptique de rang 1 (surface de Jacobi ou de Picard).

([1]) Severi, *Sulle corrispondenze fra i punti di una curva algebrica* (cité). Remarque à la fin du n° 11.

([2]) *Rendiconti della R. Acc. di Bologna*, 9 décembre 1906.

On doit démontrer que deux courbes C, D tracées sur la surface F et satisfaisant aux conditions

$$[CC] = [CD] = [DD],$$

sont linéairement ou algébriquement équivalentes (suivant que F est régulière ou irrégulière).

Considérons d'abord le cas où F est régulière. Si la courbe C, de genre π, est irréductible et dépourvue de points multiples, le système $|D|$, du même ordre de $|C|$, doit renfermer, totalement, le système $|C|$, car il ne peut pas couper sur une C une série $g_{2\pi-2}$ de dimension $> \pi - 1$.

A la même conclusion on arrive aussi lorsque les C, D sont des courbes quelconques. Envisageons en effet sur F une courbe H irréductible de genre ρ, et observons qu'il existe le système linéaire

$$|K| = |H + C - D|,$$

car à la courbe $H + C - D$ est attachée une dimension virtuelle positive ($= \rho$). En appliquant le raisonnement exposé ci-dessus, on conclut que

$$H \equiv K \quad \text{et, par suite,} \quad C \equiv D.$$

Examinons maintenant l'hypothèse $p_a = -1$.

Si la surface F a le diviseur $\delta = 1$, c'est-à-dire s'il s'agit d'une surface de Jacobi, surface des couples de points d'une courbe Γ de genre 2, la proposition qu'on veut établir est contenue, quoique sous une forme différente, dans mon Mémoire cité au commencement de ce numéro. Mais on peut établir la chose par une voie géométrique, comme il suit.

Envisageons sur F le système complet Σ, de genre, indice, degré, dimension, égaux à 2, qui renferme totalement les courbes C répondant aux points de Γ. On démontre aisément, comme nous l'avons fait, M. Enriques et moi, dans notre Mémoire sur les surfaces hyperelliptiques, que toute courbe D satisfaisant aux conditions

$$[CC] = [CD] = [DD] = 2$$

appartient à Σ. En effet, s'il n'en était pas ainsi, la variété ∞^1, de genre 2, formée par les courbes de Σ issues par un point de D, renfermerait une involution de genre et ordre égaux à 2, qui répondrait aux points de D.

On en tire que deux courbes H, K satisfaisant aux conditions arithmétiques

$$(6) \qquad [HH] = [HK] = [KK],$$

appartiennent à un même système continu, car le système continu bien déterminé $\{C + H - K\}$, auquel est attachée une dimension virtuelle $= 0$, coïncide avec Σ.

Si le diviseur de F a une valeur $\delta > 1$, c'est-à-dire si F est birationnellement identique à une involution engendrée sur une surface de Jacobi Φ par une transformation de deuxième espèce cyclique d'ordre δ, on considérera sur F le système continu Σ_δ répondant au système Σ de Φ. Les courbes C_δ de Σ_δ ont le genre effectif 2 et possèdent $\delta - 1$ points doubles. Je dis, réciproquement, que toute courbe D_δ douée de $\delta - 1$ points doubles et satisfaisant, par rapport à C_δ, aux conditions arithmétiques habituelles, appartient à Σ_δ.

En effet, par ce qui précède, à D_δ doit répondre sur Φ une courbe D appartenant au système continu déterminé par une C et par les $\delta - 1$ courbes C', C'', ..., $C^{(\delta-1)}$ conjuguées à C, et comme les courbes D, $C + C' + \ldots + C^{(\delta-1)}$ ont le même nombre $\delta(\delta - 1)$ de points doubles, en appliquant un principe de continuité dû à M. Enriques, on en tire que D ne peut pas contenir une partie irréductible où varient deux ou plusieurs points répondant à un même point mobile sur D_δ; c'est-à-dire que D est formé par δ courbes conjuguées du système Σ et, par suite, que D_δ appartient à Σ_δ.

Si la courbe D_δ, tout en satisfaisant aux conditions arithmétiques habituelles, n'a pas de points doubles, de sorte que son genre a la valeur $\delta + 1$, le système linéaire $|D_\delta|$ aura la dimension $\delta - 1$, et l'on pourra toujours envisager une courbe de ce système douée de $\delta - 1$ points doubles. Cette courbe, et par conséquent toute courbe D_δ, restera algébriquement équivalente à C_δ.

Cela posé, on en déduit tout de suite, comme dans le cas traité ci-dessus d'une surface de Jacobi, que deux courbes H, K satisfaisant aux conditions (6) sont aussi équivalentes (algébriquement).

C. Q. F. D.

En particulier, comme une surface hyperelliptique quelconque de genre 1 (régulière ou non) a la courbe canonique d'ordre zéro, on pourra énoncer que, *sur toute surface hyperelliptique de genre géométrique* 1, *la division est une opération univoque*.

Il s'ensuit que *sur ces surfaces toute base intermédiaire est une base minima*.

5. *Exemples de surfaces où la division n'est pas univoque*. — On a de tels exemples en considérant les surfaces qui ne possèdent pas de courbes canoniques, tout en renfermant des courbes pluricanoniques d'ordre zéro. S'il s'agit de surfaces régulières, on tombe sur les surfaces, étudiées par M. Enriques, qui se ramènent birationnellement à une surface d'ordre 6 passant doublement par les arêtes d'un tétraèdre (1); s'il s'agit de surfaces irrégulières, on tombe sur des surfaces hyperelliptiques de rang > 1 (2).

§ 3. — Construction d'une base minima.

6. Considérons tout d'abord le cas où le nombre base ρ de la surface F soit > 1 : on peut supposer (n° 1, *Remarque II*) que deux courbes d'une base intermédiaire $(C_1 C_2 \ldots C_\rho)$ construite sur F, remplissent les conditions 1°, 2°, 3° du n° 1.

Soit C_1 une de ces courbes et soit σ le caractère de la surface F introduit au n° 3. On aura alors justement $\sigma - 1$ systèmes continus

$$\{D_1\}, \quad \{D_2\}, \quad \ldots, \quad \{D_{\sigma-1}\},$$

tels qu'il soit

$$[C_1 C_1] = [C_1 D_i] = [D_i D_i] \qquad (i = 1, 2, \ldots, \sigma - 1).$$

Je dis que *le groupe des courbes*

$$C_1, \quad C_2, \quad \ldots, \quad C_\rho, \quad D_1, \quad D_2, \quad \ldots, \quad D_{\sigma-1}$$

constitue une base minima, c'est-à-dire qu'étant donnée une courbe

---

(1) *Memorie della Società italiana delle Scienze*, (3), t. XIV, 1906, p. 327.

(2) ENRIQUES e SEVERI, *Rendiconti della R. Acc. dei Lincei*, 5 janvier 1908.

quelconque C de la surface F, on a toujours une relation de la forme

$$C \equiv \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \ldots + \lambda_\rho C_\rho + \mu_1 D_1 + \ldots + \mu_{\sigma-1} D_{\sigma-1},$$

les λ, μ étant des nombres entiers déterminés par C.

En effet, comme $(C_1 C_2 \ldots C_\rho)$ est une base intermédiaire, on a

$$\varepsilon C \equiv \varepsilon\lambda_1 C_1 + \varepsilon\lambda_2 C_2 + \ldots + \varepsilon\lambda_\rho C_\rho,$$

les ε, λ étant des entiers. Cela posé, envisageons les deux courbes

$$C \qquad \text{et} \qquad D \equiv \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \ldots + \lambda_\rho C_\rho$$

dont la deuxième, tout en étant un sous-multiple d'une courbe effective, peut être une courbe virtuelle.

Moyennant C, D on peut construire deux courbes

$$C_0 \equiv C + \delta C_1, \qquad D_0 \equiv D + \delta C_1$$

(où δ est un entier assez grand) ayant l'ordre aussi élevé qu'on veut, la dimension virtuelle positive et satisfaisant en outre aux relations

$$[C_0 C_0] = [C_0 D_0] = [D_0 D_0]; \tag{7}$$

de sorte que les symboles

$$D_0, \quad D_0 + C_1 - D_1, \quad D_0 + C_1 - D_2, \quad \ldots, \quad D_0 + C_1 - D_{\sigma-1} \tag{8}$$

représentent σ courbes effectives algébriquement distinctes, satisfaisant par rapport à C_0 aux conditions du type (7). Il s'ensuit, par la définition même du caractère σ, que C_0 est algébriquement équivalente à une courbe de la série (8); soit, par exemple,

$$C_0 \equiv D_0 + C_1 - D_1$$

et, par suite,

$$C \equiv (\lambda_1 + 1) C_1 + \lambda_2 C_2 + \ldots + \lambda_\rho C_\rho - D_1. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

On obtient donc $\rho + \sigma - 1$ courbes donnant la base minima.

Considérons maintenant le cas où $\rho = 1$. Comme un multiple convenable de la courbe virtuelle ou effective $C_1 \equiv A - B$, donnant sur F une base intermédiaire, peut représenter une courbe d'un ordre arbitrairement grand et de dimension virtuelle positive, en désignant par D un tel multiple et par

$$\{D_1\},\quad \{D_2\},\quad \ldots,\quad \{D_{\sigma-1}\}$$

les $\sigma - 1$ systèmes continus satisfaisant par rapport à D aux conditions arithmétiques habituelles, on en déduit, comme dans le cas $\rho > 1$, que la base minima sur F est donnée par les courbes

$$C_1,\quad D_1,\quad D_2,\quad \ldots,\quad D_{\sigma-1},$$

dont la première peut être virtuelle. Si l'on ne veut pas parler de courbes virtuelles, on aura à considérer la base (minima) formée par les courbes A, B, D_1, D_2, ..., $D_{\sigma-1}$, qui sont au nombre de $\sigma + 1 (= \rho + \sigma)$.

7. On obtient donc le théorème suivant :

Sur toute surface algébrique on peut toujours construire une base minima des courbes qui lui appartiennent. Cette base est formée par $\rho + \sigma - 1$ courbes, ρ étant le nombre base de la surface et σ le nombre maximum des systèmes continus distincts, qu'on obtient en divisant par un entier un système continu quelconque tracé sur la surface.

Pour $\rho = 1$ nous ne sommes pas en mesure d'exclure qu'une des σ courbes de la base minima devienne virtuelle ; tout en admettant que ce cas soit possible, on peut toutefois construire une base minima formée par $\sigma + 1$ courbes effectives.

8. *Exemple :* La base minima sur une surface de Kummer à modules arbitraires.

La construction d'une base sur la surface de Kummer Φ (surface de quatrième ordre possédant 16 points doubles) est singulièrement instructive, car elle *donne l'occasion d'éclaircir, au point de vue invariantif, le rôle qui est joué, dans la formation de la base, par les points multiples isolés d'une surface.*

D'après un théorème bien connu de M. Humbert, toute courbe algébrique tracée sur Φ a l'ordre pair $2n$ et peut être envisagée comme l'intersection complète de Φ avec une surface d'ordre n, qui touche Φ le long de la courbe donnée.

Au premier abord on serait donc tenté de conclure que, si C est une section plane de Φ, toute courbe D de la surface est liée à C par une relation du type

$$2D \equiv nC$$

et, par suite, que le nombre base de Φ a la valeur $\rho = 1$, (C) étant une base. Mais, au point de vue des transformations birationnelles, il faut envisager la chose d'une manière différente. En effet, si D est une conique de la surface, comme le degré virtuel de D a la valeur -2, la courbe 2D aura le degré -8 et par conséquent elle ne pourra pas être équivalente à une section plane de Φ.

Pour obtenir une telle section *il faut ajouter à la courbe* 2D *les six points doubles de* Φ *qui lui appartiennent*, en tant qu'on envisage ces points ou, si on l'aime mieux, leurs domaines, comme des courbes rationnelles de degré virtuel -2.

Ce n'est pas une convention qu'on établit ainsi; car en transformant la Φ en une surface Ψ de l'hyperespace dépourvue de points multiples et de courbes exceptionnelles (moyennant le système linéaire des surfaces d'un ordre arbitraire passant par les 16 points doubles) on obtient sur Ψ, en correspondance des points doubles, 16 *courbes* rationnelles de degré virtuel -2 (et 16 courbes analogues répondant aux coniques de Φ). En faisant abstraction des points doubles de Φ, on n'aurait donc pas de propriétés invariantes vis-à-vis des transformations birationnelles.

Envisageons le nombre ρ d'après M. Picard, en considérant les courbes logarithmiques des intégrales simples de troisième espèce attachées à Φ, et désignons par $x = 0$ l'équation du plan tangent à Φ le long de la conique D, et par $y = 0$ l'équation d'un plan arbitraire de l'espace, coupant Φ suivant la courbe C.

Alors on peut dire que l'intégrale de troisième espèce $\log\frac{x}{y}$ possède comme uniques lignes logarithmiques les D, C, en tant qu'on ne regarde pas les points doubles de Φ comme des courbes, c'est-à-dire lorsqu'on envisage la question au point de vue projectif (¹); mais, si l'on veut énoncer une propriété invariante vis-à-vis des transformations birationnelles, il faut dire que $\log\frac{x}{y}$ possède, outre les C, D, *six*

(¹) C'est le point de vue de M. Picard. *Voir* PICARD et SIMART, t. II, p. 452.

courbes logarithmiques infiniment petites se réduisant aux domaines des six points doubles appartenant à $x=0$.

Il suit de ces remarques qu'à la formation de la base doivent contribuer aussi les points doubles de Φ; c'est-à-dire que, pour obtenir une véritable base au point de vue invariantif, on doit considérer le groupe formé par une courbe quelconque de Φ, par exemple par une conique, et par un certain nombre de points doubles. Il est aisé de voir qu'il faut prendre *tous* les 16 points doubles.

Considérons, en effet, le déterminant Δ du groupe formé par une conique D_1 et par les points doubles de Φ, regardés comme des courbes rationnelles $D_2, D_3, \ldots, D_{17}$, de degré virtuel -2. Si $D_2, D_3, \ldots, D_7$ sont les points doubles appartenant à D_1, en posant

$$n_{ik}=[D_i D_k],$$

on aura

$$n_{ii}=-2, \qquad n_{12}=n_{13}=\ldots=n_{17}=1, \qquad n_{1j}=0 \qquad (j>7),$$
$$n_{kl}=0 \qquad (k, l \neq 1).$$

Par des calculs faciles, on trouve que le déterminant de dix-septième ordre Δ a la valeur 2^{16}. Cela signifie que les 17 courbes envisagées ne sont pas dépendantes et, par suite, qu'elles sont toutes essentielles dans la formation de la base. On conclut, partant, que *le nombre base d'une surface de Kummer à modules arbitraires a la valeur* $\rho=17$.

Remarque. — Les considérations développées dans le cas particulier d'une surface de Kummer, nous montrent qu'en ayant une surface Φ donnée de d points doubles coniques isolés, lorsqu'on veut regarder ces points doubles comme des courbes rationnelles de degré -2, ce qui est nécessaire au point de vue invariantif, on doit modifier la *formule de M. Picard* (¹) liant le nombre base ρ au nombre ρ_0 des intégrales doubles de deuxième espèce attachées à Φ, en l'écrivant sous la forme

$$\rho_0=N+2d-4p-(m-1)+2r-(\rho-1).$$

(¹) Picard et Simart, t. II, p. 409. En définitive, nous remplaçons par $\rho+d$ le nombre ρ de M. Picard. Il n'y a ici aucune contradiction, puisqu'il s'agit de deux points de vue différents.

On obtient tout naturellement cette formule, en la dérivant de la forme invariantive

$$\rho_0 = \mathrm{I} + 4(p_g - p_a) - \rho + 2,$$

qu'on peut donner à la formule de M. Picard, lorsqu'il n'existe pas des points doubles isolés; p_g, p_a désignent ici les genres de Φ, et I l'invariant relatif de Zeuthen-Segre, attaché à Φ (¹).

En particulier, pour la surface de Kummer on a

$$\mathrm{I} = 20, \qquad p_g = p_a = 1, \qquad \rho = 17,$$

et l'on en tire, par conséquent,

$$\rho_0 = 5 \quad (^2).$$

9. Revenons maintenant à la surface de Kummer Φ. La base $(D_1 D_2 \ldots D_{17})$ que nous avons construite n'est pas minima, car une conique H de Φ, différente de D_1, ne peut pas s'exprimer comme une combinaison linéaire (à coefficients entiers) des courbes D_i, tandis qu'une convenable de telles combinaisons est équivalente au *double* de H.

En vertu de la proposition démontrée au n° 4, pour obtenir sur Φ une base minima, il suffira d'y construire une base intermédiaire.

Comme toute courbe tracée sur Φ s'exprime par une combinaison linéaire des coniques et des points doubles, il s'agira de choisir 17 de ces 32 éléments de telle façon que le *déterminant* relatif, tout en étant différent de zéro, ait la valeur absolue minima (qui sera nécessairement une puissance positive de 2, car il doit être un diviseur, du même signe, de 2^{16}).

En désignant les points doubles et les coniques de Φ au moyen du symbolisme de M. Humbert (³), on démontre aisément que *le groupe des six coniques*

$$\alpha\alpha', \quad \beta\beta', \quad \gamma\gamma', \quad \alpha\beta', \quad \alpha\gamma', \quad \alpha\delta'$$

(¹) La forme invariantive donne tout de suite la forme projective de la formule de Picard, lorsqu'il y a aussi des points multiples isolés d'ordre s; on trouve qu'il faut écrire Σs au lieu de $2d$, la somme Σ étant étendue aux points multiples isolés de la surface.

(²) PICARD et SIMART, t. II, p. 452.

(³) *Journal de Math.*, 1893, p. 58.

et des onze points doubles

$$(\alpha\alpha'),\quad (\alpha'\beta),\quad (\alpha'\gamma),\quad (\alpha'\delta),\quad (\alpha\delta'),\quad (\beta\delta'),\quad (\beta'\delta),$$
$$(\beta\gamma'),\quad (\beta'\gamma),\quad (\gamma\delta'),\quad (\gamma'\delta)$$

donne une base minima sur la surface de Kummer.

On représente, en effet, les 5 points doubles restant au moyen des courbes de cette base, par des relations du type

$$(\alpha\beta') \equiv 2\gamma\gamma' - 2\alpha\alpha' + (\gamma\beta') + (\gamma\delta') + (\gamma'\beta) + (\gamma'\delta) - (\alpha'\beta) - (\alpha'\delta) - (\alpha'\gamma),$$

qu'on obtient en exprimant que « le double de toute conique, augmenté des 6 points doubles qui lui appartiennent, est équivalent à une section plane de Φ ».

Les 10 coniques qui n'appartiennent pas à la base, sont données par des relations qu'on obtient en exprimant que « les faces d'un *tétraèdre de Göpel* (groupe de 4 plans singuliers n'ayant pour sommet aucun point singulier) touchent la surface Φ suivant 4 coniques d'une même quadrique (¹) ».

Le déterminant de la base minima a la valeur 64. — On arrive à cette conclusion sans difficulté, car on connaît le nombre des points communs à deux courbes quelconques de la base.

10. *Aperçu sur les variétés à plusieurs dimensions.* — Tandis que la démonstration de l'existence d'une base sur une surface présente des difficultés essentielles, il n'arrive pas ainsi lorsqu'il s'agit des variétés à plusieurs dimensions, car *on peut déduire aisément l'existence d'une base pour la totalité des variétés algébriques à $r-1$ dimensions appartenant à une variété à $r(\geq 3)$ dimensions, de l'existence d'une base sur une variété à $r-1$ dimensions.*

Ainsi, par exemple, on arrive à démontrer l'existence d'une base pour la totalité des surfaces tracées sur une variété algébrique V à trois dimensions, en remarquant que deux surfaces algébriques A, B de V,

(¹) Cette propriété peut se regarder comme une conséquence de l'univocité de la division sur la surface de Kummer Φ. En effet, la courbe A formée par les coniques d'un groupe de Göpel et par les 12 points doubles appartenant aux arêtes du tétraèdre a le degré virtuel 16, et elle est coupée en 16 points par la section B de Φ avec une quadrique quelconque, de sorte qu'on a $[AA] = [AB] = [BB] = 16$ et, par suite, $A \equiv B$.

qui coupent une section hyperplane de V suivant deux courbes algébriquement équivalentes, sont elles-mêmes algébriquement équivalentes, c'est-à-dire qu'elles sont renfermées totalement dans un même système continu.

Cette proposition nous assure aussi que le nombre des systèmes distincts, qu'on obtient en appliquant la division par un entier à un système continu de surfaces, admet un maximum fini, dépendant seulement de V; et *cela amène à la construction d'une base minima pour les surfaces appartenant à* V.

L'existence de la base sur une variété à plusieurs dimensions pourra donner peut-être une solution à la question, soulevée par M. Poincaré(1), relative à la construction des groupes de p points d'une courbe de genre p

$$f(x, y) = 0,$$

qui appartiennent au domaine de rationalité des coefficients de f(2). Il s'agit là de fixer sur f un *système fondamental* d'un nombre fini de ces groupes, de telle façon qu'on en déduise tout autre groupe analogue, par des opérations rationnelles.

Je crois qu'on pourra arriver à ce résultat, en partant de la base sur la variété algébrique engendrée au varier des coefficients de la courbe f.

(1) *Sur les propriétés arithmétiques des courbes algébriques* (*Journal de Math.*, 5e série, t. VII, 1901, p. 161).

(2) On veut dire que toute fonction symétrique des coordonnées des points d'un tel groupe appartient au domaine de rationalité des coefficients de f.