ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

ÉTIENNE GOURSAT

Sur les intégrales infiniment voisines des équations aux dérivées partielles

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 23 (1906), p. 429-501

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1906_3_23__429_0>

SUR LES

INTÉGRALES INFINIMENT VOISINES

DES

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES,

PAR M. E. GOURSAT.

La notion de l'*équation auxiliaire* d'une équation différentielle ordinaire ou d'une équation aux dérivées partielles à un nombre quelconque de variables indépendantes a été introduite par M. Darboux ([1]), qui l'a appliquée à diverses questions de Géométrie infinitésimale. Les travaux de M. Poincaré ont montré toute l'importance de cette notion dans l'étude des solutions infiniment voisines de certaines solutions particulières supposées connues dans les équations différentielles ordinaires ([2]). Je me suis proposé d'étendre les théorèmes de M. Poincaré aux équations aux dérivées partielles. Il y a une différence essentielle entre les deux problèmes. En effet, dans le cas d'un système d'équations différentielles ordinaires, le système auxiliaire est un système d'équations différentielles *linéaires* à une seule variable indépendante, et l'on connaît, *a priori*, les points singuliers possibles pour les intégrales. Il n'en est plus de même en général pour une équation linéaire aux dérivées partielles; pour éviter cette première difficulté, j'ai dû supposer l'intégrale particulière, que l'on connaît,

---

([1]) G. DARBOUX, *Sur les équations aux dérivées partielles* (*Comptes rendus*, t. XCVI, 19 mars 1883, p. 766); *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, t. IV, Note XI.

([2]) H. POINCARÉ, *Les méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*, t. I, Chap. II.

rapportée à ses *lignes caractéristiques*. La convergence des développements ne peut non plus s'établir par les méthodes employées pour les équations différentielles ordinaires et il m'a fallu user d'autres artifices.

Les équations du premier ordre sont traitées par deux méthodes, dont l'une offre une application de la théorie des caractéristiques; la seconde méthode, qui est indépendante de cette théorie, s'étend aux équations du second ordre à deux variables indépendantes. Je me borne d'ailleurs, dans ce Mémoire, aux théorèmes généraux, réservant les applications pour un autre travail.

J'ai dû d'abord reprendre l'exposition de quelques théorèmes relatifs à la théorie des fonctions implicites, pour mettre les énoncés sous une forme mieux adaptée aux applications que je devais en faire (¹).

I.

1. Soient $F(x, y, z)$ et $\Phi(x, y, z)$ deux fonctions des trois variables réelles x, y, z, continues et admettant des dérivées partielles F'_z et Φ'_z qui sont elles-mêmes continues lorsque x varie de $-a$ à $+a$, z de $-b$ à $+b$, et que y reste compris entre y_0 et y_1. Pour abréger, nous désignerons par $\mathcal{D}$ l'ensemble des systèmes de valeurs de x, y, z satisfaisant aux trois conditions

$$-a \leqq x \leqq a, \qquad y_0 \leqq y \leqq y_1, \qquad -b \leqq z \leqq b.$$

Considérons l'équation

$$z = x\,F(x, y, z) + z^2\,\Phi(x, y, z), \tag{1}$$

qui, pour $x = 0$, admet la racine simple $z = 0$. D'après la théorie générale des fonctions implicites, cette équation admet une racine qui est une fonction continue de x et de y, tant que la valeur absolue de x reste inférieure à une certaine limite et que la variable y reste elle-même suffisamment voisine d'une valeur déterminée comprise

(¹) Les principaux résultats de ce Mémoire ont été résumés dans une Note présentée à l'Académie des Sciences (*Comptes rendus*, 15 janvier 1906).

entre y_0 et y_1. Nous allons préciser et compléter cet énoncé en montrant que l'équation (1) admet une racine

$$z = f(x, y) \tag{2}$$

qui est continue tant que la variable y reste comprise dans l'intervalle (y_0, y_1), et que la valeur absolue de x ne dépasse pas une certaine limite qui sera fixée. Il suffit pour cela d'appliquer à l'équation (1) la méthode des approximations successives [1].

Désignons par A, B, H, K des limites supérieures des valeurs absolues des fonctions $F(x, y, z)$, $\Phi(x, y, z)$, $F'_z(x, y, z)$, $\Phi'_z(x, y, z)$ dans le domaine ω, de sorte que l'on ait, pour tout système de valeurs des variables x, y, z, prises dans ce domaine,

$$|F| \leqq A, \qquad |\Phi| \leqq B, \qquad |F'_z| \leqq H, \qquad |\Phi'_z| \leqq K.$$

Comme l'on peut évidemment remplacer le nombre b par tout nombre positif inférieur à lui, nous supposerons que l'on a pris ce nombre b assez petit pour que l'inégalité

$$2Bb + Kb^2 < \frac{1}{2} \tag{3}$$

soit vérifiée. Le nombre b étant pris de cette façon, soit h le plus petit des trois nombres a, $\frac{b}{2A}$, $\frac{1}{2H}$,

$$h \leqq a, \qquad h \leqq \frac{b}{2A}, \qquad h \leqq \frac{1}{2H}.$$

Supposons $|x|$ inférieur à h, et y compris dans l'intervalle (y_0, y_1). En appliquant à l'équation (1) la méthode des approximations successives, nous sommes conduits à considérer la suite

$$z_0, \quad z_1, \quad z_2, \quad \ldots, \quad z_n, \quad \ldots$$

obtenue en posant

$$z_0 = 0, \qquad z_1 = x F(x, y, 0), \qquad z_2 = x F(x, y, z_1) + z_1^2 \Phi(x, y, z_1),$$

---

(1) *Voir* mon article *Sur la théorie des fonctions implicites* (*Bulletin de la Société mathématique*, t. XXXI).

et, d'une manière générale,

$$z_n = x F(x, y, z_{n-1}) + z_{n-1}^2 \Phi(x, y, z_{n-1}).$$

Je dis d'abord que l'on a $|z_n| < b$, quel que soit n, pourvu que x soit compris entre $-h$ et $+h$, et y entre y_0 et y_1. Supposons en effet $|z_{n-1}| < b$; il est clair que l'on a

$$|z_n| < A h + B b^2.$$

Mais l'inégalité (3) entraîne la condition

$$B b < \frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad B b^2 < \frac{b}{2},$$

et, comme l'on a $A h \leqq \frac{b}{2}$, il s'ensuit que l'on aura $|z_n| < b$. On voit donc que les valeurs approchées $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ sont inférieures à b en valeur absolue. Par suite, ce sont aussi des fonctions continues des variables x et y lorsque x varie de $-h$ à $+h$, et y de y_0 à y_1.

Les approximations sont convergentes. — Nous avons en effet

$$\begin{aligned} z_n - z_{n-1} = {} & x[F(x, y, z_{n-1}) - F(x, y, z_{n-2})] \\ & + z_{n-1}^2 \Phi(x, y, z_{n-1}) - z_{n-2}^2 \Phi(x, y, z_{n-2}), \end{aligned}$$

ce qu'on peut encore écrire

$$\begin{aligned} z_n - z_{n-1} = {} & x(z_{n-1} - z_{n-2}) F'_z[x, y, z_{n-2} + \theta(z_{n-1} - z_{n-2})] \\ & + (z_{n-1}^2 - z_{n-2}^2)\Phi(x, y, z_{n-1}) \\ & + z_{n-2}^2 (z_{n-1} - z_{n-2}) \Phi'_z[x, y, z_{n-2} + \theta'(z_{n-1} - z_{n-2})]. \end{aligned}$$

$$0 < \theta < 1, \qquad 0 < \theta' < 1.$$

On en déduit

$$(4) \qquad \left| \frac{z_n - z_{n-1}}{z_{n-1} - z_{n-2}} \right| < H h + 2 b B + b^2 K < 1,$$

d'après l'inégalité (3) et la définition du nombre h.

La série

$$z_0 + (z_1 - z_0) + \ldots + (z_n - z_{n-1}) + \ldots$$

est donc absolument et uniformément convergente dans le domaine $\mathfrak{D}'$ défini par les deux conditions

$$-h \leqq x \leqq h, \qquad y_0 \leqq y \leqq y_1.$$

Par conséquent, lorsque n augmente indéfiniment, z_n tend vers une limite $Z(x, y)$, qui est continue dans le domaine $\mathfrak{D}'$, et dont la valeur absolue est inférieure à b. D'autre part, la relation

$$z_n = x\,F(x, y, z_{n-1}) + z_{n-1}^2\,\Phi(x, y, z_{n-1}^2)$$

devient à la limite

$$(5) \qquad Z = x\,F(x, y, Z) + Z^2\,\Phi(x, y, Z),$$

ce qui prouve que cette fonction $Z(x, y)$ est une racine de l'équation proposée (1). En résumé, nous avons la proposition suivante :

Théorème I. — *L'équation* (1) *admet une racine* $Z(x, y)$, *qui est une fonction continue des variables* x *et* y, *lorsque* y *reste compris entre* y_0 *et* y_1, *et que la valeur absolue de* x *ne dépasse pas le nombre positif* h *qui a été défini.*

Remarque I. — Toute équation de la forme

$$(1)' \qquad z = x\,F(x, y, z)$$

peut être considérée comme un cas particulier de l'équation (1). On a dans ce cas $B = 0$, $K = 0$, et, en reprenant le raisonnement, on voit qu'il suffit de prendre pour h un nombre inférieur au plus petit des nombres a, $\frac{b}{A}$ et $\frac{1}{H}$.

Si de plus la fonction $F(x, y, z)$ est continue, quel que soit z, lorsque x varie de $-a$ à $+a$, et y de y_0 à y_1, et que $|F'_z|$ reste inférieur à un nombre fixe quel que soit z, on n'a pas besoin de tenir compte de la condition $h \leqq \frac{b}{A}$, et l'on peut prendre pour h le plus petit des deux nombres a et $\frac{1}{H}$.

Remarque II. — La continuité des dérivées F'_z et Φ'_z n'est pas une condition nécessaire pour que le théorème soit exact. La démonstration s'applique évidemment pourvu que les fonctions F et Φ vérifient la condition de Lipschitz relativement à la variable z.

2. La signification géométrique du théorème I est la suivante. En regardant x, y, z comme les coordonnées cartésiennes d'un point dans l'espace, l'équation (1) représente une surface S qui contient l'axe des y ($x = 0$, $z = 0$). Si l'on considère sur le plan des xy le rectangle R limité par les lignes droites

$$y = y_0, \qquad y = y_1, \qquad x = -h, \qquad x = h,$$

la racine de l'équation (1) qui se réduit à zéro pour $x = 0$ est une fonction continue des variables x et y tant que le point de coordonnées (x, y) reste dans le rectangle R. Il existe donc une bande continue de surface se projetant à l'intérieur de ce rectangle et passant par le segment de l'axe Oy limité par les deux points de coordonnées $(0, y_0, 0)$ et $(0, y_1, 0)$.

3. Il est clair que le théorème I est susceptible de généralisations étendues. Considérons un système de $m + n + p$ variables réelles

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_m, \qquad y_1, \quad y_2, \quad \ldots, \quad y_n, \qquad z_1, \quad z_2, \quad \ldots, \quad z_p;$$

les fonctions que nous allons étudier sont des fonctions continues de ces variables dans un domaine défini comme il suit. A chacune des variables x_i, z_k correspond un nombre positif a_i, b_k, tel que x_i doit rester compris dans l'intervalle $(-a_i, a_i)$ et z_k dans l'intervalle $(-b_k, b_k)$

$$(6) \qquad \left\{\begin{array}{ll} -a_1 \leqq x_1 \leqq +a_1, & -b_1 \leqq z_1 \leqq +b_1, \\ -a_2 \leqq x_2 \leqq +a_2, & -b_2 \leqq z_2 \leqq +b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ -a_m \leqq x_m \leqq +a_m, & -b_p \leqq z_p \leqq +b_p. \end{array}\right.$$

Quant aux variables y_j, considérons $y_1, y_2, \ldots, y_n$ comme les coordonnées d'un point dans l'espace à n dimensions, et soit R_n un *continuum* limité d'une façon quelconque dans cet espace. Si $n = 2$, R_n est une aire plane, limitée par une courbe quelconque; si $n = 3$,

R_n est un volume. Nous supposerons que le point de coordonnées $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ est assujetti à rester dans ce continuum R_n. Si R_n se réduit à un *prismatoïde* limité par n couples de plans parallèles aux plans coordonnés, alors chaque variable y_j est assujettie à rester dans un intervalle déterminé, mais il est inutile de se limiter à ce cas. Quelle que soit la nature du continuum R_n, nous appellerons $\mathcal{D}$ le domaine formé de l'ensemble des systèmes de valeurs des variables x_i, y_j, z_k, satisfaisant aux inégalités (6), le point de coordonnées $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ appartenant au continuum R_n.

Cela posé, considérons un système de p équations

$$(7)\quad \left\{\begin{array}{l} z_1 = x_1 f_{11} + x_2 f_{12} + \ldots + x_m f_{1m} + \sum\limits_{k,l} \varphi_{1kl} z_k z_l \\ z_2 = x_1 f_{21} + x_2 f_{22} + \ldots + x_m f_{2m} + \sum\limits_{k,l} \varphi_{2kl} z_k z_l \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ z_p = x_1 f_{p1} + x_2 f_{p2} + \ldots + x_m f_{pm} + \sum\limits_{k,l} \varphi_{pkl} z_k z_l, \end{array}\right. \qquad (k, l = 1, 2, \ldots, p),$$

où toutes les fonctions f et φ, qui figurent dans les seconds membres, sont des fonctions continues dans le domaine $\mathcal{D}$, et admettent des dérivées partielles par rapport aux variables z_k continues dans le même domaine. Si l'on applique à ce système la méthode des approximations successives, on démontre, comme plus haut, sans autre difficulté que quelques complications d'écriture, que cette méthode conduit à des séries uniformément convergentes, quel que soit le point de coordonnées $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ dans R_n, pourvu que les valeurs absolues des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ soient inférieures à un nombre positif convenable.

Bornons-nous, pour fixer les idées, au cas de deux fonctions inconnues que nous désignerons par u et v; les équations (7) s'écrivent alors, en modifiant un peu les notations,

$$(7)'\quad \left\{\begin{array}{l} u = x_1 f_{11} + \ldots + x_m f_{1m} + \varphi_1 u^2 + \varphi_2 uv + \varphi_3 v^2 = F_1, \\ v = x_1 f_{21} + \ldots + x_m f_{2m} + \psi_1 u^2 + \psi_2 uv + \psi_3 v^2 = F_2. \end{array}\right.$$

Soient A, B, H, K des nombres positifs tels que l'on ait, dans le domaine $\mathcal{D}$,

$$|f_{ik}| < \mathrm{A},$$
$$\left|\frac{\partial f_{ik}}{\partial u}\right| < \mathrm{H}, \qquad \left|\frac{\partial f_{ik}}{\partial v}\right| < \mathrm{H},$$
$$|\varphi_1| < \mathrm{B}, \qquad \left|\frac{\partial \varphi_1}{\partial u}\right| < \mathrm{K}, \qquad \left|\frac{\partial \varphi_1}{\partial v}\right| < \mathrm{K},$$

ces dernières inégalités étant vérifiées aussi quand on remplace φ_1 par l'une quelconque des fonctions φ_2, φ_3, ψ_1, ψ_2, ψ_3. Les fonctions successives u_i, v_i se définissent par voie de récurrence au moyen des deux formules

$$u_n = \mathrm{F}_1(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n;\ u_{n-1}, v_{n-1}),$$
$$v_n = \mathrm{F}_2(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n;\ u_{n-1}, v_{n-1}),$$

avec les conditions

$$u_0 = 0, \qquad v_0 = 0.$$

Soit b un nombre positif quelconque inférieur à b_1 et à b_2. Pour que l'on ait

$$|u_n| < b, \qquad |v_n| < b,$$

quel que soit n, il suffit évidemment que ces inégalités soient des conséquences des inégalités

$$|u_{n-1}| < b, \qquad |v_{n-1}| < b.$$

Or, si ces dernières inégalités sont vérifiées, on a

$$|u_n| < m\mathrm{A}\,l + 3\mathrm{B}\,b^2,$$
$$|v_n| < m\mathrm{A}\,l + 3\mathrm{B}\,b^2,$$

en supposant que les valeurs absolues de $x_1, \ldots, x_m$ ne dépassent pas un nombre l, au plus égal au plus petit des nombres $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Les inégalités

$$|u_n| < b, \qquad |v_n| < b$$

seront certainement vérifiées si l'on a pris pour b un nombre inférieur à $\frac{1}{6\mathrm{B}}$, et pour l un nombre inférieur à $\frac{b}{2m\mathrm{A}}$, et par conséquent inférieur à

$$\frac{1}{12 m AB}.$$

Pour voir dans quel cas les approximations seront convergentes, nous remarquons, sans qu'il soit nécessaire de développer tous les calculs, que les différences $u_n - u_{n-1}$, $v_n - v_{n-1}$ sont de la forme

$$P_1(u_{n-1} - u_{n-2}) + P_2(v_{n-1} - v_{n-2}),$$

P_1 et P_2 étant des polynomes en $x_1, \ldots, x_m, u_{n-1}, v_{n-1}$ qui s'annulent pour $x_1 = 0, \ldots, v_{n-1} = 0$, et dont les coefficients sont en valeur absolue plus petits que des nombres connus ne dépendant que de A, B, H, K. Il sera donc possible d'assigner à $x_1, x_2, \ldots, x_m$ et à b des limites telles que le rapport

$$\frac{U_n}{U_{n-1}}$$

soit plus petit qu'un nombre λ inférieur à un, U_n désignant la plus grande des valeurs absolues

$$|u_n - u_{n-1}|, \qquad |v_n - v_{n-1}|.$$

Le reste de la démonstration s'achève comme plus haut, et nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Théorème II. — *Lorsque les fonctions f et φ qui figurent dans les équations* (7) *sont continues dans le domaine $\mathcal{D}$ et admettent des dérivées partielles par rapport aux variables $z_1, z_2, \ldots, z_k$, continues dans le même domaine, ces équations admettent un système de solutions $Z_1, Z_2, \ldots, Z_p$ se réduisant identiquement à zéro pour*

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_m = 0,$$

qui sont continues lorsque le point $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ reste dans R_n, pourvu que les valeurs absolues des variables $x_1, x_2, \ldots. x_m$ ne dépassent pas un nombre positif h convenablement choisi.

La méthode des approximations successives fournit pour ces fonctions $Z_1, Z_2, \ldots, Z_p$ des séries absolument et uniformément convergentes.

Remarque I. — La démonstration se simplifie encore lorsque toutes les fonctions φ_{pkl} sont nulles.

Remarque II. — Il n'est pas nécessaire de supposer que le domaine R_n contienne ses limites; il suffit, pour la démonstration, que les fonctions f et φ, ainsi que leurs dérivées partielles par rapport aux variables $z_1, z_2, \ldots, z_p$, soient bornées dans ce domaine.

4. Le théorème s'étend aussi au cas où les seconds membres des équations (7) sont des fonctions analytiques et l'énoncé prend une forme plus précise.

Il faut d'abord définir le domaine où les fonctions données des variables complexes x_i, y_i, z_k sont supposées holomorphes. Les conditions (6) sont remplacées par des conditions analogues

$$(6)' \qquad \begin{cases} |x_1| \leqq a_1, & |x_2| \leqq a_2, & \ldots, & |x_m| \leqq a_m, \\ |z_1| \leqq b_1, & |z_2| \leqq b_2, & \ldots, & |z_p| \leqq b_p, \end{cases}$$

$a_1, a_2, \ldots, a_m, b_1, b_2, \ldots, b_p$ étant des nombres positifs. Quant aux n variables complexes $y_1, y_2, \ldots, y_n$, chacune d'elles étant l'ensemble de deux variables réelles

$$y_j = y'_j + \sqrt{-1}\, y''_j,$$

ce système de n variables complexes équivaut en réalité à un système de $2n$ variables réelles indépendantes. Si l'on considère tout système de valeurs attribuées à ces $2n$ variables y'_j, y''_j, comme les coordonnées d'un point dans l'espace à $2n$ dimensions, on peut dire que tout continuum connexe R_{2n} dans l'espace à $2n$ dimensions définit un domaine de variabilité pour le système de n variables complexes $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Un cas particulier auquel on se borne dans bien des cas est celui où chacune des variables y_j doit décrire dans son plan un domaine déterminé; il est analogue au cas où le domaine de variabilité pour un système de n variables *réelles* se compose de n intervalles déterminés, dont chacun correspond à une de ces variables. Il sera quelquefois nécessaire dans la suite de se restreindre à ce cas, mais cette hypothèse sera alors énoncée explicitement.

Quelle que soit la nature du continuum R_{2n}, ce continuum définit, avec les conditions (6)', un domaine $\mathcal{D}$ de variabilité pour le système des $m+n+p$ variables complexes

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_m, \qquad y_1, \quad y_2, \quad \ldots, \quad y_n, \qquad z_1, \quad z_2, \quad \ldots, \quad z_p.$$

Il n'est pas nécessaire de supposer que ce domaine est fermé; mais, s'il ne contient pas ses limites, on devra supposer, non seulement que les fonctions dont il sera question sont continues dans $\mathcal{D}$, mais encore qu'elles sont bornées dans ce domaine.

Cela étant expliqué, si les fonctions f et φ sont des fonctions analytiques holomorphes dans un domaine $\mathcal{D}$, tel que celui qu'on vient de définir, il en est de même des dérivées partielles de ces fonctions par rapport aux variables $z_1, z_2, \ldots, z_p$, et les démonstrations des n^{os} 1 et 3, qui reposent essentiellement sur la formule des accroissement finis, peuvent être reprises sans modification. Nous pouvons, en effet, nous servir ici de l'extension de la formule des accroissements finis aux fonctions de variables complexes, car les courbes qui limitent les domaines de variation des variables $z_1, z_2, \ldots, z_p$ sont des circonférences, c'est-à-dire des courbes *convexes*.

La méthode des approximations successives nous conduit encore à des séries dont tous les termes sont des fonctions holomorphes, et qui sont *uniformément convergentes*, pourvu que les modules des variables $x_1, x_2, \ldots, x_m$ ne dépassent pas un nombre positif h assez petit, quelles que soient les valeurs des variables $y_1, y_2, \ldots, y_n$, correspondant à un point du continuum R_{2n}. Le théorème II peut alors s'énoncer ainsi :

Théorème III. — *Lorsque les fonctions f et φ qui figurent dans les équations* (7) *sont des fonctions analytiques holomorphes dans un domaine $\mathcal{D}$, défini par un certain continuum R_{2n} de l'espace à $2n$ dimensions pour les variables y_j, et par les inégalités* (6)', *ces équations* (7) *admettent un système de solutions $Z_1, Z_2, \ldots, Z_p$, se réduisant identiquement à zéro pour $x_1 = x_2 = \ldots = x_m = 0$, et qui sont des fonctions holomorphes des variables x_i, y_j, pourvu que les modules des variables $x_1, x_2, \ldots, x_m$ restent inférieurs à un nombre positif h convenablement choisi, le domaine de variabilité des variables y_j étant défini par le même continuum R_{2n}.*

5. Les solutions $Z_1, Z_2, \ldots, Z_p$, dont on vient de démontrer l'existence, peuvent d'après cela être développées en séries entières ordonnées suivant les puissances positives des variables $x_1, x_2, \ldots, x_m$, dont les coefficients sont des fonctions holomorphes des variables $y_1, y_2, \ldots, y_n$, dans le domaine défini par le continuum R_{2n}. Or, d'après les hypothèses sur les fonctions f et φ, les seconds membres des équations (7) peuvent être développés en séries entières ordonnées suivant les puissances positives des variables x_i, z_k, dont les coefficients sont des fonctions holomorphes des variables $y_1, y_2, \ldots, y_n$ dans le même domaine; il résulte d'ailleurs de la forme même des équations (7) qu'un terme quelconque de ces développements est divisible par une des variables $x_1, x_2, \ldots, x_m$, ou par un des produits $z_i z_k$. On en déduit aisément que les coefficients des développements cherchés pour les racines Z_1, $Z_2, \ldots, Z_p$ se déduisent des coefficients des développements des seconds membres des équations (7) par les seules opérations d'addition et de multiplication.

Le calcul de ces coefficients n'exige nullement que les coefficients des premiers développements soient des fonctions analytiques des variables $y_1, y_2, \ldots, y_n$, et ceci nous amène à généraliser le théorème précédent de la même façon que M. Poincaré a généralisé le théorème de Cauchy relatif aux équations différentielles. Nous supposerons que les fonctions f et φ, qui figurent dans les équations (7), sont *semi-analytiques*, ou, en termes plus précis, que ces seconds membres peuvent être développés en séries entières ordonnées suivant les puissances positives des variables x_i, z_k, dont les coefficients sont des fonctions continues des variables réelles $y_1, y_2, \ldots, y_n$ lorsque le point de coordonnées $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ décrit un certain continuum R_n de l'espace à n dimensions. Pour éviter des complications d'écriture, considérons un système de deux équations

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} z_1 &= \sum \varphi_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2}\, x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_m^{\alpha_m} z_1^{\beta_1} z_2^{\beta_2}, \\ z_3 &= \sum \psi_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2}\, x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_m^{\alpha_m} z_1^{\beta_1} z_2^{\beta_2}, \end{aligned}\right.$$

où les fonctions φ et ψ sont des fonctions continues des variables y_1, $y_2, \ldots, y_n$ dans le domaine précédent R_n, les séries étant convergentes pourvu que l'on ait

$$|x_1| \leqq a, \quad |x_2| \leqq a, \quad \ldots, \quad |x_m| \leqq a, \quad |z_1| \leqq b, \quad |z_2| \leqq b,$$

a et b étant des nombres positifs. On suppose de plus qu'un terme quelconque de chacune de ces séries est divisible par l'une des variables $x_1, x_2, \ldots, x_m$, ou par l'un des facteurs z_1^2, $z_1 z_2$, z_2^2.

Cela étant, on peut trouver des séries entières

$$(9) \qquad \begin{cases} z_1 = \mathrm{P}_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_m^{\alpha_m}, \\ z_2 = \mathrm{Q}_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_m^{\alpha_m}, \end{cases}$$

satisfaisant formellement aux équations (8), et dont les coefficients sont des fonctions continues des variables $y_1, y_2, \ldots, y_n$ dans le domaine R_n, qui se déduisent des coefficients φ et ψ par les seules opérations d'addition et de multiplication.

La convergence de ces développements s'établira par la méthode habituelle des fonctions majorantes, sans qu'il soit nécessaire de revenir sur ce point.

6. Les théorèmes précédents complètent sur certains points les théorèmes classiques de la théorie des fonctions implicites, car ils permettent d'assigner *a priori* un domaine plus étendu où les solutions sont des fonctions continues, au moins dans certains cas. Ils nous seront utiles dans la suite.

Considérons par exemple une équation différentielle du premier ordre

$$(10) \qquad \mathrm{F}(x, y, y') = 0,$$

admettant l'intégrale particulière $y = 0$. Si cette intégrale n'est pas *singulière*, le développement de F suivant les puissances de y et de y' contient un terme du premier degré en y', et nous pouvons écrire l'équation

$$(11) \qquad y' = ay + byy' + cy'^2 + \ldots = f(x, y, y'),$$

le second membre étant une série entière en y, y', dont tous les termes sont divisibles par y ou par y'^2, et dont les coefficients sont des fonctions holomorphes de x dans un domaine $\mathcal{D}_x$. Supposons cette série convergente lorsque l'on a

$$|y| \leqq r, \qquad |y'| \leqq \rho,$$

x étant un point quelconque de $\mathcal{D}_x$. D'après le théorème général du n° 1, l'équation (11) admet une racine $y' = \psi(x, y)$ qui est nulle pour $y = 0$, et qui est une fonction holomorphe des variables x et y lorsque x décrit le domaine $\mathcal{D}_x$, et que le module de y reste plus petit qu'un nombre positif convenable h. Le développement de cette fonction $\psi(x, y)$ suivant les puissances de y sera convergent dans ce domaine.

De même, si une équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$F(x, y, z, p, q) = 0 \tag{12}$$

admet l'intégrale non singulière $z = 0$, on peut mettre cette équation sous la forme

$$p = f(x, y, z, p, q), \tag{13}$$

le second membre étant une série entière en z, p, q dont tous les termes sont divisibles par un des facteurs z, q, p^2, et dont les coefficients sont des fonctions des variables x et y. Supposons tous ces coefficients holomorphes dans un certain domaine $\mathcal{D}$ et la série convergente lorsque l'on a

$$|z| \leqq r, \qquad |p| \leqq r', \qquad |q| \leqq \rho,$$

pour tout système de valeurs de x et de y dans le domaine $\mathcal{D}$. On déduira alors de l'équation (13) un développement de p suivant les puissances de z et de q,

$$p = \varphi(x, y, z, q),$$

dont tous les coefficients sont des fonctions holomorphes de x et de y dans le domaine $\mathcal{D}$, et qui est convergent pourvu que les modules de z et de q ne dépassent pas certaines limites.

II.

7. Nous allons encore reprendre rapidement les théorèmes de M. Poincaré relatifs aux équations différentielles ordinaires, en vue d'une généralisation qui nous sera utile pour les équations aux dérivées partielles du premier ordre.

La démonstration de M. Poincaré repose sur une propriété des équations linéaires, qui devient intuitive quand on emploie pour intégrer ces équations la méthode des approximations successives. Considérons, pour fixer les idées, un système de deux équations linéaires

$$(14)\qquad \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = ay + bz + c, \\ \dfrac{dz}{dx} = a_1 y + b_1 z + c_1, \end{cases}$$

a, b, c, a_1, b_1, c_1 étant des fonctions continues de la variable réelle x dans l'intervalle de $x = 0$ à $x = X > 0$. D'après la méthode des approximations successives, on forme les deux suites indéfinies de fonctions

$$(15)\qquad \begin{cases} y_0, & y_1, & \ldots, & y_n, & \ldots, \\ z_0, & z_1, & \ldots, & z_n, & \ldots, \end{cases}$$

où y_0 et z_0 sont deux constantes quelconques, et où l'on pose successivement

$$y_1 = y_0 + \int_0^x (ay_0 + bz_0 + c)\,dx, \qquad z_1 = z_0 + \int_0^x (a_1 y_0 + b_1 z_0 + c_1)\,dx,$$

$$y_2 = y_0 + \int_0^x (ay_1 + bz_1 + c)\,dx, \qquad z_2 = z_0 + \int_0^x (a_1 y_1 + b_1 z_1 + c_1)\,dx,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

et, d'une manière générale,

$$y_n = y_0 + \int_0^x (ay_{n-1} + bz_{n-1} + c)\,dx, \qquad z_n = z_0 + \int_0^x (a_1 y_{n-1} + b_1 z_{n-1} + c_1)\,dx.$$

Toutes ces fonctions sont continues dans l'intervalle de o à X et, lorsque n augmente indéfiniment, elles tendent vers des limites y et z, qui satisfont aux équations (14) et qui prennent respectivement les valeurs y_0 et z_0 pour $x = 0$.

Soient maintenant A, B, C, A_1, B_1, C_1 des fonctions continues de la variable x dans l'intervalle $(0, X)$, positives dans cet intervalle, et telles que l'on ait, pour toute valeur de x entre o et X,

$$|a| < A, \qquad |b| < B, \qquad |c| < C, \qquad |a_1| < A_1, \qquad |b_1| < B_1, \qquad |c_1| < C_1;$$

soient en outre Y_0 et Z_0 deux constantes positives plus grandes respectivement que $|y_0|$ et $|z_0|$, ou au moins égales à ces valeurs absolues.

Considérons le système auxiliaire

$$(14)' \qquad \begin{cases} \dfrac{dY}{dx} = AY + BZ + C, \\[2ex] \dfrac{dZ}{dx} = A_1 Y + B_1 Z + C_1; \end{cases}$$

les intégrales de ce système qui, pour $x = 0$, prennent les valeurs Y_0 et Z_0 respectivement s'obtiennent de même en formant les deux suites de fonctions

$$(15)' \qquad \begin{cases} Y_0, \quad Y_1, \quad Y_2, \quad \ldots, \quad Y_n, \quad \ldots, \\ Z_0, \quad Z_1, \quad Z_2, \quad \ldots, \quad Z_n, \quad \ldots, \end{cases}$$

obtenues en posant

$$Y_1 = Y_0 + \int_0^x (AY_0 + BZ_0 + C)\,dx, \qquad Z_1 = Z_0 + \int_0^x (A_1 Y_0 + B_1 Z_0 + C_1)\,dx,$$

$$Y_2 = Y_0 + \int_0^x (AY_1 + BZ_1 + C)\,dx, \qquad Z_2 = Z_0 + \int_0^x (A_1 Y_1 + B_1 Z_1 + C_1)\,dx,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

et en général

$$Y_n = Y_0 + \int_0^x (AY_{n-1} + BZ_{n-1} + C)\,dx,$$

$$Z_n = Z_0 + \int_0^x (A_1 Y_{n-1} + B_1 Z_{n-1} + C_1)\,dx.$$

D'après la façon même dont on obtient ces fonctions Y_n, Z_n, il est clair qu'elles sont toutes positives dans l'intervalle $(0, X)$. De plus, en comparant les formules qui définissent les deux suites de fonctions (15) et (15)', on vérifie, en remontant de proche en proche, que l'on a, pour toute valeur de x dans l'intervalle $(0, X)$,

$$|y_1| < Y_1, \qquad |z_1| < Z_1, \qquad |y_2| < Y_2, \qquad |z_2| < Z_2, \qquad \ldots,$$

et, d'une façon générale,

$$|y_n| < Y_n, \qquad |z_n| < Z_n.$$

Par suite, les valeurs absolues des intégrales y et z des équations (14) qui prennent les valeurs y_0 et z_0 pour $x = 0$ sont plus petites, pour toute valeur de x dans l'intervalle $(0, X)$, que les intégrales des équations (14)' qui prennent les valeurs Y_0 et Z_0 pour $x = 0$. C'est au fond sur cette propriété que repose le raisonnement de M. Poincaré (*loc. cit.*, p. 55).

8. Supposons maintenant que les coefficients a, b, c, a_1, b_1, c_1 des équations (14) soient des fonctions holomorphes de la variable complexe x dans un domaine *simplement connexe* $\mathfrak{D}_x$, comprenant l'origine. Il pourrait d'ailleurs se faire que ce domaine $\mathfrak{D}_x$ se recouvre partiellement lui-même plusieurs fois, ce qui reviendrait à le supposer étendu sur une surface de Riemann à plusieurs feuillets. Les raisonnements qui vont suivre s'appliqueraient aussi à ce cas; mais, pour fixer les idées, nous supposerons le domaine $\mathfrak{D}_x$ étendu sur un plan simple.

Les deux suites de fonctions y_i, z_i, introduites par la méthode des approximations successives, sont alors des fonctions holomorphes de x dans tout le domaine $\mathfrak{D}_x$; y_1 par exemple est une fonction holomorphe de x, dont la dérivée est $ay_0 + bz_0 + c$, et qui prend la valeur y_0 pour $x = 0$, et de même pour les autres. Nous reprendrons encore le raisonnement par lequel on prouve que y_n et z_n ont des limites lorsque n augmente indéfiniment.

D'une façon générale, soit $f(x)$ une fonction holomorphe dans $\mathfrak{D}_x$;

considérons l'intégrale

$$I = \int_0^X f(x)\,dx,$$

prise le long d'un chemin L situé dans $\mathcal{D}_x$, et de forme quelconque, et désignons par s la longueur de l'arc de ce chemin compté depuis l'origine. Le module $|f(x)|$ de la fonction $f(x)$ est une fonction continue et positive $F(s)$ de l'arc s lorsque la variable x décrit le chemin L, et il est clair que le module d'un élément quelconque de l'intégrale I est inférieur à $F(s)\,ds$. On a donc, *a fortiori*,

$$(16) \qquad |I| < \int_0^S F(s)\,ds,$$

en désignant par S la longueur de l'arc d'intégration.

Cela posé, imaginons toutes les intégrations effectuées le long d'un chemin L de longueur S allant de l'origine à un point X de $\mathcal{D}_x$, et situé tout entier dans ce domaine. De plus, supposons toutes les fonctions a, b, c, a_1, b_1, c_1 bornées dans $\mathcal{D}_x$, et soit M un nombre positif supérieur au module de l'une quelconque de ces fonctions dans ce domaine. Nous allons chercher une limite supérieure des modules

$$|y_1 - y_0|, \quad |z_1 - z_0|, \quad |y_2 - y_1|, \quad |z_2 - z_1|, \quad \ldots,$$

au point X, et plus généralement en un point quelconque du chemin L. On a d'abord, en observant qu'en un point quelconque du chemin L, $|ay_0 + bz_0 + c|$ est $< M(Y_0 + Z_0 + 1) = K$, en posant $Y_0 = |y_0|$, $Z_0 = |z_0|$,

$$|y_1 - y_0| < Ks,$$

et pour la même raison

$$|z_1 - z_0| < Ks,$$

s désignant la distance d'un point quelconque du chemin L à l'origine comptée sur ce chemin. On a ensuite

$$|y_2 - y_1| < \int_0^s |a(y_1 - y_0) + b(z_1 - z_0)|\,ds < 2MK \int_0^s s\,ds = 2MK\frac{s^2}{1.2},$$

et l'on trouve la même limite pour $|z_2 - z_1|$. En continuant de la sorte, on démontre de proche en proche que l'on a en général

$$|y_n - y_{n-1}| < \frac{K}{2M} \frac{(2Ms)^n}{1.2\ldots n}, \qquad |z_n - z_{n-1}| < \frac{K}{2M} \frac{(2Ms)^n}{1.2\ldots n}.$$

Cela étant, soit Λ un nombre positif tel que l'on puisse joindre l'origine à un point quelconque du domaine $\mathfrak{D}_x$ par un chemin situé dans $\mathfrak{D}_x$ et de longueur inférieure à Λ; il est clair qu'il existe une infinité de nombres positifs satisfaisant à cette condition lorsque le domaine $\mathfrak{D}_x$ est situé à distance finie. En un point quelconque x du domaine $\mathfrak{D}_x$ on a donc les inégalités

$$|y_n - y_{n-1}| < \frac{K}{2M} \frac{(2M\Lambda)^n}{1.2\ldots n}, \qquad |z_n - z_{n-1}| < \frac{K}{2M} \frac{(2M\Lambda)^n}{1.2\ldots n},$$

puisqu'on peut joindre ce point à l'origine par un chemin intérieur au domaine et de longueur inférieure à Λ. Le module d'un terme quelconque des deux séries

$$(17) \qquad \begin{cases} y_0 + (y_1 - y_0) + \ldots + (y_n - y_{n-1}) + \ldots, \\ z_0 + (z_1 - z_0) + \ldots + (z_n - z_{n-1}) + \ldots \end{cases}$$

est donc plus petit que le terme correspondant de la série à termes positifs dont la somme est $\frac{K}{2M} e^{2M\Lambda}$. Il s'ensuit que ces deux séries sont uniformément convergentes dans $\mathfrak{D}_x$, et par suite les sommes de ces deux séries sont des fonctions holomorphes dans le même domaine. Or ces sommes sont précisément les intégrales des équations (14) qui prennent les valeurs y_0 et z_0 pour $x = 0$.

Le théorème est encore vrai lorsque les coefficients a, b, c, a_1, b_1, c_1, au lieu de dépendre de la seule variable x, dépendent en outre d'un ou plusieurs paramètres variables $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r$. Regardons ces paramètres comme des variables complexes, et supposons les coefficients a, b, c, a_1, b_1, c_1 holomorphes lorsque la variable x reste dans $\mathfrak{D}_x$, le système des variables $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r$ restant dans un certain domaine de variabilité. Les fonctions y_i, z_i sont encore des fonctions holomorphes des variables $(x, \mu_1, \ldots, \mu_r)$ dans le même domaine, et, les séries (17) étant toujours uniformément convergentes, il s'ensuit que les sommes de ces deux séries sont elles-mêmes des fonctions holomorphes des $r+1$ variables indépendantes $x, \mu_1, \ldots, \mu_r$.

9. La même méthode permet d'obtenir une limite supérieure, en un point quelconque du domaine $\mathfrak{D}_x$, des modules des intégrales qui prennent les valeurs y_0 et z_0 pour $x=0$. Prenons pour simplifier $y_0=z_0=0$, ce qui ne diminue pas la généralité, et soit L une ligne de longueur S, située dans $\mathfrak{D}_x$ et joignant l'origine à un point X de ce domaine.

Soient $A(s)$, $B(s)$, $C(s)$, $A_1(s)$, $B_1(s)$, $C_1(s)$ des fonctions réelles et positives de l'arc s compté sur le chemin L à partir de l'origine, et supérieures respectivement aux modules des fonctions a, b, c, a_1, b_1, c_1, au point du chemin L à une distance s de l'origine.

Le système auxiliaire

$$(18)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dY}{ds} &= A(s)\,Y + B(s)\,Z + C(s),\\ \frac{dZ}{ds} &= A_1(s)\,Y + B_1(s)\,Z + C_1(s),\end{aligned}\right.$$

où la variable indépendante s est réelle et positive, admet des intégrales prenant les valeurs $Y=0$, $Z=0$, pour $s=0$, et ces intégrales sont évidemment positives et croissantes lorsque s croît de 0 à S. En effet, si l'on applique à ces équations la méthode des approximations successives, les diverses fonctions

$$\begin{matrix} Y_1, & Y_2, & \ldots, & Y_n, & \ldots,\\ Z_1, & Z_2, & \ldots, & Z_n, & \ldots \end{matrix}$$

sont positives quand s varie de 0 à S, et, si l'on compare les équations de définition de ces fonctions avec les équations de définition des fonctions y_i, z_i, pour les intégrales du système (14) qui sont nulles pour $x=0$, on en conclut immédiatement, d'après l'inégalité (16), que l'on a successivement

$$\begin{matrix} |y_1|<Y_1, & |y_2|<Y_2, & \ldots, & |y_n|<Y_n, & \ldots,\\ |z_1|<Z_1, & |z_2|<Z_2, & \ldots, & |z_n|<Z_n, & \ldots, \end{matrix}$$

en faisant toujours correspondre à un point x du chemin L la valeur de s qui mesure la distance de ce point à l'origine, comptée sur le chemin L lui-même. Par conséquent, *au point* X, *les modules des intégrales y et z seront inférieurs aux valeurs que prennent les intégrales* Y *et* Z *du système auxiliaire* (18) *pour la valeur* $s = S$.

Il est clair que la règle précédente comporte une assez grande indétermination; toutes les fois que cela sera possible, on prendra naturellement la ligne droite pour le chemin L. Le nombre A ayant la même signification qu'au paragraphe précédent, si M désigne un nombre positif supérieur au module des coefficients a, b, c, a_1, b_1, c_1, dans le domaine $\mathcal{D}_x$, on pourra prendre pour système auxiliaire le système

$$(18)' \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{dY}{ds} &= M(Y + Z + 1), \\ \frac{dZ}{ds} &= M(Y + Z + 1); \end{aligned} \right.$$

les intégrales de ce système qui sont nulles pour $s = 0$ sont dans ce cas

$$Y = Z = \frac{1}{2}\{e^{2Ms} - 1\}.$$

Par conséquent, *en un point quelconque de* $\mathcal{D}_x$, les modules des intégrales y et z du système (14) qui sont nulles pour $x = 0$ sont inférieurs à

$$\frac{1}{2}\{e^{2MA} - 1\}.$$

Après ces remarques, il est bien facile d'étendre aux variables complexes la démonstration du théorème de M. Poincaré, en généralisant le procédé employé pour les variables réelles.

10. Soit

$$(19) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= f(x, y, z, \lambda, \mu), \\ \frac{dz}{dx} &= f_1(x, y, z, \lambda, \mu) \end{aligned} \right.$$

un système de deux équations différentielles du premier ordre, dont les seconds membres f et f_1 sont des fonctions holomorphes des variables x, y, z, λ, μ, lorsque la variable x décrit un domaine *simplement connexe* $\mathfrak{D}_x$, comprenant l'origine, pourvu que les modules de y, z, λ, μ ne dépassent pas certaines limites. On suppose de plus que l'on a identiquement

$$f(x, 0, 0, 0, 0) = 0, \qquad f_1(x, 0, 0, 0, 0) = 0,$$

de sorte que, pour les valeurs $\lambda = \mu = 0$ des paramètres, le système (19) admet les intégrales particulières $y = 0$, $z = 0$. Pour des valeurs de ces paramètres de modules assez petits, les équations (19) admettent des intégrales s'annulant pour $x = 0$, et l'on peut se proposer de développer ces intégrales suivant les puissances croissantes des paramètres λ et μ.

Observons d'abord que les fonctions f et f_1 peuvent être développées en séries entières ordonnées suivant les puissances de y, z, λ, μ,

$$(20)\qquad \begin{cases} f = ay + bz + c\lambda + d\mu + \ldots + p_{\alpha\beta\gamma\delta}\, y^\alpha z^\beta \lambda^\gamma \mu^\delta + \ldots, \\ f_1 = a_1 y + b_1 z + c_1\lambda + d_1\mu + \ldots + q_{\alpha\beta\gamma\delta}\, y^\alpha z^\beta \lambda^\gamma \mu^\delta + \ldots, \end{cases}$$

dont les coefficients a, a_1, b, b_1, c, c_1, d, d_1, $\ldots$, $p_{\alpha\beta\gamma\delta}$, $q_{\alpha\beta\gamma\delta}$, sont des fonctions holomorphes de la variable x dans $\mathfrak{D}_x$, et ces séries sont convergentes pourvu que l'on ait

$$|y| \leqq y_0, \qquad |z| \leqq z_0, \qquad |\lambda| \leqq \lambda_0, \qquad |\mu| \leqq \mu_0,$$

y_0, z_0, λ_0, μ_0 étant des nombres positifs déterminés, quelle que soit la valeur de x dans $\mathfrak{D}_x$.

Si les intégrales cherchées, qui sont nulles pour $x = 0$, sont développables suivant les puissances de λ et de μ,

$$(21)\qquad \begin{cases} y = \varphi_{10}\lambda + \varphi_{01}\mu + \ldots + \sum \varphi_{mn}\lambda^m \mu^n + \ldots, \\ z = \psi_{10}\lambda + \psi_{01}\mu + \ldots + \sum \psi_{mn}\lambda^m \mu^n + \ldots, \end{cases}$$

les coefficients φ_{mn} et ψ_{mn} sont des fonctions de la variable x, s'annulant pour $x = 0$, que l'on peut déterminer de proche en proche par l'intégration d'équations différentielles linéaires. En effet, si l'on substitue les développements précédents à la place de y et de z, dans les équations (19), on a de part et d'autre des séries entières en λ et μ qui doivent être identiques. En égalant les coefficients de λ et de μ, nous avons d'abord les relations

$$(22)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d\varphi_{10}}{dx} &= a\varphi_{10} + b\psi_{10} + c, \\ \frac{d\psi_{10}}{dx} &= a_1\varphi_{10} + b_1\psi_{10} + c_1, \end{aligned}\right.$$

$$(23)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d\varphi_{01}}{dx} &= a\varphi_{01} + b\psi_{01} + d, \\ \frac{d\psi_{01}}{dx} &= a_1\varphi_{01} + b_1\psi_{01} + d_1; \end{aligned}\right.$$

les intégrales de ces deux systèmes d'équations linéaires, qui sont nulles pour $x = 0$, sont holomorphes dans le domaine simplement connexe $\mathcal{D}_x$, puisque les fonctions a, b, c, d, a_1, b_1, c_1, d_1 sont par hypothèse holomorphes dans ce domaine. D'une façon générale les deux fonctions φ_{mn} et ψ_{mn}, qui doivent être nulles pour $x = 0$, sont déterminées par le système des deux équations linéaires

$$(24)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d\varphi_{mn}}{dx} &= a\varphi_{mn} + b\psi_{mn} + u, \\ \frac{d\psi_{mn}}{dx} &= a_1\varphi_{mn} + b_1\psi_{mn} + u_1, \end{aligned}\right.$$

u et u_1 étant deux polynomes entiers par rapport aux coefficients des séries (20) et des fonctions φ_{ik} et ψ_{ik} pour lesquelles on a $i < m$, $k < n$. On voit donc, en raisonnant de proche en proche, que toutes les fonctions φ et ψ ainsi déterminées sont holomorphes dans $\mathcal{D}_x$; les séries entières (21), que l'on obtient en procédant de cette façon, satisfont formellement aux équations (19), et tous les coefficients sont nuls pour $x = 0$.

L'hypothèse que le domaine $\mathcal{D}_x$ est simplement connexe est essentielle. En effet, si $\mathcal{D}_x$ se composait par exemple d'une région annulaire comprise entre deux courbes fermées, dont l'une est intérieure à l'autre, les intégrales des systèmes d'équations linéaires que l'on a à considérer ne seraient pas forcément holomorphes dans ce domaine. Mais on pourrait généraliser le raisonnement en supposant que le domaine $\mathfrak{O}_x$ se compose d'une portion simplement connexe d'une surface de Riemann à plusieurs feuillets.

11. Il reste maintenant à démontrer la convergence de ces développements (21), pour des valeurs des paramètres λ et μ, de modules assez petits. Pour fixer les idées, soit X un point quelconque du domaine $\mathfrak{O}_x$, et soit L un chemin de longueur S joignant l'origine au point X, et situé tout entier dans $\mathfrak{O}_x$. Lorsque la variable x décrit ce chemin L, les coefficients a, a_1, b, b_1, ..., $p_{\alpha\beta\gamma\delta}$, $q_{\alpha\beta\gamma\delta}$, ... sont des fonctions de l'arc s compté à partir de l'origine. Désignons par

$$A, \quad A_1, \quad B, \quad B_1, \quad \ldots, \quad P_{\alpha\beta\gamma\delta}, \quad Q_{\alpha\beta\gamma\delta}, \quad \ldots$$

des fonctions continues, réelles et positives, de la variable réelle s, dans l'intervalle (o, S), telles que l'on ait, pour une valeur quelconque de s, entre o et S,

$$(25)\qquad |a| < A, \quad |b| < B, \quad \ldots, \quad |p_{\alpha\beta\gamma\delta}| < P_{\alpha\beta\gamma\delta}, \quad |q_{\alpha\beta\gamma\delta}| < Q_{\alpha\beta\gamma\delta}, \quad \ldots.$$

Considérons le système d'équations différentielles auxiliaires

$$(26)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dY}{ds} &= F(s, Y, Z, \lambda, \mu) \\ &= AY + BZ + C\lambda + D\mu + \ldots + P_{\alpha\beta\gamma\delta} Y^\alpha Z^\beta \lambda^\gamma \mu^\delta + \ldots, \\ \frac{dZ}{ds} &= F_1(s, Y, Z, \lambda, \mu) \\ &= A_1 Y + B_1 Z + C_1\lambda + D_1\mu + \ldots + Q_{\alpha\beta\gamma\delta} Y^\alpha Z^\beta \lambda^\gamma \mu^\delta + \ldots; \end{aligned}\right.$$

où la variable indépendante s est supposée réelle et comprise entre o et S et, sans nous préoccuper d'abord de la convergence, cherchons à développer, suivant les puissances de λ et de μ, les intégrales de ce système qui sont nulles pour $s = 0$,

$$(27)\qquad \left\{\begin{aligned} Y &= \Phi_{10}\lambda + \Phi_{01}\mu + \ldots + \sum \Phi_{mn} \lambda^m \mu^n + \ldots, \\ Z &= \Psi_{10}\lambda + \Psi_{01}\mu + \ldots + \sum \Psi_{mn} \lambda^m \mu^n + \ldots. \end{aligned}\right.$$

Les fonctions Φ_{ik} et Ψ_{ik}, qui doivent être nulles pour $s=0$, sont déterminées par des systèmes d'équations linéaires, tout pareils aux systèmes (22), (23), (24),

$$(22)' \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d\Phi_{10}}{ds} &= A\Phi_{10} + B\Psi_{10} + C, \\ \frac{d\Psi_{10}}{ds} &= A_1\Phi_{10} + B_1\Psi_{10} + C_1, \end{aligned} \right.$$

$$(23)' \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d\Phi_{01}}{ds} &= A\Phi_{01} + B\Psi_{01} + D, \\ \frac{d\Psi_{01}}{ds} &= A_1\Phi_{01} + B_1\Psi_{01} + D_1, \end{aligned} \right.$$

$$(24)' \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d\Phi_{mn}}{ds} &= A\Phi_{mn} + B\Psi_{mn} + U, \\ \frac{d\Psi_{mn}}{ds} &= A_1\Phi_{mn} + B_1\Psi_{mn} + U_1, \end{aligned} \right.$$

U et U_1 étant deux polynomes qui se déduisent des polynomes u, u_1, en y remplaçant les coefficients des séries (20) par les coefficients correspondants des séries (26), et les fonctions φ_{ik} et ψ_{ik} par les fonctions Φ_{ik} et Ψ_{ik}.

D'après un résultat antérieur (n° 7), les intégrales du système (22)', qui sont nulles pour $s=0$, sont positives dans tout l'intervalle (o, S) et, en un point quelconque de cet intervalle, on a

$$|\varphi_{01}| < \Phi_{01}, \qquad |\psi_{01}| < \Psi_{01},$$

les valeurs des fonctions φ_{01} et ψ_{01} étant prises au point x du chemin L à une distance s de l'origine. En faisant correspondre de cette façon les points de la ligne L et les valeurs réelles de la variable s comprises entre o et S, on a aussi

$$|\varphi_{10}| < \Phi_{10}, \qquad |\psi_{10}| < \Psi_{10},$$

et, d'une façon générale,

$$(28) \qquad |\varphi_{ik}| < \Phi_{ik}, \qquad |\psi_{ik}| < \Psi_{ik}.$$

Si l'on suppose en effet ces inégalités démontrées lorsque l'on a

$$i < m, \qquad k < n,$$

il s'ensuit que l'on a, dans les équations $(24)'$,

$$|u| < \mathrm{U}, \qquad |u_1| < \mathrm{U}_1,$$

et par suite les inégalités subsistent pour $i = m$, $k = n$. Donc elles sont générales.

Si donc les séries (27) sont convergentes dans tout l'intervalle (o, S), lorsque les modules des paramètres λ, μ ne dépassent pas certaines limites, il en sera de même des séries (21) tout le long de la ligne L, pour les mêmes valeurs des paramètres λ et μ.

12. Le reste de la démonstration s'achève bien aisément, comme dans le cas d'une variable réelle. Soit M une limite supérieure du module des fonctions f et f_1 lorsque la variable x décrit le domaine ω_x, et que les modules des variables y, z, λ, μ ne dépassent pas un nombre positif ρ. La fonction

$$\frac{\mathrm{M}(y+z+\lambda+\mu)}{1-\dfrac{y+z+\lambda+\mu}{\rho}}$$

est majorante pour les fonctions f et f_1 relativement aux variables y, z, λ, μ, quelle que soit la valeur de x dans le domaine ω_x, et il en est de même, à plus forte raison, de la fonction

$$\frac{\mathrm{M}(y+z+\lambda+\mu)\left(1+\dfrac{y+z+\lambda+\mu}{\rho}\right)}{1-\dfrac{y+z+\lambda+\mu}{\rho}}.$$

Si l'on développe cette fonction suivant les puissances de y, z, λ, μ, le coefficient d'un terme quelconque est un nombre positif qui est supérieur au module des deux coefficients correspondants des deux séries f et f_1.

Cela étant, prenons pour système auxiliaire (26) le système

$$(26)' \qquad \frac{d\mathrm{Y}}{ds} = \frac{d\mathrm{Z}}{ds} = \frac{\mathrm{M}(\mathrm{Y}+\mathrm{Z}+\lambda+\mu)\left(1+\dfrac{\mathrm{Y}+\mathrm{Z}+\lambda+\mu}{\rho}\right)}{1-\dfrac{\mathrm{Y}+\mathrm{Z}+\lambda+\mu}{\rho}};$$

les inégalités (25) sont vérifiées quel que soit le chemin L. Si donc nous démontrons que les intégrales du système (26)′, qui sont nulles pour $s=0$, sont développables en séries entières ordonnées suivant les puissances de λ et de μ, et que ces séries entières sont convergentes pour toutes les valeurs positives de s inférieures à un nombre Λ, ayant le même sens que plus haut (n° 8), pourvu que l'on ait

$$|\lambda|<\eta, \qquad |\mu|<\eta,$$

η étant un nombre positif, les séries (21) seront convergentes dans tout le domaine ω_x, lorsque λ et μ satisfont à la condition précédente.

En tenant compte des conditions initiales, et en posant

$$Y+Z+\lambda+\mu=\rho t,$$

le système (26)′ se réduit à l'équation unique

$$\frac{dt}{ds}=\frac{2Mt(1+t)}{1-t},$$

avec la condition initiale

$$t=\frac{\lambda+\mu}{\rho} \qquad \text{pour} \qquad s=0.$$

L'équation précédente peut s'écrire

$$\frac{dt}{t}-\frac{2\,dt}{t+1}=2M\,ds,$$

et l'intégrale cherchée est fournie par l'équation

$$L\left[\frac{t}{(t+1)^2}\right]=L\left[\frac{\rho(\lambda+\mu)}{(\rho+\lambda+\mu)^2}\right]+2Ms,$$

ou

$$t=\alpha(t+1)^2, \tag{29}$$

en posant pour abréger

$$\alpha=\frac{\rho(\lambda+\mu)e^{2Ms}}{(\rho+\lambda+\mu)^2}.$$

L'équation (29) admet une racine qui s'annule pour $\alpha=0$, et, d'après la théorie de l'équation de Lagrange, cette racine est une fonction holomorphe de α lorsque l'on a $|\alpha| < \frac{1}{4}$, car on a

$$\left|\frac{(t+1)^2}{t}\right| \leqq 4,$$

quand on fait décrire à la variable t le cercle $|t| = 1$. Soit η un nombre positif tel que l'on ait

$$(30) \qquad 8\rho\varepsilon e^{2M\Lambda} < (\rho + 2\varepsilon)^2, \qquad \text{pour} \qquad \varepsilon < \eta;$$

on aura certainement $|\alpha| < \frac{1}{4}$, si l'on a à la fois

$$s \leqq \Lambda, \qquad |\lambda| < \eta, \qquad |\mu| < \eta,$$

et par suite les développements des intégrales du système $(26)'$ suivant les puissances de λ et de μ seront convergents pour ces valeurs de s, λ, μ.

Les séries entières (21) sont donc convergentes dans tout le domaine $\mathfrak{D}_x$ pourvu que les modules des paramètres λ et μ soient inférieurs au nombre positif η.

Il résulte d'ailleurs de la démonstration même que ces séries sont *uniformément convergentes* dans $\mathfrak{D}_x$. Comme tous les termes sont des fonctions holomorphes, les sommes de ces deux séries sont elles-mêmes des fonctions holomorphes de x dans le même domaine, et l'on peut énoncer le théorème suivant :

Théorème IV. — *Les intégrales des équations* (19), *qui s'annulent pour* $x = 0$, *sont des fonctions holomorphes des variables* x, λ, μ, *lorsque la variable* x *décrit le domaine* $\mathfrak{D}_x$, *et que les modules des variables* λ, μ *restent inférieurs à un nombre positif* η, *convenablement choisi.*

13. La démonstration précédente n'est que l'extension au domaine complexe de la démonstration donnée par M. Poincaré pour le cas des variables réelles. On pourrait établir le même théorème par une autre méthode, dont nous nous servirons souvent dans la suite,

et qui offre une application de la représentation conforme. Nous pouvons en effet ramener le cas où le domaine ω_x est un domaine simplement connexe de forme quelconque au cas où ce domaine est un cercle. Soit

$$x = \psi(x')$$

une fonction analytique permettant d'effectuer la représentation conforme d'un cercle de centre $x' = 0$ sur le domaine ω_x, de façon que le point $x = 0$ corresponde à l'origine $x' = 0$. La dérivée $\psi'(x')$ est une fonction holomorphe dans le même cercle.

Or, en faisant, dans les équations (19), le changement de variable $x = \psi(x')$, on doit remplacer $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{dz}{dx}$ par $\frac{1}{\psi'}\frac{dy}{dx'}$ et $\frac{1}{\psi'}\frac{dz}{dx'}$ respectivement, et les équations (19) sont remplacées par des équations de même forme où le domaine ω_x est un cercle de rayon r décrit de l'origine pour centre.

Pour ne pas multiplier les notations, nous supposerons qu'on a d'abord effectué cette transformation.

La proposition que nous voulons établir peut alors s'énoncer ainsi :

Soient f, f_1 des fonctions holomorphes des variables x, y, z, λ, μ pour les valeurs de ces variables qui satisfont aux conditions

$$|x| \leqq r, \qquad |y| \leqq \rho, \qquad |z| \leqq \rho, \qquad |\lambda| \leqq \rho, \qquad |\mu| \leqq \rho,$$

et qui s'annulent identiquement pour $y = z = \lambda = \mu = 0$. A tout nombre positif θ inférieur à un, on peut faire correspondre un autre nombre positif η tel que les intégrales du système (19) qui sont nulles pour $x = 0$ soient des fonctions holomorphes de x, λ, μ dans le domaine défini par les inégalités

$$|x| < \theta r, \qquad |\lambda| < \eta, \qquad |\mu| < \eta.$$

Les équations (19) peuvent être considérées comme un système d'équations aux dérivées partielles définissant deux fonctions y et z des variables x, λ, μ. Les intégrales de ce système qui se réduisent à zéro pour $x = 0$ sont des fonctions holomorphes de x, λ, μ dans le voisinage des valeurs $x = 0$, $\lambda = 0$, $\mu = 0$, et peuvent être représentées par des *séries entières en x, λ, μ*, dont tous les coefficients se déduisent des coefficients des séries entières f et f_1 par les seules opérations d'addition et de multiplication. Pour avoir une limite inférieure du domaine de convergence de ces séries entières, on peut donc remplacer f et f_1 par des fonctions majorantes. Comme ces deux fonctions s'annulent quel que soit x, pour $y = z = \lambda = \mu = 0$, on peut prendre pour fonction majorante une expression de la forme

$$\frac{M(y+z+\lambda+\mu)\left(1+\frac{y+z+\lambda+\mu}{\rho}\right)}{\left(1-\frac{x}{r}\right)\left(1-\frac{y+z+\lambda+\mu}{\rho}\right)},$$

et les séries entières qui représentent les intégrales cherchées sont sûrement convergentes dans le même domaine que les séries qui représentent les intégrales du système auxiliaire

$$(31) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} = \frac{M(y+z+\lambda+\mu)\left(1+\frac{y+z+\lambda+\mu}{\rho}\right)}{\left(1-\frac{x}{r}\right)\left(1-\frac{y+z+\lambda+\mu}{\rho}\right)},$$

qui s'annulent pour $x = 0$. En posant comme plus haut

$$y+z+\lambda+\mu = \rho t,$$

la recherche de ces intégrales revient à l'intégration de l'équation unique

$$(32) \qquad \frac{dt}{dx} = \frac{2Mt(1+t)}{\left(1-\frac{x}{r}\right)(1-t)},$$

ou

$$\frac{dt}{t} - \frac{2\,dt}{1+t} = \frac{2M\,dx}{1-\frac{x}{r}},$$

avec la condition initiale $t = \frac{\lambda+\mu}{\rho}$ pour $x = 0$. Cette intégrale est racine de l'équation

$$L\left[\frac{t}{(t+1)^2}\right] = L\left[\frac{\rho(\lambda+\mu)}{\rho^2+(\lambda+\mu)^2}\right] - 2MrL\left(1-\frac{x}{r}\right),$$

que l'on peut aussi écrire

$$t = \alpha(t+1)^2, \tag{33}$$

en posant

$$\alpha = \frac{\rho(\lambda+\mu)}{\rho^2+(\lambda+\mu)^2}\left(1-\frac{x}{r}\right)^{-2Mr}.$$

On voit comme au numéro précédent que la racine qui s'annule pour $\alpha = 0$ est une fonction holomorphe de α tant que le module de α reste inférieur à $\frac{1}{4}$. Or, lorsque le module de x est plus petit que θr, le module de $1-\frac{x}{r}$ est compris entre $1-\theta$ et $1+\theta$, et le module de $\left(1-\frac{x}{r}\right)^{-2Mr}$ est plus petit que $(1-\theta)^{-2Mr}$. Soit η un nombre positif tel que l'on ait

$$8\rho\varepsilon(1-\theta)^{-2Mr} < \rho^2 - 4\varepsilon^2, \qquad \text{pour} \qquad \varepsilon < \eta. \tag{34}$$

Si l'on a à la fois

$$|x| < \theta r, \qquad |\lambda| < \eta, \qquad |\mu| < \eta,$$

le module de α est inférieur à $\frac{1}{4}$, et les intégrales du système auxiliaire sont certainement des fonctions holomorphes de x, λ, μ, dans le domaine défini par les inégalités précédentes. Il en est de même, *a fortiori*, des intégrales du système (19), ce qui prouve l'exactitude du lemme énoncé.

Si nous considérons maintenant un domaine simplement connexe ω_x, limité par une courbe fermée de forme quelconque, quand on l'applique conformément sur un cercle C de rayon r, tout domaine ω'_x intérieur à ω_x et n'ayant aucun point commun avec la frontière de ω_x est appliqué sur un domaine intérieur à un cercle C' concentrique à C et de rayon inférieur à r. Comme toute fonction holomorphe dans le cercle C' se change, par la transformation inverse, en une fonction holomorphe dans un domaine qui comprend ω'_x, on est conduit à la proposition suivante :

A tout domaine ω'_x, intérieur à ω_x, on peut associer un nombre positif η

tel que les intégrales du système (19), *qui sont nulles pour* $x = 0$, *soient des fonctions holomorphes des variables* x, λ, μ, *lorsque la variable* x *décrit le domaine* ω'_x, *pourvu que* $|\lambda|$ *et* $|\mu|$ *restent inférieurs à* η.

Ce nouvel énoncé est évidemment un peu moins précis que le premier (n° 12), mais la démonstration peut être étendue, comme nous le verrons, aux équations aux dérivées partielles.

14. Il est clair que les deux démonstrations s'appliquent, quels que soient le nombre des équations différentielles et le nombre des paramètres. Une autre extension nous sera utile pour la suite.

Au lieu de supposer, comme nous l'avons fait jusqu'ici, que les coefficients des séries (20) ne dépendent que de la variable x, on peut supposer que ces coefficients dépendent en outre de i paramètres $u_1, u_2, \ldots, u_i$ et sont des fonctions holomorphes des $(i+1)$ variables $x, u_1, u_2, \ldots, u_i$, lorsque x décrit le domaine ω_x, et que le système $(u_1, u_2, \ldots, u_i)$ reste dans un certain domaine de variabilité ω_u. Les autres hypothèses relatives à la convergence des séries (20) étant conservées, si l'on reprend par exemple la première démonstration, les coefficients φ_{mn} et ψ_{mn} des séries (21) sont déterminés par des équations linéaires dont les coefficients sont holomorphes dans les domaines précédents: les intégrales de ces équations qui s'annulent pour $x = 0$ sont des fonctions holomorphes des variables x, u_1, $u_2, \ldots, u_i$ dans les mêmes domaines (n° 11). Le reste de la démonstration s'achève de la même façon et l'on voit que *les intégrales des équations* (19), *qui sont nulles pour* $x = 0$, *sont des fonctions holomorphes de* x, u_1, u_2, .. , u_i, *dans les mêmes domaines que les coefficients des séries* (20), *pourvu que les modules des paramètres* $|\lambda|$ *et* $|\mu|$ *restent inférieurs à un nombre positif* η *convenablement choisi*.

Remarque. — Cette proposition peut être regardée comme une première extension du théorème de M. Poincaré aux équations aux dérivées partielles, car on peut considérer les équations (19) comme un système d'équations aux dérivées partielles, les variables indépendantes étant x, u_1, $u_2, \ldots, u_i$; mais ce ne sont là que des équations aux dérivées partielles d'une forme très particulière, puisque les dérivées partielles par rapport aux variables $u_1, u_2, \ldots, u_i$ n'y figurent pas:

15. Le théorème précédent permet en particulier d'étudier les intégrales infiniment voisines d'un système d'intégrales connues. Soit

$$(35)\qquad \frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \qquad \frac{dy_2}{dx} = f_2, \qquad \ldots, \qquad \frac{dy_n}{dx} = f_n,$$

un système d'équations différentielles dont on connait un système particulier d'intégrales

$$y_1 = \varphi_1(x), \qquad y_2 = \varphi_2(x), \qquad \ldots, \qquad y_n = \varphi_n(x).$$

On peut supposer que l'on a $\varphi_i(x) = 0$, car il suffit de poser $y_i = \varphi_i(x) + z_i$ pour être ramené à un système d'équations différentielles admettant le système d'intégrales

$$z_1 = z_2 = \ldots = z_n = 0.$$

Supposons que l'on ait fait au préalable cette transformation, de façon que, si l'on développe les fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_n$ suivant les puissances de $y_1, y_2, \ldots, y_n$, il n'y ait dans le développement aucun terme indépendant de $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Nous supposerons de plus que tous les coefficients de ce développement sont des fonctions holomorphes de x dans le voisinage de la valeur $x = 0$, et que les développements sont convergents lorsque la variable x reste dans un domaine ω_x *simplement connexe*, renfermant l'origine, pourvu que les modules de $y_1, y_2, \ldots\, y_n$ ne dépassent pas certaines limites positives. Pour étudier les intégrales du système (35) qui pour $x = 0$ prennent les valeurs $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, on peut poser $y_i = \lambda_i + Y_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ et étudier les intégrales du nouveau système

$$(35)'\quad \frac{dY_i}{dx} = F_i(x, Y_1, Y_2, \ldots, Y_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

qui sont nulles pour $x = 0$. D'après le théorème général précédent, ces intégrales sont des fonctions holomorphes de x dans tout le domaine ω_x, pourvu que les modules des valeurs initiales λ_1,

$\lambda_2, \ldots, \lambda_n$ soient inférieurs à un nombre positif convenable η. Ces intégrales peuvent être développées en séries entières ordonnées suivant les puissances de $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, et convergentes pour toute valeur de x prise dans ω_x pourvu que l'on ait

$$|\lambda_1| \leqq \eta, \qquad \ldots, \qquad |\lambda_n| \leqq \eta.$$

16. Pour montrer l'application aux équations différentielles du théorème de M. Poincaré sous sa forme générale du n° 14, nous étudierons d'abord un système très simple. Soit

$$\frac{dy}{dx} = z\,\mathrm{F}(x, y, z), \qquad \frac{dz}{dx} = z\,\Phi(x, y, z) \tag{36}$$

un système de deux équations différentielles où les fonctions F et Φ sont holomorphes lorsque les variables x et y décrivent respectivement dans leurs plans deux domaines ω_x et ω_y, dont le premier est simplement connexe, pourvu que le module de z ne dépasse pas un nombre positif h. Ce système admet une famille d'intégrales dépendant d'une constante arbitraire, qui sont connues immédiatement,

$$z = 0, \qquad y = \text{const.}$$

Nous nous proposons d'étudier les systèmes d'intégrales infiniment voisins de celui-là. On suppose toujours que le domaine ω_x renferme l'origine; y_0 étant une valeur quelconque de y dans ω_y, et λ un nombre de module inférieur à h, on peut se proposer de développer suivant les puissances de λ les intégrales qui, pour $x = 0$, prennent les valeurs initiales $y = y_0$, $z = \lambda$. Posons, dans les équations (36), $y = y_0 + \mathrm{Y}$, $z = \lambda + \mathrm{Z}$, elles deviennent

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d\mathrm{Y}}{dx} &= (\mathrm{Z} + \lambda)\,\mathrm{F}(x, y_0 + \mathrm{Y}, \lambda + \mathrm{Z}), \\ \frac{d\mathrm{Z}}{dx} &= (\mathrm{Z} + \lambda)\,\Phi(x, y_0 + \mathrm{Y}, \lambda + \mathrm{Z}). \end{aligned}\right. \tag{36$'$}$$

Soit ω'_y un domaine quelconque intérieur à ω_y. D'après les hypothèses qui ont été faites sur les fonctions F et Φ, les seconds membres des nouvelles équations sont des fonctions holomorphes des variables x,

y_0, Y, Z, λ, lorsque x et y_0 décrivent respectivement les domaines $\mathcal{D}_x$ et $\mathcal{D}'_y$, pourvu que les modules des variables Y, Z, λ soient inférieurs à un nombre positif ρ. On peut donc développer ces seconds membres en séries entières ordonnées suivant les puissances de Y, Z, λ dont les coefficients sont des fonctions holomorphes des variables x, y_0 dans les domaines $\mathcal{D}_x$, $\mathcal{D}'_y$. Par suite, les intégrales du système $(36)'$, qui s'annulent pour $x = 0$, sont des fonctions holomorphes des variables x, y_0, λ, lorsque les variables x et y_0 décrivent respectivement les domaines $\mathcal{D}_x$, $\mathcal{D}'_y$, et que le module de λ reste inférieur à un nombre positif η; résultat que l'on peut encore énoncer ainsi :

Théorème V. — *A tout domaine $\mathcal{D}'_y$ intérieur à $\mathcal{D}_y$, on peut faire correspondre un nombre positif η tel que les intégrales du système* (36) *qui prennent les valeurs $y = y_0$, $z = \lambda$, pour $x = 0$, soient des fonctions holomorphes des variables x, y_0, λ, lorsque les variables x, y_0 décrivent respectivement les domaines $\mathcal{D}_x$ et $\mathcal{D}'_y$ et que le module de λ reste inférieur à η.*

Ce nouveau théorème est évidemment plus étendu que le résultat rappelé au n° 15, puisque le module de y_0 n'est pas assujetti à rester voisin de zéro.

Les intégrales peuvent être développées en séries entières ordonnées suivant les puissances de λ,

$$(37)\qquad \begin{cases} y = y_0 + \lambda\,\varphi_1(x, y_0) + \lambda^2\,\varphi_2(x, y_0) + \ldots, \\ z = \lambda\,\psi_1(x, y_0) + \lambda^2\,\psi_2(x, y_0) \qquad + \ldots, \end{cases}$$

où les fonctions φ_i et ψ_k sont des fonctions holomorphes de x et de y_0 dans les domaines $\mathcal{D}_x$ et $\mathcal{D}_y$. Toutes les fonctions φ_i et ψ_k $(k > 1)$ doivent être nulles pour $x = 0$, et la fonction ψ_1 se réduit à l'unité pour $x = 0$. On détermine encore ces fonctions de proche en proche en substituant les développements précédents dans les équations (36), les seconds membres de ces équations étant d'abord développés suivant les puissances de $y - y_0$ et de z, et l'on égale les coefficients des mêmes puissances de λ dans les deux membres; ce qui conduit évidemment à des systèmes d'équations différentielles linéaires dont les coefficients sont des fonctions holomorphes de x et de y_0.

17. Si l'on regarde pour un moment x, y, z comme les coordonnées d'un point dans l'espace, les équations (37) représentent une courbe passant par le point de coordonnées $x = 0$, $y = y_0$, $z = \lambda$, et le lieu de cette courbe, quand on fait varier y_0, est une surface dont on aura l'équation en éliminant y_0 entre les équations (37). Pour faire cette élimination, remarquons qu'on peut écrire ces équations

$$(37 \textit{ bis}) \qquad y = y_0 + \lambda \mathrm{P}(x, y_0, \lambda), \qquad z = \lambda \mathrm{Q}(x, y_0, \lambda),$$

les fonctions $\mathrm{P}(x, y_0, \lambda)$, $\mathrm{Q}(x, y_0, \lambda)$ étant holomorphes dans les domaines qui ont été définis tout à l'heure. La première devient, en posant $y = y_0 + u$,

$$(38) \qquad u = \lambda \mathrm{P}(x, y - u, \lambda),$$

et le second membre est une fonction holomorphe des quatre variables x, y, λ, u lorsque x décrit le domaine ω_x, et y un nouveau domaine quelconque ω''_y intérieur à ω'_y, pourvu que le module de u reste inférieur à un nombre positif convenable ρ, le module de λ restant plus petit que η. D'après le théorème général (nº 4), l'équation (38) admet une racine s'annulant avec λ,

$$u = \lambda \mathrm{R}(x, y, \lambda),$$

qui est une fonction holomorphe de x, y et de λ lorsque les variables x et y décrivent respectivement les domaines ω_x et ω''_y, pourvu que le module de λ ne dépasse pas un nombre positif $\eta' \leq \eta$. On peut même prendre ce nombre η' assez petit pour que le module de u reste inférieur à ρ, de façon que, lorsque y décrit le domaine ω''_y, la variable $y_0 = y - u$ reste dans le domaine ω'_y. En remplaçant maintenant y_0 par $y - u$ dans l'expression de z, on obtient l'équation de la surface cherchée

$$(39) \qquad z = \lambda \mathrm{P}[x, y - \lambda \mathrm{R}(x, y, \lambda), \lambda] = \lambda \mathfrak{P}(x, y, \lambda),$$

et la fonction $\mathfrak{P}(x, y, \lambda)$ est holomorphe lorsque les variables x et y décrivent respectivement les domaines ω_x et ω''_y, le module de λ ne dépassant pas le nombre positif η'.

18. Ceci s'applique en particulier aux équations linéaires aux dérivées partielles de la forme

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z f(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial y} + z \varphi(x, y, z), \tag{40}$$

les fonctions f et φ étant des fonctions holomorphes des variables x, y, z dans les mêmes domaines que les fonctions F et Φ. On connaît, *a priori*, une intégrale $z = 0$; il en existe une infinité d'autres, qui sont infiniment voisines de celle-là et qui sont holomorphes lorsque x et y décrivent respectivement les deux domaines ω_x et ω'_y, ω'_y étant intérieur à ω_y. Cherchons par exemple l'intégrale se réduisant à une constante donnée λ pour la valeur particulière $x = 0$, dans le domaine ω_x. Cette intégrale est le lieu des caractéristiques de l'équation (40) issues des différents points de la ligne droite

$$x = 0, \qquad z = \lambda;$$

or ces caractéristiques sont les intégrales du système d'équations différentielles

$$\frac{dy}{dx} = - z f(x, y, z), \qquad \frac{dz}{dx} = z \varphi(x, y, z),$$

et nous venons de voir que la surface engendrée par les intégrales qui correspondent aux valeurs initiales

$$x = 0, \qquad y = y_0, \qquad z = \lambda,$$

quand on fait varier y_0, est représentée par une équation

$$z = \lambda \, \mathfrak{P}(x, y, \lambda),$$

où la fonction $\mathfrak{P}(x, y, \lambda)$ est holomorphe dans ω_x et ω'_y, pourvu que $|\lambda|$ soit assez petit.

Plus généralement, posons, dans l'équation (40),

$$z = \psi(y) Z,$$

$\psi(y)$ étant une fonction holomorphe dans ω_y. La nouvelle équation

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = Z \left\{ f(x, y, \psi . Z) \left[\psi(y) \frac{\partial Z}{\partial y} + \psi'(y) Z \right] + \varphi(x, y, \psi . Z) \right\}$$

est de même forme que l'équation (40); l'intégrale qui se réduit à une constante donnée λ pour $x=0$ est donc holomorphe dans les domaines $\mathfrak{D}_x$ et $\mathfrak{D}'_y$, pourvu que $|\lambda|$ soit assez petit. Il en est donc de même de l'intégrale de l'équation (40) qui se réduit à $\lambda\varphi(y)$ pour $x=0$.

Exemple. — Soit l'équation

$$p+qz=z^2; \tag{41}$$

les équations différentielles des caractéristiques sont ici

$$\frac{dy}{dx}=z, \qquad \frac{dz}{dx}=z^2,$$

et les intégrales qui, pour $x=0$, ont les valeurs initiales $y=y_0$, $z=\lambda\varphi(y_0)$ sont données par les formules

$$\left\{\begin{aligned} y &= y_0-\mathrm{Log}[1-\lambda x\varphi(y_0)],\\ z &= \frac{\lambda\varphi(y_0)}{1-\lambda x\varphi(y_0)}. \end{aligned}\right. \tag{42}$$

Supposons que les variables x et y_0 restent dans des cercles de rayons R et R' décrits de l'origine pour centre dans les plans de ces deux variables respectivement. La fonction $\varphi(y)$ étant supposée holomorphe dans le cercle de rayon R', soit m une limite supérieure du module de $\varphi(y)$ dans ce domaine. Soit K un nombre positif inférieur à l'unité; les formules (42) montrent bien, conformément à la théorie générale, que y et z sont des fonctions holomorphes des variables x, y_0 et λ pourvu que l'on ait

$$|x|\leqq \mathrm{R}, \qquad |y_0|\leqq \mathrm{R}', \qquad |\lambda|\leqq\frac{\mathrm{K}}{m\mathrm{R}}.$$

On aura l'intégrale de l'équation (41) qui se réduit à $\lambda\varphi(y)$ pour $x=0$ en éliminant y_0 entre les deux équations (42). On tire de la dernière

$$\lambda\varphi(y_0)=\frac{z}{1+xz},$$

et, en portant cette valeur de $\lambda\varphi(y_0)$ dans la première équation, on a

$$y_0 = y - \mathrm{Log}(1 + xz);$$

l'intégrale cherchée satisfait donc à la relation

$$z = \frac{\lambda\varphi[y - \mathrm{Log}(1+xz)]}{1 - \lambda x\varphi[y - \mathrm{Log}(1+xz)]} = \lambda\Phi(x, y, z, \lambda).$$

La fonction $\varphi[y - \mathrm{Log}(1 + xz)]$ est une fonction holomorphe de x, y, z, lorsque les modules de ces variables satisfont aux inégalités

$$|x| \leqq \mathrm{R}, \qquad |y| \leqq \mathrm{R}' - \varepsilon, \qquad |z| < h,$$

ε étant un nombre positif inférieur à R', et h un nombre positif qu'il serait facile de préciser; si de plus le module de λ est inférieur à K, on voit que la fonction $\Phi(x, y, z, \lambda)$ est holomorphe dans le domaine précédent. La racine de cette équation, qui est nulle pour $\lambda = 0$, est donc elle-même une fonction holomorphe des variables x et y dans les cercles de rayons R et $\mathrm{R}' - \varepsilon$, pourvu que $|\lambda|$ soit inférieur à un nombre positif convenable (théorème III).

19. Il est clair que les résultats du n° 16 peuvent être généralisés. Considérons un système de $p + q$ équations différentielles du premier ordre à $p + q$ inconnues $y_1, y_2, \ldots, y_p, z_1, z_2, \ldots, z_q$,

$$(43)\qquad \begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = \mathrm{F}_1, & \dfrac{dy_2}{dx} = \mathrm{F}_2, & \ldots, & \dfrac{dy_p}{dx} = \mathrm{F}_p, \\[2ex] \dfrac{dz_1}{dx} = \Phi_1, & \dfrac{dz_2}{dx} = \Phi_2, & \ldots, & \dfrac{dz_q}{dx} = \Phi_q, \end{cases}$$

dont les seconds membres sont des fonctions holomorphes de x, des $p + q$ inconnues $y_1, y_2, \ldots, y_p, z_1, z_2, \ldots, z_q$ et en outre de r paramètres $\mu_1, \mu_1, \ldots, \mu_r$, lorsque la variable x décrit un domaine *simplement connexe* ω_x, renfermant l'origine, que chacune des variables $y_1, y_2, \ldots, y_p$ décrit dans son plan un domaine de forme quelconque $\omega_{y_1}, \omega_{y_2}, \ldots, \omega_{y_p}$, et enfin que les modules de $z_1, z_2, \ldots, z_q$, $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r$ restent inférieurs à certaines limites positives. Nous supposerons de plus que, si l'on ordonne les seconds membres en séries entières suivant les puissances de ces dernières variables z_1, $z_2, \ldots, z_q, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r$, il n'y a pas de termes indépendants, de sorte que, pour les valeurs nulles des paramètres μ_i, les équations (43) admettent les intégrales

$$z_1 = 0, \qquad z_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad z_q = 0, \qquad y_1 = C_1, \qquad \ldots, \qquad y_p = C_p,$$

dépendant de p constantes arbitraires. Pour des valeurs de ces paramètres voisines de zéro, les intégrales qui, pour la valeur o de x, prennent les valeurs initiales

$$(44) \qquad \begin{cases} y_1 = y_1^0, & y_2 = y_2^0, & \ldots, & y_p = y_p^0, \\ z_1 = \lambda_1, & z_2 = \lambda_2, & \ldots, & z_q = \lambda_q, \end{cases}$$

peuvent être développées en séries entières, ordonnées suivant les puissances de $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r$. Ces séries satisfont formellement aux équations (43), et tous leurs coefficients sont des fonctions holomorphes de $x, y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0$, lorsque ces variables restent respectivement dans les domaines $\omega_x, \omega_{y_1}, \ldots, \omega_{y_p}$. En reprenant les raisonnements antérieurs, on arrive au théorème général dont nous donnerons seulement l'énoncé :

Théorème VI. — *Soient $\omega'_{y_1}, \ldots, \omega'_{y_p}$ des domaines intérieurs respectivement aux domaines $\omega_{y_1}, \omega_{y_2}, \ldots, \omega_{y_p}$, dans les plans des variables $y_1, y_2, \ldots, y_p$. A ce système de domaines on peut associer un nombre positif η tel que les intégrales du système* (43), *qui, pour $x = 0$, prennent les valeurs initiales* (44), *soient des fonctions holomorphes de x, y_1^0, $y_2^0, \ldots, y_p^0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r$, lorsque les variables x, y_1^0, $y_2^0, \ldots, y_p^0$ restent respectivement dans les domaines $\omega_x, \omega'_{y_1}, \ldots, \omega'_{y_p}$, et que les modules de $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r$ ne dépassent pas le nombre positif η.*

On pourrait d'ailleurs généraliser encore cet énoncé en définissant de la façon la plus générale (n° 4) le domaine de variabilité du système des variables complexes $(y_1^0, y_2^0, \ldots, y_p^0)$.

III.

20. Le théorème de M. Poincaré ne peut être étendu sans modification aux équations aux dérivées partielles. Prenons par exemple l'équation

$$(45)\qquad \frac{\partial z}{\partial x} = y^2\frac{\partial z}{\partial y} + yz + \lambda + \ldots,$$

les termes non écrits contenant des puissances de λ supérieures à la première, et cherchons à développer suivant les puissances de λ l'intégrale de cette équation qui est nulle pour $x = 0$,

$$(46)\qquad z = \varphi_1(x, y)\lambda + \varphi_2(x, y)\lambda^2 + \ldots.$$

Le coefficient $\varphi_1(x, y)$ de λ doit satisfaire à l'équation

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = y^2\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + y\varphi_1 + 1$$

et s'annuler pour $x = 0$, quelle que soit la valeur de y.

On trouve aisément, en intégrant l'équation précédente, que cette intégrale a pour expression

$$\varphi_1 = -\frac{1}{y}\operatorname{Log}(1 - xy).$$

On voit donc, quels que soient les coefficients des autres puissances de λ, que le développement (46) ne peut représenter une fonction holomorphe de x et de y dans un domaine composé de deux cercles de rayons R et R′ respectivement, décrits de l'origine pour centre dans les plans des deux variables, si l'on a $RR' > 1$.

D'un autre côté, il est facile de s'assurer que l'équation obtenue en faisant $\lambda = 0$ dans l'équation (45),

$$(45)'\qquad p = y^2 q + yz,$$

n'admet aucune intégrale holomorphe dans le domaine précédent autre que $z = 0$. En effet, cherchons à satisfaire à cette équation par une série entière

$$z = \sum a_{mn} x^m y^n;$$

on en déduit

$$p = \sum m a_{mn} x^{m-1} y^n,$$

$$q = \sum n a_{mn} x^m y^{n-1}.$$

Soient $n = 0$, $m > 0$; tous les termes indépendants de y dans p doivent disparaître; on doit donc avoir

$$a_{m0} = 0 \qquad \text{pour} \qquad m > 0.$$

Supposons $n > 0$, $m > 0$. En égalant les coefficients de $x^{m-1} y^n$ dans les deux membres de l'équation (45)', on est conduit à la relation de récurrence

$$m a_{mn} = (n-1) a_{m-1,n-1} + a_{m-1,n-1} = n a_{m-1,n-1},$$

qui permet de diminuer les deux indices m et n de l'unité.

Cela étant, plusieurs cas sont à distinguer :

Premier cas. — Soit $m > n$. En diminuant les deux indices de l'unité n fois de suite, on sera ramené au coefficient $a_{m-n,0}$, qui est nul, d'après ce qu'on a remarqué tout à l'heure. On a donc

(I) $$a_{mn} = 0, \qquad \text{si} \qquad m > n.$$

Deuxième cas. — Soit $m = n$. La formule de récurrence donne

$$a_{mm} = a_{m-1,n-1},$$

et par suite

(II) $$a_{mm} = a_{00}, \qquad \textit{quel que soit } m.$$

Troisième cas. — Soit $m < n$. Posons $n = m + p$; la formule de récurrence peut s'écrire

$$m a_{m,m+p} = (m+p) a_{m-1,m+p-1}.$$

On en déduit successivement

$$
\begin{aligned}
a_{1,p+1} &= (p+1)a_{0,p},\\
a_{2,p+2} &= \frac{p+2}{2}a_{1,p+1},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
a_{m,m+p} &= \frac{m+p}{m}a_{m-1,m+p-1}
\end{aligned}
$$

et, par suite,

$$a_{m,m+p} = \frac{(p+1)(p+2)\dots(p+m)}{1.2\dots m}a_{0,p}.$$

On a donc

$$\text{(III)} \qquad a_{mn} = \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{1.2\dots m}a_{0,n-m}, \qquad \text{si} \qquad n > m.$$

D'après cela, si l'on dispose les termes de la série double suivant les cases d'un échiquier rectangulaire indéfini vers la droite et vers le bas, de façon que le terme $a_{mn}x^m y^n$ soit dans la case qui est comprise dans la colonne de rang m et dans la ligne de rang n, tous les termes situés au-dessus de la diagonale principale seront nuls. Si l'on fait la somme des autres termes parallèlement à la diagonale principale, on a pour le coefficient de a_{00} la série

$$1 + xy + (xy)^2 + \dots + (xy)^m + \dots,$$

pour le coefficient de a_{01} la série

$$y[1 + 2xy + 3(xy)^2 + \dots],$$

et en général le coefficient de $a_{0,n-m}$ est égal à y^{n-m} multiplié par une série entière en xy qui n'est autre que le développement de

$$(1 - xy)^{-(n-m+1)},$$

par la formule du binome. Par conséquent, la série double ne peut être convergente dans un domaine pour lequel on aurait $|xy| > 1$, à moins que tous les coefficients a_{00}, a_{01}, ... ne soient nuls.

On aurait pu d'ailleurs prévoir ce résultat sans aucun calcul, en observant que l'intégrale générale de l'équation $(45)'$ est $z = \frac{1}{y}\varphi\left(\frac{y}{xy-1}\right)$, φ désignant une fonction arbitraire.

21. Ces exemples, si élémentaires qu'ils soient, suffisent pour montrer qu'on ne peut étendre immédiatement aux équations aux dérivées partielles les théorèmes établis par M. Poincaré pour les équations différentielles. Il est aisé d'en voir la raison. Plaçons-nous encore dans un cas simple, et considérons une équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$p = \mathrm{F}(x, y, z, q, \lambda),$$

admettant, pour $\lambda = 0$, la solution $z = 0$. Nous supposerons que le second membre peut être développé en série entière ordonnée suivant les puissances de z, q, λ, dont les coefficients sont des fonctions holomorphes des variables x et y lorsque ces variables décrivent respectivement dans leurs plans deux domaines ω_x et ω_y

$$(47) \qquad p = \mathrm{A}z + \mathrm{B}q + \mathrm{C}\lambda + \ldots + \sum \mathrm{P}_{\alpha\beta\gamma} z^\alpha q^\beta \lambda^\gamma + \ldots,$$

et que la série (47) est convergente tant que les variables x et y restent dans les domaines ω_x et ω_y, pourvu que les modules de z, q, λ ne dépassent pas certaines limites positives. Cherchons à développer suivant les puissances de λ l'intégrale qui est nulle pour $x = a$, a étant un point du domaine ω_x,

$$(48) \qquad z = \varphi_1(x, y)\lambda + \varphi_2(x, y)\lambda^2 + \ldots + \varphi_n(x, y)\lambda^n + \ldots;$$

il faut pour cela déterminer d'abord une série de la forme (48) satisfaisant formellement à l'équation (47), et dont tous les coefficients $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$ sont des fonctions de x et de y, qui s'annulent pour $x = a$, quel que soit y. En substituant ce développement (48) à la place de z dans l'équation (47), et en égalant les coefficients des mêmes puissances de λ dans les deux membres, on a, pour déterminer $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$, une suite d'équations linéaires aux dérivées partielles

$$(49)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x} = A\varphi_1 + B\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y} + C, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \dfrac{\partial\varphi_n}{\partial x} = A\varphi_n + B\dfrac{\partial\varphi_n}{\partial y} + R_n, \end{cases}$$

R_n ne dépendant que de $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$, de leurs dérivées par rapport à y et des coefficients de la série (47). La fonction φ_1 en particulier est déterminée par l'équation

$$(50)\qquad \frac{\partial\varphi_1}{\partial x} = A\varphi_1 + B\frac{\partial\varphi_1}{\partial y} + C,$$

jointe à la condition initiale

$$\varphi_1 = 0 \qquad \text{pour} \qquad x = a.$$

Cette équation admet bien une intégrale satisfaisant à la condition initiale, intégrale qui est holomorphe lorsque la variable y reste dans un domaine ω'_y, intérieur à ω_y, pourvu que $|x - a|$ ne dépasse pas une certaine limite; mais, en général, cette intégrale ne sera pas holomorphe lorsque les variables x et y décriront respectivement les domaines ω_x et ω_y. C'est cette circonstance qui établit une différence essentielle, pour la question qui nous occupe, entre les équations différentielles et les équations aux dérivées partielles.

Il y a cependant un cas où l'on peut affirmer que l'intégrale de l'équation (50), qui est nulle pour $x = a$, est holomorphe dans l'ensemble des domaines (ω_x, ω_y) : c'est le cas où l'on a

$$(51)\qquad B = 0,$$

et où le domaine ω_x est *simplement connexe*.

Alors, en effet, l'équation (50) se réduit à une équation différentielle linéaire à une seule variable indépendante x,

$$(50)'\qquad \frac{\partial\varphi_1}{\partial x} = A\varphi_1 + C;$$

si les coefficients A et C sont holomorphes lorsque la variable x décrit le domaine simplement connexe $\mathfrak{D}_x$, la variable y étant comprise dans $\mathfrak{D}_y$, l'intégrale de l'équation $(50)'$ qui est nulle pour $x=a$ s'obtient par deux quadratures

$$\varphi_1 = e^{\int_a^x \mathrm{A}\,dx} \times \int_a^x \mathrm{C} e^{-\int_a^x \mathrm{A}\,dx} dx,$$

et il est clair que cette intégrale est une fonction holomorphe des deux variables x et y dans l'ensemble des deux domaines $(\mathfrak{D}_x, \mathfrak{D}_y)$.

Les coefficients suivants $\varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n, \ldots$ sont aussi des fonctions holomorphes dans les mêmes domaines; car la fonction φ_n s'obtient par l'intégration d'une équation de même forme que l'équation $(50)'$,

$$\frac{\partial \varphi_n}{\partial x} = \mathrm{A}\varphi_n + \mathrm{R}_n.$$

Si les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$ sont holomorphes dans les domaines $(\mathfrak{D}_x, \mathfrak{D}_y)$, il en est de même de R_n et par suite de φ_n.

En résumé, *lorsque le coefficient* $\mathrm{B}(x, y)$ *de* q *dans l'équation* (47) *est nul, et que le domaine* $\mathfrak{D}_x$ *est simplement connexe, on peut obtenir une série de la forme* (48), *satisfaisant formellement à l'équation* (47), *et dont tous les coefficients* $\varphi_n(x, y)$ *sont des fonctions holomorphes de* x *et de* y *dans l'ensemble des domaines* $(\mathfrak{D}_x, \mathfrak{D}_y)$, *nulles pour* $x = a$.

22. Il nous reste maintenant à étudier la convergence de cette série. Au lieu d'établir directement que cette série est convergente, nous allons établir la proposition suivante d'où la convergence se déduit immédiatement :

Théorème VII. — *Soient* $\mathfrak{D}'_x$, $\mathfrak{D}'_y$ *deux domaines intérieurs respectivement aux deux domaines* $\mathfrak{D}_x$ *et* $\mathfrak{D}_y$. *On peut leur adjoindre un nombre positif* η *tel que l'intégrale de l'équation* (47), *qui est nulle pour* $x = a$, *soit une fonction holomorphe des variables* x, y, λ, *lorsque les variables* x *et* y *décrivent respectivement les domaines* $\mathfrak{D}'_x$, $\mathfrak{D}'_y$, *pourvu que le module de* λ *ne dépasse pas le nombre* η.

Cette intégrale peut, d'après la méthode de Cauchy, être considérée comme le lieu des multiplicités ponctuelles caractéristiques issues des différents éléments de la multiplicité M_1,

$$x = a, \qquad y = y_0, \qquad z_0 = 0, \qquad p_0 = F_0, \qquad q_0 = 0.$$

Les équations différentielles de ces caractéristiques

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{-\dfrac{\partial F}{\partial q}} = \frac{dz}{F - q\dfrac{\partial F}{\partial q}} = \frac{dq}{\dfrac{\partial F}{\partial y} + q\dfrac{\partial F}{\partial z}}$$

sont de la forme

$$(52) \qquad \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f_1(x, y, z, q, \lambda), \\[2mm] \dfrac{dz}{dx} = f_2(x, y, z, q, \lambda), \\[2mm] \dfrac{dq}{dx} = f_3(x, y, z, q, \lambda); \end{cases}$$

f_1, f_2, f_3 étant des fonctions de même nature que la fonction $F(x, y, z, q, \lambda)$, c'est-à-dire des séries entières ordonnées suivant les puissances de z, q, λ, dont les coefficients sont des fonctions holomorphes des variables x et y, dans les domaines $\mathcal{D}_x$ et $\mathcal{D}_y$.

Ces séries sont convergentes dans les mêmes domaines que la première, et, en vertu de la condition (51), elles ne renferment aucun terme indépendant de z, q, λ. Pour $\lambda = 0$, ces équations admettent donc une famille d'intégrales dépendant d'une constante arbitraire

$$z = 0, \qquad q = 0, \qquad y = C.$$

D'après un théorème général établi plus haut (n° 19), les intégrales de ce système (52) qui, pour $x = a$, prennent respectivement les valeurs $y = y_0$, $z = 0$, $q = 0$, sont des fonctions holomorphes des variables x, y_0, λ, lorsque les variables x et y_0 décrivent respectivement deux domaines $\mathcal{D}'_x$ et $\mathcal{D}'_y$ intérieurs à $\mathcal{D}_x$ et à $\mathcal{D}_y$, pourvu que le module de λ reste inférieur à un nombre positif assez petit. On peut développer ces intégrales suivant les puissances entières de λ, ce qui donne pour y et z des formules que l'on peut écrire

$$(53) \qquad y = y_0 + \lambda P(x, y_0, \lambda), \qquad z = \lambda Q(x, y_0, \lambda),$$

P et Q étant des fonctions holomorphes de x, y_0, λ dans le domaine précédent. L'élimination du paramètre y_0 entre ces deux relations (*voir* n° 17) conduit à l'équation de l'intégrale demandée

$$z = \lambda \mathfrak{P}(x, y, \lambda), \tag{54}$$

$\mathfrak{P}(x, y, \lambda)$ désignant une fonction holomorphe des variables x, y et λ, lorsque x décrit le domaine ω'_x, et y un domaine ω''_y intérieur à ω'_y, pourvu que $|\lambda|$ ne dépasse pas un nombre positif η, choisi convenablement.

Comme l'on peut prendre pour ω'_x et ω''_y deux domaines quelconques intérieurs à ω_x et à ω_y, le théorème est établi. L'intégrale peut évidemment être développée en série entière ordonnée suivant les puissances de λ, et ce développement est nécessairement identique avec la série (48).

23. La condition $B = 0$ exprime que les caractéristiques de la surface intégrale $z = 0$, correspondant à la valeur $\lambda = 0$ du paramètre, sont les droites $y =$ const.

Cela posé, étant donnée une équation aux dérivées partielles

$$p = f(x, y, z, q), \tag{55}$$

admettant l'intégrale particulière $z = 0$, si les caractéristiques de cette intégrale particulière sont les droites $y =$ const., on pourra appliquer à cette équation le théorème précédent, et démontrer l'existence d'intégrales infiniment voisines de l'intégrale connue $z = 0$, et holomorphes dans des domaines connus *a priori*. En effet, si l'on développe la fonction $f(x, y, z, q)$ suivant les puissances de z et de q, il n'y aura pas de terme indépendant de z et de q, ni de terme de la forme $B(x, y)q$. Supposons, pour fixer les idées, que la fonction $f(x, y, z, q)$ soit holomorphe lorsque les variables x et y décrivent respectivement deux domaines ω_x et ω_y, dont le premier est simplement connexe, pourvu que $|z|$ et $|q|$ soient inférieurs à un nombre positif convenable. Soit d'autre part $\varphi(y)$ une fonction quelconque de y, holomorphe dans ω_y. En posant, dans l'équation (55),

$$z = \lambda \varphi(y) + Z,$$

on sera conduit à une nouvelle équation de la forme (47) pour laquelle les conditions énoncées seront satisfaites, et l'on pourra développer, suivant les puissances du paramètre λ, l'intégrale de l'équation en Z qui est nulle pour $x = a$.

Par conséquent, *l'intégrale de l'équation* (55), *qui se réduit à* $\lambda\varphi(y)$ *pour* $x = a$, *est une fonction holomorphe de* x *et de* y *lorsque ces variables décrivent respectivement deux domaines quelconques* $\mathcal{D}'_x$ *et* $\mathcal{D}'_y$, *intérieurs à* $\mathcal{D}_x$ *et* $\mathcal{D}_y$, *pourvu que* $|\lambda|$ *soit suffisamment petit.*

Plus généralement, supposons que l'on connaisse une intégrale *non singulière* d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$F(x, y, z, p, q) = 0, \tag{56}$$

et que l'on puisse déterminer les courbes caractéristiques de cette intégrale. Supposons les coordonnées d'un point de cette surface exprimées en fonction de deux paramètres variables u et v, les courbes $v =$ const. étant les caractéristiques

$$x = \varphi(u, v), \qquad y = \psi(u, v), \qquad z = \pi(u, v);$$

cela étant, faisons le changement de variables défini par les formules

$$x = \varphi(X, Y), \qquad y = \psi(X, Y), \qquad z = \pi(X, Y) + Z.$$

L'équation (56) est remplacée par une nouvelle équation aux dérivées partielles

$$\Phi(X, Y, Z, P, Q) = 0,$$

qui admet l'intégrale particulière $Z = 0$. Pour tous les éléments de cette intégrale on a $\dfrac{\partial\Phi}{\partial Q} = 0$, puisque les caractéristiques sont les droites $Y =$ const., mais on ne peut avoir en même temps $\dfrac{\partial\Phi}{\partial P} = 0$, puisque, par hypothèse, ce n'est pas une intégrale singulière.

Si l'on développe l'équation suivant les puissances de Z, P, Q, il y aura donc un terme du premier degré en P et, en divisant par le coefficient de ce terme, on pourra écrire l'équation

$$P = a_{100}Z + a_{200}Z^2 + a_{110}ZP + \ldots,$$

les termes non écrits étant au moins du second degré en Z, P, Q. On en déduira pour P un développement suivant les puissances de Z et de Q de la forme précédente (n° 6), c'est-à-dire ne contenant pas de terme tel que $\Phi(X, Y)Q$, et l'on pourra appliquer à cette nouvelle équation le théorème précédent.

24. Il est clair que la méthode qui vient d'être développée pour une équation à deux variables indépendantes, et qui repose sur la théorie des caractéristiques, peut être étendue à une équation aux dérivées partielles du premier ordre à un nombre quelconque de variables indépendantes. Soit

$$(57) \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = \mathrm{F}(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, z; q_1, q_2, \ldots, q_n, \lambda), \qquad q_i = \frac{\partial z}{\partial y_i}$$

une équation aux dérivées partielles à $(n+1)$ variables indépendantes x, y_1, y_2, ..., y_n, dont le second membre est une fonction holomorphe des variables qui y figurent lorsque les variables x, y_1, y_2, ..., y_n décrivent respectivement dans leurs plans des domaines ω_x, ω_{y_1}, ..., ω_{y_n} dont le premier ω_x est simplement connexe, et que les modules des autres variables, z, q_i, λ, restent inférieurs à un nombre positif ρ.

La fonction F peut être développée en série entière ordonnée suivant les puissances de z, q_1, ..., q_n, λ, dont les coefficients sont des fonctions holomorphes des variables x, y_1, ..., y_n, lorsqu'elles restent dans les domaines précédents.

Nous supposons en outre que ce développement ne renferme aucun terme indépendant des variables z, q_i, λ, et que les variables q_i ne figurent pas dans les termes du premier degré.

Ces conditions expriment que, pour la valeur $\lambda = 0$ du paramètre, l'équation (57) admet l'intégrale particulière $z = 0$, et que les équations des multiplicités caractéristiques de cette intégrale particulière sont

$$y_1 = C_1, \qquad y_2 = C_2, \qquad \ldots, \qquad y_n = C_n,$$

C_1, C_2, ..., C_n désignant des constantes arbitraires.

Nous dirons pour abréger que *l'intégrale particulière $z = 0$ est rapportée à ses lignes caractéristiques*.

Cela étant, on peut se proposer de développer suivant les puissances de λ l'intégrale de l'équation (57) qui se réduit à zéro pour une valeur particulière $x = a$ du domaine $\mathcal{D}_x$.

Les coefficients de ce développement,

$$z = \varphi_1 \lambda + \varphi_2 \lambda^2 + \ldots + \varphi_n \lambda^n + \ldots, \tag{58}$$

s'obtiennent encore de proche en proche, d'après la forme de F, par l'intégration d'équations différentielles linéaires de la forme

$$\frac{\partial \varphi_n}{\partial x} = \mathrm{A}\varphi_n + \mathrm{B},$$

A et B étant des fonctions holomorphes des variables x, y_1, y_2, ..., y_n dans les domaines $\mathcal{D}_x$, $\mathcal{D}_{y_1}$, ..., $\mathcal{D}_{y_n}$.

Pour prouver la convergence du développement (58), qui satisfait formellement à l'équation (57), on suivra la même méthode que plus haut en observant que l'intégrale cherchée est le lieu des multiplicités ponctuelles caractéristiques issues des différents éléments de la multiplicité

$$x = a, \qquad z = 0, \qquad y_1 = y_1^0, \qquad \ldots, \qquad y_n = y_n^0, \qquad q_i = 0, \qquad p_0 = \mathrm{F}_0,$$

quand on fait varier y_1^0, y_2^0, ..., y_n^0. Le raisonnement est le même qu'au n° 22, et l'on en conclut la proposition générale suivante :

THÉORÈME VIII. — *Soient $\mathcal{D}'_x$, $\mathcal{D}'_{y_1}$, ..., $\mathcal{D}'_{y_n}$ des domaines intérieurs respectivement aux domaines $\mathcal{D}_x$, $\mathcal{D}_{y_1}$, ..., $\mathcal{D}_{y_n}$. A ces domaines on peut faire correspondre un nombre positif η tel que l'intégrale de l'équation (57), qui s'annule pour $x = a$, soit une fonction holomorphe des variables x, y_1, ..., y_n, λ, lorsque les variables x, y_1, ..., y_n décrivent respectivement les domaines $\mathcal{D}'_x$, $\mathcal{D}'_{y_1}$, ..., $\mathcal{D}'_{y_n}$, et que le module de λ reste inférieur à η.*

Le développement (58) est donc convergent lorsque l'on a $|\lambda| < \eta$, quelles que soient les valeurs des variables x, y_1, y_2, ..., y_n dans les domaines précédents.

Remarquons une fois pour toutes que l'on pourrait prendre pour F une fonction dépendant d'un nombre quelconque de paramètres, et aussi définir de la façon la plus générale [1] le domaine de variabilité du système de variables $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

25. Étant donnée une équation du premier ordre

$$p = f(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, z, q_1, \ldots, q_n), \tag{59}$$

qui admet l'intégrale particulière $z = 0$, si les multiplicités caractéristiques situées sur cette intégrale particulière sont représentées par les équations

$$y_1 = C_1, \quad \ldots, \quad y_n = C_n,$$

on peut introduire un paramètre dans cette équation en posant

$$z = Z + \lambda \Phi(y_1, y_2, \ldots, y_n),$$

ce qui conduit à une équation de la forme (57). On peut développer suivant les puissances de λ l'intégrale de la nouvelle équation qui s'annule pour $x = a$, et par suite développer suivant les puissances de λ l'intégrale de l'équation (59) qui se réduit à

$$\lambda \Phi(y_1, y_2, \ldots, y_n),$$

pour $x = a$. Le théorème général qui précède fournit un domaine de convergence assuré pour cette série.

On démontre, comme plus haut, que toute équation aux dérivées partielles du premier ordre, dont on connaît une intégrale *non singulière*, peut être ramenée à l'équation (59), pourvu que l'on sache déterminer les multiplicités caractéristiques sur cette intégrale particulière. On pourra donc étudier les intégrales infiniment voisines de celle-là.

26. Le théorème général du n° 24 peut être établi par une autre méthode, indépendante de la théorie des caractéristiques, et qui sera étendue aux équations du second ordre.

---

(1) Cette extension est nécessaire quand on veut appliquer le théorème général au domaine réel. Je reviendrai sur ce point dans un prochain travail.

Remarquons d'abord que l'on peut supposer les domaines $\mathcal{D}_{y_1}$, $\mathcal{D}_{y_2}$, ..., $\mathcal{D}_{y_n}$ simplement connexes. Il est clair en effet que chacun de ces domaines peut être décomposé en un nombre *fini* de domaines simplement connexes. Si le théorème est établi quand tous ces domaines sont simplement connexes, il sera bien facile de passer de là au cas général, et je n'insisterai pas là-dessus. Rappelons aussi que le domaine $\mathcal{D}_x$ est toujours supposé simplement connexe. Les domaines $\mathcal{D}_x$, $\mathcal{D}_{y_1}$, ..., $\mathcal{D}_{y_n}$ étant simplement connexes, on peut les appliquer conformément sur un cercle de rayon un, de façon que le point $z = a$ corresponde à l'origine $x' = 0$. Cela revient à dire que l'on peut trouver $(n + 1)$ fonctions

$$(60) \qquad x = \psi(x'), \qquad y_i = \psi_i(y'_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

holomorphes dans les cercles de rayon un décrits des points $x = 0$, $y'_i = 0$, comme centres, et telles que, lorsque la variable y'_i, par exemple, décrit ce cercle, le point y_i décrit le domaine $\mathcal{D}_{y_i}$, de façon qu'à un point de ce cercle corresponde un point de $\mathcal{D}_{y_i}$ et inversement. Si l'on fait le changement de variables défini par les formules (60) dans l'équation (57), on doit remplacer les dérivées

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \quad q_1, \quad q_2, \quad \ldots, \quad q_n,$$

par

$$\frac{\partial z}{\partial x'}\frac{1}{\psi'(x')}, \quad \frac{\partial z}{\partial y'_1}\frac{1}{\psi'_1(y'_1)}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial z}{\partial y'_n}\frac{1}{\psi'_n(y'_n)},$$

respectivement. Mais les dérivées $\psi'(x')$, $\psi'_i(y'_i)$ sont holomorphes et ne peuvent s'annuler dans le cercle de rayon un, et l'équation (57) se change en une équation de même forme

$$(57)' \qquad \frac{\partial z}{\partial x'} = \mathfrak{F}(x', y'_1, \ldots, y'_n, z, q'_1, \ldots, q'_n, \lambda), \qquad q'_i = \frac{\partial z}{\partial y'_i},$$

où le second membre est une fonction holomorphe des variables qui y figurent, dans le domaine défini par les inégalités

$$|x'| < 1, \qquad |y'_i| < 1, \qquad |z| < \rho, \qquad |q'_i| < \rho, \qquad |\lambda| < \rho.$$

Pour ne pas multiplier les notations, nous supprimerons les lettres accentuées, et nous écrirons l'équation transformée

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \mathcal{F}(x, y_1, \ldots, y_n; z, q_1, q_2, \ldots, q_n, \lambda). \tag{61}$$

La fonction $\mathcal{F}$ est développable en série entière ordonnée suivant les puissances de toutes les variables $x, y_1, y_2, \ldots, y_n; z, q_1, q_2, \ldots, q_n, \lambda$, et cette série est convergente lorsque les modules des $n+1$ variables x, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sont inférieurs à l'unité, et les modules des autres variables $z, q_1, q_2, \ldots, q_n, \lambda$ inférieurs à un nombre positif ρ. D'après les propriétés de la fonction F, un terme quelconque de cette série est divisible par z, λ, ou par l'un des produits $q_i q_k$, i et k étant deux quelconques des nombres $1, 2, \ldots, n$. La proposition qu'il s'agit de démontrer peut alors s'énoncer ainsi :

Étant donnés $n+1$ nombres positifs quelconques inférieurs à l'unité θ, $\theta_1, \ldots, \theta_n$, on peut leur associer un autre nombre positif η tel que l'intégrale de l'équation (61), *qui se réduit à zéro pour $x = 0$ soit une fonction holomorphe des variables $x, y_1, y_2, \ldots, y_n, \lambda$, lorsque les modules de ces variables restent inférieurs respectivement aux nombres $\theta, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n, \eta$.*

L'équation (61) admet bien une intégrale satisfaisant à cette condition, qui est holomorphe dans le voisinage des valeurs $x = y_i = \lambda = 0$, et cette intégrale peut être développée en série entière *ordonnée suivant les puissances de toutes les variables $x, y_1, y_2, \ldots, y_n, \lambda$*, dont les coefficients se déduisent des coefficients de la série $\mathcal{F}$ par les seules opérations d'addition et de multiplication. Pour avoir une limite inférieure du domaine de convergence de cette série, on peut donc appliquer la méthode habituelle des fonctions majorantes.

Nous supposerons que la fonction $\mathcal{F}$ reste continue lorsque les modules des variables x, y_i, q_k, λ prennent leurs valeurs limites, 1 ou ρ; cela ne restreint pas la généralité, car on aurait pu évidemment appliquer conformément les domaines $\omega_x, \omega_{y_1}, \ldots, \omega_{y_n}$, sur des cercles de rayon un peu supérieurs à l'unité. Comme chacun des termes de $\mathcal{F}$ contient en facteur z, λ, ou un des produits $q_i q_k$, on peut prendre pour $\mathfrak{F}$ une fonction majorante de la forme

$$\frac{M(z+\lambda+\Sigma q_i q_k)}{(1-x)(1-y_1)\ldots(1-y_n)\left(1-\frac{\lambda}{\rho}\right)\left(1-\frac{z}{\rho}\right)\left(1-\frac{\Sigma q_i}{\rho}\right)} \qquad (i, k=1, 2, \ldots, n).$$

Si l'on remplace dans cette expression q_i par

$$(62) \qquad Q_i = \frac{q_i}{(1-x)(1-y_1)\ldots(1-y_{i-1})(1-y_{i+1})\ldots(1-y_n)},$$

et qu'on la multiplie par $\frac{1}{1-x}$, il est clair que la nouvelle expression obtenue,

$$\Phi(x, y_1, \ldots) = \frac{M(z+\lambda+\Sigma Q_i Q_k)}{(1-x)^2(1-y_1)\ldots(1-y_n)\left(1-\frac{\lambda}{\rho}\right)\left(1-\frac{z}{\rho}\right)\left(1-\frac{\Sigma Q_i}{\rho}\right)},$$

est, *a fortiori*, majorante pour $\mathfrak{F}$, et le théorème énoncé sera établi d'une façon générale si on le démontre pour l'équation particulière

$$(63) \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = \Phi(x, y_1, \ldots, y_n;\, z, q_1, \ldots, q_n, \lambda).$$

27. Posons

$$(64) \qquad 1-u = (1-x)(1-y_1)\ldots(1-y_n),$$

et cherchons une intégrale de l'équation (63) ne dépendant que de u. De l'équation

$$z = \varphi(u),$$

on tire

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \varphi'(u)(1-y_1)\ldots(1-y_n) = \frac{(1-u)\varphi'(u)}{1-x},$$

$$q_i = \frac{\partial z}{\partial y_i} = \varphi'(u)(1-x)(1-y_1)\ldots(1-y_{i-1})(1-y_{i+1})\ldots(1-y_n)$$
$$= \frac{(1-u)\varphi'(u)}{1-y_i},$$

ou, en tenant compte des formules (62),

$$Q_i = \varphi'(u).$$

L'équation (63) devient alors

$$(65)\qquad \varphi'(u)=\frac{\mathrm{M}[\varphi(u)+\lambda+\mathrm{N}\varphi'^2(u)]}{(1-u)^2\left(1-\dfrac{\lambda}{\rho}\right)\left[1-\dfrac{\varphi(u)}{\rho}\right]\left[1-\dfrac{n\varphi'(u)}{\rho}\right]},\qquad \mathrm{N}=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Nous ferons une dernière transformation en posant

$$(66)\qquad 1-u=(1-t)^n,$$

ce qui donne

$$\varphi'(u)=\frac{\varphi'(t)}{n(1-t)^{n-1}},$$

et l'équation (65) devient

$$(67)\qquad \frac{1}{n}\varphi'(t)=\frac{\mathrm{M}\left[\varphi+\lambda+\dfrac{\mathrm{N}}{n^2}\dfrac{\varphi'^2(t)}{(1-t)^{2n-2}}\right]}{(1-t)^{n+1}\left(1-\dfrac{\lambda}{\rho}\right)\left(1-\dfrac{\varphi}{\rho}\right)\left[1-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\varphi'(t)}{(1-t)^{n-1}}\right]}.$$

Pour $\lambda=\varphi=0$, cette équation admet la racine simple $\varphi'(t)=0$; on a vu plus haut (n° 5) que la racine qui tend vers zéro est développable en série entière ordonnée suivant les puissances de λ et de φ, dont les coefficients sont des fonctions holomorphes de la variable t dans tout domaine ω_t ne renfermant pas le point $t=1$,

$$(68)\qquad \varphi'(t)=\sum\pi_{mn}\varphi^m\lambda^n.$$

A tout nombre positif ε on peut faire correspondre un autre nombre positif ρ' tel que la série (68) soit convergente pour tous les systèmes de valeurs de t, φ, λ satisfaisant aux conditions

$$|1-t|>\varepsilon,\qquad |\lambda|<\rho',\qquad |\varphi|<\rho'.$$

Cette équation (68) admet l'intégrale particulière $\varphi=0$ pour $t=0$; d'après le théorème général de M. Poincaré, on peut assigner un nombre positif η tel que l'intégrale de l'équation (68), qui se réduit à zéro pour $t=0$, soit une fonction holomorphe des variables t et λ, lorsque la variable t décrit un domaine simplement connexe quelconque ω_t, renfermant l'origine, et situé tout entier en dehors du cercle de rayon ε décrit du point $t = 1$ comme centre, pourvu que le module de λ reste inférieur à η.

Soit

$$Z = \Psi(t, \lambda) \tag{69}$$

cette intégrale; remplaçons-y maintenant t par sa valeur en fonction des variables $x, y_1, \ldots, y_n$, qui est donnée par la formule

$$1 - t = \sqrt[n]{1 - u} = \sqrt[n]{(1-x)(1-y_1)\ldots(1-y_n)}, \tag{70}$$

où l'on prend pour le radical la détermination qui se réduit à l'unité pour $x = y_1 = \ldots = y_n = 0$. Lorsque les variables $x, y_1, \ldots, y_n$ décrivent respectivement les cercles de rayons $\theta, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$, ayant pour centre l'origine, l'argument de chacun des facteurs tel que $1 - x$ ou $1 - y_i$ reste compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$; l'argument de $1 - t$ reste donc lui-même compris entre $-\frac{n+1}{n}\frac{\pi}{2}$ et $\frac{n+1}{n}\frac{\pi}{2}$.

Quant au module, on remarquera que le module du facteur $1 - x$ reste compris entre $1 - \theta$ et $1 + \theta$, tandis que le module de $1 - y_i$ reste compris entre $1 - \theta_i$ et $1 + \theta_i$; le module de $1 - t$ reste donc lui-même compris entre les valeurs extrêmes

$$r_1 = \sqrt[n]{(1-\theta)(1-\theta_1)\ldots(1-\theta_n)} \qquad \text{et} \qquad r_2 = \sqrt[n]{(1+\theta)(1+\theta_1)\ldots(1+\theta_n)}.$$

Il suit de là que, lorsque les variables x, y_i décrivent respectivement les cercles précédents, la variable t reste à l'intérieur d'un domaine simplement connexe limité par deux demi-droites issues du point $t = 1$ et de deux arcs de cercle de rayons r_1 et r_2, ayant le même point pour centre.

On peut supposer que l'on a pris $\varepsilon = r_1$, et par suite la fonction $\Psi(t, \lambda)$, considérée comme fonction des variables $x, y_1, \ldots, y_n, \lambda$, est une fonction holomorphe de ces variables, lorsque leurs modules restent inférieurs respectivement aux nombres $\theta, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n, \eta$.

Cette fonction Z est l'intégrale de l'équation (65) assujettie à s'annuler pour $u = 0$. Si on la développe suivant les puissances de u et de λ, on voit sans peine que tous les coefficients de cette série seront des nombres réels et positifs. Mais cela ne suffit pas pour prouver que tous les coefficients du développement de Z suivant les puissances de $x, y_1, y_2, \ldots, y_n, \lambda$ seront eux-mêmes des nombres réels et positifs, puisqu'il faut remplacer u par son expression

$$u = x + y_1 + \ldots + y_n - (xy_1 + xy_2 + \ldots) + \ldots.$$

Pour établir ce point essentiel, écrivons l'équation (65) sous la forme suivante

$$(71) \qquad U = \frac{M\left[\varphi(u) + \lambda + N\dfrac{U^2}{(1-u)^2}\right]}{(1-u)\left(1-\dfrac{\lambda}{\rho}\right)\left[1-\dfrac{\varphi(u)}{\rho}\right]\left[1-\dfrac{nU}{\rho(1-u)}\right]}$$

en posant $U = (1-u)\varphi'(u)$. Le second membre de cette équation peut être développé en série entière ordonnée suivant les puissances de $x, y_1, y_2, \ldots, y_n\, \lambda, \varphi(u)$, U, dont tous les coefficients sont réels et positifs. Il n'y a en effet qu'à remplacer, dans le second membre de l'équation (71), $\dfrac{1}{1-u}$ par le développement de

$$\frac{1}{(1-x)(1-y_1)\ldots(1-y_n)}.$$

Tous les termes du développement ainsi obtenu contiennent en facteur λ, $\varphi(u)$ ou U^2. On en déduira donc pour U un développement en série entière suivant les puissances des variables $x, y_1, y_2, \ldots, y_n$, $\varphi(u)$, λ, dont tous les coefficients seront réels et positifs, et dont tous les termes seront divisibles par $\varphi(u)$ ou λ (n° 5),

$$U = R[x, y_1, y_2, \ldots, y_n, \varphi(u), \lambda].$$

Cela posé, d'après les expressions des dérivées partielles d'une fonction $\varphi(u)$ par rapport aux variables $x, y_1, y_2, \ldots, y_n$, on voit que la fonction Z satisfait au système d'équations aux différentielles totales

$$(72) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial Z}{\partial x} = \dfrac{R(x, y_1, \ldots, y_n, Z, \lambda)}{1-x}, \\[2ex] \dfrac{\partial Z}{\partial y_i} = \dfrac{R(x, y_1, \ldots, y_n, Z, \lambda)}{1-y_i}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \end{cases}$$

Cette fonction Z se réduit à zéro pour $x = y_1 = \ldots = y_n = 0$, et les équations (72) permettent évidemment de calculer de proche en proche les coefficients du développement de cette intégrale suivant les puissances de x, $y_1, \ldots, y_n$, λ par les seules opérations d'addition et de multiplication. Comme tous les coefficients des seconds membres des équations (72) sont des nombres réels et positifs, il en sera évidemment de même des coefficients obtenus pour le développement de Z.

En rapprochant tous ces résultats, on en conclut que *l'équation* (63) *admet une intégrale particulière*

$$Z(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, \lambda),$$

représentée par une série entière ordonnée suivant les puissances de ces variables x, y_i, λ, *dont tous les coefficients sont des nombres réels et positifs, et qui est convergente pourvu que les modules de ces variables soient inférieurs aux nombres* θ, θ_i, η *respectivement.*

La proposition à démontrer se déduit bien aisément de là. En effet, pour $x = 0$, la fonction Z se réduit à une série entière en $y_1, y_2, \ldots, y_n$, λ, dont tous les coefficients sont réels et positifs, et, par suite, il est clair que les coefficients du développement de l'intégrale qui se réduit à zéro pour $x = 0$ sont inférieurs aux coefficients correspondants de Z.

28. La dernière méthode a l'avantage de s'étendre immédiatement à des systèmes d'équations simultanées du premier ordre de la forme

$$(73) \qquad \frac{\partial z_1}{\partial x} = F_1, \qquad \frac{\partial z_2}{\partial x} = F_2, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial z_p}{\partial x} = F_p,$$

les seconds membres désignant des séries entières ordonnées suivant les puissances des inconnues $z_1, z_2, \ldots, z_p$, de leurs dérivées partielles $\dfrac{\partial z_i}{\partial y_k}$ et d'un paramètre λ, dont les coefficients sont des fonctions holomorphes des variables $x, y_1, \ldots, y_n$, lorsque ces variables décrivent respectivement dans leurs plans des domaines $\mathcal{D}_x, \mathcal{D}_{y_1}, \ldots, \mathcal{D}_{y_n}$, dont le premier, $\mathcal{D}_x$, est simplement connexe. Nous supposons toujours que, pour $\lambda = 0$, les équations (73) admettent les intégrales $z_1 = z_2 = z_3 = \ldots = z_p = 0$.

Si l'on cherche à développer suivant les puissances de λ les intégrales du système (43) qui se réduisent à zéro pour une valeur particulière $x = a$ du domaine $\mathfrak{D}_x$, les coefficients de ces développements sont des fonctions holomorphes des variables $x, y_1, y_2, \ldots, y_n$, dans les mêmes domaines, pourvu que les développements des fonctions $F_1, F_2, \ldots, F_p$ ne renferment aucun terme de la forme $A\frac{\partial z_i}{\partial y_k}$, A étant une fonction différente de zéro des seules variables $x, y_1, y_2, \ldots, y_n$. La convergence des séries ainsi obtenues se démontre de la même façon que dans le cas d'une seule équation.

On remarquera que les équations (73) n'admettent pas, en général, de multiplicités caractéristiques *à une dimension*.

IV.

29. Considérons d'abord une équation linéaire du second ordre rapportée à ses caractéristiques

$$s = Ap + Bq + Cz + D, \tag{74}$$

A, B, C, D étant des fonctions holomorphes des deux variables x et y, lorsque ces variables décrivent respectivement dans leurs plans deux domaines *simplement connexes* $\mathfrak{D}_x$ et $\mathfrak{D}_y$: nous supposerons, pour simplifier les notations, que ces domaines contiennent respectivement les deux points $x = 0$, $y = 0$. Soient, d'autre part, $\varphi(x)$ et $\psi(y)$ deux fonctions holomorphes respectivement dans les deux domaines $\mathfrak{D}_x$ et $\mathfrak{D}_y$, et telles que $\varphi(0) = \psi(0)$. L'équation (74) admet, comme il est bien connu, une intégrale holomorphe dans le voisinage des valeurs $x = 0$, $y = 0$, se réduisant à $\varphi(x)$ pour $y = 0$ et à $\psi(y)$ pour $x = 0$. Nous allons compléter ce résultat en démontrant que *cette intégrale est une fonction holomorphe des variables x, y, lorsque ces variables décrivent respectivement les deux domaines $\mathfrak{D}_x$ et $\mathfrak{D}_y$.*

On peut, pour la démonstration, supposer

$$\varphi(x) = 0, \qquad \psi(y) = 0;$$

en effet, si l'on pose dans l'équation (74)

$$z = Z + \varphi(x) + \psi(y) - \varphi(o),$$

on est conduit à une équation linéaire de même forme, dont les coefficients sont holomorphes dans les mêmes domaines $\mathfrak{D}_x$ et $\mathfrak{D}_y$, et l'intégrale de la nouvelle équation doit se réduire à zéro pour $x = o$, et pour $y = o$.

Les domaines $\mathfrak{D}_x$ et $\mathfrak{D}_y$ étant simplement connexes, on peut les appliquer conformément sur un cercle; ce changement de variables ne modifiant pas la forme de l'équation, on voit qu'il suffit de démontrer la proposition lorsque les domaines $\mathfrak{D}_x$ et $\mathfrak{D}_y$ sont deux cercles de rayon *un* décrits des points $x = o$, ou $y = o$, pour centres.

L'intégrale de l'équation (74), qui se réduit à zéro pour $x = o$ et pour $y = o$, est développable en une série entière en x et y, dont tous les coefficients se déduisent par voie d'addition et de multiplication des coefficients des séries entières qui représentent les fonctions A, B, C, D. Pour trouver une limite du domaine de convergence de ces séries, on peut donc remplacer le second membre de l'équation (74) par une fonction majorante que l'on peut prendre de la forme

$$\frac{M(p + q + z + 1)}{(1 - x)(1 - y)};$$

la fonction

$$\frac{M\left(\frac{p}{1 - y} + \frac{q}{1 - x} + z + 1\right)}{(1 - x)(1 - y)}$$

sera *a fortiori* majorante, et par suite l'intégrale de l'équation (74), qui se réduit à zéro pour $x = o$, et pour $y = o$, est représentée par une série entière qui est certainement convergente dans le même domaine que la série entière représentant l'intégrale de l'équation auxiliaire

$$s = \frac{M\left(\frac{p}{1 - y} + \frac{q}{1 - x} + z + 1\right)}{(1 - x)(1 - y)}, \tag{75}$$

satisfaisant aux mêmes conditions initiales. Cette dernière série est elle-même convergente dans le même domaine que toute autre série entière, *à coefficients réels et positifs*, qui représente une intégrale de la même équation (75). Cela étant, posons

$$u = x + y - xy, \tag{76}$$

et cherchons une intégrale de l'équation (75) qui soit de la forme

$$z = \varphi(u) = \varphi(x + y - xy);$$

on aura, pour une intégrale de cette forme,

$$p = \varphi'(u)(1-y), \qquad q = \varphi'(u)(1-x),$$
$$s = \varphi''(u)(1-x)(1-y) - \varphi'(u) = (1-u)\varphi''(u) - \varphi'(u),$$

et l'équation (75) devient

$$\varphi''(u) = \frac{M[2\varphi'(u) + \varphi(u) + 1]}{(1-u)^2} + \frac{\varphi'(u)}{1-u}. \tag{77}$$

L'intégrale de cette équation linéaire, qui est nulle ainsi que sa dérivée première pour $u = 0$, est holomorphe lorsque la variable u décrit un domaine simplement connexe quelconque ne renfermant pas le point critique $u = 1$. Or, lorsque les variables x et y décrivent respectivement dans leurs plans les cercles de rayon *un* décrits de l'origine comme centre, la relation (76), que l'on peut écrire

$$(1-u) = (1-x)(1-y),$$

montre que l'argument de $(1-u)$ varie de $-\pi$ à $+\pi$, et la variable u reste dans un domaine simplement connexe satisfaisant à la condition précédente. Donc l'intégrale en question $\varphi(u)$ de l'équation (77) est une fonction holomorphe des variables x et y lorsque l'on a

$$|x| < 1, \qquad |y| < 1.$$

Si l'on développe cette intégrale $\varphi(u)$ suivant les puissances de u, on a évidemment, d'après la forme du second membre de l'équation (77), une série entière dont tous les coefficients sont réels et positifs

$$\varphi(u) = A_2 u^2 + A_3 u^3 + \ldots + A_n u^n + \ldots.$$

Or, pour $x = 0$, on a $u = y$, et, pour $y = 0$, $u = x$; il s'ensuit que, si l'on développe cette fonction $\varphi(u)$ *suivant les puissances de x et de y*, tous les coefficients seront aussi des nombres réels et positifs, puisque tous ces coefficients se déduisent par voie d'addition et de multiplication des coefficients des termes où figure une seule des variables x ou y. D'après la propriété démontrée tout à l'heure, cette série est convergente si l'on a $|x| < 1$, $|y| < 1$, et par suite la série entière qui représente l'intégrale de l'équation (74), satisfaisant aux conditions initiales données, est convergente dans le même domaine [1].

30. On a une proposition analogue pour les équations linéaires dont les deux systèmes de caractéristiques sont confondus :

$$r = Ap + Bq + Cz + D, \tag{78}$$

A, B, C, D étant des fonctions holomorphes des variables x, y lorsque ces variables x et y décrivent respectivement deux domaines simplement connexes ω_x et ω_y, dont le premier, ω_x, renferme l'origine $x = 0$. Soient, d'autre part, $\varphi(y)$ et $\psi(y)$ deux fonctions holomorphes de y dans le domaine ω_y; l'équation (78) admet une intégrale se réduisant à $\varphi(y)$ pour $x = 0$, tandis que sa dérivée $\frac{\partial z}{\partial x}$ se réduit à $\psi(y)$ pour la même valeur $x = 0$. *Cette intégrale est une fonction holomorphe de x et de y dans l'ensemble des domaines ω_x et ω_y.*

On peut se borner, pour la démonstration, au cas où les fonctions $\varphi(y)$ et $\psi(y)$ sont identiquement nulles, car il suffit de poser

$$z = \varphi(y) + x\psi(y) + Z$$

pour être ramené à ce cas. On peut ensuite, au moyen de deux transformations conformes, ramener le cas général au cas où les domaines ω_x et ω_y sont deux cercles; en définitive, il suffit d'établir que l'intégrale de l'équation (78), qui se réduit à zéro, ainsi que sa dérivée

---

[1] C'est aussi une conséquence facile de la méthode des approximations successives de M. E. Picard (*voir* la Note I du Tome IV des *Leçons sur la Théorie des surfaces* de M. Darboux).

première $\frac{\partial z}{\partial x}$, pour $x = 0$, est holomorphe lorsque l'on a

$$|x| < 1, \qquad |y| < 1,$$

si les coefficients A, B, C, D sont holomorphes dans le même domaine. Nous remplacerons le second membre de l'équation (78) par une fonction majorante de la forme

$$\frac{M\left(\frac{p}{1-y} + \frac{q}{1-x} + z + 1\right)}{(1-x)^3(1-y)},$$

et l'on voit, en reprenant les raisonnements du paragraphe précédent, que le théorème en question sera établi si l'on prouve que l'équation auxiliaire

$$(79) \qquad r = \frac{M\left(\frac{p}{1-y} + \frac{q}{1-x} + z + 1\right)}{(1-x)^3(1-y)}$$

admet une intégrale holomorphe représentée par une série entière en x et y, dont tous les coefficients sont réels et positifs, et qui est holomorphe lorsque l'on a $|x| < 1$, $|y| < 1$.

Cherchons encore à satisfaire à l'équation (79) en prenant pour z une fonction de la forme

$$z = \varphi(u) = \varphi(x + y - xy);$$

on a

$$p = \varphi'(u)(1-y), \qquad q = \varphi'(u)(1-x),$$
$$r = \varphi''(u)(1-y)^2, \qquad s = \varphi''(u)(1-u) - \varphi'(u), \qquad t = \varphi''(u)(1-x)^2,$$

et l'équation (79) devient

$$(80) \qquad \varphi''(u) = \frac{M[2\varphi'(u) + \varphi(u) + 1]}{(1-u)^4}.$$

L'intégrale de cette équation qui est nulle, ainsi que sa dérivée première $\varphi'(u)$, pour $u = 0$, est une fonction holomorphe de u dans tout domaine simplement connexe $\mathfrak{O}_u$, ne renfermant pas le point $u = 1$. On en conclut, comme au paragraphe précédent, que cette fonction

$$Z(x, y) = \varphi(u),$$

considérée comme fonction des variables x et y, est holomorphe lorsque $|x|$ et $|y|$ sont inférieurs à l'unité. Il suffit donc de prouver que, si l'on développe cette fonction $Z(x, y)$ suivant les puissances de x et de y, tous les coefficients sont des nombres réels et positifs. Or cette fonction satisfait au système d'équations

$$r = \frac{M\left(\dfrac{p}{1-y} + \dfrac{q}{1-x} + z + 1\right)}{(1-x)^3(1-y)},$$

$$t = \frac{M\left(\dfrac{p}{1-y} + \dfrac{q}{1-x} + z + 1\right)}{(1-x)(1-y)^3},$$

$$s = \frac{M\left(\dfrac{p}{1-y} + \dfrac{q}{1-x} + z + 1\right)}{(1-x)^2(1-y)^2} - \frac{p}{1-y},$$

et aux conditions initiales

$$z = 0, \quad p = 0, \quad q = 0 \quad \text{pour} \quad x = 0, \quad y = 0.$$

Si le nombre M est supérieur à *un*, ce que l'on peut toujours supposer (puisque l'on peut remplacer M par tout autre nombre positif plus grand), les développements de r, s, t suivant les puissances de x, y, z, p, q ne renferment que des coefficients réels et positifs. Comme les valeurs initiales de toutes les dérivées partielles de z, pour $x = y = 0$, s'expriment au moyen de ces coefficients par les seules opérations d'addition et de multiplication, il s'ensuit que le développement de $Z(x, y)$ ne contiendra que des termes à coefficients positifs. De là résulte la proposition énoncée.

31. Ces préliminaires étant établis, considérons une équation aux dérivées partielles de la forme

$$(81) \qquad s = F(x, y, z, p, q, r, t; \lambda) = Ap + Bq + Cz + D\lambda + \ldots,$$

où le second membre est une série entière ordonnée suivant les puissances de z, p, q, r, t, λ, dont les coefficients sont des fonctions holomorphes des variables x et y, lorsque ces variables décrivent respectivement deux domaines simplement connexes $\mathfrak{D}_x$, $\mathfrak{D}_y$, renfermant les points $x=0, y=0$. Nous supposons cette série convergente, quelles que soient les valeurs des variables x et y dans ces domaines, pourvu que les modules des variables z, p, q, r, t, λ restent inférieurs à un nombre positif ρ. Enfin les termes non écrits dans le second membre de l'équation (81) sont au moins du second degré en z, p, q, r, t, λ, de sorte que, pour $\lambda = 0$, l'équation (81) admet l'intégrale particulière $z=0$, et les droites

$$x = \text{const.}, \qquad y = \text{const.}$$

forment les deux familles de caractéristiques situées sur cette intégrale.

Proposons-nous de développer suivant les puissances de λ l'intégrale de l'équation (81) qui se réduit à zéro pour $x=0$, quel que soit y, et pour $y=0$, quel que soit x. Soit

$$z = \varphi_1(x,y)\lambda + \varphi_2(x,y)\lambda^2 + \ldots + \varphi_n(x,y)\lambda^n + \ldots \tag{82}$$

le développement de cette intégrale. En remplaçant z par le développement précédent dans les deux membres de l'équation (81), et en identifiant, on obtient des équations linéaires aux dérivées partielles permettant de déterminer de proche en proche les fonctions $\varphi_1(x,y)$, $\varphi_2(x,y)$, ..., $\varphi_n(x,y)$, ... La première de ces fonctions $\varphi_1(x,y)$ doit satisfaire à l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x\, \partial y} = \mathrm{A}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \mathrm{B}\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \mathrm{C}\varphi_1 + \mathrm{D},$$

et s'annuler pour $x=0$, et pour $y=0$. Nous venons de voir que cette fonction était holomorphe dans l'ensemble des domaines $\mathfrak{D}_x$, $\mathfrak{D}_y$. D'une façon générale, le coefficient φ_n de λ^n est une fonction des variables x et y, qui doit s'annuler pour $x=0$ et pour $y=0$, et satisfaire à une équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial x\, \partial y} = \mathrm{A}\frac{\partial \varphi_n}{\partial x} + \mathrm{B}\frac{\partial \varphi_n}{\partial y} + \mathrm{C}\varphi_n + \mathrm{U},$$

U étant un polynome entier par rapport aux coefficients de la série (81) aux fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$, et à leurs dérivées, c'est-à-dire une fonction holomorphe des variables x, y, dans les domaines $\mathfrak{D}_x$ et $\mathfrak{D}_y$, si les fonctions φ_i d'indice inférieur à n sont holomorphes dans ces domaines. Il s'ensuit que la fonction φ_n sera elle aussi holomorphe dans ces domaines, et l'on obtient ainsi une série de la forme (82), satisfaisant formellement à l'équation (81), dont tous les coefficients $\varphi_n(x, y)$ sont des fonctions holomorphes des variables x et y, quand ces variables décrivent respectivement dans leurs plans les domaines $\mathfrak{D}_x$ et $\mathfrak{D}_y$.

La convergence de ce développement en série (82) est une conséquence de la proposition suivante, que nous allons démontrer directement :

Théorème IX. — *Soient $\mathfrak{D}'_x$, $\mathfrak{D}'_y$ deux domaines intérieurs respectivement aux deux domaines $\mathfrak{D}_x$, $\mathfrak{D}_y$; on peut leur faire correspondre un nombre positif η tel que l'intégrale de l'équation* (81), *qui se réduit à zéro pour $x = 0$ et pour $y = 0$, soit une fonction holomorphe des variables x, y, λ, lorsque les variables x et y restent dans les domaines $\mathfrak{D}'_x$ et $\mathfrak{D}'_y$, et que le module de λ reste inférieur à η.*

Nous suivrons la même marche, pour la démonstration, qu'au n° 27.

32. On peut d'abord, en effectuant sur les variables x et y une transformation conforme, remplacer les deux domaines simplement connexes $\mathfrak{D}_x$ et $\mathfrak{D}_y$ par deux cercles de rayon *un*, ce qui ne change pas la forme de l'équation (81). Il suffit donc d'établir le théorème énoncé en supposant que le second membre de l'équation (81) est une fonction holomorphe des variables $x, y, z, p, q, r, t, \lambda$, lorsque l'on a

$$(83)\qquad \left\{\begin{array}{lllll} & |x| < 1, & |y| < 1, & |z| < \rho, & \\ |p| < \rho, & |q| < \rho, & |r| < \rho, & |t| < \rho, & |\lambda| < \rho; \end{array}\right.$$

le second membre de cette équation peut alors être développé en série entière ordonnée suivant les puissances de toutes les variables $x, y, z, p, q, r, t, \lambda$, et convergente pour les valeurs de ces variables qui satisfont aux conditions (83); de plus, chaque terme de cette série est divisible par l'un des facteurs z, p, q, λ, r^2, rt, t^2. Le théorème à établir peut alors s'énoncer ainsi :

Étant donnés deux nombres positifs θ, θ', *inférieurs à* un, *on peut leur associer un autre nombre positif* η *tel que l'intégrale de l'équation*

$$(81\ bis) \qquad s = F(x, y, z, p, q, r, t, \lambda),$$

qui est nulle pour $x = 0$, *et pour* $y = 0$, *soit une fonction holomorphe des variables* x, y, λ, *lorsque l'on a*

$$|x| < \theta, \qquad |y| < \theta', \qquad |\lambda| < \eta.$$

En effet, l'intégrale de l'équation (81 *bis*), qui satisfait à ces conditions initiales, peut être développée en série entière ordonnée suivant les puissances de x, y, λ, et tous les coefficients de cette série se déduisent par addition et multiplication des coefficients de $\mathcal{F}$. Nous pouvons donc remplacer $\mathcal{F}$ par une fonction majorante pour avoir une limite du domaine de convergence de cette série entière. Si la fonction $\mathcal{F}$ est continue sur les limites du domaine où elle est holomorphe, comme on peut le supposer (*voir* n° 26), on peut prendre pour fonction majorante une expression de la forme

$$\frac{M(z + p + q + \lambda + r^2 + rt + t^2)}{(1-x)(1-y)\left(1 - \dfrac{\lambda}{\rho}\right)\left(1 - \dfrac{z+p+q}{\rho}\right)\left(1 - \dfrac{r+t}{\rho}\right)},$$

et, à plus forte raison, l'expression

$$\Phi(x, y, z, p, q, r, t, \lambda) = \frac{M\left[z + \dfrac{p}{1-y} + \dfrac{q}{1-x} + \lambda + \dfrac{r^2}{(1-y)^4} + \dfrac{rt}{(1-x)^2(1-y)^2} + \dfrac{t^2}{(1-x)^4}\right]}{(1-x)(1-y)\left(1 - \dfrac{\lambda}{\rho}\right)\left[1 - \dfrac{1}{\rho}\left(z + \dfrac{p}{1-y} + \dfrac{q}{1-x}\right)\right]\left\{1 - \dfrac{1}{\rho}\left[\dfrac{r}{(1-y)^2} + \dfrac{t}{(1-x)^2}\right]\right\}}$$

est majorante pour $\mathcal{F}$. Il suffira donc de démontrer le théorème pour l'équation auxiliaire

$$(84) \qquad s = \Phi(x, y, z, p, q, r, t, \lambda),$$

ou encore de démontrer que cette équation (84) admet une intégrale holomorphe en x, y, λ, pourvu que l'on ait

$$|x| < \theta, \qquad |y| < \theta', \qquad |\lambda| < \eta,$$

et représentée par *un* développement en série entière en x, y, λ, dont tous les coefficients sont des nombres *réels et positifs*. Or si l'on cherche à satisfaire à l'équation (84) en prenant pour z une fonction de $u = x + y - xy$ et de λ, $z = \varphi(u, \lambda)$, on est conduit à l'équation du second ordre

$$(85)\qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2} = \frac{1}{1-u}\frac{\partial\varphi}{\partial u} + \mathrm{M}\frac{\varphi + 2\dfrac{\partial\varphi}{\partial u} + 3\left(\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}\right)^2 + \lambda}{(1-u)^2\left(1-\dfrac{\lambda}{\rho}\right)\left(1-\dfrac{\varphi+2\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}}{\rho}\right)\left(1-\dfrac{2\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}}{\rho}\right)}.$$

Le second membre de cette équation peut être ordonné en série suivant les puissances de λ, de φ, de $\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}$ et de $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}$, tous les termes de cette série étant divisibles par λ, φ, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}$ ou $\left(\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}\right)^2$ et les coefficients étant des polynomes du second degré en $\left(\dfrac{1}{1-u}\right)$. On en déduira donc pour $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}$ une série entière en λ, φ, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}$ dont tous les coefficients sont eux-mêmes des polynomes en $\dfrac{1}{1-u}$ à coefficients réels et positifs

$$(86)\qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2} = \mathcal{G}\left(u; \varphi, \frac{\partial\varphi}{\partial u}, \lambda\right).$$

Le second membre de cette équation est une fonction holomorphe des variables u, φ, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}$, λ, lorsque u reste dans un domaine $\mathcal{D}_u$ ne renfermant pas le point $u = 1$, pourvu que les modules de φ, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}$, λ restent inférieurs à un nombre positif ρ' suffisamment petit (n° 5). Si on l'ordonne suivant les puissances de u, λ, φ, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}$, tous les coefficients sont des nombres réels et positifs et tous les termes sont divisibles par φ, $\frac{\partial\varphi}{\partial u}$ ou λ. L'intégrale de cette équation (86), qui est nulle, ainsi que sa dérivée première, pour $u = 0$, peut donc être développée en une série entière en u et λ, dont tous les coefficients sont réels et positifs

$$(87) \qquad z = \psi_2(\lambda)u^2 + \psi_3(\lambda)u^3 + \ldots + \psi_n(\lambda)u^n + \ldots,$$

$\psi_2, \psi_3, \ldots, \psi_n, \ldots$ étant des séries entières en λ dont tous les coefficients sont réels et positifs.

D'autre part, d'après le théorème de M. Poincaré, nous savons que cette intégrale est une fonction holomorphe de u et de λ, lorsque u décrit le domaine ω_u, pourvu que $|\lambda|$ reste plus petit qu'un nombre positif η convenablement choisi. Si l'on a pris pour ω_u le domaine à l'intérieur duquel reste le point u lorsque x et y restent dans les cercles de rayons θ et θ' décrits de l'origine pour centre, on voit que la fonction (87) est une fonction holomorphe des variables x, y, λ, pourvu que l'on ait

$$|x| < \theta, \qquad |y| < \theta', \qquad |\lambda| < \eta.$$

Or, pour $x = 0$ et pour $y = 0$, cette fonction se réduit à deux séries entières en (y, λ) et en (x, λ), dont tous les coefficients sont réels et positifs. Il s'ensuit que, si l'on développe cette intégrale de l'équation (84) suivant les puissances de x, y, λ, tous les coefficients seront aussi réels et positifs. Cela suffit, nous l'avons déjà fait observer, pour établir la proposition énoncée.

33. On peut ramener à la forme (81) toute équation du second ordre

$$(88) \qquad F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0,$$

dont on connaît une intégrale particulière *non singulière*, pourvu qu'on connaisse les caractéristiques sur cette intégrale particulière. Soient, en effet,

$$x = f(u, v), \qquad y = \varphi(u, v), \qquad z = \psi(u, v)$$

les équations de cette surface intégrale rapportée à ses caractéristiques $u = C$, $v = C'$. Faisons dans l'équation (88) le changement de variables défini par les formules

$$(89) \qquad x = f(X, Y), \qquad y = \varphi(X, Y), \qquad z = \psi(X, Y) + Z,$$

X et Y étant les nouvelles variables indépendantes et Z la nouvelle fonction inconnue. L'équation (88) se change en une nouvelle équation du second ordre

$$(90) \qquad \mathfrak{F}(X, Y, Z, P, Q, R, S, T) = 0$$

admettant l'intégrale particulière $Z = 0$, sur laquelle les droites $X = \text{const.}$, $Y = \text{const.}$ sont les courbes caractéristiques. Il s'ensuit que cette intégrale $Z = 0$ satisfait aux relations

$$\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial R} = 0, \qquad \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial T} = 0;$$

comme ce n'est pas une intégrale singulière, la dérivée $\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial S}$ ne peut être nulle, et l'on peut résoudre l'équation (90) par rapport à S. En remplaçant les grandes lettres par des petites lettres, on voit que l'équation sera ramenée à la forme

$$(91) \qquad s = Ap + Bq + Cz + \ldots,$$

le second membre étant une série entière en p, q, z, r, t, dont les coefficients sont des fonctions des variables x et y, et tous les termes non écrits étant au moins du second degré en z, p, q, r, t. Supposons, pour fixer les idées, que le second membre de l'équation (91) est holomorphe lorsque les variables x et y restent respectivement dans deux domaines simplement connexes ω_x et ω_y, et que les modules de z, p, q, r, t restent inférieurs à un nombre positif ρ. Soit, d'autre part, $\varphi(x, y)$ une fonction holomorphe des variables x et y dans les deux domaines ω_x et ω_y; si l'on remplace z par $z + \lambda\varphi(x, y)$ dans l'équation (91), on est conduit à une équation de la forme (81). L'application du théorème général du n° 32 permet d'affirmer l'existence d'une infinité d'intégrales de l'équation (91), infiniment voisines de l'intégrale particulière $z = 0$, et pour lesquelles on peut assigner à l'avance des domaines où elles sont sûrement holomorphes. Il est clair qu'au lieu d'un seul paramètre λ on pourrait en introduire un nombre quelconque, en remplaçant par exemple z par $z + \lambda\varphi(x, y) + \mu\psi(x, y) + \ldots$, φ, ψ, ... étant des fonctions holomorphes dans les domaines $\mathcal{D}_x$ et $\mathcal{D}_y$.

34. On peut démontrer un théorème tout à fait pareil pour une équation de la forme

$$r = \mathrm{F}(x, y, z, p, q, s, t, \lambda) = \mathrm{A}p + \mathrm{B}q + \mathrm{C}z + \mathrm{D}\lambda + \ldots \tag{92}$$

admettant, pour $\lambda = 0$, l'intégrale $z = 0$, sur laquelle les deux systèmes de caractéristiques sont confondus avec les droites $y = \text{const.}$ La suite des raisonnements étant la même, j'indiquerai seulement les points qui diffèrent.

Au lieu d'une fonction majorante de la forme (84), nous prendrons pour fonction majorante

$$\Phi = \frac{\left\{ \begin{aligned} &\mathrm{M}\left\{\lambda + z + \frac{p}{1-y} + \frac{q}{1-x} + \left[\frac{p}{(1-x)(1-y)^2} + \frac{s}{(1-x)(1-y)}\right]^2 \right. \\ &\qquad\left. + \left[\frac{p}{(1-x)(1-y)^2} + \frac{s}{(1-x)(1-y)}\right]\frac{t}{(1-x)^2} + \frac{t^2}{(1-x)^4}\right\} \end{aligned} \right\}}{\left\{ \begin{aligned} &(1-x)^3(1-y)\left(1 - \frac{\lambda}{\rho}\right)\left[1 - \frac{1}{\rho}\left(z + \frac{p}{1-y} + \frac{q}{1-x}\right)\right] \\ &\quad \times \left\{1 - \frac{1}{\rho}\left[\frac{p}{(1-x)(1-y)^2} + \frac{s}{(1-x)(1-y)} + \frac{t}{(1-x)^2}\right]\right\} \end{aligned} \right\}},$$

et tout revient encore à démontrer que l'équation auxiliaire

$$r = \Phi(x, y, z, p, q, s, t, \lambda) \tag{93}$$

admet une intégrale qui soit représentée par une série entière en x, y, λ, dont tous les coefficients sont réels et positifs, et convergente pour $|x| < \theta$, $|y| < \theta'$, $|\lambda| < \eta$, les lettres θ, θ', η ayant la même signification que plus haut. Or, si l'on cherche une intégrale de la forme

$$z = \varphi(u, \lambda) = \varphi(x + y - xy, \lambda),$$

on a

$$\begin{gathered} p = \varphi'(u)(1-y), \qquad q = \varphi'(u)(1-x), \\ r = \varphi''(u)(1-y)^2, \qquad t = \varphi''(u)(1-x)^2, \\ s = \varphi''(u)(1-x)(1-y) - \varphi'(u), \end{gathered}$$

et, par suite,

$$\varphi'(u) = \frac{p}{1-y} = \frac{q}{1-x}, \qquad \varphi''(u) = \frac{t}{(1-x)^2} = \frac{r}{(1-y)^2},$$

$$\varphi''(u) = \frac{s}{(1-x)(1-y)} + \frac{p}{(1-x)(1-y)^2},$$

et l'équation (93) prend la forme

$$(94) \qquad \varphi''(u) = \frac{\mathrm{M}[\lambda + \varphi + 2\varphi'(u) + 3\varphi''^2(u)]}{(1-u)^3\left(1-\dfrac{\lambda}{\rho}\right)\left(1-\dfrac{\varphi+2\varphi'}{\rho}\right)\left(1-\dfrac{2\varphi''}{\rho}\right)}.$$

L'intégrale de cette équation, qui est nulle ainsi que sa dérivée première pour $u=0$, est une fonction holomorphe des variables x, y, λ pour $|x|<\theta$, $|y|<\theta'$, $|\lambda|<\eta$. On démontre que tous les coefficients du développement de cette fonction suivant les puissances de x, y, λ sont des nombres réels et positifs en formant, comme au n° 30, un système d'équations donnant les trois dérivées partielles du second ordre r, s, t de cette fonction sous forme de séries entières dont tous les coefficients sont eux-mêmes des nombres réels et positifs.

Il est clair que les divers artifices employés dans les démonstrations précédentes s'appliqueraient aisément à des questions du même genre, mais plus compliquées. Dans un autre Mémoire, je m'occuperai plus spécialement des applications des propositions générales au domaine réel.