ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

S. LATTÈS

Nouvelles recherches sur les courbes invariantes par une transformation $(X, Y; x, y, y')$

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 25 (1908), p. 221-254
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1908_3_25__221_0>

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1908, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (http://www.elsevier.com/locate/ansens) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

NOUVELLES RECHERCHES

SUR LES COURBES INVARIANTES

PAR UNE TRANSFORMATION (X, Y; x, y, y'),

PAR M. S. LATTÈS,

PROFESSEUR AU LYCÉE DE MONTPELLIER.

J'ai étudié, dans un travail antérieur (1), les courbes invariantes par une transformation (X, Y; x, y, y'), c'est-à-dire par une transformation de la forme

$$(1) \qquad \begin{cases} X = f(x, y, y'), \\ Y = \varphi(x, y, y'), \end{cases}$$

---

(1) *Sur les équations fonctionnelles qui définissent une courbe ou une surface invariante par une transformation* (*Annali di Matematica*, 1906).

Je saisis l'occasion qui m'est offerte par la publication du présent Mémoire pour réparer un oubli que je regrette vivement et ajouter aux noms que je citais dans ce travail celui de M. PINCHERLE, dont les beaux travaux s'imposent à l'attention de tous ceux qui étudient les opérations et les équations fonctionnelles. M. Pincherle a donné un exposé synthétique fort intéressant de la théorie des opérations et des équations fonctionnelles, une analyse des divers travaux qui s'y rapportent et une bibliographie étendue dans les deux ouvrages suivants :

Le operazioni distributive e le loro applicazioni all'analisi, Bologne, Zanichelli, éd., 1901 (en collaboration avec M. Amaldi).

Funktionaloperationen und Gleichungen (article de l'*Encyklopädie der Mathem. Wissenschaften*).

en me bornant aux courbes contenant un élément double

$$(x_0, y_0; x_0, y_0, y'_0),$$

de la transformation. Si $y = \psi(x)$ est l'équation d'une pareille courbe, la fonction $\psi(x)$ vérifie l'équation fonctionnelle

$$\psi[f(x, \psi, \psi')] = \varphi(x, \psi, \psi'). \tag{2}$$

On peut se proposer, plus généralement, de chercher une courbe invariante par la transformation (1) et ne contenant pas d'élément double.

Sans aborder le problème dans toute sa généralité, je me propose d'étudier un cas qui nous est suggéré par le problème analogue relatif aux transformations ponctuelles (1); c'est le cas d'une courbe invariante composée de plusieurs branches

$$y = \psi_0(x), \qquad y = \psi_1(x), \qquad \ldots, \qquad y = \psi_i(x), \qquad \ldots, \qquad y = \psi_p(x),$$

définies respectivement dans p intervalles distincts $x_i - h$, $x_i + h$ et se permutant circulairement par la transformation (1). On est conduit, pour établir l'existence d'un pareil cycle de fonctions, à chercher une courbe invariante pour une certaine *puissance* de la transformation (1).

La définition précise des puissances de la transformation (1), de leurs éléments doubles et des courbes invariantes par ces puissances exigeait l'étude préalable des transformations de la forme

$$\left\{ \begin{aligned} X &= f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(p)}), \\ Y &= \varphi(x, y, y', y'', \ldots, y^{(p)}). \end{aligned} \right. \tag{3}$$

Ces transformations font correspondre un point X, Y à un élément $(x, y, y', \ldots, y^{(p)})$ d'ordre p. La première Partie de ce Travail leur est consacrée : je généralise pour ces transformations (3) le théorème relatif à l'existence des courbes invariantes contenant un élément double que j'ai établi précédemment pour les transformations (1).

---

(1) *Sur les équations fonctionnelles qui définissent une courbe ou une surface invariante par une transformation*, 1re Partie, § 15.

Dans la deuxième Partie, je m'occupe des courbes invariantes par une certaine puissance de la transformation (1). En appliquant à ces courbes le théorème d'existence démontré dans la première Partie, on trouve de nouvelles solutions de l'équation fonctionnelle (2) : chacune de ces solutions est formée de l'ensemble de p fonctions

$$y=\psi_0(x)\qquad y=\psi_1(x),\qquad \ldots,\qquad y=\psi_i(x),\qquad \ldots,\qquad y=\psi_p(x),$$

définies dans des intervalles distincts x_i-h, x_i+h. Si l'on désigne par $\Psi(x)$ une fonction égale à $\psi_0(x)$, dans l'intervalle x_0-h, x_0+h, à $\psi_1(x)$ dans l'intervalle x_1-h, x_1+h, à $\psi_i(x)$ dans l'intervalle x_i-h, x_i+h, la fonction $\Psi(x)$ ainsi définie constitue une solution de l'équation fonctionnelle. On peut définir uue solution de cette nature quel que soit l'entier p, et le nombre de paramètres arbitraires dont dépend la solution va en croissant en même temps que l'entier p. Ceci s'applique en particulier aux équations fonctionnelles

$$\psi'(x)=\psi[f(x)],\qquad \psi'(x)=\psi[\psi(x)],$$

qui sont de la forme (2) et qui m'ont servi d'exemples [1].

I.

1. Je rappellerai tout d'abord, en les complétant, quelques résultats relatifs aux transformations $(X, Y; x, y, y')$.

Considérons la transformation (1) et un élément double E_0 de coordonnées (x_0, y_0, y'_0); nous supposons que les fonctions f et φ sont définies dans le domaine de (x_0, y_0, y'_0) et qu'elles ont des dérivées partielles continues dans ce domaine; nous supposons en outre que pour l'élément double on ait

$$C\neq 0 \qquad \text{et} \qquad |S|<1,$$

---

[1] Le présent Mémoire est résumé dans une Note : *Sur les courbes qui se reproduisent périodiquement par une transformation* $(X, Y; x, y, y')$ (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 19 novembre 1906).

en posant

$$C = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y'} - y'\frac{\partial f}{\partial y'}\right)_0$$

et

$$S = \left[\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}y'\right)\frac{\partial\varphi}{\partial y'} - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}y'\right)\frac{\partial f}{\partial y'}}{\frac{\partial\varphi}{\partial y'} - y'\frac{\partial f}{\partial y'}}\right]_0.$$

On a alors démontré l'existence d'une courbe $y = \psi(x)$ contenant l'élément double E_0 et invariante par la transformation ([1]) : la fonction $\psi(x)$ vérifie l'équation (2) et on l'obtient comme limite des antécédentes successives d'une courbe arbitraire contenant l'élément double.

2. La quantité S est un élément important de la transformation (1) : elle ne change pas lorsqu'on fait subir à cette transformation une transformation ponctuelle quelconque régulière au point $(x_0\ y_0)$.

Je compléterai le résultat ainsi rappelé en donnant à S une nouvelle forme qui mettra mieux en évidence le rôle joué par cet invariant dans le problème qui nous occupe.

Adjoignons aux équations (1) la relation

$$Y' = \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}y' + \frac{\partial\varphi}{\partial y'}y''}{\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}y' + \frac{\partial f}{\partial y'}y''}. \tag{4}$$

L'ensemble des équations (1) et (4) constitue la *transformation* (1) *prolongée*. Nous appellerons *élément double prolongé jusqu'au second ordre* un système (x_0, y_0, y'_0, y''_0) de valeurs de x, y, y', y'' auquel les équations (1) et (4) fassent correspondre pour X, Y, Y' les valeurs x_0, y_0, y'_0 elles-mêmes. Pour prolonger l'élément double donné E_0, il suffit de remplacer dans la relation (4) x, y, y' par les coordonnées x_0, y_0, y'_0 de E_0, de remplacer aussi Y' par y'_0 et de tirer de la relation ainsi

---

[1] *Sur les équations fonctionnelles qui définissent une courbe ou une surface invariante par une transformation*, 2e Partie, § 12.

obtenue la valeur y''_0 de y'' : s'il existe une courbe invariante contenant l'élément double E_0, au point (x_0, y_0) de cette courbe, la dérivée seconde y'' sera égale à la valeur y''_0 ainsi trouvée et la courbe invariante contiendra l'élément double prolongé (x_0, y_0, y'_0, y''_0).

L'invariant S peut s'exprimer en fonction des seules quantités x_0, y_0, y'_0, mais il prend une forme plus simple si l'on introduit dans son expression les coordonnées x_0, y_0, y'_0, y''_0 de l'élément double prolongé. L'expression de S donnée plus haut peut en effet s'écrire

$$\mathrm{S} = \left[\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}y' + \frac{\partial f}{\partial y'}y''\right)\frac{\partial \varphi}{\partial y'} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}y' + \frac{\partial \varphi}{\partial y'}y''\right)\frac{\partial f}{\partial y'}}{\frac{\partial \varphi}{\partial y'} - y'\frac{\partial f}{\partial y'}}\right]_0.$$

Or on a

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}y' + \frac{\partial \varphi}{\partial y'}y''\right)_0 = y'_0\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}y' + \frac{\partial f}{\partial y'}y''\right)_0$$

et, par suite,

$$\mathrm{S} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}y' + \frac{\partial f}{\partial y'}y''\right)_0.$$

On peut donner une interprétation géométrique de cette quantité S. Soit C une courbe quelconque contenant l'élément double prolongé $(x_0$, $y_0, y'_0, y''_0)$; sa conséquente C_1 contient l'élément double (x_0, y_0, y'_0). Si l'on désigne par x, y les coordonnées d'un point de C et par X, Y les coordonnées du point correspondant de la conséquente, on a

$$\frac{d\mathrm{X}}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}y' + \frac{\partial f}{\partial y'}y''.$$

Si le point x, y tend vers le point x_0, y_0, il en est de même du point X, Y, et si l'on désigne par $\left(\frac{d\mathrm{X}}{dx}\right)_0$ la limite de $\frac{d\mathrm{X}}{dx}$, on a

$$\left(\frac{d\mathrm{X}}{dx}\right)_0 = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}y' + \frac{\partial f}{\partial y'}y''\right)_0 = \mathrm{S}.$$

On a aussi

$$\left(\frac{d\mathrm{Y}}{dy}\right)_0 = \left(\frac{d\mathrm{Y}}{d\mathrm{X}}\right)_0 \times \left(\frac{d\mathrm{X}}{dx}\right)_0 \times \left(\frac{dx}{dy}\right)_0 = y'_0\,\mathrm{S}\,\frac{1}{y'_0} = \mathrm{S}.$$

Enfin si l'on désigne par $d\sigma$ l'arc infiniment petit de la courbe C et par $d\Sigma$ l'arc correspondant de la courbe C_1, on a

$$\left(\frac{d\Sigma}{d\sigma}\right)_0 = \left(\frac{\sqrt{1+Y'^2}}{\sqrt{1+y'^2}} \cdot \frac{dX}{dx}\right)_0 = \left(\frac{dX}{dx}\right)_0 = S.$$

Ainsi l'invariant S relatif à l'élément double E_0 reçoit l'interprétation suivante :

Soient C *une courbe contenant l'élément double* E_0 *prolongé et* C_1 *sa conséquente,* M *un point de la courbe* C *voisin du point double* O *et* M_1 *son conséquent : le rapport de l'arc* OM_1 *de la courbe* C_1 *à l'arc* OM *de la courbe* C *a une limite lorsque* M *tend vers le point double et cette limite est l'invariant* S. En particulier, on peut prendre pour courbe C la courbe invariante contenant l'élément double E_0 (courbe qui existe si l'on a $|S| < 1$); la courbe C_1 se confond alors avec la courbe C et les deux arcs OM, OM_1 appartiennent tous deux à la courbe invariante : S est la limite du rapport de ces deux arcs lorsque M tend vers le point double O.

S est un invariant en ce sens que la limite $\left(\frac{d\Sigma}{d\sigma}\right)_0$ ne change pas lorsqu'on applique aux courbes C et C_1 une même transformation ponctuelle

$$u = \lambda(x, y),$$
$$v = \mu(x, y),$$

λ et μ étant des fonctions quelconques régulières pour $x = x_0, y = y_0$.

3. Considérons maintenant la transformation plus générale

$$(5) \qquad \begin{cases} X = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(p)}) \\ Y = \varphi(x, y, y', y'', \ldots, y^{(p)}) \end{cases} \qquad \left(y^{(p)} = \frac{d^p y}{dx^p}\right),$$

qui fait correspondre un point X, Y à un élément d'ordre p

$$(x, y, y', \ldots, y^{(p)})$$

et que nous appellerons une transformation $(X, Y; x, y, y', \ldots, y^{(p)})$. Les courbes $y = \psi(x)$ invariantes par cette transformation sont données par l'équation fonctionnelle

$$\psi[f(x, \psi, \psi', \psi'', \ldots, \psi^{(p)})] = \varphi(x, \psi, \psi', \ldots, \psi^{(p)}), \tag{6}$$

qui contient à la fois la fonction inconnue $\psi(x)$ et ses dérivées jusqu'à l'ordre p. Nous nous proposons d'étendre aux transformations (5) et aux équations (6) le théorème d'existence relatif aux courbes invariantes par (1).

Un *élément double* de (5) sera un système E_0 de valeurs x_0, y_0, $y'_0, \ldots, y_0^{(p)}$ vérifiant les équations

$$x_0 = f(x_0, y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(p)}),$$
$$y_0 = \varphi(x_0, y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(p)}).$$

S'il existe une courbe invariante par (3) et contenant cet élément double, on aura, au point x_0, y_0 de cette courbe,

$$y'_0 = \frac{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_0 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_0 y'_0 + \ldots + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y^{(p)}}\right)_0 y_0^{(p+1)}}{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 y'_0 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial y^{(p)}}\right)_0 y_0^{(p+1)}},$$

équation d'où l'on peut tirer $y_0^{(p+1)}$ pourvu que l'on ait

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y^{(p)}} - y'\frac{\partial f}{\partial y^{(p)}}\right)_0 \neq 0.$$

Nous dirons que $(x_0, y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(p+1)})$ est l'élément double E_0 *prolongé jusqu'à l'ordre* $p+1$: toute courbe invariante doit contenir cet élément double prolongé. Nous supposerons que les fonctions f et φ sont définies dans le domaine de l'élément double E_0 et qu'elles ont des dérivées partielles continues.

Il est facile de donner à la substitution (5) une forme réduite telle que les coordonnées de l'élément double prolongé deviennent toutes nulles. Posons pour cela

$$x = x_0 + u,$$
$$y = y_0 + y'_0 u + y''_0 \frac{u^2}{1.2} + \ldots + y_0^{(p)} \frac{u^p}{p!} + y_0^{(p+1)} \frac{u^{p-1}}{(p+1)!} + v,$$

d'où l'on déduit

$$\begin{aligned}
y' &= y'_0 + y''_0 u + \ldots + y_0^{(p+1)} \frac{u^p}{p!} + v', \\
y'' &= y''_0 + y'''_0 u + \ldots + y_0^{(p+1)} \frac{u^{p-1}}{(p-1)!} + v'', \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
y^{(p)} &= y_0^{(p)} + y_0^{(p+1)} u + v^{(p)}, \\
y^{(p+1)} &= y_0^{(p+1)} + v^{(p+1)},
\end{aligned}$$

et de même

$$\begin{aligned}
X &= x_0 + U, \\
Y &= x_0 + y'_0 U + y''_0 \frac{U^2}{1.2} + \ldots + y_0^{(p+1)} \frac{U^{p+1}}{(p+1)!} + V.
\end{aligned}$$

La transformation (5) devient une transformation $(U, V; u, v, v', \ldots, v^{(p)})$ et le nouvel élément double, prolongé jusqu'à l'ordre $p+1$, a toutes ses coordonnées nulles. La nouvelle transformation est la suivante :

$$\begin{aligned}
& x_0 + U \\
& = f(x_0 + u,\ y_0 + y'_0 u + \ldots + v,\ y'_0 + y''_0 u + \ldots + v',\ \ldots,\ y_0^{(p)} + y_0^{(p+1)} u + v^{(p)}), \\
& y_0 + y'_0 U + \ldots + y_0^{(p+1)} \frac{U^{p+1}}{(p+1)!} + V = \varphi(x_0 + u,\ y_0 + y'_0 u + \ldots + v,\ \ldots).
\end{aligned}$$

En résolvant ces équations par rapport à U et à V et en appelant de nouveau les variables x, y, X, Y afin de simplifier les notations, on obtient une transformation de la forme

$$(7) \qquad \left\{ \begin{aligned}
X &= Sx + by + c_1 y' + \ldots + c_p y^{(p)} + F(x, y, y', \ldots, y^{(p)}), \\
Y &= \qquad\quad By + C_1 y' + \ldots + C_p Y^{(p)} + \Phi(x, y, y', \ldots, y^{(p)}),
\end{aligned} \right.$$

F et Φ sont des fonctions définies dans le domaine de l'origine, ayant des dérivées partielles du premier ordre continues et tendant vers zéro en même temps que les variables.

Le coefficient de x dans la première équation a la valeur suivante :

$$S = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial f}{\partial y'} y'' + \ldots + \frac{\partial f}{\partial y^{(p)}} y^{(p+1)} \right)_0.$$

Dans la deuxième équation, le coefficient de x est nul : il est en effet égal à

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}y'+\frac{\partial\varphi}{\partial y'}y''+\ldots+\frac{\partial\varphi}{\partial y^{(p)}}y^{(p+1)}\right)_0-y'_0\,\mathrm{S},$$

quantité qui est nulle en vertu de l'équation qui définit la $(p+1)^{\text{ième}}$ coordonnée $y_0^{(p+1)}$ de l'élément double prolongé.

Enfin, on a

$$\mathrm{C}_p=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y^{(p)}}-y'\frac{\partial f}{\partial y^{(p)}}\right)_0,$$

et nous avons supposé cette quantité non nulle lorsque nous avons calculé $y_0^{(p+1)}$.

La quantité S présente les mêmes propriétés que dans le cas des transformations $(\mathrm{X}, \mathrm{Y}; x, y, y')$; on pourrait l'exprimer en fonction de $x_0, y_0, \ldots, y_0^{(p)}$ seulement et sans faire intervenir $y_0^{(p+1)}$; mais, sous sa forme actuelle, on voit immédiatement son interprétation géométrique. On a, comme au paragraphe 2,

$$\mathrm{S}=\left(\frac{d\mathrm{X}}{dx}\right)_0=\left(\frac{d\mathrm{Y}}{dy}\right)_0=\left(\frac{d\Sigma}{d\sigma}\right)_0,$$

les différentielles étant relatives à une courbe quelconque contenant l'élément double prolongé et à sa conséquente : $d\Sigma$ et $d\sigma$ représentent les différentielles de deux arcs correspondants de la courbe considérée et de sa conséquente. Enfin, ici encore, comme dans le cas des transformations (1), S est un invariant de la substitution pour le groupe ponctuel [1].

---

[1] La démonstration de cette proposition est immédiate avec la forme donnée actuellement à S. Il suffit évidemment de la faire pour les transformations ponctuelles qui conservent l'origine; une pareille transformation, supposée régulière à l'origine, est définie par des équations de la forme

$$\begin{aligned}
x&=f(u, v)=\alpha u+\beta v+\ldots,\\
y&=\varphi(u, v)=\alpha' u+\beta' v+\ldots,\\
\mathrm{X}&=f(\mathrm{U}, \mathrm{V})=\alpha \mathrm{U}+\beta \mathrm{V}+\ldots,\\
\mathrm{Y}&=\varphi(\mathrm{U}, \mathrm{V})=\alpha' \mathrm{U}+\beta' \mathrm{V}+\ldots.
\end{aligned}$$

4. Considérant maintenant la transformation sous la forme (7), nous sommes en mesure d'étendre à cette transformation la proposition rappelée au § 1 et nous démontrerons le théorème suivant :

Théorème. — *Soit* E_0 *un élément double de la transformation* (5) *dont les coordonnées* $x_0, y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(p)}$ *vérifient les inégalités*

$$C_p \neq 0, \qquad |S| < 1.$$

Il existe une courbe $y = \psi(x)$ *invariante par la transformation et contenant l'élément* E_0. *La fonction* $\psi(x)$ *est définie dans un certain intervalle* $x_0 - h$, $x_0 + h$, *possède dans cet intervalle des dérivées des* p *premiers ordres et vérifie l'équation fonctionnelle* (6).

La démonstration est, dans ses traits principaux, la même que dans le cas des transformations (1). Je me bornerai donc à rappeler la marche suivie en priant le lecteur de se reporter pour le détail à l'étude des transformations (1) ([1]). J'insisterai seulement sur un point important qui exige une démonstration nouvelle, d'autant plus que le résultat auquel nous parviendrons paraît pouvoir être utilisé en dehors de la question qui nous occupe. Il s'agit du lemme suivant ([2]) :

5. Lemme. — *Soit* u *une fonction de* x *définie dans l'intervalle* $-h$, $+h$, *nulle pour* $x = 0$ *ainsi que ses* $p - 1$ *premières dérivées et ayant une dérivée* $p^{\text{ième}}$ *continue qui vérifie dans cet intervalle l'inégalité sui-*

Soit S_1 la nouvelle valeur prise par S. On a

$$\left(\frac{dU}{du}\right)_0 = \left(\frac{dV}{dv}\right)_0 = S_1,$$

$$S = \left(\frac{dX}{dx}\right)_0 = \left(\frac{\frac{\partial f}{\partial U}dU + \frac{\partial f}{\partial V}dV}{\frac{\partial f}{\partial u}du + \frac{\partial f}{\partial v}dv}\right)_0 = \left(\frac{\alpha\, dU + \beta\, dV}{\alpha\, du + \beta\, dv}\right)_0 = \left(\frac{dU}{du}\right)_0 = S_1.$$

([1]) *Sur les équations fonctionnelles qui définissent une courbe ou une surface invariante par une transformation* (*Annali di Matematica*, IIe Partie, §§ 1 à 12).

([2]) Pour le lemme analogue dans l'étude des transformations (1), voir *loc. cit.*, § 10.

vante :

$$\left|\frac{d^p u}{dx^p}\right| < K' + K_0 |u| + K_1 \left|\frac{du}{dx}\right| + \ldots + K_{p-1} \left|\frac{d^{p-1} u}{dx^{p-1}}\right|,$$

où K', K_0, K_1, $\ldots$, K_{p-1} *sont des constantes. En supposant* h *inférieur à un certain nombre positif* h_1 *indépendant de la fonction* u *et ne dépendant que des coefficients* K, *la fonction* u *et ses dérivées vérifient dans tout l'intervalle* $-h$, $+h$ *les inégalités suivantes :*

$$\begin{aligned}
|u| &< K' A(h) \frac{h^p}{p!}, \\
\left|\frac{du}{dx}\right| &< K' A(h) \frac{h^{p-1}}{(p-1)!}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\left|\frac{d^i u}{dx^i}\right| &< K' A(h) \frac{h^{p-i}}{(p-i)!}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\left|\frac{d^p u}{dx^p}\right| &< K' A(h),
\end{aligned}$$

$A(h)$ *étant une fonction continue de* h *qui tend vers* 1 *lorsque* h *tend vers zéro et qui ne dépend que des constantes* K, *sans dépendre de la fonction* u.

Désignons par x' la valeur absolue de x et par M_x la limite supérieure de $\left|\frac{d^p u}{dx^p}\right|$ dans l'intervalle $-x$, $+x$. On a

$$\begin{aligned}
\left|\frac{d^{(p-1)} u}{dx^{p-1}}\right| &= \left|\int_0^x \frac{d^p u}{dx^p} dx\right| \leqq \int_0^{x'} \left|\frac{d^p u}{dx^p}\right| dx' < x' M_x, \\
\left|\frac{d^{(p-2)} u}{dx^{p-2}}\right| &\leqq \int_0^{x'} \left|\frac{d^{p-1} u}{dx^{p-1}}\right| dx' < \frac{x'^2 M_x}{2}, \\
\left|\frac{d^{p-3} u}{dx^{p-3}}\right| &< \frac{x'^3 M_x}{1.2.3}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
|u| &< \frac{x'^p M_x}{1.2\ldots\ldots p}.
\end{aligned}$$

L'inégalité donnée dans l'énoncé entraine donc la suivante :

$$\left|\frac{d^p u}{dx^p}\right| < \mathrm{K}' + \left(\mathrm{K}_0 \frac{x'^p}{p!} + \mathrm{K}_1 \frac{x'^{p-1}}{(p-1)!} + \ldots + \mathrm{K}_{p-2} \frac{x'^2}{2} + \mathrm{K}_{p-1} x'\right) \mathrm{M}_x.$$

Cette inégalité a lieu quel que soit x dans l'intervalle $-x$, $+x$. Mais $\left|\frac{d^p u}{dx^p}\right|$ étant une fonction continue de x dans cet intervalle, atteint son maximum pour une certaine valeur ξ de l'intervalle dont nous désignerons la valeur absolue par ξ'. On a

$$\mathrm{M}_x = \left|\frac{d^p u}{dx^p}\right|_\xi.$$

Donnons alors à x la valeur ξ dans l'inégalité précédente. Il vient

$$\mathrm{M}_x < \mathrm{K}' + \left(\mathrm{K}_0 \frac{\xi'^p}{p!} + \mathrm{K}_1 \frac{\xi'^{p-1}}{(p-1)!} + \ldots + \mathrm{K}_{p-2} \frac{\xi'^2}{2} + \mathrm{K}_{p-1} \xi'\right) \mathrm{M}_x,$$

et, *a fortiori*,

$$\mathrm{M}_x < \mathrm{K}' + \left(\mathrm{K}_0 \frac{x'^p}{p!} + \mathrm{K}_1 \frac{x'^{p-1}}{(p-1)!} + \ldots + \mathrm{K}_{p-2} \frac{x'^2}{2} + \mathrm{K}_{p-1} x'\right) \mathrm{M}_x,$$

d'où

$$\mathrm{M}_x < \frac{\mathrm{K}'}{1 - \left(\mathrm{K}_0 \frac{x'^p}{p!} + \mathrm{K}_1 \frac{x'^{p-1}}{(p-1)!} + \ldots + \mathrm{K}_{p-1} x'\right)},$$

pourvu que x soit assez petit pour que le dénominateur soit positif. Soit h_1 un nombre positif assez petit pour que, dans l'intervalle 0, h, le second membre soit positif. Posons

$$\mathrm{A}(h) = \frac{1}{1 - \left(\mathrm{K}_0 \frac{h^p}{p!} + \mathrm{K}_1 \frac{h^{p-1}}{(p-1)!} + \ldots + \mathrm{K}_{p-1} h\right)}.$$

On aura, quel que soit x dans l'intervalle $-h$, $+h$,

$$\mathrm{M}_x < \mathrm{K}' \mathrm{A}(h),$$

pourvu que h soit inférieur à h_1. $\mathrm{A}(h)$ est, comme on voit, une fonction continue de h tendant vers 1 lorsque h tend vers zéro et ne dépendant pas de la fonction u. De l'inégalité précédente et des inégalités établies plus haut on tire

$$\begin{array}{ll}
\left|\dfrac{d^p u}{dx^p}\right| & < M_x < K' A(h), \\
\left|\dfrac{d^{p-1} u}{dx^{p-1}}\right| & < K' A(h) h, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, & \\
|u| & < K' A(h) \dfrac{h^p}{p!}.
\end{array}$$

6. Ce lemme étant établi, revenons au théorème du paragraphe 4 en indiquant la marche de la démonstration.

La courbe invariante $y = \psi(x)$ dont il s'agit d'établir l'existence sera définie comme limite des *antécédentes* successives d'une courbe initiale $y = \psi_0(x)$ contenant l'élément double. Soit

$$Y = \psi_0(X)$$

une fonction nulle ainsi que ses $p-1$ premières dérivées pour $X = 0$. A cette fonction la transformation (7) fait correspondre une fonction y de x définie par l'équation différentielle

$$\psi_0(Sx + by + c_1 y' + \dots) = By + C_1 y' + \dots + C_p y^{(p)} + \dots.$$

Cette équation admet une intégrale et une seule nulle pour $x = 0$ ainsi que ses p premières dérivées : cela résulte de l'hypothèse $C_p \neq 0$. C'est cette solution $y = \psi_1(x)$ que nous appelons l'*antécédente* de $\psi_0(x)$. Soient $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, ..., $\psi_n(x)$ les antécédentes successives. On démontre tout d'abord que ces antécédentes peuvent être définies dans un domaine commun $-h$, $+h$. D'une façon plus précise, on établit la proposition suivante :

Soit $\psi_0(x)$ une fonction définie dans un certain intervalle $-h$, $+h$ et vérifiant dans cet intervalle une inégalité de la forme

$$\left|\frac{d^p \psi_0}{dx^p}\right| < \delta |x|.$$

On peut choisir les nombres positifs h et δ de façon que l'antéce-

dente $\psi_1(x)$ soit définie dans le même intervalle $-h$, $+h$, et y vérifie la même inégalité

$$\left|\frac{d^p\psi_1}{dx^p}\right| < \delta\,|x|,$$

les nombres h et δ ainsi définis dépendant uniquement de la transformation et ne dépendant pas de la fonction $\psi_0(x)$.

Pour la démonstration nous renverrons le lecteur au Mémoire déjà cité (II[e] Partie, § 8), en nous bornant à faire observer que c'est dans cette démonstration qu'intervient l'hypothèse $|S| < 1$ [1].

Soient $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, $\ldots$, $\psi_n(x)$ les antécédentes successives de $\psi_0(x)$: il résulte de la proposition précédente qu'elles sont toutes définies dans le même intervalle $-h$, $+h$ que ψ_0 et ψ_1 et qu'elles vérifient dans cet intervalle la même inégalité que ψ_0 et ψ_1.

Nous allons prouver maintenant que, *lorsque n augmente indéfiniment, la fonction ψ_n et ses dérivées jusqu'à l'ordre p tendent uniformément vers des limites dans le domaine $-h$, $+h$ pourvu que h soit suffisamment petit. La fonction limite $\psi(x)$ est indépendante de la fonction initiale $\psi_0(x)$ et elle vérifie l'équation fonctionnelle* (6), *c'est-à-dire qu'elle définit une courbe $y = \psi(x)$ invariante par la transformation* (5) *et contenant l'élément double considéré*. Le théorème du paragraphe 4 sera ainsi établi.

Considérons pour cela deux fonctions $y = \psi(x)$, $z = \theta(x)$ vérifiant dans l'intervalle $-h$, $+h$ les inégalités

$$\left|\frac{d^p\psi}{dx^p}\right| < \delta\,|x|, \qquad \left|\frac{d^p\theta}{dx^p}\right| < \delta\,|x|.$$

Soient $y_1 = \psi_1(x)$ et $z_1 = \theta_1(x)$ les antécédentes de ces fonctions et σ le module maximum de la différence $y - z$ dans l'intervalle $-h$, $+h$. Toute la démonstration est basée sur la comparaison de $|y_1 - z_1|$ à σ et cette comparaison se fait comme dans l'étude des transforma-

(1) Dans le cas où $|S|$ est supérieur à 1, la méthode précédente ne permet plus de définir l'antécédente ψ_1 que dans un intervalle $-h_1$, $+h_1$ contenu dans l'intervalle $-h$, $+h$ où ψ_0 est définie, et les conséquences que nous allons déduire de la proposition précédente tombent en défaut dans ce second cas.

tions (1). Nous renverrons encore à cette étude [1] pour le détail des calculs. On est conduit aisément à une inégalité de la forme suivante :

$$\left|\frac{d^{(p)}y_1}{dx^p}-\frac{d^{(p)}z_1}{dx^p}\right| < K(h)\left[|y_1-z_1|+\left|\frac{dy_1}{dx}-\frac{dz_1}{dx}\right|+\left|\frac{d^2y_1}{dx^2}-\frac{d^2z_1}{dx^2}\right|+\ldots\right.$$
$$\left.+\left|\frac{d^{p-1}y_1}{dx^{p-1}}-\frac{d^{p-1}z_1}{dx^{p-1}}\right|\right]+K'(h)\sigma,$$

$K(h)$ et $K'(h)$ sont des fonctions continues de h qu'il est inutile d'écrire explicitement : il suffit de savoir qu'elles sont indépendantes des fonctions y et z et qu'elles ne dépendent que des coefficients de la transformation donnée; lorsque h tend vers zéro, elles ont une limite β qui ne dépend que de la transformation donnée. On peut alors utiliser le lemme du paragraphe 5, et l'on voit ainsi que l'inégalité

$$|y-z|<\sigma$$

entraîne pour les antécédentes y_1, z_1 les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned}
&|y_1-z_1| && < K'(h)A(h)\frac{h^p}{p!}\sigma,\\
&\left|\frac{dy_1}{dx}-\frac{dz_1}{dx}\right| && < K'(h)A(h)\frac{h^{p-1}}{(p-1)!}\sigma,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, &&\\
&\left|\frac{d^{p-1}y_1}{dx^{p-1}}-\frac{d^{p-1}z_1}{dx^{p-1}}\right| && < K'(h)A(h)h\sigma,\\
&\left|\frac{d^p y_1}{dx^p}-\frac{d^p z_1}{dx^p}\right| && < K'(h)A(h)\sigma,
\end{aligned}$$

Ceci posé, soit

$$\psi_0,\quad \psi_1,\quad \psi_2,\quad \ldots,\quad \psi_{n-1},\quad \psi_n,\quad \ldots$$

la suite formée par la fonction ψ_0 et par ses antécédentes successives. Il suffit de prendre pour y et z les fonctions ψ_0 et ψ_1 pour voir que l'inégalité

$$|\psi_0-\psi_1|<\sigma$$

[1] *Sur les équations fonctionnelles qui définissent une courbe ou une surface invariante par une transformation* (*Annali di Matemica*, IIe Partie, § 11).

entraîne successivement

$$
\begin{aligned}
|\psi_1 - \psi_2| &< \mathrm{K}'(h)\mathrm{A}(h)\frac{h^p}{p!}\sigma,\\
|\psi_2 - \psi_3| &< \left[\mathrm{K}'(h)\mathrm{A}(h)\frac{h^p}{p!}\right]^2\sigma,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
|\psi_{n-1} - \psi_n| &< \left[\mathrm{K}'(h)\mathrm{A}(h)\frac{h^p}{p!}\right]^{n-1}\sigma,
\end{aligned}
$$

$\mathrm{K}'(h)$ et $\mathrm{A}(h)$ sont des fonctions continues de h ayant respectivement pour limites β et 1 lorsque h tend vers zéro. Par suite, on a, si h est suffisamment petit,

$$\mathrm{K}'(h)\,\mathrm{A}(h)\frac{h^p}{p!} < 1,$$

et ceci prouve la convergence uniforme de la série $\Sigma(\psi_{n-1} - \psi_n)$ dans l'intervalle $-h$, $+h$: il en résulte immédiatement la convergence uniforme de $\psi_n(x)$ vers une limite. La convergence uniforme des dérivées des antécédentes successives résulte de même des autres inégalités écrites plus haut, du moins pour les dérivées jusqu'à l'ordre $p-1$. Pour les dérivées d'ordre p, il suffit de remarquer que l'inégalité

$$|\psi - \psi_0| < \sigma$$

entraînant

$$\left|\frac{d^p\psi_1}{dx^p} - \frac{d^p\psi_2}{dx^p}\right| < \mathrm{K}'(h)\,\mathrm{A}(h)\,\sigma,$$

il en résulte que l'inégalité

$$|\psi_{n-1} - \psi_n| < \left[\mathrm{K}'(h)\,\mathrm{A}(h)\frac{h^p}{p!}\right]^{n-1}\sigma$$

entraîne de même

$$\left|\frac{d^p\psi_n}{dx^p} - \frac{d^p\psi_{n+1}}{dx^p}\right| < \left|\mathrm{K}'(h)\,\mathrm{A}(h)\frac{h^p}{p!}\right|^{n-1}\mathrm{K}'(h)\,\mathrm{A}(h)\,\sigma,$$

et la convergence uniforme de la suite formée par les dérivées d'ordre p des antécédentes successives résulte immédiatement de cette dernière inégalité.

La solution ainsi trouvée est indépendante de la fonction initiale :

si l'on part, en effet, de deux fonctions initiales différentes $\psi(x)$, $\theta(x)$, l'inégalité

$$|\psi(x) - \theta(x)| < \sigma$$

entraîne

$$|\psi_n(x) - \theta_n(x)| < \left[\mathrm{K}'(h)\,\mathrm{A}(h)\frac{h^p}{p!}\right]^{n-1}\sigma,$$

et, par suite, $\psi_n(x) - \theta_n(x)$ tend vers zéro lorsque n croît indéfiniment, c'est-à-dire que les limites de $\psi_n(x)$ et $\theta_n(x)$ sont égales.

Enfin on voit aisément que la fonction limite $\psi(x)$ vérifie l'équation fonctionnelle (6) : cela résulte de la convergence uniforme vers des limites de la fonction $\psi_n(x)$ et de ses dérivées jusqu'à l'ordre p, et cela se démontre comme pour les transformations (1) (1).

Le cas où $|\mathrm{S}|$ est supérieur à l'unité n'est pas traité par la méthode précédente : il peut se faire cependant qu'il existe une solution de l'équation fonctionnelle dans ce cas aussi, et il serait facile de donner des exemples de transformations pour lesquelles il en est ainsi ; mais la méthode précédente de permet pas ne prouver l'existence de cette solution, et je dois me contenter de signaler ce point important qui appelle de nouvelles recherches.

II.

7. Nous utiliserons l'étude ainsi faite des transformations

$$(\mathrm{X}, \mathrm{Y};\, x, y, y', \ldots, y^{(p)}),$$

pour établir de nouveaux résultats relatifs aux transformations

$$(\mathrm{X}, \mathrm{Y};\, x, y, y').$$

Nous n'avons étudié jusqu'ici de pareilles transformations que dans le domaine d'un élément double. Pour aller plus loin, nous introduirons pour ces transformations une notion analogue à celle de *points limites à convergence périodique* introduite par M. Kœnigs dans l'étude de l'itération des substitutions à une variable; pour des transformations

(1) *Loc. cit.*, 2e Partie, § 3.

birationnelles à plusieurs variables, ces points ont été considérés par M. Poincaré qui les appelle des *points limites oscillants :* ce sont des points qui sont doubles pour une certaine puissance de la transformation, sans être doubles pour la transformation elle-même ([1]).

Il s'agit de même, dans le cas actuel, d'étudier les courbes qui sont invariantes par une certaine puissance de la transformation

$$(X, Y; x, y, y'),$$

sans être invariantes par la transformation elle-même. Donnons d'abord quelques définitions relatives à ces puissances.

Soit la transformation T_1 définie par les équations

$$(T_1) \qquad \begin{cases} X = f(x, y, y'), \\ Y = \varphi(x, y, y'); \end{cases}$$

aux deux équations (T_1) nous adjoindrons la suivante :

$$Y' = \frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} y' + \dfrac{\partial\varphi}{\partial y'} y''}{\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y} y' + \dfrac{\partial f}{\partial y'} y''}.$$

L'ensemble des trois équations définit, comme nous l'avons vu, la transformation T_1 prolongée jusqu'au second ordre.

Nous avions supposé jusqu'ici, dans l'étude des transformations T_1, que les fonctions f et φ n'étaient définies que dans le domaine d'un système de valeurs x_0, y_0, y'_0 constituant un élément double. Nous supposerons, au contraire, dans la suite, que les fonctions f et φ sont définies quels que soient x, y, y', que ce sont par exemple des fonctions rationnelles; cette hypothèse nous est imposée par le fait que nous voulons étudier T_1 dans le domaine de certains éléments qui ne seront pas éléments doubles et répéter la transformation T_1 : or, si (x, y, y') n'appartient pas au domaine d'un élément double, (X, Y, Y') sera dé-

---

([1]) Koenigs, *Recherches sur les substitutions uniformes* (*Bull. des Sciences mathématiques*, 1883).

Poincaré, *Sur une classe nouvelle de transcendantes uniformes* (*Journ. de Mathém. pures et appliquées*, 1890).

fini dans un domaine différent du premier, et il faut que la transformation T_1 soit définie dans les domaines successifs qu'on est conduit à envisager. C'est ce qui aura lieu si les fonctions f et φ sont définies pour toutes les valeurs des variables (¹).

La transformation T_1 prolongée fournit par itération la transformation suivante :

$$X = f\left[f(x, y, y'),\ \varphi(x, y, y'),\ \frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}y' + \dfrac{\partial\varphi}{\partial y'}y''}{\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y}y' + \dfrac{\partial f}{\partial y'}y''}\right],$$

$$Y = \varphi\left[f(x, y, y'),\ \varphi(x, y, y'),\ \frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}y' + \dfrac{\partial\varphi}{\partial y'}y''}{\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y}y' + \dfrac{\partial f}{\partial y'}y''}\right],$$

que nous appellerons *deuxième puissance* de la transformation T_1. Nous la désignerons par T_2 et nous écrivons les équations précédentes sous la forme abrégée

$$(T_2) \qquad \begin{cases} X = f_2(x, y, y', y''), \\ Y = \varphi_2(x, y, y', y''). \end{cases}$$

On voit que la deuxième puissance d'une transformation

$$(X, Y; x, y, y')$$

est une transformation

$$(X, Y; x, y, y', y'');$$

elle est définie quels que soient x, y, y', y'', si T_1 était définie quels que soient x, y, y'. Le seul cas où (T_2) ne dépendrait pas de y'' est celui où T_1 serait une transformation de contact; ce cas a d'ailleurs été

(¹) Une hypothèse analogue s'impose dans l'étude de l'itération d'une substitution $X = f(x)$ dans le domaine d'un point limite à convergence périodique. On pourrait cependant faire d'autres hypothèses permettant de ne définir la transformation donnée que dans certains domaines. *Voir* à ce sujet les remarques faites par M. O. Spiess [*Lineare Iteralgleichungen mit konst. Koeffizient.* (*Mathem. Annalen*, t. LXII, 1906)].

étudié précédemment [1]. Nous supposerons donc que la transformation T_1 n'est pas une transformation de contact.

On définira de même la *puissance* $p^{\text{ième}}$ T_p de la transformation T_1. Pour obtenir T_p, il faut d'abord prolonger la transformation T_1 jusqu'à l'ordre p en calculant, à l'aide des équations (T_1), les dérivées Y', Y'', ..., $Y^{(p-1)}$ en fonction de $x, y, y', \ldots, y^{(p)}$. On peut alors remplacer dans les équations (T_2), x, y, y', y'' par X, Y, Y', Y'', ce qui fournit la transformation T_3, puis remplacer dans T_3 $x, y, \ldots, y'''$ par $X, Y, \ldots, Y'''$, et ainsi de suite. On voit que, si T_1 n'est pas une transformation de contact, T_p est une transformation $(X, Y; x, y, y', \ldots, y^{(p)})$. Les transformations T_p sont définies pour toutes les valeurs des variables s'il en est ainsi de T_1.

Ces puissances T_p de la transformation T_1 possèdent les propriétés fondamentales exprimées par les relations

$$T_{p+q} \equiv T_p(T_q),$$
$$T_{pq} \equiv (T_p)_q.$$

Dans ces relations T_p désigne la transformation prolongée aussi loin qu'il est nécessaire pour que ces relations aient un sens : $T_p(T_q)$ désigne alors la transformation T_p appliquée à l'élément prolongé

$$(X_q, Y_q, Y'_q, \ldots, Y_q^{(p)})$$

qui correspond par la transformation T_q à l'élément

$$(x, y, y', y'', \ldots, y^{(q)});$$

quant au symbole $(T_p)_q$, il représente la puissance $q^{\text{ième}}$ de la transformation T_p, les puissances de cette dernière transformation étant définies comme on l'a fait pour les puissances de T_1. Les relations écrites plus haut sont alors des conséquences immédiates de la définition des puissances de T_1. On a, en effet, par définition,

$$T_{p+q} \equiv T_1(T_{p+q-1}).$$

---

[1] *Sur les équations fonctionnelles qui définissent une courbe ou une surface invariante par une transformation*, Chap. VI, §§ 33 et 34.

Des équations (T_1) on déduit, par prolongement, des relations que nous désignerons pour abréger par

$$\begin{aligned} Y' &= \varphi'(x, y, y', y''), \\ Y'' &= \varphi''(x, y, y', y'', y'''), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

La transformation T_{p+q-1} est définie par les relations

$$\begin{aligned} X_{p+q-1} &= f(X_{p+q-2}, Y_{p+q-2}, Y'_{p+q-2}), \\ Y_{p+q-1} &= \varphi(X_{p+q-2}, Y_{p+q-2}, Y'_{p+q-2}), \end{aligned}$$

et l'on en déduit

$$Y'_{p+q-1} = \varphi'(X_{p+q-2}, Y_{p+q-2}, Y'_{p+q-2}, Y''_{p+q-2}).$$

La transformation $T_1(T_{p+q-1})$ est donc définie par les relations

$$X_{p+q} = f\left\{\begin{array}{l} f\ (X_{p+q-2}, Y_{p+q-2}, Y'_{p+q-2}), \\ \varphi\ (X_{p+q-2}, Y_{p+q-2}, Y'_{p+q-2}), \\ \varphi'(X_{p+q-2}, Y_{p+q-2}, Y'_{p+q-2}, Y''_{p+q-2}) \end{array}\right\},$$

$$Y_{p+q} = \varphi\left\{\begin{array}{l} f\ (X_{p+q-2}, Y_{p+q-2}, Y'_{p+q-2}), \\ \varphi\ (X_{p+q-2}, Y_{p+q-2}, Y'_{p+q-2}), \\ \varphi'(X_{p+q-2}, Y_{p+q-2}, Y'_{p+q-2}, Y''_{p+q-2}) \end{array}\right\},$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} X_{p+q} &= f_2(X_{p+q-2}, Y_{p+q-2}, Y'_{p+q-2}, Y''_{p+q-2}), \\ Y_{p+q} &= \varphi_2(X_{p+q-2}, Y_{p+q-2}, Y'_{p+q-2}, Y''_{p+q-2}), \end{aligned}$$

et ceci démontre la relation

$$T_1(T_{p+q-1}) \equiv T_2(T_{p+q-2}).$$

En procédant de même, de proche en proche, on obtient la suite de relations

$$T_{p+q} \equiv T_1(T_{p+q-1}) \equiv T_2(T_{p+q-2}) \equiv T_3(T_{p+q-3}) \equiv \ldots \equiv T_p(T_q).$$

De cette relation résulte

$$T_{p+q+r+\ldots} \equiv T_p\, T_q\, T_r \ldots,$$

et

$$T_{pq} \equiv (T_p)_q.$$

8. Considérons maintenant un élément double (x_0, y_0, y'_0) de la transformation T_1. Nous avons déjà défini (§ 2) l'élément double prolongé jusqu'au second ordre (x_0, y_0, y'_0, y''_0). Plus généralement on définit de même l'*élément double prolongé jusqu'à l'ordre* p de la façon suivante : prolongeons la transformation T_1 en adjoignant aux équations (T_1) les équations qui expriment $Y', Y'', \ldots, Y^{(p)}$ en fonction de $x, y, y', \ldots, y^{(p)}$, puis posons $X = x = x_0$, $Y = y = y_0$, $Y' = y' = y'_0$ et $Y'' = y''$, $Y''' = y'''$, ...; nous obtenons ainsi un système d'équations linéaires en $y'', y''', \ldots$ qui fournit pour $y'', y''', \ldots$ un système de valeurs $y''_0, y'''_0, \ldots$; la première équation du système donné y''_0, la suivante fournit y'''_0 en fonction de y''_0, et ainsi de suite. Chaque équation contient une nouvelle inconnue et le coefficient de cette inconnue $y_0^{(p)}$ est égal, quel que soit p, à $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y'} - y'\frac{\partial f}{\partial y'}\right)_0$, c'est-à-dire à la quantité que nous avons désignée par C dans le théorème du paragraphe I; cette quantité étant supposée différente de zéro, on voit que le calcul de $y''_0, y'''_0, \ldots$ est possible.

Il est évident que, s'il existe une courbe analytique invariante par T_1 et contenant l'élément double, les quantités $y''_0, y'''_0, \ldots$ ainsi calculées sont les valeurs prises par les dérivées de $\psi(x)$ pour $x = x_0$: autrement dit, la courbe invariante contient l'élément double prolongé.

9. *Si l'on prolonge ainsi jusqu'au rang* p *l'élément double* (x_0, y_0, y'_0) *de* T_1, *on obtient un élément* $(x_0, y_0, \ldots, y_0^{(p)})$ *qui est élément double pour la puissance* T_p *de la transformation* T_1.

Il est facile de le démontrer de proche en proche. Si l'on se reporte aux équations qui définissent T_2, on voit qu'à (x_0, y_0, y'_0, y''_0) cette transformation fait correspondre le point

$$X = f_2(x_0, y_0, y'_0, y''_0) = f[f(x_0, y_0, y'_0), \varphi(x_0, y_0, y'_0), Y'_0] = f(x_0, y_0, y'_0) = x_0,$$
$$Y = \varphi_2(x_0, y_0, y'_0, y''_0) = \varphi[f(x_0, y_0, y'_0), \varphi(x_0, y_0, y'_0), Y'_0] = \varphi(x_0, y_0, y'_0) = y_0.$$

Supposons, en général, la proposition établie pour la transformation T_{p-1} et considérons la transformation T_p :

$$X = f_p(x, y, y', \ldots, y^{(p)}),$$
$$Y = \varphi_p(x, y, y', \ldots, y^{(p)}).$$

D'après la définition de T_p, on a entre f_p et f_{p-1} les relations

$$\begin{aligned} f_p(x, y, y', \ldots, y^{(p)}) &\equiv f_{p-1}(X, Y, Y', \ldots, Y^{(p-1)}), \\ \varphi_p(x, y, y', \ldots, y^{(p)}) &\equiv \varphi_{p-1}(X, Y, Y', \ldots, Y^{(p-1)}), \end{aligned}$$

relations dans lesquelles X, Y désignent respectivement $f(x, y, y')$, $\varphi(x, y, y')$ et Y', Y'', ... les fonctions de $x, y, \ldots, y^{(p)}$ qu'on déduit des équations (T_1) par dérivations successives. Si l'on remplace x, $y, y', \ldots, y^{(p)}$ par $x_0, y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(p)}$ dans les identités précédentes, X, Y, Y', ..., $Y^{(p-1)}$ doivent par hypothèse être remplacés aussi par x_0, $y_0, \ldots, y_0^{(p-1)}$ et l'on a

$$\begin{aligned} f_p(x_0, y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(p)}) &= f_{p-1}(x_0, y_0, \ldots, y_0^{(p-1)}) = x_0, \\ \varphi_p(x_0, y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(p)}) &= \varphi_{p-1}(x_0, y_0, \ldots, y_0^{(p-1)}) = y_0. \end{aligned}$$

On voit donc que la transformation T_p fait correspondre à l'élément

$$(x_0, y_0, \ldots, y_0^{(p)})$$

le point (x_0, y_0) lui-même : l'élément considéré est donc élément double de T_p.

Ainsi la transformation T_p possède comme éléments doubles les éléments doubles de T_1 prolongés jusqu'à l'ordre p. Mais T_p *a aussi des éléments doubles qui ne sont pas les prolongements d'éléments doubles de* T_1. On a, en effet, pour déterminer les éléments doubles de T_p les deux seules équations

$$\begin{aligned} x_0 &= f_p(x_0, y_0, \ldots, y_0^{(p)}), \\ y_0 &= \varphi_p(x_0, y_0, \ldots, y_0^{(p)}). \end{aligned}$$

Les éléments doubles $(x_0, y_0, \ldots, y_0^{(p)})$ forment donc une multiplicité dépendant, en général, de p paramètres arbitraires, tandis que les éléments doubles de T_1 constituent une multiplicité dépendant, en général, d'un seul paramètre arbitraire.

Soit, par exemple, la transformation

$$(T_1) \qquad \begin{cases} X = f(x), \\ Y = y'. \end{cases}$$

Soit a une racine de l'équation $f(x) = x$; un élément double quel conque a pour coordonnées

$$x = a, \qquad y = \lambda, \qquad y' = \lambda,$$

λ étant un paramètre arbitraire. La transformation T_2 est ici

$$(T_2) \qquad \begin{cases} X = f[f(x)], \\ Y = \dfrac{y''}{f'(x)}. \end{cases}$$

Soit b une racine quelconque de $f[f(x)] = x$ (en particulier, on peut prendre $b = a$); un élément double quelconque de T_2 a pour coordonnées

$$x = b, \qquad y = \lambda, \qquad y' = \mu, \qquad y'' = \lambda f'(b),$$

et ces éléments dépendent de deux paramètres arbitraires λ, μ : en particulier, si l'on prend $b = a$, $\mu = \lambda$, on trouve les éléments doubles de (T_1) prolongés.

Plus généralement, un élément double de la transformation T_q donne, si on le prolonge jusqu'à l'ordre nq, un élément double de T_{nq} : cela résulte de la propriété $T_{nq} = (T_q)_n$ démontrée au paragraphe 7.

10. Nous dirons qu'un élément double de T_p *appartient à l'indice* p s'il ne coïncide pas avec le prolongement d'un élément double d'une transformation T_q, où q est inférieur à p.

On peut déduire d'un pareil élément double de T_p un cycle de p éléments analogues qui seront tous des éléments doubles de T_p (1).

Considérons, en effet, un élément E_0 de coordonnées

$$(x_0, y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(p)})$$

qui soit double pour la transformation T_p et qui appartienne à l'indice p. Si l'on applique à cet élément plusieurs fois de suite la transformation T_1 prolongée aussi loin qu'il est nécessaire, on obtient suc-

(1) Cf. KOENIGS, *loc. cit.*

cessivement les éléments

E_1	d'ordre	$p-1$	et de coordonnées	$(x_1,\ y_1,\ y'_1,\ \ldots,\ \ldots, y_1^{(p-1)})$,
E_2	»	$p-2$	»	$(x_2,\ y_2,\ y'_2,\ \ldots,\ \ldots, y_2^{(p-2)})$,
....				........,
E_{p-2}	»	2	»	$(x_{p-2}, y_{p-2}, y'_{p-2}, y''_{p-2})$,
E_{p-1}	»	1	»	$(x_{p-1}, y_{p-1}, y'_{p-1})$,

et à ce dernier élément correspond un point (x_p, y_p). Mais la suite des transformations ainsi effectuées revient à la transformation T_p. On a donc

$$x_p = x_0, \qquad y_p = y_0.$$

Supposons que les transformations T_1 et T_p aient été prolongées indéfiniment. A l'élément E_0 prolongé indéfiniment par la transformation T_p, la transformation T_1 prolongée fera correspondre les éléments $E_1, E_2, \ldots, E_{p-1}$ prolongés indéfiniment et après p opérations on retombera sur l'élément primitif E_0 prolongé. On a

$$E_p \equiv E_0.$$

Plus généralement, on a, quel que soit k,

$$E_{p+k} \equiv E_k,$$

les éléments étant toujours des éléments prolongés indéfiniment. De là résultent les propositions suivantes :

1° *De tout élément* E_0 *de la transformation* T_p *qui appartient à l'indice* p, *on peut déduire un cycle de* p *éléments doubles*

$$E_0, \quad E_1, \quad E_2, \quad \ldots, \quad E_{p-1}$$

de la même transformation, et ces éléments appartiennent aussi à l'indice p.

2° *Les éléments du cycle précédent sont permutés circulairement par la transformation* T_1 *prolongée, autrement dit ils constituent un cycle d'éléments invariant par la transformation* T_1.

Il existe, en général, une infinité de pareils cycles pour toutes les valeurs de p : en effet, tandis que les éléments doubles de T_1 constituent une multiplicité à un paramètre, ceux de T_2 dépendent de deux paramètres arbitraires ; en général, ceux de T_p dépendent de p paramètres et chacun de ces éléments doubles, dont le degré de généralité va en augmentant avec p, fournit un cycle d'éléments se permutant circulairement par la transformation T_1.

Soit, par exemple, la transformation étudiée plus haut

$$X = f(x), \qquad Y = y',$$

et soit à trouver un cycle de deux éléments permutables par la transformation. La transformation T_1 prolongée est la suivante :

$$X = f(x), \qquad Y = y', \qquad Y' = \frac{y''}{f'(x)}, \qquad Y'' = \frac{f'(x)y''' - y''f''(x)}{[f'(x)]^3}, \qquad \cdots$$

La transformation T_2 prolongée est définie par les relations

$$X_2 = f[f(x)], \qquad Y_2 = \frac{y''}{f'(x)}, \qquad Y'_2 = \frac{f'(x)y''' - y''f''(x)}{[f'(x)]^3 f'[f(x)]}, \qquad \cdots$$

Soit b une racine de $f[f(x)] = x$ et λ, μ des constantes arbitraires. La transformation T_2 admet l'élément double prolongé

$$(\mathrm{E}_0) \qquad \begin{cases} x = b, \quad y = \lambda, \quad y' = \mu, \quad y'' = \lambda f'(b), \\ y''' = \mu[f'(b)]^2 f'[f(b)] + \lambda f''(b), \quad \cdots \end{cases}$$

Si l'on applique à cet élément la transformation T_1 prolongée, on en déduit l'élément

$$(\mathrm{E}_1) \qquad x = f(b), \qquad y = \mu, \qquad y' = \lambda, \qquad y'' = \mu f'[f(b)], \qquad \ldots,$$

et ce dernier élément fournit à son tour le suivant,

$$x = b, \qquad y = \lambda, \qquad y' = \mu, \qquad \ldots,$$

qui n'est autre que (E_0). On a donc déterminé un couple de deux éléments permutables par la transformation.

11. Nous avons défini au paragraphe 2 l'invariant S relatif à un élément double de la transformation T_1 et au paragraphe 3 l'invariant analogue pour une transformation $(X, Y; x, y, y', \ldots, y^{(p)})$. Nous

allons étendre maintenant la définition au cycle des p éléments

$$(E_0, E_1, \ldots, E_{p-1})$$

permutés circulairement par la transformation T_1. La quantité S_p que nous définirons ainsi jouera un rôle important dans la détermination des courbes invariantes.

Soit $(x, y, y', \ldots, y^{(p)}, \ldots)$ un élément pris dans le domaine de E_0 et prolongé aussi loin qu'il est nécessaire pour la suite : ses conséquents consécutifs appartiennent respectivement aux domaines de E_1, $E_2, \ldots, E_{p-1}$ et le $p^{\text{ième}}$ conséquent est de nouveau dans le domaine de E_0. Soient (x_1, y_1), (x_2, y_2), $\ldots$, (x_p, y_p) les points qui servent de support à ces conséquents successifs : le point x_p, y_p est le point qui correspond par la transformation T_p à l'élément primitif. L'invariant $S_{p,0}$ relatif à l'élément E_0 de T_p a été défini au paragraphe 3 et il s'exprime sous l'une des formes suivantes :

$$S_{p,0} = \lim \frac{dx_p}{dx} = \lim \frac{dy_p}{dy} = \lim \frac{d\sigma_p}{d\sigma}.$$

Les différentielles sont relatives à une courbe quelconque $y = \psi(x)$ contenant l'élément double E_0 prolongé jusqu'à l'ordre $p + 1$ et à la courbe $y_p = \psi(x_p)$ qui lui correspond par la transformation T_p; $d\sigma_p$, $d\sigma$ sont les différentielles de deux arcs correspondants des deux courbes; enfin, on considère les limites des rapports précédents lorsque (x, y) tend vers (x_0, y_0) sur la courbe $y = \psi(x)$.

On pourrait définir une quantité analogue à $S_{p,0}$ pour chacun des éléments $E_1, E_2, \ldots, E_{p-1}$ du cycle. Nous allons montrer que l'on a

$$S_{p,0} = S_{p,1} = S_{p,2} = \ldots = S_{p,p-1}.$$

En d'autres termes, la quantité $S_{p,0}$ *est une fonction des coordonnées des p éléments du cycle qui reste invariante lorsqu'on applique à ces éléments la transformation* T_1 *qui les permute circulairement.*

On a, en effet,

$$S_{p,0} = \lim \frac{dx_p}{dx_0} = \lim \left(\frac{dx_p}{dx_{p-1}} \times \frac{dx_{p-1}}{dx_{p-2}} \times \ldots \times \frac{dx_2}{dx_1} \times \frac{dx_1}{dx} \right),$$

et par la transformation T_1 les rapports précédents sont permutés circulairement. Nous désignerons par S_p la valeur commune de $S_{p,0}$, $S_{p,1}$, ..., $S_{p,p-1}$, et nous dirons que S_p est l'invariant relatif au cycle

$$(\mathbf{E}_0, \mathbf{E}_1, \ldots, \mathbf{E}_{p-1}).$$

C'est un invariant en ce sens que cette quantité ne change pas lorsqu'on applique à T_1 une transformation ponctuelle quelconque, régulière dans le voisinage des points P_0, P_1, ... qui servent de support aux éléments du cycle.

Soient, par exemple, la transformation donnée comme exemple à la fin du paragraphe précédent et le couple d'éléments (E_0, E_1). On a

$$S_2 = \lim \frac{dX_2}{dx} = \lim f'[f(x)] \times f'(x) = f'(b) \times f'[f(b)].$$

Par la transformation T_1, b et $f(b)$ permutent et S_2 reste le même.

Soit encore la transformation

$$(T_1) \qquad \begin{cases} X = y, \\ Y = y'. \end{cases}$$

Considérons un cycle de trois éléments permutant circulairement par la transformation. Les formules qui définissent les transformations T_1, T_2, T_3 prolongées sont

$$(T_1) \qquad X = y, \qquad Y = y', \qquad Y' = \frac{y''}{y'}, \qquad Y'' = \frac{y' y''' - y''^2}{y'^3}, \qquad \ldots,$$

$$(T_2) \qquad X_2 = y', \qquad Y_2 = \frac{y''}{y'}, \qquad Y'_2 = \frac{y' y''' - y''^2}{y'^2 y''}, \qquad \ldots,$$

$$(T_3) \qquad X_3 = \frac{y''}{y'}, \qquad Y_3 = \frac{y' y''' - y''^2}{y'^2 y''}, \qquad \ldots.$$

Les éléments doubles de T_3 sont donnés par le système

$$\begin{gathered} x y' = y'', \\ y y'^2 y'' = y' y''' - y''^2. \end{gathered}$$

On peut prendre pour élément double

$$(E_0) \quad x = \alpha, \qquad y = \beta, \qquad y' = \gamma, \qquad y'' = \alpha\gamma, \qquad y''' = \alpha\gamma(\beta\gamma + \alpha), \qquad \ldots,$$

α, β, γ étant trois arbitraires. A cet élément, la transformation T_1 fait correspondre les suivants :

$$(E_1) \qquad x = \beta, \quad y = \gamma, \quad y' = \alpha, \quad y'' = \alpha\beta, \quad \ldots,$$
$$(E_2) \qquad x = \gamma, \quad y = \alpha, \quad y' = \beta, \quad \ldots,$$

qui constituent avec E_0 le cycle demandé. L'invariant relatif à E_0 est

$$S = \left(\frac{dX_3}{dx}\right)_0 = \left(\frac{y'y''' - y''^2}{y'^2}\right)_0 = \frac{\alpha\gamma^2(\beta\gamma + \alpha) - \alpha^2\gamma^2}{\gamma^2} = \alpha\beta\gamma$$

et l'on voit que c'est une fonction symétrique de α, β, γ. Lorsqu'on passe de E_0 à E_1 et à E_2, α, β, γ sont permutés circulairement et S conserve la même valeur.

12. Soient

$$X = f_p(x, y, y', \ldots, y^{(p)}),$$
$$Y = \varphi_p(x, y, y', \ldots, y^{(p)})$$

les équations qui définissent la transformation T_p déduite de T_1 par p itérations successives, et $(E_0, E_1, \ldots, E_p)$ un cycle d'éléments doubles de T_p appartenant à l'indice p. Il peut arriver qu'il existe une courbe C_0 d'équation $y = \psi_0(x)$ invariante par la transformation T_p, contenant l'élément E_0 et définie dans le domaine de cet élément : l'existence de cette courbe a été établie (§ 4 et 6) dans le cas où les conditions suivantes sont réalisées :

$$C_p = \left(\frac{\partial\varphi_p}{\partial y^{(p)}} - y'\frac{\partial f_p}{\partial y^{(p)}}\right)_0 \neq 0,$$
$$|S_p| < 1.$$

S_p est l'invariant étudié au paragraphe précédent : il est le même pour les éléments $E_1, E_2, \ldots, E_{p-1}$ que pour l'élément E_0.

A la courbe C_0 la transformation T_1 fait correspondre une courbe C_1 d'équation

$$y = \psi_1(x)$$

contenant l'élément double E_1 et définie dans le domaine de cet élément. En appliquant ainsi la transformation T_1 plusieurs fois de suite à la courbe C_0, on définit un cycle de p courbes

$$C_0, \quad C_1, \quad C_2, \quad \ldots, \quad C_{p-1}.$$

Soient

$$y = \psi_0(x), \qquad y = \psi_1(x), \qquad y = \psi_2(x), \qquad y = \psi_{p-1}(x)$$

les équations de ces courbes. Elles contiennent respectivement les éléments

$$E_0, \quad E_1, \quad E_2, \quad \ldots, \quad E_{p-1},$$

et la fonction $\psi_i(x)$ est définie dans un certain domaine $x_i - h, x_i + h$, si l'on désigne par x_i l'abscisse du point qui sert de support à l'élément E_i.

Si l'on applique une nouvelle fois la transformation T_1, la courbe C_{p-1} redonne la courbe C_0, car la suite des p transformations T_1 revient à la transformation unique T_p et par hypothèse C_0 est une courbe invariante par T_p. On voit donc :

1° Que chacune des courbes $y = \psi_0(x), y = \psi_1(x), \ldots, y = \psi_p(x)$ est invariante par T_p;

2° Que ces courbes sont permutées circulairement par la transformation T_1.

On a donc défini ainsi un cycle de p *fonctions*

$$y_0 = \psi_0(x), \qquad y_1 = \psi_1(x), \qquad \ldots, \qquad y_{p-1} = \psi_{p-1}(x),$$

définies respectivement dans p *domaines distincts* $x_i - h_i, x_i + h_i$ *et dont l'ensemble définit une courbe à* p *branches* $C_0, C_1, \ldots, C_{p-1}$ *invariante par la transformation*

$$X = f(x, y, y'), \qquad Y = \varphi(x, y, y'),$$

cette transformation permutant circulairement les p *branches.*

Si l'on se reporte à la démonstration du théorème d'existence (§ 6), on voit que le cycle formé par les p branches se trouve déterminé par approximations successives; il suffit de partir d'une courbe arbitraire contenant l'un des éléments doubles du cycle, E_0 par exemple, et de former ses antécédentes successives : les antécédentes *prises de* p en p à partir d'une antécédente arbitraire ont une limite indépendante de la courbe initiale et c'est cette limite qui constitue l'une des branches de courbe $C_0, C_1, \ldots, C_{p-1}$. Si l'on prend au contraire *toutes* les antécédentes successives, leur suite n'a pas de limite : elles oscillent du voisinage de l'un des éléments $E_0, E_1, \ldots, E_{p-1}$ au voisinage de l'élément suivant de la suite. C'est là, comme on voit, le mode de convergence appelé par M. Kœnigs *convergence irrégulière* [1] dans le cas de l'itération des substitutions $X = f(x)$.

Au point de vue analytique, les fonctions $\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_{p-1}$ vérifient le système fonctionnel suivant :

$$\begin{aligned}
\psi_1[f(x, \psi_0, \psi'_0)] &= \varphi(x, \psi_0, \psi'_0),\\
\psi_2[f(x, \psi_1, \psi'_1)] &= \varphi(x, \psi_1, \psi'_1),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\psi_{p-1}[f(x, \psi_{p-2}, \psi'_{p-2})] &= \varphi(x, \psi_{p-2}, \psi'_{p-2}),\\
\psi_0[f(x, \psi_{p-1}, \psi'_{p-1})] &= \varphi(x, \psi_{p-1}, \psi'_{p-1}).
\end{aligned}$$

Exemple I. — Soient la transformation

$$X = f(x), \qquad Y = y'$$

et le couple d'éléments (E_0, E_1) considérés au paragraphe 10. Supposons

$$|f'(b) \times f'[f(b)]| < 1.$$

Il existe alors deux fonctions $\psi(x)$, $\theta(x)$ vérifiant le système

$$\begin{aligned}
\psi[f(x)] &= \theta'(x),\\
\theta[f(x)] &= \psi'(x).
\end{aligned}$$

La fonction ψ est définie dans le domaine de $x = b$ et a un développement de la forme

$$\psi(x) = \lambda + \mu(x - b) + \lambda f'(b)\frac{(x-b)^2}{1.2} + \ldots,$$

tandis que la fonction θ est définie dans le domaine de $x = b_1$, en

[1] KOENIGS, *loc. cit.*

posant $b_1 = f(b)$, et a un développement de la forme

$$\theta(x) = \mu + \lambda(x - b_1) + \mu f'(b_1)\frac{(x-b_1)^2}{1.2} + \ldots.$$

Si l'on désigne par $\Psi(x)$ une fonction définie par le développement ψ dans le domaine de $x = b$ et par le développement θ dans le domaine de $x = b_1$, on voit que la fonction Ψ vérifie l'équation fonctionnelle

$$\Psi'(x) = \Psi[f(x)];$$

λ et μ sont des paramètres arbitraires, de sorte qu'on a défini ainsi une infinité de solutions de l'équation fonctionnelle dépendant de deux paramètres. En ne considérant qu'un élément double, on aurait eu une solution moins générale. Plus généralement, on peut considérer un cycle invariant de p éléments, au lieu de deux éléments, et l'on a ainsi, à mesure que p croît, des solutions de l'équation fonctionnelle contenant un nombre de paramètres de plus en plus grand. Les mêmes remarques s'appliquent au cas général.

Exemple II. — Soit la transformation

$$X = y, \qquad Y = y',$$

considérée au paragraphe 11. Considérons le cycle d'éléments

$$(E_1, E_2, E_3)$$

défini au paragraphe 11. Le système fonctionnel est ici

$$\begin{aligned} \theta[\psi(x)] &= \psi'(x), \\ \chi[\theta(x)] &= \theta'(x), \\ \psi[\chi(x)] &= \chi'(x), \end{aligned}$$

et les fonctions inconnues ψ, θ, χ sont données par des développements dont voici les premiers termes :

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \beta + \gamma(x - \alpha) + \alpha\gamma\frac{(x-\alpha)^2}{1.2} + \ldots, \\ \theta(x) &= \gamma + \alpha(x - \beta) + \beta\alpha\frac{(x-\beta)^2}{1.2} + \ldots, \\ \chi(x) &= \alpha + \beta(x - \gamma) + \gamma\beta\frac{(x-\gamma)^2}{1.2} + \ldots. \end{aligned}$$

Ces trois développements sont convergents, pourvu que l'invariant S soit inférieur à 1 en valeur absolue ([1]), ce qui donne la condition

$$|\alpha\beta\gamma| < 1.$$

Si l'on désigne par $\Psi(x)$ une fonction égale à $\psi(x)$ dans le domaine de $x = \alpha$, à $\theta(x)$ dans le domaine de $x = \beta$ et à $\chi(x)$ dans le domaine de $x = \gamma$, on voit que l'on a

$$\Psi'(x) = \Psi[\Psi(x)].$$

On a ainsi défini une solution de l'équation fonctionnelle précédente dépendant de trois arbitraires α, β, γ.

13. Indiquons pour terminer un cas où l'on sera assuré de l'existence d'une infinité d'éléments E_p vérifiant les inégalités

$$C_p \neq 0, \qquad |S_p| < 1.$$

Considérons un élément double (x_0, y_0, y'_0) de T_1 pour lequel on ait

$$C \neq 0, \qquad |S| < 1.$$

Par cet élément E passe une courbe C invariante par la transformation T_1 et définie dans un certain domaine $x_0 - h$, $x_0 + h$. L'élément E prolongé est un élément double de T_p pour lequel on a

$$S_p = S^p.$$

Cela résulte de ce qu'on a vu au paragraphe 9. On a en effet, en conservant les notations de ce paragraphe,

$$S_p = \lim \frac{dx_p}{dx} = \lim \left(\frac{dx_p}{dx_{p-1}} \times \frac{dx_{p-1}}{dx_{p-2}} \times \ldots \times \frac{dx_2}{dx_1} \times \frac{dx_1}{dx} \right),$$

les différentielles étant relatives à une courbe quelconque contenant

---

([1]) La condition $C_p \neq 0$ qui figure dans l'énoncé du théorème général est imposée par le calcul des coefficients de la fonction inconnue : c'est la condition pour que le calcul formel des coefficients de proche en proche (§ 8) soit possible. Il en résulte que cette condition est certainement vérifiée si les coefficients du développement ont pu être calculés : il est donc inutile d'exprimer cette condition dans le cas actuel.

l'élément double prolongé jusqu'à l'ordre $p+1$; on peut prendre comme courbe la courbe C elle-même : les points $x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots$ appartiennent tous à la courbe C et l'on a, quel que soit i,

$$\lim \frac{dx_i}{dx_{i-1}} = \mathrm{S},$$

d'où

$$\mathrm{S}_p = \mathrm{S}^p$$

et, par suite,

$$|\mathrm{S}_p| < 1.$$

Au lieu de l'élément E_1 considérons un autre élément double de T_p qui appartienne à l'indice p, dont les coordonnées soient voisines des coordonnées de E et pour lequel on ait $\mathrm{C}_p \neq 0$; il y aura en général de pareils éléments, car il suffit pour en déterminer un de se donner p des coordonnées de l'élément et de déterminer les deux autres par les relations

$$x_p = f_p(x_0, y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(p)}),$$
$$y_p = \varphi_p(x_0, y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(p)}),$$

avec l'inégalité $\mathrm{C}_p \neq 0$.

Ces relations, étant satisfaites par les coordonnées de E prolongé, seront en général satisfaites par des valeurs voisines de ces coordonnées, à cause de la continuité des fonctions f_p, φ_p, C_p. Soit E_p un pareil élément voisin de E prolongé; l'invariant S_p relatif à cet élément sera voisin de S^p : on aura donc

$$|\mathrm{S}_p| < 1$$

et par cet élément E_p passera une courbe invariante par la transformation T_p.

On voit donc que, si l'on a trouvé une courbe invariante par T_1 et contenant un élément double E pour lequel $|\mathrm{S}|$ est inférieur à 1, on est sûr de pouvoir déterminer une infinité de cycles de p arcs voisins de l'élément E permutés circulairement par la transformation T_1, et cela quel que soit p : l'ensemble de ces p arcs constitue une nouvelle courbe invariante par la transformation T_1.