

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

R. RADAU

Sur la rotation des corps solides

Annales scientifiques de l'É.N.S. 1^{re} série, tome 6 (1869), p. 233-250

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1869_1_6__233_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1869, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LA
ROTATION DES CORPS SOLIDES,

PAR M. R. RADAU.

On connaît l'admirable théorie de la rotation des solides qui est due à Poinso. Jacobi, reprenant les recherches de Rueb (*), a donné du même problème une solution analytique magistrale (**). Après avoir exprimé les neuf cosinus des axes principaux en fonction du temps, il fait voir que le mouvement du corps autour d'un point fixe se compose d'une rotation *oscillatoire* autour de trois axes X, Y, Z (dont le dernier seul est fixe), et d'une rotation progressive des axes X, Y, qui tournent dans le plan invariable autour de l'axe Z avec une vitesse uniforme. La rotation oscillatoire ne dépend que d'un argument proportionnel au temps et de deux constantes. En 1850, M. Richelot a traité le problème à un autre point de vue, en déduisant toutes les intégrales de la solution d'une équation aux dérivées partielles (***). Tout récemment M. Sylvester (****) a essayé d'appliquer au même sujet des considérations nouvelles qui l'ont conduit à des résultats intéressants, à côté d'autres dont l'exactitude peut être contestée. Avant de les discuter, je rappellerai d'abord les formules qui se rapportent à cette question.

I.

Lorsqu'un corps solide qui n'est sollicité par aucune force accélératrice tourne autour d'un point fixe après avoir été ébranlé par un cou-

(*) *De motu gyratorio*; Utrecht, 1834.

(**) *Sur la rotation d'un corps* (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, juillet 1849; — *Journal de Crelle*, t. XXXIX).

(***) *Eine neue Lösung des Problems der Rotation...* (*Mémoires de l'Académie de Berlin*, année 1850, p. 1 à 59. — *Monatsberichte*, 1851, p. 188). — *Lettre de M. Richelot à Jacobi* (JACOBI, *Math. Werke*, t. II, p. 353).

(****) *On the motion of a rigid body* (*Philosophical Transactions*; 1866).

Annales scientifiques de l'École Normale supérieure. Tome VI.

ple d'impulsion K , l'ellipsoïde central roule sans glisser sur un plan parallèle à celui du couple et situé à la distance $P = \frac{\sqrt{H}}{K}$ du centre. H est la constante des forces vives; on verra plus loin que le paramètre P ne dépend que des moments d'inertie et de la direction du choc par rapport aux axes principaux. Le rayon R mené au point de contact de l'ellipsoïde est l'axe instantané de rotation; la vitesse de rotation ω est égale à $R\sqrt{H}$, elle a une composante constante $P\sqrt{H} = \frac{H}{K}$ autour de la normale P abaissée du centre sur le plan tangent, qui est le plan du couple d'impulsion et le plan invariable du mouvement.

Soient A, B, C les moments d'inertie du corps, l'équation de l'ellipsoïde central sera $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1$, et en désignant par x, y, z les coordonnées du point de contact, par α, β, γ les cosinus des angles que la normale P fait avec les axes principaux, on aura les relations géométriques

$$(1) \quad \frac{\alpha}{Ax} = \frac{\beta}{By} = \frac{\gamma}{Cz} = P,$$

$$(2) \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1, \quad \frac{\alpha^2}{A} + \frac{\beta^2}{B} + \frac{\gamma^2}{C} = P^2.$$

Je supposerai toujours que les quantités $\frac{1}{A}, \frac{1}{B}, P^2, \frac{1}{C}$ se succèdent par ordre de grandeur. Soit alors

$$a^2 = \frac{P^2 - \frac{1}{C}}{\frac{1}{A} - \frac{1}{C}}, \quad b^2 = \frac{P^2 - \frac{1}{C}}{\frac{1}{B} - \frac{1}{C}}, \quad h^2 = \frac{b^2 - a^2}{1 - a^2}, \quad \Delta\xi = \sqrt{1 - h^2 \sin^2 \xi},$$

les formules (2) nous permettent de poser

$$(3) \quad \alpha = a \cos \xi, \quad \beta = b \sin \xi, \quad \gamma = \sqrt{1 - a^2} \Delta\xi.$$

Si nous désignons par p, q, r les rotations autour des axes principaux, nous avons

$$(4) \quad \frac{p}{x} = \frac{q}{y} = \frac{r}{z} = \frac{\omega}{R} = \sqrt{H} = PK,$$

d'où

$$(5) \quad \frac{Ap}{\alpha} = \frac{Bq}{\beta} = \frac{Cr}{\gamma} = K$$

et

$$(6) \quad Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = H, \quad A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = K^2.$$

Ce sont les intégrales des forces vives et des aires. Les équations différentielles du problème sont les suivantes :

$$(7) \quad A \frac{dp}{dt} = (B - C)qr, \quad B \frac{dq}{dt} = (C - A)rp, \quad C \frac{dr}{dt} = (A - B)pq,$$

$$(8) \quad \frac{d\alpha}{dt} = \beta r - \gamma q, \quad \frac{d\beta}{dt} = \gamma p - \alpha r, \quad \frac{d\gamma}{dt} = \alpha q - \beta p,$$

et si l'on désigne par ψ_1, ψ_2, ψ_3 les longitudes des axes principaux (ou celles des nœuds des plans principaux) sur le plan invariable,

$$(9) \quad \frac{d\psi_1}{dt} = \frac{\beta q + \gamma r}{\beta^2 + \gamma^2}, \quad \frac{d\psi_2}{dt} = \frac{\gamma r + \alpha p}{\gamma^2 + \alpha^2}, \quad \frac{d\psi_3}{dt} = \frac{\alpha p + \beta q}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

On a d'ailleurs

$$(9 \text{ bis}) \quad \text{tang}(\psi_2 - \psi_3) = \frac{\alpha}{\beta\gamma}, \quad \text{tang}(\psi_3 - \psi_1) = \frac{\beta}{\gamma\alpha}, \quad \text{tang}(\psi_1 - \psi_2) = \frac{\gamma}{\alpha\beta}.$$

Les trois équations (7), avec deux des équations (8), déterminent les quantités $p, q, r, \alpha, \beta, \gamma$; les longitudes ψ se trouvent ensuite par des quadratures à l'aide des équations (9), et il suffit d'en connaître une, par exemple ψ_3 , pour qu'on puisse à chaque instant déterminer la position du corps dans l'espace. Les équations (5) et (8) donnent

$$(10) \quad \frac{d\gamma}{\alpha\beta} = \left(\frac{1}{B} - \frac{1}{A} \right) K dt,$$

et si nous introduisons la variable ξ par les formules (3), nous avons

$$(11) \quad \int_0^\xi \frac{d\xi}{\Delta\xi} = u = n(t + \tau),$$

en faisant

$$n = K \sqrt{\left(\frac{1}{A} - P^2 \right) \left(\frac{1}{B} - \frac{1}{C} \right)}.$$

Par suite

$$\alpha = a \cos am u, \quad \beta = b \sin am u, \quad \gamma = \sqrt{1 - a^2} \Delta am u.$$

Les angles qui déterminent la position des axes principaux par rap-

port à la normale P au plan invariable ne dépendent donc que de l'argument $u = n(t + \tau)$ et des deux constantes a, b (ce sont les sinus des angles que l'axe des z fait avec P au moment où l'axe des y ou l'axe des x est couché sur le plan invariable). L'une des équations (9) donnera ensuite

$$(12) \quad d\psi_3 = \frac{H}{K} dt + \frac{ab\sqrt{1-a^2}\Delta\xi}{a^2\cos^2\xi + b^2\sin^2\xi} d\xi.$$

Les longitudes ψ_1, ψ_2 , et la longitude ψ_3 de l'axe instantané R s'expriment d'une manière analogue. On a, par exemple,

$$(13) \quad d\psi_1 = \frac{H}{K} dt + \frac{ab\sqrt{1-a^2}(1-k^2)}{b^2 - k^2\sin^2\xi} \frac{d\xi}{\Delta\xi}.$$

Les constantes a, b ne changent pas de valeur, si les quatre quantités $\frac{1}{A}, \frac{1}{B}, \frac{1}{C}, P^2$ sont remplacées par

$$\pm\mu\left(\frac{1}{A} - \lambda\right), \quad \pm\mu\left(\frac{1}{B} - \lambda\right), \quad \pm\mu\left(\frac{1}{C} - \lambda\right), \quad \pm\mu(P^2 - \lambda);$$

ce qui revient à substituer à l'ellipsoïde central (ABC) un ellipsoïde *semblable, confocal* ou *contrafocal* (suivant l'expression de M. Sylvester), avec un plan invariable parallèle à l'ancien. Nous supposons que K ne change pas, d'où il suit que H sera remplacé par $\pm\mu(H - \lambda K^2)$. Si, en même temps, on écrit $\pm\frac{dt}{\mu}$ à la place de dt , les équations (2), (10) et (12) montrent que α, β, γ ne sont pas changés, mais que les longitudes ψ sont diminuées d'une quantité $\lambda K t$, proportionnelle au temps.

Jacobi introduit l'argument a , défini par l'équation $\cos am(ia) = \frac{1}{a}$, et il exprime les neufs cosinus ($\alpha, \beta, \gamma; \alpha', \beta', \gamma'; \alpha'', \beta'', \gamma''$) des axes principaux, rapportés aux axes X, Y, P, par les fonctions Θ des arguments u et ia . Les axes mobiles X, Y peuvent être choisis de deux manières : on peut leur attribuer la vitesse de rotation (*)

$$N = \frac{H}{K} + n \frac{\partial \log \Theta_2(ia)}{\partial a},$$

(*) Je suppose que $A < C$; l'hypothèse contraire revient à des changements de signes dans les formules.

qui est la *vitesse moyenne* des projections de l'axe instantané R et de l'axe des z (le premier terme de $\frac{d\psi_1}{dt}$ et de $\frac{d\psi_3}{dt}$), ou bien la vitesse $N_1 = N - \frac{\pi n}{2K}$, qui est la vitesse moyenne des deux autres axes (le premier terme de $\frac{d\psi_1}{dt}$ et de $\frac{d\psi_2}{dt}$; la quantité K, dans cette dernière formule, est l'intégrale elliptique complète de la première espèce). Les expressions des longitudes ψ , rapportées à une droite fixe, sont

$$\psi_3 = Nt + \frac{1}{2i} \log \frac{\Theta(u + ia)}{\Theta(u - ia)},$$

et ainsi de suite. Ces formules ont été développées par Jacobi en séries rapidement convergentes qui permettent de déterminer avec précision toutes les circonstances du mouvement rotatoire (*).

II.

Considérons maintenant deux corps dont les ellipsoïdes centraux soient semblables et également inclinés sur le plan invariable; les rapports $\frac{1}{A} : \frac{1}{B} : \frac{1}{C} : P^2$ seront les mêmes pour les deux systèmes, et les déplacements angulaires $\omega dt = \frac{R}{P} \frac{H}{K} dt$ seront identiques pendant des temps proportionnels à $\frac{K}{H}$.

Supposons, d'un autre côté, avec M. Sylvester, que les quantités A, B, C, P et A₁, B₁, C₁, P₁ soient dans l'une des deux relations exprimées par la formule

$$(14) \quad \lambda = \frac{1}{A} \mp \frac{1}{A_1} = \frac{1}{B} \mp \frac{1}{B_1} = \frac{1}{C} \mp \frac{1}{C_1} = P^2 \mp P_1^2;$$

selon qu'on prendra le signe supérieur ou le signe inférieur, les deux ellipsoïdes centraux représenteront deux surfaces homofocales ou con-

(*) On trouve un exemple de calcul dans le *Recueil de Formules et de Tables* de M. HOÜEL, p. LXVI de l'*Introduction*.

trafocales. Plaçons les deux corps de manière que leurs axes principaux soient parallèles, et mettons-les en mouvement par deux couples (K) de grandeur et de direction identiques; les plans invariables seront parallèles, et les équations (2) montrent que la condition $P^2 \mp P_1^2 = \lambda$ sera satisfaite. Dans la suite du mouvement, les axes principaux cesseront d'être parallèles, mais ils resteront également inclinés sur les plans invariables, puisque les cosinus α, β, γ ne changent pas par la substitution de A_1, B_1, \dots , à la place de A, B, \dots . Les longitudes ψ ne différeront que par un terme $K\lambda t$; on ramènera donc les axes au parallélisme en faisant pivoter l'un des corps autour de la droite P d'un angle proportionnel au temps écoulé.

Supposons maintenant que (A, B, C_1) représente simplement une surface homofocale et concentrique avec l'ellipsoïde central (ABC) . Les axes des deux ellipsoïdes resteront confondus, (ABC) roulera sans glisser sur son plan invariable, mais (A, B, C_1) roulera et glissera sur le plan parallèle. En effet, si l'ellipsoïde (A, B, C_1) pouvait tourner librement, il tournerait autour du rayon de contact R_1 , les longitudes des axes qui correspondent à C et C_1 différeraient d'une quantité égale à $K\lambda t$, et l'on ramènerait les deux ellipsoïdes au parallélisme en faisant pivoter (A, B, C_1) autour de P d'un angle égal à cette quantité. Mais l'ellipsoïde (A, B, C_1) est forcé de suivre le mouvement de (ABC) , il tourne autour du rayon R , et ce dernier n'aboutissant pas au point de contact de (A, B, C_1) , l'ellipsoïde (A, B, C_1) glisse en même temps qu'il roule. Ce mouvement peut se décomposer en deux autres : 1° la rotation sans glissement de (A, B, C_1) supposé libre; 2° le glissement $K\lambda$ sur le plan tangent. Si nous supposons que l'ellipsoïde (A, B, C_1) entraîne son plan au lieu d'y glisser, la rotation de ce plan marquera le temps écoulé, comme le ferait un cadran mobile. Rien n'empêche d'ailleurs de prendre $\lambda = \frac{1}{C}$ et $\frac{1}{C_1} = 0$, de manière que l'ellipsoïde auxiliaire se réduise à une ellipse. Cette remarque ingénieuse de M. Sylvester vient compléter l'appareil cinématique de Poincot, en fournissant le moyen de représenter le temps aussi bien que la vitesse de rotation. M. Sylvester démontre le même théorème géométriquement, en rappelant que les points de contact d'ellipsoïdes homofocaux avec des plans parallèles sont situés sur une hyperbole équilatère qui a la normale P abaissée du centre

pour asymptote, et en décomposant la rotation $\sqrt{HR} = KPR$ autour de R en une rotation KP, R_1 autour de R_1 et une rotation $K\lambda$ autour de P.

Pour revenir au cas des deux corps libres dont les constantes sont dans la relation exprimée par la formule (14), il est clair que l'on peut choisir A_1, B_1, C_1 de manière à remplir une condition donnée; on peut, par exemple, prendre $A_1 + B_1 = C_1$, relation qui caractérise l'ellipsoïde central d'un disque infiniment mince. Désignant les moments d'inertie (toujours positifs) du disque par A_0, B_0, C_0 , on aura

$$A_0 + B_0 = C_0, \quad \lambda_0 = \frac{1}{A} \mp \frac{1}{A_0} = \frac{1}{B} \mp \frac{1}{B_0} = \frac{1}{C} \mp \frac{1}{C_0} = P^2 \mp P_0^2,$$

et ces relations déterminent les quantités A_0, B_0, C_0 en fonction de A, B, C. On trouve

$$\frac{1}{A} - \frac{1}{C} = \pm \frac{B_0}{A_0 C_0}, \quad \frac{1}{B} - \frac{1}{C} = \pm \frac{A_0}{B_0 C_0}, \quad \frac{1}{C_0} = \sqrt{\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{C}\right) \left(\frac{1}{B} - \frac{1}{C}\right)}.$$

Les signes supérieurs devront être choisis lorsque C sera le plus grand, les signes inférieurs lorsque C sera le plus petit des trois moments d'inertie, la constante P^2 étant toujours comprise entre $\frac{1}{B}$ et $\frac{1}{C}$. Ensuite

$$\frac{1}{A_0} = \frac{1}{C_0} \pm \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{C}\right), \quad \frac{1}{B_0} = \frac{1}{C_0} \pm \left(\frac{1}{B} - \frac{1}{C}\right).$$

Le mouvement d'un corps quelconque peut donc être décomposé en un glissement $K\lambda_0$ (qui est une rotation autour de l'axe P) et une rotation identique à celle d'un disque dont les moments d'inertie sont A_0, B_0, C_0 . La rotation d'un disque a d'ailleurs une composante constante autour d'un axe situé dans le plan du disque; en effet, les deux équations (6), appliquées au mouvement d'un disque, donnent

$$A_0 B_0 (p^2 + q^2) = C_0 H_0 - K^2,$$

d'où il suit que la composante $\sqrt{p^2 + q^2}$ est égale à une constante. Il se trouve aussi que le mouvement du disque ne dépend que de trois paramètres. En effet, les équations (2), jointes aux suivantes :

$$\frac{d\gamma}{\alpha\beta} = \left(\frac{1}{B} - \frac{1}{A}\right) K dt, \quad (\alpha^2 + \beta^2) d\psi_0 = \left(\frac{\alpha^2}{A} + \frac{\beta^2}{B}\right) K dt, \quad K = \frac{1}{P^2} \frac{H}{K},$$

nous apprennent que les cosinus α , β , γ et les angles ψ dépendent des quatre paramètres AP^2 , BP^2 , CP^2 , $KP^2 t = \frac{H}{K} t$, qui se réduisent à trois lorsque nous avons $A + B = C$. M. Sylvester en conclut que le mouvement rotatoire de tous les corps imaginables pourrait être réduit en tables à triple entrée dont les trois arguments seraient les paramètres $A_0 P_0^2$, $B_0 P_0^2$ et $\frac{H_0}{K} t$ (en faisant abstraction du glissement $K\lambda_0$). Cette réduction, à laquelle M. Sylvester paraît attacher beaucoup d'importance, résultait cependant des formules de Jacobi. En effet, les trois paramètres du disque remplacent simplement a , b , nt , ou bien k , a , u . On trouve

$$\frac{a}{A_0} = \frac{b}{B_0} = \frac{a+b}{C_0}, \quad \frac{K}{C_0} = \frac{n}{\sqrt{1-a^2}}, \quad C_0 P_0^2 = 1 + ab,$$

$$\frac{H_0}{K} = n \frac{1+ab}{\sqrt{1-a^2}}, \quad K\lambda_0 = \frac{H}{K} \mp \frac{H_0}{K}.$$

Pour la composante $\sqrt{p^2 + q^2}$ de la rotation du disque, on aurait encore

$$\sqrt{p^2 + q^2} = K \frac{a+b}{C_0} = n \frac{a+b}{\sqrt{1-a^2}}.$$

On voit que les trois paramètres se réduisent à ceux qui figurent dans les formules connues. Mais M. Sylvester va plus loin, il pense que le problème pourrait se résoudre par l'observation directe du mouvement d'un ellipsoïde matériel, roulant sur un plan fixe, en même temps qu'il tournerait autour de son centre également fixe. On ne se figure pas facilement par quel artifice on fixerait le centre d'un ellipsoïde matériel. Mais cela fût-il possible, l'analyse par laquelle M. Sylvester croit démontrer qu'un ellipsoïde placé dans ces conditions tournerait exactement comme un corps libre ayant un ellipsoïde central semblable, cette analyse soulève les plus graves objections. M. Sylvester commence par supposer que la pression et le frottement sur le plan fixe ont une résultante qui passe par l'axe instantané, il admet donc que cet axe coïncide avec le rayon de contact; mais cela implique que l'ellipsoïde matériel *roule sans glisser*, c'est-à-dire qu'il se meut exactement comme l'ellipsoïde central d'un corps libre, et que les deux problèmes comportent

les mêmes intégrales. M. Sylvester tire effectivement de ses équations différentielles l'intégrale des forces vives pour l'ellipsoïde matériel, et il dit que ce résultat pouvait se prévoir d'après les principes généraux de la Mécanique. Cela n'est pas exact, car le principe des forces vives ne s'applique pas au cas où il y a frottement. Ensuite M. Sylvester désigne par ρ le rapport des temps dt et $d\tau$ pendant lesquels les deux ellipsoïdes exécutent la même rotation angulaire : cela *suppose* évidemment qu'ils *puissent se mouvoir* d'une manière analogue, ce qui n'est ni démontré, ni même vrai.

Soient A_1, B_1, C_1 les moments d'inertie de l'ellipsoïde central (ABC) du corps libre dont les moments d'inertie sont A, B, C ; on aura

$$(15) \quad A_1 = m \left(\frac{1}{B} + \frac{1}{C} \right), \quad B_1 = m \left(\frac{1}{C} + \frac{1}{A} \right), \quad C_1 = m \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B} \right),$$

où m est un facteur numérique; les équations (2) donneront

$$(16) \quad A_1 \alpha^2 + B_1 \beta^2 + C_1 \gamma^2 = \frac{A_1 + B_1 + C_1}{2} - m P^2 = Q,$$

et les équations (6)

$$(16 \text{ bis}) \quad A_1 p^2 + B_1 q^2 + C_1 r^2 = m \frac{(A + B + C)H - K^2}{ABC}.$$

Ainsi la force vive de l'ellipsoïde central (ABC) est constante en même temps que celle du corps. La force vive de l'ellipsoïde matériel, semblable à l'ellipsoïde central (ABC), l'étant aussi d'après M. Sylvester, il en conclut que le rapport $\rho = \frac{d\tau}{dt}$ est une constante, et que les mouvements ne diffèrent que par la valeur de l'argument $n\tau$. Cette analogie lui paraît si importante, qu'il propose d'étudier le mouvement d'ellipsoïdes matériels par des moyens graphiques, en vue d'une application au mouvement de rotation de la Terre.

III.

Mais le mouvement d'un ellipsoïde matériel qui tourne autour de son centre supposé fixe en roulant sur un plan tangent fixe suit d'autres lois. Nous avons d'abord les équations (1), (2) et (3), qui disent simplement

que la distance P du centre au plan tangent est constante; elles permettent d'exprimer α , β , γ par la variable ξ . Soient A_1 , B_1 , C_1 les moments d'inertie de l'ellipsoïde, dont les axes sont $\frac{1}{\sqrt{A}}$, $\frac{1}{\sqrt{B}}$, $\frac{1}{\sqrt{C}}$; la seconde des équations (2), différenciée et combinée avec (8) et (15), donnera encore

$$(17) \quad (B_1 - C_1) \frac{P}{\alpha} + (C_1 - A_1) \frac{Q}{\beta} + (A_1 - B_1) \frac{R}{\gamma} = 0.$$

Comme l'une des trois équations (8) résulte toujours des deux autres, les cinq équations (2) et (8) ne comptent que pour quatre. Nous en aurons trois autres en modifiant les équations (7) par l'introduction des couples de résistance et de frottement. Soit J la résistance du plan fixe, elle produit un couple dont les composantes sont

$$Zy - Yz = J(\gamma y - \beta z) = \frac{J}{P} \left(\frac{1}{B} - \frac{1}{C} \right) \beta \gamma = \frac{J}{mP} (C_1 - B_1) \beta \gamma, \dots$$

Le frottement est proportionnel à J , ou bien égal à Jf , et dirigé suivant la tangente perpendiculaire au rayon vecteur R ; ses cosinus sont

$$\frac{\gamma y - \beta z}{\sqrt{R^2 - P^2}}, \dots,$$

et le couple de frottement JfR a les composantes

$$\frac{Jf\alpha}{\sqrt{R^2 - P^2}} \left(R^2 - \frac{1}{A} \right), \dots$$

On trouve d'ailleurs

$$P^2 R^2 = \frac{\alpha^2}{A^2} + \frac{\beta^2}{B^2} + \frac{\gamma^2}{C^2},$$

et, par l'équation (16),

$$m^2 P^2 (R^2 - P^2) = A_1^2 \alpha^2 + B_1^2 \beta^2 + C_1^2 \gamma^2 - Q^2.$$

Les équations (3) donnent

$$P^2 (R^2 - P^2) = \left(P^2 - \frac{1}{C} \right) \left(\frac{\cos^2 \xi}{A} + \frac{\sin^2 \xi}{B} - P^2 \right),$$

de sorte que α, β, γ, R s'expriment par la variable ξ . Les équations (7) deviennent à présent

$$(18) \quad A_1 \frac{dp}{dt} = (B_1 - C_1) \left(qr - \beta \gamma \frac{J}{mP} \right) + \alpha \frac{Jf}{\sqrt{R^2 - P^2}} \left(R^2 - \frac{1}{A} \right), \dots,$$

et si nous les réunissons aux équations (2), (8) et (17), nous avons le moyen de déterminer les sept inconnues $\alpha, \beta, \gamma, p, q, r, J$. Ajoutons les équations (18), multipliées par α, β, γ , aux équations (8), multipliées par A, p, B, q, C, r , et prenons l'intégrale, nous aurons

$$A_1 \alpha p + B_1 \beta q + C_1 \gamma r = f \int J \sqrt{R^2 - P^2} dt.$$

Si le frottement était nul ($f = 0$), on aurait l'intégrale des aires

$$(19) \quad A_1 \alpha p + B_1 \beta q + C_1 \gamma r = F,$$

où F signifie une constante arbitraire. Dans ce cas, on aurait aussi l'intégrale des forces vives

$$(20) \quad A_1 p^2 + B_1 q^2 + C_1 r^2 = H.$$

Les équations (19) et (20), combinées avec (16) et (8), donneraient

$$B_1 C_1 \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 + C_1 A_1 \left(\frac{d\beta}{dt} \right)^2 + A_1 B_1 \left(\frac{d\gamma}{dt} \right)^2 = HQ - F^2.$$

Ensuite

$$\alpha d\alpha : \beta d\beta : \gamma d\gamma :: B_1 - C_1 : C_1 - A_1 : A_1 - B_1.$$

On tire de là

$$(21) \quad \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{B} \right) \sqrt{HQ - F^2} m dt = \frac{d\alpha}{\beta \gamma} \sqrt{S},$$

où

$$S = \Sigma A_1 B_1 (A_1 - B_1)^2 \alpha^2 \beta^2 = Q \Sigma A_1^3 \alpha^2 - (\Sigma A_1^2 \alpha^2)^2.$$

En introduisant à la place de α, β, γ la variable ξ , on trouve

$$\frac{S}{m^2} = \frac{Q}{m} \frac{(A + B + C) P^2 - 1}{ABC} - \left[\left(\frac{P^2}{A} + \frac{1}{BC} \right) \sin^2 \xi + \left(\frac{P^2}{B} + \frac{1}{AC} \right) \cos^2 \xi \right]^2,$$

et en faisant

$$n_1^2 = m^2 \left(\frac{1}{B} - \frac{1}{C} \right) \left(\frac{1}{A} - P^2 \right) (HQ - F^2),$$

on a

$$(22) \quad n, t = \int \frac{d\xi}{\Delta\xi} \sqrt{S}.$$

Le temps est donné par une intégrale Abélienne. Les rotations p, q, r se déterminent par les formules

$$(23) \quad Q \frac{p}{\alpha} = F + (A_1 Q - \Sigma A_i^2 \alpha^2) \sqrt{\frac{HQ - F^2}{S}}, \dots$$

Enfin, la résistance J peut être calculée à l'aide de l'équation

$$(24) \quad J = \frac{mP}{A_1 B_1 C_1} \frac{d\Sigma A_i^2 p^2}{d\Sigma \frac{\alpha^2}{A_i}}.$$

On voit combien le mouvement de notre ellipsoïde matériel diffère de celui d'un corps libre.

IV.

Pour terminer, reprenons encore le problème du corps libre, dont il nous reste à compléter la solution. Le nombre des équations différentielles strictement nécessaires étant de six, le problème comporte six constantes arbitraires. En rapportant tous les angles au plan invariable, nous avons restreint le nombre des constantes à quatre : H, K, τ et la constante que l'on peut ajouter aux longitudes ψ ; mais nous pouvons encore disposer des deux qui déterminent la position du plan invariable par rapport à un plan fixe donné, et qui sont : l'inclinaison c et la longitude du nœud g . Je ferai maintenant

$$\alpha = \sin \theta \sin \varphi, \quad \beta = \sin \theta \cos \varphi, \quad \gamma = \cos \theta,$$

j'écrirai ψ à la place de ψ_3 , et je supposerai que θ, φ, ψ sont les angles qui déterminent la position des axes par rapport au plan fixe donné, puis $\theta_0, \varphi_0, \psi_0$ les mêmes angles rapportés au plan invariable. Ces derniers sont alors des fonctions connues du temps. Les formules du § I donnent

$$n(t + \tau) = u, \quad \cos \theta_0 = \sqrt{1 - a^2} \Delta \operatorname{am} u, \quad \operatorname{tang} \varphi_0 = \frac{a}{b} \operatorname{cot} \operatorname{am} u.$$

La valeur de ψ_0 pourrait se tirer de l'équation (12), mais l'une des

équations (9) donne aussi

$$(25) \quad d\psi_0 + \cos\theta_0 d\varphi_0 = \frac{H}{K} dt,$$

d'où

$$(26) \quad \psi_0 = \frac{H}{K} \frac{u}{n} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi_0} \cos\theta_0 d\varphi_0.$$

(Nous n'ajoutons pas de constante, parce que ψ_0 n'est plus une variable du problème : ce n'est ici qu'un angle auxiliaire.) Les angles θ, θ_0 étant les inclinaisons du plan des x, y sur les deux plans fixes, et c l'inclinaison mutuelle de ces plans, nous avons un triangle sphérique où le côté opposé à c est $\varphi_0 - \varphi$; par conséquent,

$$(27) \quad \cos\theta \cos\theta_0 + \sin\theta \sin\theta_0 \cos(\varphi_0 - \varphi) = \cos c,$$

ou bien

$$(28) \quad \sin\theta(a \sin\varphi \cos am u + b \cos\varphi \sin am u) + \cos\theta \sqrt{1-a^2} \Delta am u = \cos c.$$

Si nous désignons par Ψ, Ψ_0 les côtés opposés à $\pi - \theta_0, \theta$, ils seront déterminés en fonction des variables $\theta, \theta_0, \varphi, \varphi_0$ par les relations

$$(29) \quad \frac{\sin\Psi_0}{\sin\theta} = \frac{\sin\Psi}{\sin\theta_0} = \frac{\sin(\varphi_0 - \varphi)}{\sin c},$$

ou bien

$$\cos\Psi = \frac{\cos c \cos\theta - \cos\theta_0}{\sin c \sin\theta}, \dots$$

On aura ensuite

$$(30) \quad \psi + g = \Psi, \quad \psi_0 + g_0 = \Psi_0,$$

en désignant par g, g_0 deux constantes arbitraires. Les équations (27) et (30) représentent trois intégrales qui, ajoutées aux deux intégrales (6) et à l'intégrale du temps

$$(31) \quad t + \tau = \frac{u}{n},$$

complètent le nombre des six intégrales demandées. Elles renferment

les six constantes H, K, c, τ, g, g_0 . Mais nous pouvons aussi considérer u comme une fonction des variables θ, φ et des trois constantes H, K, c , définie par l'équation (28). Dès lors, $\theta_0, \varphi_0, \psi_0$ seront également des fonctions de θ, φ, H, K, c , et les intégrales (30) et (31) peuvent être considérées comme étant de la forme

$$\begin{aligned} g_0 &= f(\theta, \varphi, H, K, c), \\ \psi + g &= f(\theta, \varphi, H, K, c), \\ t + \tau &= f(\theta, \varphi, H, K, c). \end{aligned}$$

On arrive au même résultat en prenant pour point de départ l'équation aux dérivées partielles du problème de la rotation. Les trois quantités p, q, r s'expriment par les dérivées θ', φ', ψ' des angles θ, φ, ψ à l'aide des formules connues

$$p = \alpha\psi' + \cos\varphi\theta', \quad q = \beta\psi' - \sin\varphi\theta', \quad r = \gamma\psi' + \varphi'.$$

Ces valeurs étant substituées dans l'expression de la force vive

$$2T = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2,$$

on peut introduire comme variables les dérivées partielles

$$s = \frac{\partial T}{\partial \varphi'}, \quad \nu = \frac{\partial T}{\partial \theta'}, \quad f = \frac{\partial T}{\partial \psi'}.$$

Soit encore

$$\omega = \frac{f - s \cos\theta}{\sin\theta}, \quad f = s \cos\theta + \omega \sin\theta,$$

on aura

$$\begin{aligned} s &= Cr = K \cos\theta_0, \\ \nu &= Ap \cos\varphi - Bq \sin\varphi = K \sin\theta_0 \sin(\varphi_0 - \varphi), \\ \omega &= Ap \sin\varphi + Bq \cos\varphi = K \sin\theta_0 \cos(\varphi_0 - \varphi), \end{aligned}$$

et

$$(32) \quad s^2 + \nu^2 + \omega^2 = K^2.$$

L'équation (27) donne encore

$$(33) \quad f = K \cos c = F;$$

c'est l'une des intégrales des aires, et nous pouvons introduire F à la place de c comme troisième arbitraire qui s'ajoute aux constantes H, K . L'intégrale des forces vives prend la forme

$$(34) \quad \frac{s^2}{C} + v^2 \left(\frac{\cos^2 \varphi}{A} + \frac{\sin^2 \varphi}{B} \right) + \omega^2 \left(\frac{\sin^2 \varphi}{A} + \frac{\cos^2 \varphi}{B} \right) + v\omega \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right) \sin 2\varphi = H.$$

Pour déduire de (34) l'équation aux dérivées partielles dont la solution V fournit les six intégrales du problème, nous devons y remplacer s par $\frac{\partial V}{\partial \varphi}$, v par $\frac{\partial V}{\partial \theta}$, et f (contenu dans ω) par $\frac{\partial V}{\partial \psi}$; mais cette dernière dérivée étant une constante, puisque ψ ne figure pas dans (34), nous pouvons écrire F à la place de f . Dès lors, les équations (34) et (33) permettent d'exprimer s et v par θ, φ, H, K, F , et nous aurons (*)

$$V = -\frac{1}{2} H t + F \psi + \int (s d\varphi + v d\theta).$$

En substituant pour s, v les expressions trouvées plus haut, nous avons

$$V = -\frac{1}{2} H t + F \psi + K \int \cos \theta_0 d\varphi_0 + K \int [-\cos \theta_0 d(\varphi_0 - \varphi) + \sin \theta_0 \sin(\varphi_0 - \varphi) d\theta].$$

Or, dans le triangle sphérique dont les angles sont $c, \theta, \pi - \theta_0$, et les côtés correspondants $\varphi_0 - \varphi, \Psi_0, \Psi$, nous avons, par une formule connue,

$$(35) \quad d\Psi_0 - \cos c d\Psi = -\cos \theta_0 d(\varphi_0 - \varphi) + \sin \theta_0 \sin(\varphi_0 - \varphi) d\theta.$$

Par conséquent,

$$(36) \quad V = -\frac{1}{2} H t + F(\psi - \Psi) + K\Psi_0 + K \int \cos \theta_0 d\varphi_0,$$

ou bien, en tenant compte de (26),

$$(37) \quad V = H \left(\frac{u}{n} - \frac{1}{2} t \right) + F(\psi - \Psi) + K(\Psi_0 - \psi_0).$$

(*) JACOBI, *Nova methodus...*, p. 151 (*Journal de Crelle*, 1861).

Il faut ici considérer u , ψ_0 , Ψ , Ψ_0 comme des fonctions de θ , φ , H , K , F , en tirant la valeur de u de l'équation (28). Les intégrales premières du problème seraient alors

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi} = s, \quad \frac{\partial V}{\partial \theta} = v, \quad \frac{\partial V}{\partial \psi} = F = f,$$

ou bien

$$K \cos \theta_0 = C(\varphi' + \cos \theta \psi'), \dots$$

Les trois intégrales finies seraient

$$\frac{\partial V}{\partial H} = \frac{1}{2}\tau, \quad \frac{\partial V}{\partial K} = g_0, \quad \frac{\partial V}{\partial F} = -g.$$

Pour tirer de (36) la variation δV par rapport aux constantes H , K , F , nous avons d'abord, en vertu de (35),

$$K \delta \Psi_0 - F \delta \Psi = -K \cos \theta_0 \delta \varphi_0.$$

Ensuite, l'équation

$$\left(\frac{\sin^2 \varphi_0}{A} + \frac{\cos^2 \varphi_0}{B} - \frac{1}{C} \right) \sin^2 \theta_0 = P^2 - \frac{1}{C}$$

nous donne

$$K(d\varphi_0 \delta \cos \theta_0 - d \cos \theta_0 \delta \varphi_0) = K^2 P \delta P dt = \left(\frac{1}{2} \delta H - \frac{H}{K} \delta K \right) \frac{du}{n}.$$

On trouve ainsi

$$(38) \quad \delta V = \frac{1}{2} \left(\frac{u}{n} - t \right) \delta H + (\psi - \Psi) \delta F + (\Psi_0 - \psi_0) \delta K,$$

et les intégrales sont

$$t + \tau = \frac{u}{n}, \quad \psi + g = \Psi, \quad \psi_0 + g_0 = \Psi_0.$$

Les formules qui précèdent s'accordent, aux notations et à la démonstration près, avec celles que M. Richelot a publiées en 1850, dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin*. Quant à la for-

mule (38), M. Serret l'a donnée à son tour en 1863, mais sans indiquer l'expression de V .

On pourrait aussi prendre s et v pour variables indépendantes à la place de θ , φ . En faisant

$$\omega = \frac{F - s \cos \theta}{\sin \theta} = \sqrt{K^2 - s^2 - v^2},$$

$$\omega_1 = \frac{s - F \cos \theta}{\sin \theta} = \sqrt{K^2 - F^2 - v^2},$$

on aurait

$$F \sin \theta = \omega + \omega_1 \cos \theta, \quad s \sin \theta = \omega_1 + \omega \cos \theta,$$

et les variables θ , φ s'exprimeraient en fonction de s , v par les formules suivantes :

$$\sin \theta = \frac{F\omega + s\omega_1}{K^2 - v^2}, \quad \cos \theta = \frac{Fs - \omega\omega_1}{K^2 - v^2},$$

$$\sin \varphi = \frac{Ap\omega - Bqv}{K^2 - s^2}, \quad \cos \varphi = \frac{Apv + Bq\omega}{K^2 - s^2},$$

dans lesquelles Ap , Bq sont des fonctions de s en vertu des équations (6). Si nous désignons par Δ les variations totales (variations des constantes et des variables), nous avons

$$\Delta v + \omega \Delta \varphi = A \cos \varphi \Delta p - B \sin \varphi \Delta q = a_1 \Delta s + b_1 \delta H + c_1 \delta K,$$

$$\Delta s + \omega \Delta \theta = \cos \theta \delta F + \sin \theta \Delta \omega_1 = a_2 \Delta v + b_2 \delta F + c_2 \delta K,$$

et en désignant par d les différentielles, par δ les variations prises dans l'hypothèse de $\delta \varphi = \delta \theta = 0$, par δ_1 les variations prises dans l'hypothèse de $\delta_1 v = \delta_1 s = 0$,

$$\delta s d\varphi + \delta v d\theta + \delta_1 \varphi ds + \delta_1 \theta dv = 0,$$

ou bien

$$\delta \int (s d\varphi + v d\theta) = -\delta_1 \int (\varphi ds + \theta dv).$$

Voici d'ailleurs les expressions développées des variations Δ :

$$\Delta v + \omega \Delta \varphi = \left[v + \omega \frac{dt}{ds} \left(H - \frac{K^2}{C} \right) \right] \frac{\frac{1}{2} \Delta (K^2 - s^2)}{K^2 - s^2} - \frac{1}{2} \omega \frac{dt}{ds} \delta \left(H - \frac{K^2}{C} \right),$$

$$\omega_1 (\Delta s + \omega \Delta \theta) = -\omega \delta F + \sin \theta (K \delta K - v \Delta v).$$

On retrouve ainsi les formules données par M. Lafon (*) en 1860, ainsi qu'une autre solution que M. Richelot indique dans le Mémoire déjà cité; traduite dans nos notations, elle peut s'écrire

$$V = -\frac{1}{2}Ht + F\left(\psi - \operatorname{arctang} \frac{\nu}{\omega_1}\right) \\ + K\left(\operatorname{arctang} \frac{F\nu}{K\omega_1} + \operatorname{arctang} \frac{s\nu}{K\omega}\right) - \frac{H - \frac{K^2}{C}}{A - B} \int \frac{s^2}{K^2 - s^2} \frac{ds}{pq}.$$

Jacobi emploie les mêmes variables s, ν dans le *Mémoire sur la Théorie du dernier multiplicateur* (**), où il établit aussi les six intégrales du problème sans recourir aux propriétés du plan invariable.

(*) *Mémoires de l'Académie de Stanislas*, 1860.

(**) *Journal de Crelle*, t. XXIX, 1845. — *Math. W.*, t. I, p. 187.