EDMOND MAILLET

Sur les zéros des fonctions entières, des fonctions monodromes, des fonctions à ν branches

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 23 (1906), p. 263-338
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1906_3_23__263_0>

SUR LES

ZÉROS DES FONCTIONS ENTIÈRES,

DES FONCTIONS MONODROMES, DES FONCTIONS A ν BRANCHES,

PAR M. EDMOND MAILLET.

I.

INTRODUCTION.

Le Mémoire ci-après doit être considéré comme la suite de quelques-uns de mes Mémoires antérieurs, relatifs aux fonctions entières et aux fonctions monodromes : 1° *Journal de Mathématiques*, 1902, p. 329-386; 2° *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 1902, p. 447-469; 3° *Bulletin de la Société mathématique*, fasc. I, 1903, p. 27-47; 4° *Journal de l'École Polytechnique*, 1904, p. 162 et 1905, p. 1-78; 5° *Journal de Mathématiques*, 1904, p. 275-296. Je l'ai rédigé de façon que sa lecture n'exige que la connaissance des Mémoires ci-dessus, d'une partie d'un Mémoire couronné de M. Hadamard (*Journal de Mathématiques*, 1893, p. 171-191), enfin des *Leçons sur les fonctions entières* (Paris, Gauthier-Villars, 1900) de M. Borel. Il est toutefois bon de se reporter aux divers travaux qui y sont mentionnés (1) et d'en avoir une idée au moins sommaire.

Un résumé du Mémoire ci-après a paru dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris* des 30 janvier (p. 300) et 6 février 1905 (p. 357). On pourra le consulter.

Le Mémoire est divisé en trois Parties.

---

(1) Principalement à ceux de MM. A. Kraft, E. Lindelöf, Ruben Mattson et G. Remoundos.

Première Partie. — Je commence par définir, avec une précision suffisante pour ce qui suit, le *produit canonique* de facteurs primaires (¹) d'ordre infini non transfini, et j'en conclus une relation entre la densité des racines et l'ordre de grandeur maximum du module de ce produit pour $|z| = r$ (z étant la variable). Ceci me permet de parler de l'*ordre réel* et de l'*ordre apparent* des fonctions entières d'ordre infini non transfini et d'indiquer quelques propriétés de ces ordres et de la multiplication ou de la division des produits canoniques les uns par les autres.

Je m'occupe ensuite de trouver une limite inférieure du module d'une fonction entière d'ordre > 0, mais non transfini, en dehors de cercles de rayons assez petits ayant pour centres les zéros ou de couronnes circulaires concentriques d'épaisseur assez petite dont le centre est à l'origine. J'étends et je généralise, aussi bien pour l'ordre fini que pour l'ordre infini non transfini, les résultats connus pour les fonctions entières d'ordre fini. Je démontre une série de propriétés corrélatives; ainsi, $F(z)$ étant une fonction entière d'ordre (k, ρ),

$$F(z) = \Phi(z)\, e^{G(z)},$$

où $\Phi(z)$ est un produit canonique d'ordre $\leqq (k, \rho)$, $G(z)$ une fonction entière d'ordre $\leqq (k-1, \rho)$ (quand $k = 0$, G est un polynome de degré $\leqq \rho$). Φ ou e^G est d'ordre (k, ρ). J'établis une condition nécessaire et suffisante pour que la croissance d'une fonction entière d'ordre fini ou infini non transfini donnée par son développement taylorien soit régulière (²).

Deuxième Partie. — Je signale que les propriétés précédentes s'étendent en partie aux fonctions monodromes aux environs d'un point singulier essentiel isolé où elles n'ont pas de pôles (c'est-à-dire aux fonctions quasi-entières aux environs de ce point). Ceci me permet de définir l'*ordre apparent*, l'*ordre réel des zéros*, l'*ordre réel des pôles*, l'*ordre réel proprement dit*, qui est le plus grand des deux

(¹) Question déjà attaquée par M. P. Boutroux dans sa *Thèse* (p. 94; *voir* encore *Acta mathematica*, 1903) pour les ordres $(1, \rho)$ et $(2, \rho)$. *Comp.* Borel, *Acta mathematica*, t. XX, p. 378; A. Kraft (*Thèse*, voir plus loin).

(²) Comp. E. Lindelöf, *Bull. des Sc. Math.*, 2^me série, t. XXVII, 1903, p. 222.

précédents, pour les fonctions méromorphes et quasi-méromorphes d'ordre >0, mais non transfini, aux environs d'un point singulier essentiel isolé, c'est-à-dire pour les fonctions monodromes d'ordre >0, mais non transfini, aux environs de ce point essentiel isolé où elles peuvent avoir des pôles; j'établis alors, pour les fonctions $u(z)$ à ν branches définies par

$$u^\nu + u^{\nu-1}A_1(z) + \ldots + A_\nu(z) = 0,$$

où $A_1, \ldots, A_\nu$ sont quasi-méromorphes aux environs du point singulier essentiel isolé $z=\infty$ et d'ordre >0 mais non transfini, l'extension de résultats connus pour le cas où $\nu = 1$ (théorèmes de MM. Picard et Borel).

Enfin j'étudie la relation entre la croissance d'une fonction entière d'ordre infini non transfini et la distribution de ses zéros au point de vue de la régularité et de l'irrégularité. Les résultats sont, pour la plupart, analogues à ceux qu'on possède pour le cas de l'ordre fini.

Troisième Partie. — Je m'occupe du système

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dz} &= a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ \frac{dx_n}{dz} &= a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n,\end{aligned}$$

où $a_{11}, \ldots, a_{nn}$ sont des fonctions quasi-méromorphes d'ordre >0 mais non transfini, aux environs de $z=\infty$. Je donne une limite supérieure de la croissance des solutions. Il resterait à trouver des cas aussi étendus que possible où cette limite supérieure est exacte ou à peu près, comme cela a lieu pour certains systèmes particuliers.

Enfin je termine en indiquant quelques sujets d'études.

PREMIÈRE PARTIE.

LES ZÉROS DES FONCTIONS ENTIÈRES D'ORDRE INFINI NON TRANSFINI.

II.

J'ai établi antérieurement (¹) les lemmes suivants :

I. *La fonction entière* $\sum_0^\infty a_m x^m$, *où*

$$|a_m| \leqq \frac{1}{(\log_k m)^{\left(\frac{1}{\rho}-\varepsilon\right)m}},$$

ε *pouvant être pris positif et aussi petit qu'on veut dès que* m *est assez grand, a son module pour* $|x| = r$ *au plus égal à* $e_{k+1}(r^{\rho+\varepsilon_1})$ *dès que* $r > \xi$, *où* ε_1 *peut être pris positif et aussi petit qu'on veut pourvu que* ξ *soit assez grand.*

II. *Inversement, soit la fonction entière* $\sum_0^\infty a_m x^m$, *dont on sait que, pour une infinité de valeurs de* m,

$$|a_m| \geqq \frac{1}{(\log_k m)^{\left(\frac{1}{\rho}+\varepsilon\right)m}},$$

les autres coefficients ayant une valeur qui ne satisfait pas à cette inégalité (²) : *on a, sur une infinité de circonférences ayant leur centre à*

(¹) *Journal de l'École Polytechnique*, 1904 et 1905, p. 11 et 13.

(²) *Cette restriction est inutile :* la démonstration que j'ai donnée de la propriété II (*Journal de l'École Polytechnique, loc. cit.*, p. 14) s'applique aussi bien sans rien supposer *a priori* sur la limite supérieure des modules des coefficients a_m. *Du fait qu'une fonction entière contient une infinité de coefficients tels que* $|a_m| \geqq (\log_k m)^{-\left(\frac{1}{\rho}+\varepsilon\right)m}$, *on conclut donc que, sur une infinité de circonférences analogues de rayons indéfiniment croissants,*

$$M_r \geqq e_{k+1}(r^{\rho-\varepsilon_2}).$$

l'origine et de rayon r indéfiniment croissant,

$$M_r = \max. \left| \sum_0^\infty a_m x^m \right| \geqq e_{k+1}(r^{\rho-\varepsilon_2}),$$

ε_2 *pouvant être pris positif et aussi petit qu'on veut dès que r est assez grand.*

D'autre part, on sait qu'une fonction entière $F(z)$ quelconque peut se mettre sous la forme d'un produit convergent $\Phi(z)$ de facteurs *primaires* multiplié par $e^{G(z)}$, où $G(z)$ est une fonction entière, et [1]

$$(1) \qquad \Phi(z) = \prod_1^\infty \left(1 - \frac{z}{\alpha_n}\right) e^{P_{\rho_n}\left(\frac{z}{\alpha_n}\right)},$$

où $P_{\rho_n}\left(\frac{z}{\alpha_n}\right)$ est un polynome de degré ρ_n en $\frac{z}{\alpha_n}$ de la forme

$$P_{\rho_n}\left(\frac{z}{\alpha_n}\right) = \frac{z}{\alpha_n} + \frac{z^2}{2\alpha_n^2} + \ldots + \frac{z^{\rho_n}}{\rho_n \alpha_n^{\rho_n}}.$$

On a

$$(a) \qquad \frac{1}{z - \alpha_n} = -\left(\frac{1}{\alpha_n} + \frac{z}{\alpha_n^2} + \ldots + \frac{z^{\rho_n - 1}}{\alpha_n^{\rho_n}}\right) - \frac{z^{\rho_n}}{\alpha_n^{\rho_n}(\alpha_n - z)}.$$

La série

$$\sum R_n = \sum \frac{-z^{\rho_n}}{\alpha_n^{\rho_n}(\alpha_n - z)}$$

La remarque est importante pour la suite : si l'on sait que $M_r \leqq e_{k+1}(r^\sigma)$, σ fixe positif, quel que soit r (r assez grand), on conclut en effet que $|a_m| \leqq (\log_k m)^{-\left(\frac{1}{\sigma} - \varepsilon\right)m}$ (m assez grand), c'est-à-dire que la fonction entière n'est pas d'ordre transfini.

(1) Pour éviter des confusions je désignerai toujours par α_n le $n^{\text{ième}}$ zéro.

Dans une fonction entière, si l'on range les zéros $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots$ par ordres de modules croissants, $|\alpha_n|$ doit croître indéfiniment avec n.

En effet, s'il en était autrement, $|\alpha_n|$ tendrait vers une limite l. Dans le voisinage de la circonférence C de rayon l ayant pour centre l'origine, à son intérieur, il y aurait une infinité de zéros, par suite, sur la circonférence, un point z_0 tel qu'une circonférence, de centre z_0 et de rayon arbitraire, contienne une infinité de zéros : ces zéros ne seraient pas tous isolés.

On voit de même que, dans une fonction méromorphe, si l'on range les zéros (ou les pôles) par ordre de modules croissants, ce module doit croître indéfiniment avec le rang du zéro (ou du pôle).

est absolument et uniformément convergente dans tout le plan, sauf pour $z = \alpha_n$, sous certaines conditions.

En effet, soient δ la distance de z au zéro α_n le plus voisin [1], M le maximum de $|z|$ dans la région *finie* considérée du plan des z. On prendra $n > \nu$, $|\alpha_\nu| > M$, d'où

$$\sum_{\nu+1}^{\infty} |R_n| \leqq \sum \left(\frac{r}{r_n}\right)^{\rho_n} \frac{1}{\delta}.$$

La convergence de la série $\sum R_n$ sera sûrement uniforme si la série $\sum \left(\frac{r}{r_n}\right)^{\rho_n}$ converge uniformément, ce que je supposerai.

Intégrant (a),

$$\begin{aligned}&\sum \left[\log(z-\alpha_n) - \log(-\alpha_n) + \frac{z}{\alpha_n} + \frac{z^2}{2\alpha_n^2} + \ldots + \frac{z^{\rho_n}}{\rho_n \alpha_n^{\rho_n}}\right]\\ &= \sum \left[\log\left(1-\frac{z}{\alpha_n}\right) + P_{\rho_n}\left(\frac{z}{\alpha_n}\right)\right] = \int_0^z \sum R_n \, dz\end{aligned}$$

converge uniformément; par suite $\Phi(z)$, dont le premier membre est le logarithme, est aussi convergent.

On s'est placé en dehors des environs des points α_n; mais, aux environs de $z = \alpha_n$, $\Phi(z)$ est le produit de $\left(1 - \frac{z}{\alpha_n}\right)^\lambda$ par un produit convergent (d'après le même raisonnement), λ étant l'ordre de multiplicité du zéro $z = \alpha_n$.

Soit alors $F(z)$ une fonction entière, $\Phi(z)$ ayant les mêmes zéros que $F(z)$ avec le même ordre de multiplicité : $\frac{F}{\Phi}$ n'a plus ni zéros, ni pôles à distance finie, et son logarithme est une fonction entière $G(z)$; donc

$$F = \Phi \, e^{G(z)}.$$

La condition nécessaire et suffisante à remplir par ρ_n est que la série $\sum \left(\frac{r}{r_n}\right)^{\rho_n}$ soit uniformément convergente.

---

(1) Bien entendu le raisonnement ne s'applique qu'aux valeurs de z pour lesquelles δ a une limite inférieure fixe, d'ailleurs aussi petite qu'on veut.

Les fonctions entières d'ordre fini sont caractérisées par ce fait que l'on peut prendre pour ρ_n un entier limité, le même quel que soit n.

Je me propose ici d'étendre aux fonctions entières d'ordre infini non transfini un certain nombre des propriétés des fonctions entières d'ordre fini *au point de vue des zéros*. Je m'appuierai sur les résultats que j'ai obtenus antérieurement (*loc. cit.*).

III.

D'abord le raisonnement employé ([1]) par M. Schou pour trouver une limite supérieure du nombre des zéros de module au plus égal à $r_n = |\alpha_n|$, ou encore une limite inférieure de r_n, s'applique identiquement. Soit

$$\sum_0^\infty a_m z^m = \mathrm{F}(z), \tag{2}$$

une fonction entière d'ordre infini non transfini (k, ρ). On a ici, avec les notations de M. Borel (où a_n est remplacé par α_n) convenablement modifiées :

$$\mathrm{V}_r = e_k(r^{\sigma_r}),$$

où $\mathrm{V}_r = \mathrm{V}(r)$ est assujetti à la seule condition d'être $\geqq \log \mathrm{M}_r$, et où M_r est le maximum du module de $\mathrm{F}(z)$ pour $|z| = r$;

$$n < e_k[(r_n s)^{\sigma_r + \varepsilon_1}] \qquad (r = r_n s).$$
$$r_n^{\sigma_r + \varepsilon_2} > \log_k n.$$

Or on peut prendre $\sigma_r \leqq \rho + \varepsilon_3$; donc, pour toute valeur de r_n assez grande

$$r_n^{\rho+\varepsilon} > \log_k n, \tag{3}$$

$$n < e_k(r_n^{\rho+\varepsilon}), \tag{3 bis}$$

([1]) *Voir* HADAMARD, Mémoire couronné, *Journal de Mathématiques*, 1893, p. 202; SCHOU, *Comptes rendus*, t. CXXV, p. 763; BOUTROUX, *Thèse*, p. 93-94; BOREL, *Leçons sur les fonctions entières*, Paris, 1900, p. 73. Je mentionne ici au point de vue de la priorité éventuelle les résultats de MM. Borel (*Acta mathematica*, t. XX) et A. Kraft (*Thèse*, voir plus loin); mais leur lecture n'est pas indispensable pour l'intelligence de mon Mémoire.

les ε_i pouvant être pris aussi petits qu'on veut dès que n est assez grand [(3) subsiste quand $\rho = 0$].

M. P. Boutroux, dans sa *Thèse* (¹) *de Doctorat*, a obtenu en particulier les résultats suivants :

Si l'on a, à partir d'une certaine valeur de n,

$$r_n = |\alpha_n| > (\log n)^{\frac{1}{\sigma}} \quad \left[\text{ou} > (\log_2 n)^{\frac{1}{\sigma}}\right] \qquad (\sigma \text{ fixe} > 0),$$

on a, dans (1), *à partir d'une certaine valeur de r,*

$$|\Phi(z)| < e_2(r^{\sigma+\varepsilon}) \qquad [\text{ou } e_3(r^{\sigma+\varepsilon})],$$

ε *fixe, positif, aussi petit qu'on veut, en prenant pour* ρ_n *l'entier le plus voisin de* $\sigma \log n$ (*ou* $\log n \log_2 n$).

J'admets que l'on puisse généraliser le résultat de M. Boutroux, et établir la propriété suivante :

Quand on a à partir d'une certaine valeur de n

$$r_n > (\log_k n)^{\frac{1}{\sigma}} \qquad (\sigma \text{ fixe} > 0), \tag{4}$$

on a

$$M_r < e_{k+1}(r^{\sigma+\varepsilon}), \tag{5}$$

à partir d'une certaine valeur de r, ε *étant aussi petit qu'on veut, mais fixe* (ρ_n *étant convenablement choisi*).

On pourra alors raisonner de la sorte :

Soit $\Phi(z)$ un produit de facteurs primaires d'ordre (k_1, ρ_1). Admettant que (4) ait lieu pour lui, je dis que

$$(k, \sigma) \gtreqq (k_1, \rho_1 - \varepsilon), \tag{5 bis}$$

ce qui signifiera que l'on a $k > k_1$, ou $k = k_1$ avec $\sigma \gtreqq \rho_1 - \varepsilon$. En effet,

---

(¹) Pages 94 et suivantes; *voir* encore *Acta mathematica*, 1903.

si l'on avait

$$(k, \sigma) < (k_1, \rho_1 - \eta) \qquad (\eta \text{ fixe et positif}),$$

on aurait

$$M_r < e_{k+1}(r^{\sigma+\varepsilon}) < e_{k_1+1}(r^{\rho_1-\eta+\varepsilon}),$$

d'après (5), avec ε fixe, mais aussi petit qu'on veut pour r assez grand; d'après la propriété II, pour une infinité de valeurs de r indéfiniment croissantes, on a, d'autre part,

$$M_r \geqq e_{k_1+1}(r^{\rho_1-\varepsilon_1}) \qquad (\varepsilon_1 \text{ comme } \varepsilon),$$

ce qui est contradictoire. Le nombre σ en question, qui existe, d'après (3), doit donc satisfaire à (5 *bis*). Il en résulte alors que, *pour une infinité de valeurs de* n, *on doit avoir*

$$r_n \leqq (\log_{k_1} n)^{\frac{1}{\rho_1 - \varepsilon'}}.$$

Mais ceci exige d'abord que je démontre (4) et (5) : c'est ce que je vais faire.

J'établirai le théorème suivant :

THÉORÈME I. — *Si, à partir d'une certaine valeur de* i, *on a, quel que soit* i,

$$(4) \qquad |\alpha_i| = r_i > (\log_k i)^{\frac{1}{\sigma}},$$

soit

$$(1) \qquad \Phi(z) = \prod_1^\infty \left(1 - \frac{z}{\alpha_i}\right) e^{\frac{z}{\alpha_i} + \frac{z^2}{2\alpha_i^2} + \ldots + \frac{z^{\rho_i}}{\rho_i \alpha_i^{\rho_i}}}$$

($|\alpha_{i+1}| \geqq |\alpha_i|$, α_i *croissant indéfiniment avec* i, *et* $\rho_i = \tau_i \log i$, *dès que* i *est assez grand,* τ_i *variant entre deux limites positives fixes* > 0), *un produit de facteurs primaires; on a, dès que* $r = |z|$ *est assez grand,*

$$(6) \qquad |\Phi(z)| \leqq e_{k+1}(r^{\sigma+\varepsilon}),$$

ε *fixe positif, aussi petit qu'on veut.*

Je suppose que, à partir d'une certaine valeur de i,

$$r_i > (\log_k i)^{\frac{1}{\sigma}}.$$

Soit (¹), pour une valeur donnée de $|z| = r$, N le nombre des zéros du produit

$$\Phi(z) = \prod \left(1 - \frac{z}{\alpha_i}\right) e^{P_{\rho_i}\left(\frac{z}{\alpha_i}\right)} = \prod R_{\rho_i}\left(\frac{z}{\alpha_i}\right),$$

dont le module est inférieur à $r(1 + k')$ (k' positif fini). Je prendrai ρ_i entier de la forme $\tau_i \log i$ au moins à partir d'une certaine valeur de i, τ_i étant un nombre qui varie entre deux limites θ_1, θ_2 positives et fixes > 0 (²). Je pourrai négliger dans le raisonnement les facteurs en nombre fini qui ne satisferaient pas à (4) ou à la condition spécifiée pour τ_i; soit A leur produit : $A \leqq e_1(r^\mu)$ (μ fini).

On a :

1° Pour $|u| < 1$ et $i > N$,

$$\log(1-u) + P_{\rho_i}(u) = -\left(\frac{u}{1} + \frac{u^2}{2} + \ldots + \frac{u_i^{\rho_i+1}}{\rho_i+1} + \ldots\right) + \frac{u}{1} + \frac{u^2}{2} + \ldots + \frac{u^{\rho_i}}{\rho_i},$$

$$|\log(1-u) + P_{\rho_i}(u)| < b|u|^{\rho_i} \qquad (b \text{ const. positive convenable}),$$

$$\left|R_{\rho_i}\left(\frac{z}{\alpha_i}\right)\right| < e^{b\left(\frac{r}{r_i}\right)^{\rho_i}}.$$

2° Pour $i \leqq N$; quand $r_i \geqq r$,

$$1 + \frac{r}{r_i} < e^{\frac{r}{r_i}} < e,$$

$$\left|R_{\rho_i}\left(\frac{z}{\alpha_i}\right)\right| < e^{2 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{\rho_i}} < e^{b \log \rho_i} \quad (³),$$

et, si $r_i < r$,

$$\left|R_{\rho_i}\left(\frac{z}{\alpha_i}\right)\right| < \left(1 + \frac{r}{r_i}\right) e^{b\left(\frac{r}{r_i}\right)^{\rho_i}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{\rho_i}\right)} < e^{b_1\left(\frac{r}{r_i}\right)^{\rho_i} \log \rho_i}$$

(¹) *Comparez* P. Boutroux, *loc. cit.*, p. 96.

(²) L'hypothèse de M. Boutroux pour $k = 1$ est alors comprise dans la nôtre.

(³) D'après $\frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{\rho_i} < \int_1^{\rho_i} \frac{dx}{x} = \log \rho_i$.

(b_1 constante positive convenable). D'où

$$(7) \qquad |\Phi(z)| < \mathrm{A}\, e^{b_2 \log \sigma_{\mathrm{N}} \sum \left(\frac{r}{r_i}\right)^{\rho_i} + b_2 \sum_1^{\mathrm{N}} \log \rho_i},$$

avec $r_{\mathrm{N}} \leqq r(1+k')$, σ_{N} étant la plus grande des quantités $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{\mathrm{N}}$: $\sigma_{\mathrm{N}} \leqq \theta_2 \log \mathrm{N}$.

Ceci posé, $\sum \left(\frac{r}{r_i}\right)^{\rho_i}$ est uniformément convergent : en effet, il suffit pour cela que, dès que i est assez grand, r étant donné, l'on ait

$$\left(\frac{r_i}{r}\right)^{\rho_i} \geqq i^{1+\eta} \qquad (\eta \text{ positif fixe}),$$

$$\rho_i \geqq (1+\eta) \frac{\log i}{\log r_i - \log r},$$

ou encore, quand r_i est assez grand,

$$\rho_i \geqq (1+\varepsilon_1) \frac{\log i}{\log r_i}.$$

Ici, d'après (4), il suffira

$$\rho_i \geqq (1+\varepsilon_1) \frac{\sigma \log i}{\log_{k+1} i},$$

ce qui a lieu, d'après l'hypothèse.

Alors

$$b_2 \sum_1^{\mathrm{N}} \log \rho_i < b_1 \mathrm{N} \log \sigma_{\mathrm{N}} < b_1 \mathrm{N} \log(\theta_2 \log \mathrm{N}) < \mathrm{N}^{1+\varepsilon_2}.$$

D'après (4),

$$r_{\mathrm{N}}^{\sigma} > \log_k \mathrm{N},$$

$$\mathrm{N} < e_k(r_{\mathrm{N}}^{\sigma}) < e_k\left\{[r(1+k')]^{\sigma+\varepsilon_3}\right\} < e_k(r^{\sigma+\varepsilon_4}),$$

$$b_2 \sum_1^{\mathrm{N}} \log \rho_i < \mathrm{N}^{1+\varepsilon_2} < e_k(r^{\sigma+\varepsilon'_4}).$$

Il suffit donc de vérifier que

$$b_2 \log \sigma_{\mathrm{N}} \sum \left(\frac{r}{r_i}\right)^{\rho_i} < e_k(r^{\sigma+\varepsilon_5}),$$

ou encore que

$$\sum\left(\frac{r}{r_i}\right)^{\rho_i} < e_k(r^{\sigma+\varepsilon_6}) \quad (^1). \tag{8}$$

Or, d'après (4),

$$\sum\left(\frac{r}{r_i}\right)^{\rho_i} < \sum\left[\frac{r}{(\log_k i)^{\frac{1}{\sigma}}}\right]^{\rho_i} < \sum\left[\frac{r}{(\log_k i)^{\frac{1}{\sigma}}}\right]^{\theta_2 \log i} + \sum\left[\frac{r}{(\log_k i)^{\frac{1}{\sigma}}}\right]^{\theta_1 \log i}.$$

La série

$$\sum\left[\frac{r}{(\log_k i)^{\frac{1}{\sigma}}}\right]^{\theta_3 \log i},$$

où θ_3 est fixe et $k \geqq 1$, rentre dans le type des séries

$$B = \sum\left[\frac{r}{(\log_k i)^{\frac{1}{\sigma+\varepsilon_7}}}\right]^{\theta_3 \log i}.$$

Je vais trouver une limite supérieure du module de B en fonction de r.

Soient

$$\theta_3 \log i_1, \quad \theta_3 \log(i_1+1), \quad \ldots, \quad \theta_3 \log(i_1+\lambda),$$

ceux des nombres $\theta_3 \log i$ compris entre l'entier m et l'entier $m+1$:

$$m \leqq \theta_3 \log i_1 < \theta_3 \log(i_1+1) < \ldots < \theta_3 \log(i_1+\lambda) \leqq m+1,$$

d'où

$$\log(i_1+\lambda) - \log i_1 \leqq \frac{1}{\theta_3}, \qquad 1 + \frac{\lambda}{i_1} \leqq e^{\frac{1}{\theta_3}},$$

$$\log(i_1+\lambda+1) - \log(i_1-1) > \frac{1}{\theta_3}, \qquad 1 + \frac{\lambda+2}{i_1-1} > e^{\frac{1}{\theta_3}},$$

$$\lambda \leqq i_1\left(e^{\frac{1}{\theta_3}} - 1\right), \qquad \lambda > \left(e^{\frac{1}{\theta_3}} - 1\right)(i_1-1) - 2,$$

d'où

$$\lambda = i_1\left(e^{\frac{1}{\theta_3}} - 1\right)(1+\varepsilon_8) \leqq \lambda_1 e^{\frac{m+1}{\theta_3}}, \qquad \lambda_1 \text{ const.};$$

---

(1) On sait, en effet, que $e_k(r^{\sigma+\varepsilon'_6})\, e_k(r^{\sigma+\varepsilon''_6}) = e_k(r^{\sigma+\varepsilon'''_6})$ dès que r est assez grand, $k \geqq 1$. Les $\varepsilon_j^{(n)}$ désignent toujours des quantités que l'on peut prendre aussi petites qu'on veut dès que r est assez grand.

on aura

$$B \leqq \sum_m \frac{r^{m+1}}{\left(\log_{k-1}\frac{m}{\theta_3}\right)^{\frac{m}{\sigma}(1+\varepsilon_9)}} \lambda_1 e^{\frac{m+1}{\theta_3}} = \sum_m \frac{r^{m+1}}{[\log_{k-1}(m+1)]^{\frac{m+1}{\sigma}(1+\varepsilon'_9)}} \leqq e_k(r^{\sigma+\varepsilon_{10}}),$$

quel que soit θ_3, le dernier membre étant (¹) une fonction entière d'ordre $(k-1, \sigma)$. Dès lors, $\sum\left(\frac{r}{r_i}\right)^{\rho_i}$ a une limite supérieure de même forme, ce qui démontre le théorème.

Si k et σ sont finis, $\Phi(z)$ n'est pas d'ordre transfini [note (²), p. 266]. Soit (k_1, ρ_1) son ordre, supposé non fini (²); on pourra prendre, d'après ce qu'on a vu (p. 271), $k = k_1$, $\sigma = \rho_1 - \varepsilon$. Donc, d'après (3):

Corollaire. — *Si k et σ sont finis, l'ordre de $\Phi(z)$ n'est pas transfini; soit (k_1, ρ_1) l'ordre de $\Phi(z)$ supposé non fini; on a*

$$r_i > (\log_{k_1} i)^{\frac{1}{\rho_1+\varepsilon'}}$$

dès que i est assez grand, et, pour une infinité de valeurs de r_i,

$$r_i \leqq (\log_{k_1} i)^{\frac{1}{\rho_1-\varepsilon'}}. \tag{9}$$

Réciproquement, si ces deux inégalités ont lieu pour un produit canonique, il est d'ordre (k_1, ρ_1).

(¹) Ceci fait penser que les séries

$$C = \sum\left(\frac{r}{(\log_k i)^{\frac{1}{\sigma+\varepsilon_7}}}\right)^{\theta_3 \log_p i}$$

ont leur module au plus égal à $e_{k-p+1}(r^{\sigma+\varepsilon})$ dès que r dépasse une certaine limite, ce qui est vrai pour $p = 0$ ou 1.

(²) Dans le cas où cet ordre serait fini, on a un théorème analogue (*voir* Borel, *Leçons sur les fonctions entières,* Paris, 1900, p. 60 et 74). Il reste toutefois à préciser ce théorème pour le cas d'ordre nul.

Quand $\rho = 0$, (9) est remplacé par

$$r_i \leqq (\log_{k-1} i)^{\frac{1}{\lambda}} \quad (\lambda \text{ aussi grand qu'on veut}). \tag{9 bis}$$

Remarque. — On voit ainsi qu'il y a correspondance complète entre l'expression (k_1, ρ_1) et les plus petits des nombres k et σ pour lesquels

$$r_i > (\log_k i)^{\frac{1}{\sigma+\varepsilon}}$$

a lieu, dans les produits de facteurs primaires d'ordre (k_1, ρ_1) considérés au théorème I, et que j'appellerai (provisoirement) *canoniques* (¹).

Supposant alors une fonction entière $F(z)$, d'ordre (k, ρ), sous la forme

$$F(z) = \Phi(z)\, e^{G(z)}, \tag{10}$$

où $\Phi(z)$ est un produit canonique, et $G(z)$ une fonction entière; l'ordre (k_1, ρ_1) de la fonction $\Phi(z)$ sera appelé, par définition, l'*ordre réel* de $F(z)$, tandis que (k, ρ) est l'*ordre apparent* de $F(z)$.

Dans un produit canonique, l'ordre réel est égal à l'ordre apparent.

Ceci permet d'énoncer le résultat suivant :

Théorème II. — *L'ordre réel d'une fonction entière d'ordre non transfini n'est jamais supérieur à l'ordre apparent. Il peut lui être inférieur* (²).

Autrement dit : si

$$F(z) = \Phi(z)\, e^{G(z)},$$

où $\Phi(z)$ est un produit canonique d'ordre (k_1, ρ_1) et $G(z)$ une fonction entière, soit (k, ρ) l'ordre de $F(z)$; on a

$$(k, \rho) \geqq (k_1, \rho_1).$$

Il suffit (³) d'envisager les fonctions entières d'ordre infini non transfini.

(¹) Le produit de deux produits canoniques Φ et Φ_1 est-il forcément canonique? On voit de suite que non pour le cas où Φ et Φ_1 sont d'ordre finis ρ, ρ_1, avec, par exemple, $\rho - \rho_1 = 3$. De même pour le cas où Φ est d'ordre infini non transfini et Φ_1 d'ordre fini.

(²) Exemple : cas où $\Phi(z) = 1$. $\Phi(z)$ n'est jamais d'ordre transfini à cause de (3) et du théorème I.

(³) Borel, *Leçons sur les fonctions entières*, p. 74.

Je suppose [1]

$$(k_1, \rho_1) > (k, \rho).$$

On peut trouver σ fixe $< \rho_1$, et tel que

$$(k_1, \rho_1) > (k_1, \sigma) > (k, \rho).$$

L'inégalité (3) est applicable à toute fonction entière d'ordre non transfini, et, pour une infinité de valeurs de r_i [corollaire du théorème I, formule (9)]

$$r_i^{\rho_1 - \varepsilon'} \leqq \log_{k_1} i,$$

puisque $\Phi(z)$ est d'ordre (k_1, ρ_1).

Mais (3) donne pour $F(z)$

$$r_i^{\rho + \varepsilon_1} > \log_k i,$$
$$i < e_k(r_i^{\rho+\varepsilon_1}) < e_{k_1}(r_i^{\sigma+\varepsilon_1});$$

pour une infinité de valeurs de r_i

$$r_i^{\sigma+\varepsilon_1} > \log_{k_1} i \geqq r_i^{\rho_1 - \varepsilon'},$$

d'où

$$\sigma + \varepsilon_1 > \rho_1 - \varepsilon', \qquad \varepsilon_1 + \varepsilon' > \rho_1 - \sigma,$$

ce qui est impossible pour r_i assez grand. Donc

$$(k_1, \rho_1) \leqq (k, \rho). \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

On en déduit le théorème suivant :

THÉORÈME III. — *Soient deux fonctions entières* F *et* F_1 *d'ordres* (k, ρ), (k_1, ρ_1) *non transfinis : si* $(k, \rho) \geqq (k_1, \rho_1)$, *et si* F *a ses ordres réels et apparents égaux, le produit* FF_1 *a son ordre réel égal à son ordre apparent, qui est* (k, ρ).

En effet, soit (k_2, ρ_2) l'ordre de FF_1 ; on a

$$|F|_{z=r} \leqq e_{k+1}(r^{\rho+\varepsilon}), \qquad |F_1|_{z=r} \leqq e_{k_1+1}(r^{\rho_1+\varepsilon}),$$
$$|FF_1|_{z=r} \leqq e_{k+1}(r^{\rho+3})^2 \leqq e_{k+1}(r^{\rho+\varepsilon_1}).$$

Donc déjà

$$(k_2, \rho_2) \leqq (k, \rho).$$

---

[1] Si $\Phi(z)$ était d'ordre $(k_1, 0)$, d'où $k_1 > k$, on raisonnerait en considérant $\Phi(z$ comme d'ordre (k_1', ρ_1), ρ_1 étant aussi grand qu'on veut et $k_1' = k_1 - 1$; il suffit de remplacer partout k_1 par k_1'.

Je forme, ce qui est possible (théorèmes I et II), un produit canonique Φ_2 ayant pour zéros les zéros de $F_2 = FF_1$. L'ordre réel (k_3, ρ_3) de Φ_2 est l'ordre réel de F_2; d'après le théorème précédent,

$$(k_3, \rho_3) \leqq (k_2, \rho_2) \leqq (k, \rho).$$

Mais, d'après la formule (3), si α_{n+j} est le $(n+j)^{\text{ième}}$ zéro de F_2,

$$r_{n+j}^{\rho_3+\varepsilon_3} > \log_{k_3}(n+j).$$

On peut toujours supposer que α_{n+j} est aussi le $n^{\text{ième}}$ zéro de F, et que celui-ci est choisi de manière à satisfaire à l'inégalité (9) :

$$r_{n+j}^{\rho-\varepsilon''} \leqq \log_k n.$$

On en conclurait

$$r_{n+j}^{\rho_3+\varepsilon_3} > \log_{k_3}(n+j) > e_{k-k_3}[\log_k n] \geqq e_{k-k_3}[r_{n+j}^{\rho-\varepsilon''}],$$

ce qui montre d'abord que $k \leqq k_3$, d'où $k = k_3$, puis que $|\rho_3 - \rho|$, nombre fixe, est aussi petit qu'on veut dès que r_{n+j} est assez grand; donc

$$(k_3, \rho_3) = (k_2, \rho_2) = (k, \rho) \quad (^1).$$ C.Q.F.D.

Corollaire I. — *Soient Φ, Φ_1 deux produits canoniques de facteurs primaires d'ordres (k, ρ), (k_1, ρ_1), avec $(k, \rho) \geqq (k_1, \rho_1)$. L'ordre réel du produit $\Phi\Phi_1$ et son ordre apparent sont égaux et égaux à (k, ρ).*

Corollaire II. — *Soient deux fonctions entières* F *et* F_1 *d'ordres réels (k', ρ') et (k'_1, ρ'_1) non transfinis avec $(k', \rho') \geqq (k'_1, \rho'_1)$; l'ordre réel du produit* FF_1 *est (k', ρ').*

---

(1) La démonstration subsiste évidemment si F_1 est une fonction entière d'ordre fini; de même si F et F_1 sont d'ordres finis.

Le théorème III et ses corollaires sont donc également vrais pour les fonctions entières d'ordre fini.

De même si ρ, ρ_2 ou ρ_3 sont nuls ou infinis, car il suffira de raisonner en les supposant aussi petits ou aussi grands qu'on veut suivant les cas.

Par exemple, quand $\rho = 0$, on aura pour une infinité de valeurs de n

$$r_{n+j}^{\lambda} \leqq \log_{k-1} n$$

si grand que soit λ dès que n est assez grand et

$$r_{n+j}^{\rho_3+\varepsilon_3} > e_{k-k_3-1}[\log_{k-1} n] \geqq e_{k-k_3-1}(r_{n+j}^{\lambda}).$$

Car

$$F = \Phi e^{G}, \qquad F_1 = \Phi_1 e^{G_1},$$

Φ et Φ_1 étant des produits canoniques; et il suffit d'appliquer le corollaire I au produit $\Phi\Phi_1$.

On déduit de là diverses conséquences :

Soient Φ_2, Φ_3 deux produits canoniques dont le premier Φ_2 admet tous les facteurs $\left(1 - \frac{z}{\beta_i}\right)$ du deuxième Φ_3 avec un ordre de multiplicité au moins égal. Je dirai *provisoirement* que Φ_3 est *un diviseur* de Φ_2.

D'abord Φ_3 est d'ordre $\leqq (k, \rho)$, (k, ρ) étant l'ordre de Φ_2, car, si α_i est le $i^{\text{ème}}$ zéro de Φ_2, on a

$$r_i^{\rho+\varepsilon} > \log_k i,$$

d'après (3),

$$\alpha_i = \beta_j, \qquad j \leqq i,$$

$$|\beta_j|^{\rho+\varepsilon} > \log_k i > \log_k j,$$

en sorte que, d'après le théorème I, Φ_3 est d'ordre $\leqq (k, \rho)$. Donc :

Corollaire III. — *Tout produit canonique Φ_3 qui divise un produit canonique Φ_2 d'ordre (k, ρ) est d'ordre $\leqq (k, \rho)$.*

Je forme un produit canonique Φ_4 tel que $\Phi_3\Phi_4$ ait exactement les mêmes zéros que Φ_2 avec le même ordre de multiplicité : Φ_4 est encore un diviseur de Φ_2, par suite d'ordre $\leqq (k, \rho)$. Je dirai que Φ_3 et Φ_4 sont des *facteurs complémentaires* de Φ_2, $\Phi_3\Phi_4$ ayant son ordre réel égal à (k, ρ), l'un des deux facteurs Φ_3 ou Φ_4 a son ordre égal à (k, ρ), d'après le corollaire I. Donc :

Corollaire IV. — *De deux facteurs complémentaires d'un produit canonique Φ_2, d'ordre (k, ρ), l'un est d'ordre (k, ρ), l'autre d'ordre $\leqq (k, \rho)$.*

Je forme le produit canonique Ψ admettant à la fois les zéros des produits canoniques Φ et Φ_1, chacun avec son ordre de multiplicité maximum pour Φ et Φ_1 : Ψ a évidemment pour facteurs Φ et Φ_1; tout produit canonique jouissant de la même propriété est divisible par Ψ : Ψ sera le *plus petit commun multiple de Φ et Φ_1*.

Si Φ et Φ_1 sont d'ordres (k, ρ), (k_1, ρ_1), avec $(k, \rho) \geqq (k_1, \rho_1)$, $\Phi\Phi_1$ est d'ordre réel et apparent (k, ρ) d'après le corollaire I. Soit

$$\Phi\Phi_1 = \Phi_5 e^{G},$$

où Φ_5 est un produit canonique d'ordre (k, ρ), G une fonction entière ou un polynome.

Ψ divise Φ_5 et est d'ordre $\leqq(k, \rho)$; mais il est divisible par Φ, et, par suite, d'ordre $\geqq(k, \rho)$, d'après le corollaire III. Donc Ψ est d'ordre (k, ρ).

De même pour $3, 4, \ldots$ produits canoniques. Donc :

Corollaire V. — *Le plus petit commun multiple de λ produits canoniques a son ordre égal au plus grand des ordres de ces λ produits canoniques.*

De la même manière on définira le *plus grand commun diviseur de deux ou plusieurs produits canoniques.*

Le plus grand commun diviseur de deux produits canoniques est un produit canonique formé avec tous les zéros communs à ces deux produits, affectés de l'ordre de multiplicité minimum.

Corollaire VI. — *Le plus grand commun diviseur de λ produits canoniques a son ordre au plus égal au plus petit des ordres de ces λ produits.*

Remarque [1]. — On peut établir pour les fonctions d'ordre o et d'indice 1 (c'est-à-dire d'ordre $(0, 1, \rho)$) un théorème analogue au théorème I :

Si, à partir d'une certaine valeur de i, on a

$$|\alpha_i| = r_i > e^{\frac{2i}{\sigma}},$$

quel que soit i, pour le produit

$$\Phi(z) = \prod_1^\infty \left(1 - \frac{z}{\alpha_i}\right),$$

(1) Depuis que ces lignes ont été écrites, j'ai eu connaissance de résultats étendus obtenus dans la classification et l'étude des racines des fonctions entières d'ordre zéro par MM. E. Lindelöf, *Bull. des Sc. Math.*, 2^me^ série, t. XXVII, 1903, p. 213-226 et Ruben Mattson, *Contributions à la théorie des fonctions entières*, Thèse pour le Doctorat, soutenue le 6 décembre 1905, Upsal, Almqvist et Wiksell, 1905, p. 49 à la fin.

on a, dès que $r = |z|$ est assez grand,

$$|\Phi(z)| \leqq r^{\frac{\sigma+\varepsilon}{4}\log r}.$$

Ici la démonstration est simple; je pose $q = e^{\frac{2}{\sigma}} > 1$: si λ est une constante,

$$\lambda |\Phi| \leqq \prod_1^\infty (1 + rq^{-i}) = F(q, r) = 1 + \sum_1^\infty b_n r^n;$$

$$F(q, rq) = 1 + \sum_1^\infty b_n q^n r^n$$

$$= (1+r)\prod_1^\infty (1 + rq^{-i}) = (1+r)F(q, r) = (1+r)\left(1 + \sum_1^\infty b_n r^n\right),$$

d'où

$$b_1 q = 1 + b_1, \qquad b_2 q^2 = b_2 + b_1, \qquad \ldots, \qquad b_n q^n = b_n + b_{n-1}, \qquad \ldots,$$

$$b_1 = \frac{1}{q-1}, \qquad b_2 = \frac{b_1}{q^2 - 1}, \qquad \ldots, \qquad b_n = \frac{b_{n-1}}{q^n - 1}, \qquad \ldots,$$

$$q^{-\frac{n(n+1)}{2}} < b_n = \frac{1}{(q-1)(q^2-1)\ldots(q^n-1)} \leqq \frac{(1+\beta)^n}{q^{\frac{n(n+1)}{2}}}, \qquad \beta \text{ positif fixe},$$

si

$$q^j - 1 \geqq \frac{q^j}{1+\beta},$$

$$\beta q^j \geqq 1 + \beta,$$

$$q^j = e^{\frac{2j}{\sigma}} \geqq 1 + \frac{1}{\beta},$$

ce qui est toujours possible.

Alors, quand n est assez grand,

$$b_n^{-1} = e^{\frac{n^2}{2}(\log q)(1+\varepsilon_1)} = e^{\frac{n^2}{\sigma}(1+\varepsilon_1)}.$$

D'après un lemme antérieur (¹), on a bien

$$|\Phi| \leqq \lambda^{-1}\left(1 + \sum_1^\infty b_n r^n\right) \leqq r^{\frac{\sigma+\varepsilon}{4}\log r}.$$

(¹) *Journal de l'École Polytechnique, loc. cit.*, lemme I, p. 34.

Soit alors une fonction entière d'ordre $(0, 1, \rho)$: il y a une infinité de valeurs de r indéfiniment croissantes pour lesquelles on n'a pas $\sigma + \varepsilon < \rho - \varepsilon'$ d'après un lemme antérieur [1], c'est-à-dire pour lesquelles on a $\sigma + \varepsilon \geqq \rho - \varepsilon'$.

Pour établir au sujet des fonctions d'ordre $(0, 1, \rho)$ un corollaire analogue à celui du théorème I, il faudrait une inégalité analogue à (3). La méthode de MM. Hadamard et Schou, convenablement appliquée, conduit seulement à l'inégalité

$$r_n > e^{\frac{n}{\rho + \varepsilon_2}}.$$

On en conclut l'existence pour toute fonction d'ordre $(0, 1, \rho)$ d'un nombre fixe σ_1 minimum tel que

$$r_i > e^{\frac{2i}{\sigma_1 + \varepsilon'}};$$

d'après ce qui précède, $\sigma_1 \geqq \rho - \varepsilon_3$; mais l'on sait seulement que $\sigma_1 \leqq 2(\rho + \varepsilon_4)$. On a, par suite, pour une infinité de valeurs de i indéfiniment croissantes,

$$r_i \leqq \varepsilon^{\frac{2i}{\rho - \varepsilon}}.$$

Finalement, on obtient ainsi une inégalité assez analogue à (9), mais non une égalité analogue à (3).

IV.

Je vais maintenant m'occuper d'étendre aux fonctions entières d'ordre non transfini un théorème connu [2] sur la limite inférieure du module d'une fonction entière pour une infinité de valeurs de r indéfiniment croissantes; mais j'envisagerai de préférence la forme perfectionnée de ce théorème que j'ai indiquée antérieurement [3],

---

(1) *Ibid.*, lemme II, p. 36.

(2) HADAMARD, *Mémoire couronné, Journal de Mathématiques*, 1893, p. 204; BOREL, *Acta mathematica*, t. XX, p. 378 et *Leçons sur les fonctions entières*, p. 79; A. KRAFT, *Ueber ganze transcendente Functionen von unendlicher Ordnung, Thèse*, Göttingen, 1903.

(3) *Journal de Mathématiques*, 1902, p. 339.

en tenant compte des heureuses modifications introduites par M. Wiman (¹).

J'ai indiqué pour les fonctions entières d'ordre fini quelconque cet énoncé :

Étant donné un produit canonique G(z) *de facteurs primaires d'ordre* ρ *fini, et un nombre positif arbitraire* ε, *si l'on décrit autour de chaque zéro un cercle de rayon* η *fini* ($\eta \leqq 1$ *arbitraire*), *en tout point extérieur à ces cercles on a, pour* $|z|$ *assez grand, l'inégalité*

$$|G(z)| > e^{-r^{\rho+\varepsilon}}.$$

La même inégalité a lieu pour une fonction entière $f(z)$ *quelconque d'ordre fini,* ρ *désignant alors son ordre apparent.*

Cet énoncé a amené la très ingénieuse remarque suivante de M. Wiman (²) :

« Si l'on décrit autour de chaque zéro un cercle de rayon $r_n^{-\tau}$, τ désignant un nombre positif aussi grand que l'on veut, on a, pour r assez grand, en tout point extérieur à ces cercles,

$$|G(z)| > e^{-r^{\rho+\varepsilon}},$$

ε étant un nombre positif arbitrairement petit. Notre démonstration de ce théorème a été publiée par M. B. Lindgren dans sa thèse : *Sur le cas d'exception de M. Picard*, p. 22 (Upsala, 1903). Dans le théorème analogue de M. E. Maillet (*Journal de Mathématiques*, 5ᵉ série, t. VIII, 1902), les cercles exclus sont tous de même rayon η. Or il peut très bien arriver que, quelque petit que soit η, ces cercles remplissent tout le plan, dès que r dépasse une certaine valeur. En effet, la preuve que donne M. Maillet permet de préciser son théorème *pour les fonctions de genre supérieur à zéro.* »

Les cercles de rayon η fixe $\leqq 1$ décrits autour des n premiers zéros comme centres ont une surface totale $\Sigma \leqq \pi\eta^2 n$; les cercles analogues

(¹) *Sur le cas d'exception dans la théorie des fonctions entières* (*Arkiv. för Matematik, etc.*, t. I, 10 février 1904, p. 337).

(²) *Loc. cit.*

pour les autres zéros sont extérieurs au cercle de rayon $r_n - \eta$ ayant son centre à l'origine, de surface

$$S = \pi(r_n - \eta)^2,$$

avec

$$r_n^{\rho+\varepsilon} > n, \qquad r_n > n^{\frac{1}{\rho+\varepsilon}},$$

et mon *énoncé* n'exclut sûrement du plan qu'une surface infiniment petite par rapport à la surface totale que tant que $\rho < 2$, car alors

$$\frac{\Sigma}{S} \leqq \frac{\pi\eta^2 n}{\pi\left(n^{\frac{1}{\rho+\varepsilon}} - \eta\right)^2},$$

qui a pour limite zéro quand n croît indéfiniment.

Le contraire peut arriver, mais seulement pour des fonctions d'ordre $\geqq 2$, et alors mon énoncé peut être parfois incomplet *au point de vue des applications* (¹).

Quant à ma *démonstration*, elle établit, je crois, ainsi que le dit, semble-t-il, M. Wiman, un résultat plus complet que ne l'indique l'énoncé, à condition de regarder, dans la deuxième Partie de cette démonstration (cas où $\rho \geqq 1$), la quantité désignée par η comme fonction de r_n, rien n'étant précisé au sujet de la signification de η, qui, ai-je dit (*Journal de Mathématiques*, 1902, p. 342), doit être *convenablement choisi*. Mais la remarque de M. Wiman spécifie des valeurs de η *convenables* bien plus avantageuses que celle indiquée dans mon énoncé, et applicables en tout cas.

Je n'insisterai d'ailleurs pas, car la modification indiquée par M. Wiman précise la propriété d'une façon assez heureuse pour que je l'adopte sans hésitation.

Ainsi que paraît l'indiquer M. Wiman, en suivant la marche que j'ai employée, on établit, grâce à de légères modifications, le théorème perfectionné; il suffit de faire en leur place les quelques changements suivants (avec les mêmes notations, *loc. cit.*, p. 341) :

(¹) Quand $1 \leqq \rho < 2$, l'énoncé peut présenter encore des imperfections dans certains cas en vue des applications; je n'insiste pas.

η étant égal à $r_i^{-\tau}$ (i assez grand) [1],

$$|A| > \frac{(r_1 r_2 \ldots r_m)^{-\tau m}}{(2r)^m} > \frac{r_m^{-\tau m}}{(2r)^m} \geqq \frac{1}{(2r)^{m(\tau+1)}},$$

$$|B| > \left(\frac{1}{2}\right)^{n-m},$$

$$|C| > e^{-2r \sum\limits_{n+1}^{\infty} i^{-\frac{1}{\sigma}}},$$

$$\sum_{n+1}^{\infty} i^{-\frac{1}{\sigma}} < \frac{\sigma}{1-\sigma} n^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} = \frac{\sigma}{1-\sigma}(n+1)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}} < \frac{2\sigma}{1-\sigma}(2r)^{\sigma-1},$$

$$G(z) = |ABC| > \frac{1}{(2r)^{m(\tau+1)}} \frac{1}{2^{n-m}} e^{-(2r)^\sigma \frac{2\sigma}{1-\sigma}} = e^{-\lambda},$$

avec

$$\lambda = m(\tau+1)\log(2r) + (n-m)\log 2 + (2r)^\sigma \frac{2\sigma}{1-\sigma}$$

$$= m\tau \log 2 + m(\tau+1)\log r + n \log 2 + (2r)^\sigma \frac{2\sigma}{1-\sigma}.$$

D'après $m \leqq n \leqq (2r)^\sigma$,

$$\lambda < r^\sigma \left[2^\sigma \tau \log 2 + (\tau+1)\, 2^\sigma \log r + 2^\sigma \log 2 + \frac{2^{\sigma+1}\sigma}{1-\sigma}\right].$$

Quand r est assez grand, on peut prendre ε fixe et positif assez petit pour que, τ étant un nombre positif donné quelconque, $\lambda < r^{\sigma+\varepsilon}$, ce qui démontre le théorème quand $\sigma < 1$ ou $\rho < 1$ [2].

Soit maintenant $\rho \geqq 1$, $\eta = r_i^{-\tau}$, $z^q = y$ (*loc. cit.*, p. 342).

---

(1) On néglige au besoin dans $G(z)$ un facteur fini.

(2) C'est M. G. Remoundos qui m'a signalé le travail de M. Wiman : je l'en remercie bien vivement. M. G. Remoundos a indiqué un autre perfectionnement (Voir *Intermédiaire des Mathématiciens,* 1904, p. 202) de mon énoncé. Ainsi les mêmes calculs montreront, par exemple, pour $\rho < 1$, que l'on peut prendre $\eta = e^{-r_i^{\varepsilon_1}}$ (ε_1 fixe positif) : alors

$$|A| > \frac{e^{-mr_m^{\varepsilon_1}}}{(2r^m)} > e^{-m(2r)^{\varepsilon_1}}(2r)^{-m}.$$

Il suffira de choisir ensuite $\varepsilon - \varepsilon_1$ fini et positif.

On remarquera que σ est assujetti ici à la seule condition d'être $> \rho$, $\sigma - \rho$ pouvant être aussi petit qu'on veut, mais fixe. Tous les résultats s'appliquent donc aux fonctions entières d'ordre zéro, avec $\sigma = \varepsilon_2$.

Les cercles de rayon η dans le plan des z sont définis par

$$z = z_i + \eta e^{i\varphi}.$$

Il leur correspondra dans le plan des y les courbes C_i définies par

$$y = (z_i + \eta e^{i\varphi})^q, \qquad y_i = z_i^q,$$

et l'on peut toujours trouver τ_1 tel que

$$|y - y_i| = |(z_i + \eta e^{i\varphi})^q - z_i^q| > r_i^{-q\tau_1},$$

quel que soit r_i (i assez grand).

En effet, il suffit

$$|z_i^q| \left| \left(1 + \frac{\eta}{z_i} e^{i\varphi}\right)^q - 1 \right| > r_i^{-q\tau_1},$$
$$\left| \left(1 + \frac{\eta}{z_i} e^{i\varphi}\right)^q - 1 \right| > r_i^{-q(\tau_1+1)}.$$

Soit

$$z_i = r_i e^{i\theta},$$
$$\frac{\eta}{z_i} e^{i\varphi} = \eta r_i^{-1} e^{i(\varphi-\theta)} = \eta' e^{i\varphi'},$$

où

$$\eta' = r_i^{-(\tau+1)}, \qquad \varphi - \theta = \varphi'.$$

Il suffit

$$|(1 + \eta' e^{i\varphi'})^q - 1| > r_i^{-q(\tau_1+1)};$$

or

$$(1 + \eta' e^{i\varphi'})^q = 1 + q\eta' e^{i\varphi'}(1 + \varepsilon_1),$$

avec $|\varepsilon_1|$ aussi petit qu'on veut dès que r_i dépasse une certaine limite; il suffit

$$|(1 + \eta' e^{i\varphi'})^q - 1| = |q\eta' e^{i\varphi'}(1 + \varepsilon_1)| > \frac{q}{2} r_i^{-(\tau+1)} > r_i^{-q(\tau_1+1)};$$

il suffit donc finalement

$$\tau + 1 < q(\tau_1 + 1).$$

On peut prendre τ_1 assez grand pour que ceci ait lieu quel que soit le nombre positif τ donné *a priori*.

Dès lors, dans le plan des y, à l'extérieur des cercles de rayon $r_i^{-q\tau_1}$

et de centre y_i, *a fortiori* à l'extérieur des courbes C_i, on a

$$|\Phi(y)| = |F(z)| > e^{-|y|^{\frac{\rho+\varepsilon_2}{q}}} = e^{-r^{\rho+\varepsilon_2}}.$$

On en conclut que le théorème est vrai dans le plan des z à l'extérieur des cercles de centres

$$\alpha_i, \quad \alpha_i\omega, \quad \ldots, \quad \alpha_i\omega^{q-1},$$

et, de même, à l'extérieur des cercles de centres

$$\alpha_i, \quad \alpha_i\omega', \quad \ldots, \quad \alpha_i\omega'^{q'-1},$$

(où $\omega^q = 1$, $\omega'^{q'} = 1$), et de rayon $r_i^{-\tau}$.

Si

$$|\alpha_i(\omega^\alpha - \omega'^\beta)| > \gamma$$

$(0 < \alpha < q,\ 0 < \beta < q',\ \gamma$ fixe positif), ce qui est toujours possible pour i assez grand, le théorème est complètement établi pour $G(z)$.

Il s'étend de suite aux fonctions entières quelconques d'ordre fini.

Au lieu de distinguer le cas où $\rho < 1$ et celui où $\rho \geqq 1$, on peut aussi faire un raisonnement unique. La marche à suivre va être suffisamment indiquée à l'occasion du théorème analogue pour les fonctions entières d'ordre infini, théorème qui est compris *comme cas particulier* ainsi que les énoncés précédents dans le théorème suivant :

THÉORÈME IV. — *Étant donné un produit canonique $\Phi(z)$ de facteurs primaires d'ordre (k, ρ) non transfini ($k \geqq 0$, $\rho > 0$ si $k = 0$) et un nombre positif arbitraire ε; si l'on décrit autour de chaque zéro α_i comme centre un cercle Γ_i de rayon $\eta = e_{k_1}(r_i^\tau)^{-1}$, [avec (k_1, τ) quelconque $> (k, \rho)$ et $|\alpha_i| = r_i$], en tout point extérieur à ces cercles, dès que $r = |z|$ est assez grand, on a*

$$(11) \qquad |\Phi(z)| > e_{k_1+1}(r^{\tau_1})^{-1} \qquad [\tau_1 \text{ arbitraire, avec } (k_1, \tau_1) > (k, \rho)].$$

Soit $k > 0$, et

$$\Phi(z) = \prod^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\alpha_i}\right) e^{P_{\rho_i}\left(\frac{z}{\alpha_i}\right)} = \prod^{\infty} R_{\rho_i}.$$

Je rappelle que $\rho_i = \tau_i \log i$, où τ_i est assujetti à la seule condition de rester positif et compris entre des limites fixes θ_1, $\theta_2 > 0$ et $\neq \infty$, avec $\theta_1 < \theta_2$.

Je décompose ce produit $\Phi(z)$ en plusieurs produits partiels pour chacun desquels il suffit évidemment d'établir le théorème, d'après les propriétés des fonctions $e_k(r^\sigma)$ (pour $k \geqq 0$).

Je pose (¹)

$$\Phi = A_1 B_1 C_1,$$

où A_1, B_1, C_1 sont les produits correspondant aux racines telles que :

1° $r_i < (1-\theta)r$, θ positif fixe et petit;

2° $(1-\theta)r \leqq r_i \leqq (1+\theta')r$, θ' positif et fixe;

3° $(1+\theta')r < r_i$.

Cas de A_1 *et* B_1. — On a ici

$$\left|P_{\rho_i}\left(\frac{z}{\alpha_i}\right)\right| \leqq \frac{r}{r_i} + \frac{1}{2}\left(\frac{r}{r_i}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{\rho_i}\left(\frac{r}{r_i}\right)^{\rho_i} \leqq \rho_i r^{\rho_i},$$

quand $r_i \geqq 1$, et le produit Π_1 des facteurs exponentiels correspondant à A_1 et B_1 a son module au moins égal à

$$e^{-\sum \rho_i r^{\rho_i}}.$$

Soit

$$r_m \leqq (1+\theta')r < r_{m+1},$$

$$e^{-\sum\limits_1^m \rho_i r^{\rho_i}} > e^{-\theta_2 \log m \sum\limits_1^m r^{\rho_i}};$$

on a

$$\sum_1^m r^{\rho_i} < \sum_1^m r^{\theta_2 \log i} = \sum_1^m i^{\theta_2 \log r} < \int_1^{m+1} i^{\theta_2 \log r}\, di$$
$$< \left(i^{\theta_2 \log r + 1}\right)_1^{m+1} < (m+1)^{1+\theta_2 \log r}.$$

(¹) Je néglige dans la démonstration un nombre fini de facteurs pour lesquels certaines conditions, par exemple la condition (3), ne sont pas remplies.

Quand $k_1 > k$ on pourrait substituer à (11) une inégalité plus avantageuse que le lecteur trouvera de suite d'après le calcul des limites supérieures de $|\Pi'_1|$ et $|\Pi_2|$. Je n'insiste pas.

Ici, d'après (3),

$$r_i^{\rho+\varepsilon} > \log_k i,$$
$$i < e_k(r_i^{\rho+\varepsilon}),$$
$$m < e_k(r_m^{\rho+\varepsilon}) \leqq e_k[r^{\rho+\varepsilon}(1+\theta')^{\rho+\varepsilon}] < e_k(r^{\rho+\varepsilon'}),$$
$$(m+1)^{1+\theta_2 \log r} < [1 + e_k(r^{\rho+\varepsilon'})]^{1+\theta_2 \log r} < e_k(r^{\rho+\varepsilon''}),$$

dès que $k \geqq 1$. De même pour

$$\theta_2 \log m \sum_1^m r^{\rho_i}.$$

Finalement [1] le module de Π_1 est au moins égal à

$$e_{k+1}(r^{\rho+\varepsilon''})^{-1}.$$

Quant au produit des facteurs $1 - \frac{z}{\alpha_i}$, on a, pour A_1,

$$\left| 1 - \frac{z}{\alpha_i} \right| \geqq 1 - s_2 \qquad (s_2 < 1),$$
$$\left| \prod\nolimits_1' \right| = \prod \left| 1 - \frac{z}{\alpha_i} \right| \geqq (1 - s_2)^m = e^{m \log(1-s_2)} \geqq e_{k+1}(r^{\rho+\varepsilon_1})^{-1};$$

pour B_1, on remarque que

$$|\alpha_i - z| \geqq e_{k_1}(r_i^{\tau})^{-1} \geqq e_{k_1}[(1+\theta')^{\tau} r^{\tau}]^{-1} \geqq e_{k_1}(r^{\tau_2})^{-1},$$

où τ_2 fini positif $> \tau$.

$$\left| \prod\nolimits_2 \right| = \prod \left| 1 - \frac{z}{\alpha_i} \right| \geqq \frac{e_{k_1}(r^{\tau_2})^{-m}}{r_m^m} \geqq [r_m e_{k_1}(r^{\tau_2})]^{-m}.$$

---

[1] Pour $k = 0$, c'est-à-dire pour les fonctions entières d'ordre fini, on arrive au même résultat en remarquant que l'on peut faire $\rho_i = p$, où p est un entier fixe indépendant de i. On a

$$P_{\rho_i}\left(\frac{z}{\alpha_i}\right) < p\left(\frac{r}{r_i}\right) + p\left(\frac{r}{r_i}\right)^p,$$
$$\log \left| \prod\nolimits_1 \right| \leqq p\left(r \sum_1^m i^{-\frac{1}{\rho+\varepsilon}} + r^p \sum_1^m i^{-\frac{p}{\rho+\varepsilon}} \right),$$

d'après (3), et l'on somme par le même procédé.

La démonstration reste la même pour Π_1', Π_2 et Π_3.

Or

$$r_m \leqq (1 + \theta')r,$$

$$r_m\, e_{k_1}(r^{\tau_2}) \leqq e_{k_1}(r^{\tau_3}) \qquad (\tau_3 \text{ fini positif}),$$

$$m < e_k(r^{\rho+\varepsilon'}),$$

$$m \log[r_m\, e_{k_1}(r^{\tau_2})] < e_k(r^{\rho+\varepsilon'})\, e_{k_1-1}(r^{\tau_3}) < e_{k_1}(r^{\tau'_1}),$$

$$\left|\prod_2\right| \geqq e_{k_1+1}(r^{\tau_1})^{-1}$$

$$(\tau'_1,\ \tau_1 \text{ fixes arbitraires, mais} > \rho \text{ si } k = k_1).$$

Le théorème est ainsi complètement établi pour $A_1 B_1$, car

$$A_1 B_1 = \Pi_1 \Pi'_1 \Pi_2.$$

Cas de C_1. — On a pour C_1

$$\frac{r}{r_i} < \frac{1}{1+\theta'}.$$

De plus

$$\log R_{\rho_i} = -\left[\frac{1}{\rho_i+1}\left(\frac{z}{\alpha_i}\right)^{\rho_i+1} + \frac{1}{\rho_i+2}\left(\frac{z}{\alpha_i}\right)^{\rho_i+2} + \ldots\right]$$

$$|\log R_{\rho_i}| \leqq \frac{1}{\rho_i+1}\left(\frac{r}{r_i}\right)^{\rho_i+1}\left(1 + \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2} + \ldots\right),$$

où $\lambda = 1 + \theta'$ est une constante > 1, et

$$|\log R_{\rho_i}| \leqq \frac{1}{\rho_i+1}\left(\frac{r}{r_i}\right)^{\rho_i+1}\frac{\lambda}{\lambda-1},$$

$$|\log C_1| \leqq b \sum_{m+1}^{\infty} \frac{1}{\rho_i+1}\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{\rho_i+1} \leqq b \sum_{m+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{\rho_i+1}} \qquad (b \text{ const.}),$$

d'où

$$|\log C_1| \leqq b \sum_{m+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{\theta_1 \log i}} = b \sum_{m+1}^{\infty} i^{-\theta_1 \log\lambda} < b \int_m^{\infty} i^{-\theta_1 \log\lambda}\, di < b_1 \left|\left(i^{1-\theta_1 \log\lambda}\right)_m^{\infty}\right|,$$

$$(b_1 \text{ const.});$$

on peut supposer $1 < \theta_1 \log\lambda$, ce qu'on obtiendra par un choix convenable de λ, d'où

$$|\log C_1| < b_1.$$

Or ici

$$|C_1| = |e^{\log C_1}| \geqq e^{-|\log C_1|} > e^{-b_1},$$

ce qui démontre le théorème pour C_1. C. Q. F. D.

Corollaire I ([1]). — *Si l'on comprend chaque zéro α_i entre deux circonférences ayant leur centre à l'origine et de rayon $r_i \pm e_{k_1}(r_i^\tau)^{-1}$, (k_1, τ) arbitraire $> (k, \rho)$ et $|\alpha_i| = r_i$, en tout point extérieur à ces couronnes C_i, dès que $|z|$ est assez grand, on a encore*

$$|\Phi(z)| > e_{k_1+1}(r^{\tau_1})^{-1}, \qquad [(k_1, \tau_1) > (k, \rho)] \qquad (\tau_1 \text{ arbitraire}).$$

La surface totale de ces couronnes C_i est limitée supérieurement quand k ou k_1 est $\geqq 1$, ou quand $k = k_1 = 0$ avec $\tau > 1 + \rho$. Dans tous les cas, la surface totale des couronnes C_i comprises dans un cercle de rayon r ayant pour centre l'origine est aussi petite qu'on veut par rapport à l'aire de ce cercle, quand r est assez grand.

La surface totale des cercles Γ_i de rayon $e_{k_1}(r_i^\tau)^{-1}$ décrits autour de chaque zéro comme centre (théorème IV) est toujours limitée quand $(k_1, \tau) > (k, \rho)$.

Pour établir complètement ce corollaire, il suffit de s'assurer, quand k ou k_1 est $\geqq 1$, que les points z exclus de cette manière, c'est-à-dire pour lesquels

$$|r_i - r| \leqq e_{k_1}(r_i^\tau)^{-1},$$

points compris dans les couronnes C_i, remplissent une aire totale limitée, et de compléter la démonstration quand $k = k_1 = 0$.

Les couronnes C_i correspondant aux $p - \mu$ zéros qui suivent les μ premiers ont une surface totale

$$S_p = \pi \sum_{\mu+1}^{p} \{[r_i + e_{k_1}(r_i^\tau)^{-1}]^2 - [r_i - e_{k_1}(r_i^\tau)^{-1}]^2\},$$

([1]) Ce corollaire constitue une généralisation et une précision d'un théorème connu de M. Hadamard pour les fonctions entières d'ordre fini (*voir* Hadamard, *loc. cit.*, p. 204, et encore Borel, *Leçons sur les fonctions entières*, p. 79 et *Acta Mathematica*, t. XX, p. 378; A. Kraft, *loc. cit.*). L'épaisseur des couronnes C_i est limitée.

μ étant fini, mais assez grand pour que le corollaire s'applique aux zéros d'indice $\geqq \mu$. La surface exclue ainsi est

$$A + S_p,$$

où A est une constante positive;

$$A + S_p = A + 4\pi \sum_{\mu+1}^{p} r_i e_{k_1}(r_i^\tau)^{-1}.$$

Or, d'après (3),

$$r_i > (\log_k i)^{\frac{1}{\sigma}} \qquad (\sigma = \rho + \varepsilon),$$
$$e_{k_1}(r_i^\tau) > e_{k_1}\left[(\log_k i)^{\frac{\tau}{\sigma}}\right] > i^\lambda,$$

(λ fixe positif convenable > 1), si

$$e_{k_1-k}\left[(\log_k i)^{\frac{\tau}{\sigma}}\right] > (\log_k i)^{1+\varepsilon'},$$

ce qui a lieu quand $(k_1, \tau) > (k, \sigma)$. Dans cette hypothèse

$$A + S_p \leqq A + b \sum_{\mu+1}^{p} i^{-\lambda_1} < A + b \int_1^p i^{-\lambda_1}\, di < b_1,$$

b, b_1, λ_1 constantes, $\lambda_1 > 1$.

Quand $k_1 = k = 0$,

$$A + S_p = A + 4\pi \sum_{\mu+1}^{p} r_i^{-\tau+1}.$$

La série $\sum r_i^{-\tau+1}$ n'est sûrement convergente que si $\tau - 1 > \rho$.

Enfin soit $\rho + 1 > \tau > \rho$: il suffira d'observer que l'épaisseur $A_1 + 2\sum_{\mu+1}^{p} e_{k_1}(r_i^\tau)^{-1}$ des couronnes C_1 est toujours limitée, d'après (3), ce qui achève d'établir le corollaire. Par suite :

La surface totale des couronnes C_i *est limitée supérieurement quand* $(k_1, \tau) > (k, \rho)$ *avec* k *ou* $k_1 \geqq 1$, *et quand* $k = k_1 = 0$ *avec* $\tau > \rho + 1$.

Mais la surface totale des cercles Γ_i de rayon $r_i^{-\tau}$ décrits autour de chaque zéro est

$$A + \pi \sum r_i^{-2\tau} \leqq A + \pi \sum i^{-\frac{2\tau}{\sigma}} \qquad (\sigma = \rho + \varepsilon),$$

et cette aire est limitée quand $\tau > \rho$.

Par suite, d'après ce qui précède :

La surface totale des cercles de rayon $e_{k_1}(r_i^{\tau})^{-1}$ *est toujours limitée quand* $(k_1, \tau) > (k, \rho)$.

Le théorème IV et son corollaire I s'étendent à une fonction entière $F(z)$ quelconque d'ordre (k, ρ) :

$$F(z) = \Phi_1(z)\, e^{G(z)},$$

où $\Phi_1(z)$ est un produit canonique, $G(z)$ une fonction entière.

En effet, d'après le théorème II, on sait que $\Phi_1(z)$ est d'ordre $\leqq (k, \rho)$. Mais rien ne prouve que $e^{G(z)}$ soit d'ordre $\leqq (k, \rho)$ ou, *a fortiori*, que $G(z)$ soit d'ordre $\leqq (k - 1, \rho)$.

Je vais d'abord établir le lemme suivant :

Lemme I. — *En dehors des cercles* Γ_i, *quand* $k_1 = k$, *on a*

$$|e^{G(z)}| \leqq e_{k+1}(r^{\rho+\varepsilon}),$$

dès que $|z| = r$ *est assez grand.*

En effet, en dehors de ces cercles,

$$|F(z)| \leqq e_{k+1}(r^{\rho+\varepsilon'}), \qquad \Phi_1(z) \geqq e_{k+1}(r^{\rho+\varepsilon''})^{-1},$$

d'où

$$|e^{G(z)}| = |F\Phi_1^{-1}| \leqq e_{k+1}(r^{\rho+\varepsilon}). \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Ceci posé, je considère la fonction entière

$$G(z) = \sum^{\infty} b_m z^m,$$

z étant choisi en dehors des couronnes C_i. Soit [1]

$$z = r e^{i\theta}, \qquad b_m = \beta_m + i\gamma_m,$$
$$G(z) = P(r, \theta) + iQ(r, \theta),$$
$$P(r, \theta) = \sum r^m (\beta_m \cos m\theta - \gamma_m \sin m\theta),$$
$$Q(r, \theta) = \sum r^m (\gamma_m \cos m\theta + \beta_m \sin m\theta).$$

On a sur la circonférence C de rayon $r = |z|$:

$$2\pi\beta_0 = \int_0^{2\pi} P\, d\theta, \qquad 2\pi\gamma_0 = \int_0^{2\pi} Q\, d\theta,$$
$$\pi r^m b_m = \int_0^{2\pi} P e^{-im\theta}\, d\theta = i \int_0^{2\pi} Q e^{-mi\theta}\, d\theta.$$

Je divise [2] la circonférence C ayant pour centre l'origine en deux parties C_1, C_2, l'une sur laquelle $P = P_1$ est toujours positif, l'autre où $P = -P_2$ est toujours négatif. Ici

$$|e^{G(z)}| \leqq e_{k+1}(r^{\rho+\varepsilon}),$$
$$P_1 \leqq e_k(r^{\rho+\varepsilon}) \leqq e_k(r^{\rho_1}) \qquad (\rho_1 = \rho + \varepsilon).$$

On a

$$\left| \int_{C_1} P_1 e^{-im\theta}\, d\theta \right| \leqq \int_{C_1} P_1\, d\theta = I_1 \leqq 2\pi\, e_k(r^{\rho_1}),$$
$$\left| \int_{C_2} P_2 e^{-mi\theta}\, d\theta \right| \leqq \int_{C_2} P_2\, d\theta = I_2,$$
$$I_1 - I_2 = 2\pi\beta_0,$$
$$I_2 = I_1 - 2\pi\beta_0 < 4\pi\, e_k(r^{\rho_1})$$

pour r assez grand.

On en conclut

$$\pi r^m |b_m| = \left| \int_0^{2\pi} P e^{-im\theta}\, d\theta \right| < \int_0^{2\pi} |P|\, d\theta = I_1 + I_2 < \pi\, e_k(r^{\rho+\varepsilon_1}),$$

---

(1) Au besoin, *voir* Borel, *Leçons sur les fonctions entières*, page 3, et *Acta Math.*, t. XX, p. 366, A. Kraft, *loc. cit.*, p. 53.

(2) On reconnaîtra là une extension de la méthode si ingénieuse et si élégante suivie par M. Hadamard dans le cas où $k = 0$.

($\varepsilon_1 > \varepsilon$, ε, ε_1 fixes aussi petits qu'on veut dès que r dépasse une limite assez grande),

$$|b_m| < \frac{e_k(r^{\rho+\varepsilon_1})}{r^m}.$$

Si $k = 0$, $|b_m| = 0$ pour $m > \rho$ (résultat de M. Hadamard); si $k > 0$, faisons

$$r^{\rho+\varepsilon_1} = \log_{k-1} m:$$

quand ε_1 est pris entre ε_2 et $2\varepsilon_2$ (ε_2 analogue à ε_1), les valeurs de r déterminées par cette égalité sont comprises entre $(\log_{k-1} m)^{\frac{1}{\rho+\varepsilon_2}}$ et $(\log_{k-1} m)^{\frac{1}{\rho+2\varepsilon_2}}$, dont la différence croît indéfiniment avec m : il y en a donc parmi elles qui sont en dehors des C_i. Prenant une de celles-là, on a

$$|b_m| < \frac{e^m}{(\log_{k-1} m)^{\frac{m}{\rho+\varepsilon_1}}} < \frac{1}{(\log_{k-1} m)^{\frac{m}{\rho+\varepsilon_3}}}.$$

Donc :

LEMME II. — *La fonction* $G(z)$ *est d'ordre* $\leqq (k-1, \rho)$ *quand* $k > 0$ (¹).

Ceci posé, on aura dans tout le plan

$$|G(z)| \leqq e_k(r^{\rho+\varepsilon}),$$
$$|e^{G(z)}| \geqq e_{k+1}(r^{\rho+\varepsilon})^{-1}.$$

De même, en dehors des cercles Γ_i indiqués au théorème IV ($k_1 \neq k$ ou non),

$$\Phi(z) \geqq e_{k_1+1}(r^{\tau'_1})^{-1};$$

donc, en dehors de ces cercles,

$$F(z) \geqq e_{k_1+1}(r^{\tau_1})^{-1}.$$

COROLLAIRE II. — *Le théorème IV*, a fortiori, *le corollaire I, s'appliquent à une fonction entière quelconque d'ordre* (k, ρ) *non transfini.*

(¹) Ce lemme et le lemme III sont fondamentaux, aussi bien pour les fonctions entières d'ordre fini que pour les fonctions entières d'ordre infini non transfini.

Incidemment on remarquera que j'ai démontré ce lemme :

LEMME III. — *Soit* $G(z)$ *une fonction entière : si* $e^{G(z)}$ *est d'ordre* (k, ρ) *non transfini,* $G(z)$ *est d'ordre* $(k-1, \rho)$. (*Si* $k = 0$, $G(z)$ *est un polynome de degré* ρ).

Car, d'après les démonstrations des lemmes I et II, $G(z)$ est d'ordre $\leqq (k-1, \rho)$, et, si $G(z)$ était d'ordre $< (k-1, \rho)$, $e^{G(z)}$ serait d'ordre $< (k, \rho)$.

Je vais maintenant établir le lemme suivant, qui précise un lemme indiqué par moi antérieurement [1] :

LEMME IV. — *Soit la fonction entière*

$$F(z) = \sum_0^\infty a_m z^m,$$

où, dès que m dépasse une certaine limite μ *finie, pour une infinité de valeurs de m,*

$$|a_m|^{-1} \leqq (\log_k m)^{\left(\frac{1}{\rho}+\varepsilon\right)m},$$

c'est-à-dire une fonction d'ordre $\geqq (k, \rho)$.

On peut déterminer une suite indéfinie de couronnes circulaires D *ayant leur centre à l'origine et telles que sur toute circonférence concentrique comprise dans une de ces couronnes le maximum* M_r *du module de* $F(z)$ *soit* $\geqq e_{k+1}(r^{\rho-\varepsilon_1})$, ε_1 *fixe, positif, petit et arbitraire choisi* a priori.

La surface totale de ces couronnes D *est infinie.*

En effet, on a, pour une fonction entière quelconque,

$$|a_m| \leqq \frac{M_r}{r^m},$$

pour toute valeur de r assez grande. Si l'on donne à m une valeur telle que

$$|a_m|^{-1} \leqq (\log_k m)^{\left(\frac{1}{\rho}+\varepsilon\right)m},$$

[1] *Journal de l'École Polytechnique*, 1904 et 1905, p. 13.

et à r la valeur

$$r = (\log_k m)^{\frac{1}{\sigma}}, \qquad m = e_k(r^\sigma) \qquad (\sigma \text{ fixe} < \rho),$$

$$\mathrm{M}_r \geqq r^m \mid a_m \mid \geqq r^{e_k(r^\sigma) - \left(\frac{1}{\rho}+\varepsilon\right)\sigma\, e_k(r^\sigma)} \geqq e^{\sigma \log r\, e_k(r^\sigma)\left(\frac{1}{\sigma}-\frac{1}{\rho}-\varepsilon\right)},$$

$$\mathrm{M}_r \geqq e_{k+1}(r^\sigma).$$

Soit $\rho_1 < \rho$: tant que σ est compris entre $\rho - \eta$ et $\rho_1 + \eta$, η fixe positif, $2\eta < \rho - \rho_1$, on a dès que m et r sont assez grands

$$\mathrm{M}_r \geqq e_{k+1}(r^\sigma) \geqq e_{k+1}(r^{\rho_1+\eta}).$$

Ceci a lieu pour toutes les valeurs de r comprises entre $(\log_k m)^{\frac{1}{\rho-\eta}}$ et $(\log_k m)^{\frac{1}{\rho_1+\eta}}$, c'est-à-dire sur les circonférences dont le centre est à l'origine et contenues dans une couronne circulaire D ayant même centre et dont l'épaisseur

$$\mathrm{E}_m = (\log_k m)^{\frac{1}{\rho_1+\eta}} - (\log_k m)^{\frac{1}{\rho-\eta}}$$

croît indéfiniment avec m.

Le lemme en résulte immédiatement (¹).

(¹) Le lemme IV permet de trouver simplement un critère de régularité de croissance plus complet que celui indiqué antérieurement (*Journal de l'École Polytechnique*, 1904 et 1905, p. 18) et d'énoncer *une condition nécessaire et suffisante* pour qu'une fonction entière d'ordre >0 non transfini donnée par son développement taylorien ait sa croissance régulière.

En effet, soient $\ldots, m_1, m_2, \ldots$ les valeurs de m croissantes telles que

$$\mid a_m^{-1} \mid \leqq (\log_k m)^{\left(\frac{1}{\rho}+\varepsilon\right)m},$$

la fonction considérée étant d'ordre (k, ρ).

Il suffira, pour que la croissance soit régulière, que les intervalles $\ldots, \mathrm{E}_{m_1}, \mathrm{E}_{m_2}, \ldots$ empiètent toujours les uns sur les autres, c'est-à-dire que

$$(\log_k m_2)^{\frac{1}{\rho-\eta}} \leqq (\log_k m_1)^{\frac{1}{\rho_1+\eta}},$$

si petits que soient $\rho - \rho_1$ et η. Prenons $\rho - \rho_1 = 3\eta$. Il suffit

$$\frac{1}{\rho-\eta} \log_{k+1} m_2 \leqq \frac{1}{\rho_1+\eta} \log_{k+1} m_1,$$

$$\log_{k+1} m_2 \leqq \frac{\rho-\eta}{\rho-2\eta} \log_{k+1} m_1 = \left(1 + \frac{\eta}{\rho-2\eta}\right) \log_{k+1} m_1.$$

Corollaire III. — *Le produit d'une fonction entière* F *d'ordre* (k, ρ) *par une* F_1 *d'ordre moindre est d'ordre* (k, ρ).

En effet, retranchons des couronnes D pour F les parties qui appartiennent aux couronnes C_i convenablement choisies pour F (ici $k_1 = k$) : la surface totale des couronnes $D - C_i$ restante est infinie puisqu'il en est ainsi de leur épaisseur. On y a, pour $r = |z|$ assez grand,

$$\max |F| \geqq e_{k+1}(r^{\rho-\varepsilon_1}), \qquad |F_1| \geqq e_{k+1}(r^{\sigma'})^{-1} \qquad (\sigma' < \rho);$$

par suite

$$\max |FF_1| \geqq e_{k+1}(r^{\rho-\varepsilon_2}),$$

et FF_1 ne peut être d'ordre inférieur à (k, ρ). Il ne peut évidemment être d'ordre supérieur. Donc son ordre est (k, ρ). C. Q. F. D.

Si F et F_1 étaient de même ordre (k, ρ), FF_1 pourrait évidemment être d'ordre moindre : exemple,

$$F = e^{G(z)}, \qquad F_1 = e^{-G(z)}, \qquad FF_1 = 1.$$

Ceci aura toujours lieu quel que soit η choisi *a priori*, dès que

$$(\alpha) \qquad \lim \left(\frac{\log_{k+1} m_2}{\log_{k+1} m_1}\right) = 1 \qquad (\text{pour } m_1 = \infty).$$

Si elle est remplie, pour m_1 assez grand,

$$M_r \geqq e_{k+1}(r^{\rho_1+\eta}) = e_{k+1}(r^{\rho-2\eta})$$

et la fonction est à croissance régulière.

D'autre part, on sait (*Journal de l'École Polytechnique*, 1905, p. 22) que si (α) n'a pas lieu, la fonction considérée a sa croissance irrégulière.

Théorème. — *La condition* (α) *est la condition nécessaire et suffisante pour que la fonction entière d'ordre* (k, ρ), *avec* k *ou* $\rho > 0$, *absolument quelconque, ait sa croissance régulière.*

En cours d'impression j'ajoute ce qui suit : j'ai d'abord donné une partie de ce critère (*Ann. Fac. Sc. Toul.*, 1902, p. 448-455; *J. Ec. Pol.*, 1904, p. 162 et 1905, p. 12-29, 37-39; *C. R.*, 1er sept. 1902, p. 391, 9 fév., p. 349, 17 août, p. 407 et 21 sept., 1903, p. 478). J'avais fait connaître une condition suffisante pour la régularité de croissance, une pour l'irrégularité. Il se trouve que la seconde est aussi nécessaire, comme l'a indiqué M. E. Lindelöf (*Bull. des Sc. Math.*, 1903, p. 221-223), qui a encore signalé un critère analogue pour les fonctions d'ordre zéro. Certains de mes derniers résultats et ceux de M. Lindelöf ont été obtenus, je crois, dans la même période, à notre insu réciproque.

DEUXIÈME PARTIE.

FONCTIONS QUASI-ENTIÈRES ET QUASI-MÉROMORPHES. ÉQUATIONS CORRESPONDANTES. — DENSITÉ DES ZÉROS.

V.

Remarque. — Le théorème II, le théorème III et son corollaire II, le corollaire II du théorème IV, les lemmes III et IV, le corollaire III s'étendent immédiatement aux fonctions quasi-entières dans le domaine de $z=\infty$ (par suite aux fonctions quasi-entières dans le domaine de $z=a$, où a est fini), comme on le voit sans peine : une pareille fonction est, en effet, dans une région R, formée des points extérieurs à un cercle de rayon fini ayant pour centre l'origine, de la forme (¹)

$$\text{(12)} \qquad F(z)=z^{-k'}Q_2(z)e^{\psi\left(\frac{1}{z}\right)},$$

où k' est entier, positif ou nul, $Q_2(z)$ une fonction entière, $\psi\left(\frac{1}{z}\right)$ une fonction monodrome et finie dans la région R.

Il en résulte des conséquences analogues ou correspondantes pour les fonctions monodromes à point singulier essentiel isolé dans le domaine de ce point, autrement dit pour les fonctions quasi-entières dans le domaine d'un point singulier essentiel, en particulier pour les fonctions quasi-entières proprement dites, c'est-à-dire pour les fonctions monodromes qui n'ont qu'un nombre limité de pôles et de points singuliers essentiels.

Ce qui précède permet d'étendre aux fonctions entières, quasi-entières, méromorphes, quasi-méromorphes, à ν branches, d'ordre non transfini un certain nombre de résultats connus relatifs au nombre ou à la densité des racines des fonctions analogues d'ordre fini.

Je ne reprendrai pas tout en détail à cet égard, la marche des

(¹) *Voir* ma note du *Bull. Soc. Math.*, t. XXXI, 1903, corollaire I du théorème I et p. 31-32; HADAMARD, *Comptes rendus*, 1ᵉʳ juin 1896; E. MAILLET, *Comptes rendus*, 2ᵉ sem., 24 novembre 1902, p. 889.

démonstrations restant parfois plus ou moins semblable à celles qui existe déjà pour le cas des fonctions d'ordre fini.

Le théorème suivant, généralisation d'un théorème classique de M. Picard, a été indiqué comme vraisemblable par M. Painlevé :

a. *Une fonction analytique $u(z)$ à ν branches qui admet le point $z = a$ comme point singulier essentiel isolé unique prend, dans le voisinage de ce point, toutes les valeurs, sauf 2ν au plus.*

Une telle fonction $u(z)$ vérifie (¹) une relation

$$(13) \qquad f(z, u) = u^\nu + u^{\nu-1} A_1(z) + \ldots + u A_{\nu-1}(z) + A_\nu(z) = 0,$$

où $A_1, \ldots, A_\nu$ sont des fonctions monodromes (ou uniformes) ayant le point singulier essentiel isolé unique $z = a_1$ et pouvant avoir des pôles. Par la transformation $z = a_1 + \frac{1}{z'}$, je transporterai le point singulier essentiel à l'infini, puis remplacerai z' par z (²).

S'il n'existe pas de valeurs exceptionnelles de u, c'est-à-dire de valeurs de u voisines de a_1 et que ne prend pas $u(z)$, l'énoncé est évident; s'il en existe, on peut $\Big($moyennant une transformation homographique $u = \alpha + \frac{1}{u'}$, α étant une valeur exceptionnelle$\Big)$ faire en sorte qu'une de ces valeurs soit $u = \infty$: la forme de (13) se conserve; je supposerai donc qu'il en soit ainsi. $A_1(z), \ldots, A_\nu(z)$ deviennent alors des fonctions quasi-méromorphes aux environs de $z = \infty$ et qui n'y ont plus de pôles, sans quoi $u = \infty$ ne serait pas une valeur exceptionnelle (³); autrement dit, ce sont des fonctions quasi-entières.

(¹) On peut considérer cela comme une définition.

(²) $A_1, \ldots, A_\nu$ sont alors des fonctions quasi-méromorphes pour $z = \infty$.

(³) Si $A_1, \ldots, A_\nu$ sont des fonctions quasi-entières, $u = \infty$ est une valeur exceptionnelle, car on n'a $u = \infty$ qu'au point essentiel $z = \infty$ lui-même et non dans son voisinage. Inversement, supposons que $u = \infty$ soit une valeur exceptionnelle : si une au moins des fonctions $A_1, \ldots, A_\nu$ a le pôle $z = b$, d'ordre de multiplicité μ, au maximum pour les ν fonctions, pour $z = b + \varepsilon$ (ε petit), une au moins des racines de l'équation en u

$$(z - b)^\mu (u^\nu + A_1 u^{\nu-1} + \ldots + A_\nu) = 0$$

a son module qui croît indéfiniment quand ε tend vers o; $u = \infty$ ne serait pas exceptionnelle; donc $A_1, \ldots, A_\nu$ sont des fonctions quasi-entières pour $z = \infty$.

On est ainsi ramené à établir ce théorème :

b. Si l'équation (13) *en* z, *où* $A_1, \ldots, A_\nu$ *sont des fonctions quasi-entières dans le domaine de* $z = \infty$, *n'admet pas de racines pour* 2ν *valeurs finies distinctes données à* u, *les* A_j *sont des quasi-polynomes dans le même domaine* (*le sens de cette expression s'explique suffisamment*).

Ce théorème a été indiqué comme exact par M. G. Remoundos [1] dans l'hypothèse où les fonctions A_j sont des fonctions entières ou quasi-entières proprement dites d'ordre fini. De mon côté, j'ai obtenu antérieurement [2] les résultats suivants, *relatifs à l'équation* (13) où $A_1, \ldots, A_\nu$ sont des fonctions entières ou quasi-entières dans le domaine de $z = \infty$:

« Il n'y a pas ν valeurs distinctes finies de u pour lesquelles $f(z, u)$ soit d'ordre apparent plus petit que le plus grand des ordres apparents, finis ou non, de $A_1, \ldots, A_\nu$ pour $z = \infty$.

» On voit, par extension de démonstrations données par M. Borel et moi, que :

» 1° *Quand* $A_1, \ldots, A_\nu$ *sont d'ordres apparents finis pour* $z = \infty$, *si* ρ *est le maximum de leurs ordres*, $f(z, u)$ *ne peut être d'ordre réel fini* $< \rho$ *pour plus de* $2\nu - 1$ *valeurs finies distinctes de* u.

» 2° *Quand* $A_1, \ldots, A_\nu$ *sont d'ordres apparents non tous finis et que* $|A_i| \leqq e^{e^{|z|^{\rho+\varepsilon}}}$ ($|z|$ *grand*, ρ *fini*, ε *fixe aussi petit qu'on veut pour* $|z|$ *assez grand*) *quel que soit* i, $f(z, u)$ *ne peut être d'ordre réel fini pour plus de* $2\nu - 1$ *valeurs finies distinctes de* u. »

Je me propose ici d'établir le théorème général suivant qui comprend tous les résultats précédents relatifs au théorème b :

Théorème V. — *Soit* $u(z)$ *une fonction à* ν *branches définie par*

---

(1) *Comptes rendus*, 1er sem. 1903, p. 953 et *Bull. Soc. Math.*, t. XXXII, 1904, p. 44. Même, d'après MM. Painlevé et Remoundos, l'équation (13) en z n'a un nombre fini de racines que pour au plus 2ν valeurs finies de u (*voir* encore *Ann. Fac. Sc. Toul.*, 2e série, t. VIII, l'intéressante *Thèse* de M. Remoundos).

(2) *Comptes rendus*, 1er sem. 1903, p. 1128. Le début de ma Communication, jusqu'à la onzième ligne de la page 1129, aurait besoin de diverses corrections par suite des altérations survenues à l'impression ; ce que je dis ici me dispense de les signaler.

l'équation

$$(14)\qquad f(z,u) = u^\nu + u^{\nu-1}A_1(z) + \ldots + uA_{\nu-1}(z) + A_\nu(z) = 0,$$

où $A_1, \ldots, A_\nu$ *sont des fonctions quasi-entières ou quasi-méromorphes aux environs du point essentiel isolé* $z = \infty$ [1].

Quand $A_1, \ldots, A_\nu$ *sont d'ordres apparents non transfinis dans le domaine de* $z = \infty$, *si* (k, ρ) *est le maximum de leurs ordres,* $f(z, u)$ *ne peut être :*

1° *D'ordre apparent* $< (k, \rho)$ *que pour* μ *valeurs finies distinctes de* u, *avec* $\mu \leqq \nu - 1$;

2° *D'ordre réel* [2] *fini* $< (k, \rho)$ *pour plus de* $\mu + \mu_1$ *valeurs finies distinctes de* u $(\mu_1 \leqq \nu,\ \mu + \mu_1 \leqq 2\nu - 1)$.

En effet, soit

$$u = a_i = \text{const.}$$

On a [3]

$$f(z, a_i) = Q_i(z)e^{\psi_i(z)},$$

où $Q_i(z)$ est une fonction méromorphe, $\psi_i(z)$ une fonction monodrome et finie dans le domaine de $z = \infty$, d'après (12).

Je suppose que l'ordre maximum de $A_1, \ldots, A_\nu$ pour $z = \infty$ soit (k, ρ) : $f(z, a_i)$ est [4] d'ordre $\leqq (k, \rho)$; quel que soit a_i fini, $Q_i(z)$ est, pour $z = \infty$, d'ordre $\leqq (k, \rho)$.

Je considère ν valeurs finies $a_1, a_2, \ldots, a_\nu$ distinctes. On a

$$(15)\qquad \left\{\begin{array}{l} a_1^\nu + a_1^{\nu-1}A_1(z) + \ldots + A_\nu(z) = Q_1 e^{\psi_1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_\nu^\nu + a_\nu^{\nu-1}A_1(z) + \ldots + A_\nu(z) = Q_\nu e^{\psi_\nu}. \end{array}\right.$$

On peut résoudre ces équations par rapport à $A_1, \ldots, A_\nu$, car le déterminant (de Vandermonde) est $\neq 0$. Une des quantités $A_1, \ldots,$

---

(1) Le cas où le point critique essentiel pour $A_1, \ldots, A_\nu$ serait $z = a$ se ramène à celui-là par la transformation $z = a + \frac{1}{z'}$.

(2) Pour le sens que j'attache à ce mot, *voir* plus loin, p. 306.

(3) *Bull. Soc. Math.*, t. XXXI, 1903, p. 31, 41.

(4) On le voit en réduisant les $A_j(z)$ à leur plus petit dénominateur commun (corollaire V du théorème III).

A_ν, par exemple A_j, étant d'ordre (k, ρ) pour $z=\infty$, une des quantités $Q_1, \ldots, Q_\nu$ est d'ordre (k, ρ) pour $z=\infty$; donc :

$f(z, u)$ ne peut être d'ordre apparent $<(k, \rho)$ que pour $\mu \leqq \nu - 1$ valeurs finies distinctes au plus de u.

J'admets maintenant que l'ordre réel de $f(z, a_i)$, c'est-à-dire l'ordre du quotient des produits canoniques de facteurs primaires correspondant à $Q_i(z)$, soit $<(k, \rho)$ pour un certain nombre de valeurs finies distinctes de a_i. Il y aura d'abord parmi elles celles a_i pour lesquelles $f(z, a_i)$ est d'ordre apparent $<(k, \rho)$, en nombre $\mu \leqq \nu - 1$. Je suppose que, en dehors de ces dernières, il y ait encore $\nu+1$ valeurs finies distinctes $a'_1, a'_2, \ldots, a'_{\nu+1}$ de u pour lesquelles $f(z, a'_j)$ sont d'ordre réel $<(k, \rho)$: ces fonctions seraient [1] d'ordre apparent (k, ρ). Elles donneront lieu à $\nu+1$ équations analogues à (15), entre lesquelles on pourra éliminer $A_1, \ldots, A_\nu$, ce qui donnera une relation de la forme

$$M_1 Q_1 e^{\psi_1} + M_2 Q_2 e^{\psi_2} + \ldots + M_{\nu+1} Q_{\nu+1} e^{\psi_{\nu+1}} = \beta = \text{const.}; \tag{16}$$

β est $\neq 0$, car c'est un déterminant de Vandermonde, $M_1, \ldots, M_{\nu+1}$ sont des constantes. On aura

$$Q_1 = \Phi_1 e^{G_1}, \qquad \ldots, \qquad Q_{\nu+1} = \Phi_{\nu+1} e^{G_{\nu+1}},$$

où $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{\nu+1}$ sont des quotients de produits canoniques d'ordres tous $<(k, \rho)$, $G_1, G_2, \ldots, G_{\nu+1}$ des fonctions entières d'ordre $(k-1, \rho)$, lorsque $k>0$, d'après le lemme III, des polynomes tous de degré ρ entier lorsque $k=0$. Les ψ_j sont de la forme $\frac{\gamma_1}{z} + \frac{\gamma_2}{z^2} + \ldots$.

La relation (16) est ainsi de la forme

$$\varphi_1 e^{G_1} + \varphi_2 e^{G_2} + \ldots + \varphi_{\nu+1} e^{G_{\nu+1}} = \varphi_{\nu+2} \neq 0, \tag{17}$$

où $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{\nu+2}$ sont des fonctions quasi-méromorphes pour $z=\infty$ d'ordres $<(k, \rho)$.

---

[1] Si $k=0$, ce cas n'est possible que quand ρ est entier : quand $k=0$ et ρ non entier, on n'a que $\mu \leqq \nu - 1$ valeurs exceptionnelles.

Par dérivation on tire de (17)

$$\sum_{1}^{\nu+1} (\varphi'_j + G'_j \varphi_j) e^{G_j} = \varphi'_{\nu+2}. \tag{18}$$

On a alors deux cas :

1° Si l'on a

$$\frac{\varphi'_1 + G'_1 \varphi_1}{\varphi_1} = \frac{\varphi'_1}{\varphi_1} + G'_1 = \frac{\varphi'_j}{\varphi_j} + G'_j,$$

quel que soit $j \leqq \nu + 1$, on en tire

$$\log \varphi_1 + G_1 = \log \varphi_j + G_j + C,$$
$$\varphi_1 = \varphi_j e^{G_j - G_1 + C}.$$

$e^{G_j - G_1 + C}$ est d'ordre $< (k, \rho)$, sans quoi, d'après le corollaire III du théorème IV (p. 298), φ_1 serait d'ordre $\geqq (k, \rho)$, ce qui n'est pas. (17) donnerait

$$\varphi_1 + \varphi_2 e^{G_2 - G_1} + \ldots + \varphi_{\nu+1} e^{G_{\nu+1} - G_1} = \varphi_{\nu+2} e^{-G_1}.$$

Le premier membre serait d'ordre $< (k, \rho)$, le second d'ordre (k, ρ), puisque $\varphi_{\nu+2}$ est $\neq 0$, résultat absurde.

2° Si l'un des déterminants

$$\varphi_1(\varphi'_j + G'_j \varphi_j) - \varphi_j(\varphi'_1 + G'_1 \varphi_1)$$

$(j = 2, \ldots, \nu + 1)$ est $\neq 0$, on peut éliminer e^{G_1} entre (17) et (18), et l'on est ramené à une équation analogue à (17), mais de la forme

$$\chi_2 e^{G_2} + \ldots + \chi_{\nu+1} e^{G_{\nu+1}} = \chi_{\nu+2}, \tag{19}$$

où $\chi_2, \ldots, \chi_{\nu+2}$ sont d'ordres (¹) $< (k, \rho)$. Ici

$$\chi_{\nu+2} = \varphi_{\nu+2}(\varphi'_1 + G'_1 \varphi_1) - \varphi'_{\nu+2} \varphi_1.$$

(¹) Au besoin *voir* plus loin lemmes V et VI.

Si $\chi_{\nu+2} = 0$,

$$\frac{\varphi'_{\nu+2}}{\varphi_{\nu+2}} = \frac{\varphi'_1}{\varphi_1} + G'_1,$$
$$\varphi_{\nu+2} = \varphi_1 e^{G_1+C},$$

ce qui est impossible, d'après le corollaire III du théorème IV, e^{G_1} étant d'ordre (k, ρ). Donc $\chi_{\nu+2} \neq 0$ est d'ordre $< (k, \rho)$.

Finalement (19) est absolument de même forme que (17), mais renferme une fonction e^{G_j} de moins que (17).

Le raisonnement peut donc se continuer jusqu'à ce qu'on tombe sur une relation de la forme

$$\varpi_{\nu+1} e^{G_{\nu+1}} = \varpi_{\nu+2},$$

avec $\varpi_{\nu+2} \neq 0$, qui est encore impossible, $\varpi_{\nu+1}$, $\varpi_{\nu+2}$ étant d'ordre $< (k, \rho)$, $e^{G_{\nu+1}}$ d'ordre (k, ρ). C. Q. F. D.

On obtiendra par une méthode analogue ce théorème :

THÉORÈME VI. — *Soit* $F(z)$ *une fonction quasi-entière pour* $z = \infty$ *d'ordre apparent* (k, ρ), $\varphi(z)$, $\varphi_1(z)$ *des fonctions quasi-entières pour* $z = \infty$ *quelconques d'ordre inférieur : parmi l'ensemble des fonctions* $\varphi F - \varphi_1$, *où* φ *et* φ_1 *prennent toutes les valeurs possibles, une au plus est d'ordre réel inférieur à* (k, ρ), *en ne considérant pas comme fonctions* $\varphi F - \varphi_1$ *distinctes celles que l'on déduit de l'une d'elles en la multipliant par une fonction quasi-entière pour* $z = \infty$, *d'ordre* $< (k, \rho)$.

La marche à suivre est d'ailleurs ici la même que celle que j'ai employée dans le cas où l'ordre est fini [1]. On en déduira le corollaire suivant :

COROLLAIRE. — *Parmi les équations* $F - \frac{\varphi_1}{\varphi} = 0$, *il y en a une au plus d'ordre réel inférieur à* (k, ρ) (*le sens de ce mot s'explique de lui-même*).

---

[1] Dans ce dernier cas la marche est voisine de celle adoptée par M. Borel dans ses *Leçons sur les fonctions entières*, p. 95-96, après correction d'un lapsus [p. 96 de ces *Leçons* : le déterminant des équations (1) et (2) de M. Borel est $MN' - NM' + MN(Q' - P')$, et non $MN' - NM'$].

On peut encore obtenir un autre résultat analogue au théorème V au sujet des fonctions quasi-méromorphes pour $z = \infty$.

Soit $F(z)$ une fonction quasi-méromorphe dans le domaine de $z = \infty$. Une pareille fonction est le quotient de deux fonctions quasi-entières pour $z = \infty$, f_1 et f_2 :

$$(19\,bis) \qquad F = \frac{f_1}{f_2}.$$

J'ai appelé *ordre apparent* ou *ordre* de F le plus grand des deux ordres de f_1 et f_2.

On suppose que f_1 et f_2 n'ont pas de zéros communs et que l'on ne peut abaisser l'ordre de f_1 et f_2 en les multipliant par un même facteur exponentiel. On peut toujours admettre que f_2 est une fonction entière; en particulier, quand F n'est pas d'ordre transfini, on peut prendre pour f_2 un produit canonique.

Pour les fonctions méromorphes proprement dites d'ordre fini on retrouve la définition de l'ordre apparent de M. Borel.

Quant à l'ordre réel de F, M. Borel le définit ainsi pour ces dernières fonctions : c'est l'ordre du produit canonique ayant les mêmes pôles (ou du moins sa définition est équivalente).

Dans l'espèce, il me semble nécessaire de distinguer à la fois les ordres réels relatifs aux zéros et les ordres réels relatifs aux pôles, c'est-à-dire les ordres des produits canoniques formés avec ces zéros et ces pôles; je dirai donc *l'ordre réel des zéros*, *l'ordre réel des pôles*, quand la distinction sera utile. *Le plus grand de ces deux ordres sera l'ordre réel proprement dit ou ordre réel de* F, par analogie avec ce qui a lieu pour l'ordre apparent. Ces définitions s'étendent immédiatement aux fonctions quasi-méromorphes dans le domaine d'un point essentiel.

C'est là le sens que j'ai attaché antérieurement [1] au mot *ordre réel* pour une pareille fonction.

J'énoncerai d'abord les lemmes suivants :

---

[1] Théorème V précédent et *Journal de Mathématiques*, 1902, théorème VIII, p. 381 : les ordres de F dont il est question dans la dernière ligne de l'énoncé de ce théorème sont, bien entendu, les ordres apparents.

LEMME V. — *La dérivée d'une fonction* $F(z)$ *quasi-méromorphe pour* $z = \infty$ *d'ordre* (k, ρ) *est d'ordre* $\leqq (k, \rho)$ $(k$ *ou* $\rho > 0)$.

Car

$$F = \frac{f_1}{f_2}, \qquad F' = \frac{f'_1 f_2 - f'_2 f_1}{f_2^2},$$

où f_1, f_2 sont des fonctions quasi-entières pour $z = \infty$ [1].

LEMME VI. — *Si l'ordre réel de* $F(z)$ *est plus petit que son ordre apparent* (k, ρ) *pour* $z = \infty$, *la dérivée* $F'(z)$ *est d'ordre apparent* (k, ρ) $(k$ *ou* $\rho > 0)$, *et d'ordre réel* $< (k, \rho)$.

Car

$$F = \frac{\theta}{\eta} e^G,$$

où θ et η sont des produits canoniques de facteurs primaires d'ordres $< (k, \rho)$, et e^G est d'ordre (k, ρ).

$$F' = e^G \left[\frac{\theta}{\eta} G' + \left(\frac{\theta}{\eta} \right)' \right],$$

et la parenthèse est d'ordre $< (k, \rho)$ (corollaire I du théorème III).

On pourra encore établir le résultat suivant, extension d'un théorème énoncé par moi antérieurement :

THÉORÈME VII. — *Parmi toutes les fonctions quasi-méromorphes pour* $z = \infty$ *de la forme* $F - \Phi$, *d'ordres* (k, ρ), *où* F *est donnée, quasi-méromorphe pour* $z = \infty$, *et d'ordre* (k, ρ), Φ *une quelconque des fonctions*

---

(1) L'ordre réel des pôles de F', au plus égal à l'ordre de f_2^2, est au moins égal à celui de f_2, car, si ν_n est l'ordre de multiplicité d'un pôle de F, cet ordre de multiplicité est $\nu_n + 1$ pour F'. L'ordre réel des pôles de F et F' est donc le même.

(2) C'est une extension d'une partie d'un théorème énoncé par moi antérieurement (*Bull. Soc. math.*, t. XXXI, 1903, théorème VI, p. 41). Je rectifie et précise l'énoncé qui contient une faute d'impression; il faut y remplacer (première ligne de la page 42) : « d'ordres réels tous inférieurs à ceux de Φ », par : « d'ordre réel inférieur à celui de F », ou encore par : « d'ordres réels des zéros et des infinis tous deux inférieurs à l'ordre apparent de F ». De même dans l'énoncé du théorème VII de la même note (p. 42), le point a est, comme l'indique assez la suite, le seul point critique de la région considérée. *Voir* encore *C. R.*, 24 novembre 1902, p. 890.

quasi-méromorphes pour $z = \infty$ d'ordre $< (k, \rho)$, il y en a une au plus d'ordre réel $< (k, \rho)$ (²).

En effet, s'il y en avait deux, Φ_1, Ψ_1, on aurait à la fois dans le domaine de $z = \infty$:

$$F - \Phi_1 = \theta e^G,$$
$$F - \Psi_1 = \eta e^H,$$

$\Phi_1 \neq \Psi_1$, où θ, η sont des quotients de produits de facteurs primaires relatifs à $F - \Phi_1$ et $F - \Psi_1$ d'ordres $< (k, \rho)$, e^G et e^H des fonctions quasi-entières pour $z = \infty$ d'ordres (k, ρ) (¹).

On en conclurait

$$(20) \qquad \Phi_1 - \Psi_1 = \eta e^H - \theta e^G,$$

identité que l'on reconnaît encore être impossible [cas particulier d'un raisonnement du théorème V, formule (17)].

On pourrait encore chercher à étendre aux fonctions quasi-méromorphes d'ordre infini pour $z = \infty$ la généralisation d'un théorème de MM. Picard et Borel indiquée par moi antérieurement pour les fonctions quasi-méromorphes proprement dites d'ordre fini (²). Je préfère établir le résultat suivant, de même nature, et qui complète le théorème V pour le cas des fonctions quasi-méromorphes.

Théorème VIII. — *Soit $u(z)$ une fonction à ν branches définie par*

(¹) On a ici $F = \dfrac{f_1}{f_2}$, $\Phi_1 = \dfrac{\varphi_1}{\varphi_2}$, f_2, φ_2 produits canoniques, $F - \Phi_1 = \dfrac{f_1\varphi_2 - f_2\varphi_1}{f_2\varphi_2}$; $F - \Phi_1$ est d'ordre $\leqq (k, \rho)$; je dis que $F - \Phi_1$ est d'ordre (k, ρ).

En effet, si f_2 est d'ordre $< (k, \rho)$, $f_1\varphi_2 - f_2\varphi_1$ est d'ordre (k, ρ); $\dfrac{f_1\varphi_2 - f_2\varphi_1}{f_2\varphi_2}$ est d'ordre (k, ρ).

Si f_2 est d'ordre (k, ρ), un zéro de f_2 n'annule $f_1\varphi_2 - f_2\varphi_1$ que s'il annule φ_2; l'ordre réel des zéros de $\dfrac{f_2}{\varphi_2}$ est celui de f_2, c'est-à-dire (k, ρ), d'après le corollaire IV du théorème III; donc l'ordre réel des pôles de $F - \Phi_1$ est (k, ρ). Dans ce dernier cas, il n'y a pas de valeur exceptionnelle de Φ.

(²) *Journal de Mathématiques*, 1902, théorème IX, p. 382; *Bulletin de la Société mathématique*, 1903, t. XXXI, théorème VI [*voir* note (²), page précédente].

(³) Le cas où le point critique essentiel considéré pour $A_1, \ldots, A_\nu$ serait $z = a$ se ramène à celui-là par une transformation homographique $z = a + \dfrac{1}{z'}$.

l'équation

$$f(z, u) = u^{\nu} + u^{\nu-1} A_1(z) + \ldots + A_{\nu}(z) = 0, \tag{21}$$

où $A_1, \ldots, A_\nu$ *sont des fonctions quasi-méromorphes aux environs du point singulier essentiel* $z = \infty$ (³).

Quand $A_1, \ldots, A_\nu$ *sont d'ordres apparents non transfinis dans le domaine de* $z = \infty$, *si* (k, ρ) *est le maximum de leurs ordres*, $f(z, u)$ *ne peut avoir son ordre réel des zéros* $< (k, \rho)$ *pour plus de* $\mu + \mu_1 + 1$ *valeurs distinctes (y compris* $u = \infty$*) de* u *(*μ *et* μ_1 *étant définis comme au théorème* V, $\mu + \mu_1 + 1 \leqq 2\nu$*).*

D'après le théorème V, on sait déjà que $f(z, u)$ ne peut être d'ordre réel $< (k, \rho)$ pour plus de $2\nu - 1$ valeurs *finies* distinctes de u.

Je forme un produit canonique B_0 ayant pour zéros les infinis de $A_1, \ldots, A_\nu$, chacun avec l'ordre de multiplicité le plus fort parmi ceux de chaque infini dans $A_1, \ldots, A_\nu$: B_0 est d'ordre $\leqq (k, \rho)$ dans le domaine de $z = \infty$ (corollaire V du théorème III). On peut écrire

$$A_1 = \frac{B_1}{B_0}, \qquad \ldots, \qquad A_\nu = \frac{B_\nu}{B_0},$$

où $B_1, \ldots, B_\nu$ sont des fonctions quasi-entières pour $z = \infty$.

J'admets maintenant qu'il y ait λ ($\lambda \leqq 2\nu - 1$) valeurs *finies* distinctes de u pour lesquelles $f(z, u)$ est d'ordre réel $< (k, \rho)$, et une autre valeur *finie* a_1 pour laquelle $f(z, u)$ est d'ordre réel (k, ρ), mais a son ordre réel des zéros $< (k, \rho)$. J'appelle provisoirement, pour abréger, *valeurs exceptionnelles de* u celles pour lesquelles $f(z, u)$ a son ordre réel des zéros $< (k, \rho)$.

On n'a une valeur de $u = \infty$ que pour $B_0 = 0$ (z étant fini) et réciproquement. ∞ sera donc une valeur exceptionnelle à la condition nécessaire et suffisante que B_0 soit d'ordre $< (k, \rho)$.

Or, je fais le changement de variables $u' = \alpha + \dfrac{1}{u - a_1}$: pour l'équation transformée

$$f_1(z, u') = 0,$$

$u' = \infty$ est une valeur exceptionnelle. On peut donc toujours supposer que $f(z, u) = 0$ admet l'∞ comme valeur exceptionnelle, c'est-à-dire que B_0 est d'ordre $< (k, \rho)$.

Ceci posé, si, en dehors des λ valeurs exceptionnelles finies de u pour lesquelles $f(z, u)$ est d'ordre réel $<(k, \rho)$ et de $u = \infty$, il y avait encore une valeur b_1 exceptionnelle, on aurait

$$b_1^\nu + \frac{B_1}{B_0} b_1^{\nu-1} + \ldots + \frac{B_\nu}{B_0} = \frac{Q}{\eta} \frac{e^{\chi_1}}{z^{l_1}}$$

[formules (12) et (19 *bis*)], où B_0 est une fonction entière d'ordre réel $<(k, \rho)$, η un produit canonique d'ordre (k, ρ) n'ayant aucun zéro commun avec Q, l_1 un entier, et χ_1 fini pour $z = \infty$. Tout zéro d'ordre de multiplicité m de η est un zéro de B_0 d'ordre de multiplicité $\geqq m$; η serait un diviseur de B_0, ce qui est absurde (corollaire III du théorème III) puisque η est d'ordre (k, ρ) et B_0 d'ordre $<(k, \rho)$.

Par conséquent :

En dehors des λ valeurs finies distinctes de u pour lesquelles $f(z, u)$ est d'ordre réel $<(k, \rho)$, il y a au plus une autre valeur (finie ou infinie) pour laquelle l'ordre réel des zéros de $f(z, u)$ est $<(k, \rho)$. C. Q. F. D.

COROLLAIRE. — *L'équation*

$$u + \varphi(z) = 0,$$

où $\varphi(z)$ est quasi-méromorphe dans le domaine de $z = \infty$ et d'ordre (k, ρ) non transfini (k ou $\rho > 0$), a l'ordre réel de ses zéros égal à (k, ρ), sauf pour deux valeurs au plus de u.

C'est une précision d'un résultat connu de M. Picard [1], mais bornée au cas où $\varphi(z)$ n'est, pour $z = \infty$, d'ordre ni nul, ni transfini.

---

(1) *Analyse*, t. III, Paris, Gauthier-Villars, 1896, p. 347.

Soit $f(z)$ une fonction quasi-méromorphe quelconque dans le domaine de $z = \infty$, et soit à établir le théorème général de M. Picard : *Il n'y a que deux valeurs distinctes finies ou non que ne puisse prendre $f(z)$.*

Je suppose que $f(z)$ ne puisse prendre les trois valeurs A, B, C distinctes. Il y a trois valeurs distinctes que ne peut prendre $\frac{\alpha f(z) + \beta}{\gamma f(z) + \delta} = f_1(z)$ (PICARD, *loc. cit.*) et l'on peut supposer, en choisissant convenablement $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, que ces trois valeurs sont $0, 1, \infty$. La fonction $f_1(z)$, quasi-méromorphe dans le domaine de $z = \infty$, ne peut y devenir infinie : elle y est donc quasi-entière.

Pour ce cas, on se reportera à mon Mémoire du *Bulletin de la Société mathématique*, t. XXXI, 1903, p. 41 [note au bas de la page, où $F(z)$ désigne, même bien entendu dans les trois dernières lignes, une fonction quasi-entière pour $z = \infty$].

VI.

RÉGULARITÉ DE LA CROISSANCE ET DE LA DISTRIBUTION DES RACINES.

Je vais m'occuper maintenant d'étendre aux fonctions entières d'ordre infini non transfini (k, ρ) les résultats connus pour les fonctions d'ordre fini en ce qui concerne la régularité de la distribution des zéros. Des méthodes analogues seront applicables. J'ajouterai, d'ailleurs, des résultats nouveaux.

La distribution des zéros d'une fonction entière $F(z)$ *d'ordre réel égal à son ordre apparent sera dite régulière* si l'on a, pour toute valeur de i supérieure à une certaine limite,

$$r_i^{\rho+\varepsilon} = \log_k i \qquad (\varepsilon \text{ positif ou négatif}), \tag{22}$$

où $\lim \varepsilon = 0$ pour $i = \infty$, r_i étant le module de la $i^{\text{ième}}$ racine α_i.

Théorème IX. — *Si* $F(z)$, *d'ordres réel et apparent égaux à* (k, ρ), *n'a pas sa croissance régulière,* (22) *ne peut avoir lieu; autrement dit, la distribution des zéros n'est pas régulière.*

En effet, l'on suppose ici que [1], pour $r = |x|$ assez grand, on ait toujours, M_r étant le maximum de $F(z)$ sur une circonférence de rayon r ayant pour centre l'origine, pour une infinité de valeurs de r indéfiniment croissantes,

$$M_r < e_{k+1}(r^\sigma), \qquad \sigma < \rho, \tag{23}$$

alors que, pour une infinité de valeurs de r indéfiniment croissantes,

$$M_r > e_{k+1}(r^{\rho-\varepsilon'}),$$

---

[1] *Journal de l'École Polytechnique*, 1904 et 1905, p. 12-13. — Il n'y a évidemment pas de théorème semblable pour les fonctions à croissance régulière dont l'ordre réel est plus petit que l'ordre apparent; à ce sujet, *voir* plus loin, lemme VII, p. 319. En cours d'impression, je renvoie aux résultats obtenus par M. Rémoundos au sujet de la régularité de croissance des fonctions entières d'ordre fini (*Ann. Fac. Sc. Toul.*, *loc. cit.*, p. 51 et suivantes).

et, quel que soit r,

$$M_r < e_{k+1}(r^{\rho+\varepsilon''}).$$

J'admets que la distribution des zéros de $F(z)$ soit régulière; on a

$$r_i^{\rho+\varepsilon} = \log_k i. \tag{22}$$

Soient

$$M_r = e_{k+1}(r^{\sigma_r}), \qquad V_r = e_k(r^{\sigma_r}),$$

et, pour une valeur de r satisfaisant à (23),

$$sr_i \leqq r < sr_{i+1}, \tag{24}$$

s étant > 2 et fixe; on peut toujours trouver r_i de façon que ceci ait lieu. En appliquant encore ici le raisonnement de M. Schou [1] qui nous a conduit à la formule (3), on obtient

$$i\log(s-1) < \log M_r < e_k(r^\sigma),$$

r étant une valeur satisfaisant à (23). Si $k > 0$, on en tire

$$\begin{array}{l} (\log i)^{1+\varepsilon_1} < e_{k-1}(r^\sigma), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ (\log_k i)^{1+\varepsilon_2} < r^\sigma. \end{array}$$

Donc, même si $k = 0$ (mais alors $\rho > 0$),

$$\log_k i < r^{\sigma+\varepsilon_3} \leqq (sr_{i+1})^{\sigma+\varepsilon_3} < \log_k(i+1)^{\frac{\sigma}{\rho}(1+\varepsilon_4)},$$

---

(1) Il faut avoir soin de prendre l'intégrale $\int_C \frac{F(z)}{z\,P(z)}\,dz$ (BOREL, *Leçons*, p. 73) le long d'une circonférence de *rayon* r (et non sr_n) ayant pour centre l'origine. Sinon on est obligé, comme dans la démonstration donnée par M. Borel pour le théorème analogue au théorème IX en ce qui concerne les fonctions entières d'ordre fini, de s'appuyer sur ce fait que M_r est une fonction croissante de r, alors que notre démonstration, qui s'applique aussi aux fonctions d'ordre fini, ne s'en sert pas.

On peut voir d'ailleurs que M_r est fonction croissante de r en se basant sur notre Note du *Journal de l'École Polytechnique*, cahier VIII, 2e série, 1903, lemme VII, p. 90. En effet, il y a un point z, avec $|z| = r - \lambda$ (λ positif) où $|f(z)| = M_{r-\lambda}$. La ligne de croissance maxima des modules qui passe en ce point z ne peut être contenue dans le cercle de rayon r ayant pour centre l'origine; car une pareille ligne n'a pas de point d'arrêt, ne peut être fermée et ne peut passer qu'une fois à l'intérieur du cercle de la figure 7. Donc elle traverse quelque part la circonférence de rayon r, et en ce point $M_r > M_{r-\lambda}$.

d'après (24) et (22), ou encore

$$(24\ bis) \qquad \log_k i < [\log_k(i+1)]^{\sigma'}, \qquad \sigma' \text{ fixe } < 1.$$

Si grand que soit i, cette inégalité doit avoir lieu pour une infinité de valeurs de i. Or, $\frac{1}{i}$ tendant vers 0 quand i croît indéfiniment, on a [1], quand $k \geqq 1$,

$$\log_k(i+1) = \log_k i + \frac{1+\eta}{\log_{k-1} i \ldots \log i\, i} = (\log_k i)(1+\eta'),$$

avec $\lim \eta' = 0$ pour $i = \infty$; on a d'ailleurs, pour $k = 0$,

$$\log(i+1) = \log i + \log\left(1+\frac{1}{i}\right) = (\log i)(1+\eta'),$$

en sorte que, quel que soit k, on devrait avoir ici, d'après (24 *bis*),

$$(\log_k i)^{1-\sigma'} < (1+\eta')^{\sigma'},$$

ce qui est absurde pour i assez grand. C. Q. F. D.

Théorème X. — *Soit* $F(z)$ *un produit canonique de facteurs primaires d'ordre* (k, ρ) *à croissance régulière : la distribution de ses zéros est régulière.*

Comme je suivrai à peu près la marche que M. Borel a adoptée (*Leçons*, p. 110), pour les fonctions d'ordre fini, j'abrégerai à l'occasion [2]. Je prends

$$F(z) = \prod_1^{\infty}\left(1-\frac{z}{\alpha_n}\right) e^{\frac{z}{\alpha_n}+\frac{z^2}{2\alpha_n^2}+\ldots+\frac{z^{\rho_n}}{\rho_n \alpha_n^{\rho_n}}} = \prod_1^{\infty} Q_{\rho_n}.$$

L'inégalité (si la distribution des zéros est irrégulière)

$$(8_1) \qquad r_n^{\sigma} > \log_k n, \qquad \rho - \sigma \text{ fini positif},$$

---

(1) *Journal de l'École Polytechnique*, 1904, p. 162, et 1905, p. 17.

(2) Pour la commodité de la lecture, celles de mes équations qui correspondent à des équations de M. Borel ont les mêmes numéros, mais affectés de l'indice 1.

est supposée avoir lieu pour une infinité de valeurs de n, ainsi que l'inégalité

$$(10_1) \qquad r_{n_1}^{\rho-\varepsilon} < \log_k n_1,$$

pour une infinité de valeurs de n_1. On a, quel que soit n assez grand,

$$(9_1) \qquad r_n^{\rho+\varepsilon} > \log_k n.$$

Ici, pourvu que n et n_1 soient $> m$ (m nombre donné assez grand), ε peut être supposé fixe et aussi petit qu'on veut, en particulier $< \rho - \sigma$.

Il s'agit de vérifier que, pour une infinité de valeurs de r croissant indéfiniment, ces conditions entraînent, dès que $r > R$ (R nombre donné assez grand),

$$(11_1) \qquad M_r < e_{k+1}(r^{\mu}),$$

avec $\rho - \mu$ fixe et positif, alors que, d'après l'hypothèse faite sur la croissance de $F(z)$,

$$M_r > e_{k+1}(r^{\rho-\varepsilon_1}),$$

ε_1 aussi petit qu'on veut dès que r est assez grand.

Posant encore

$$\rho + \varepsilon = \tau,$$

on a

$$(9_1) \qquad r_n^{\tau} > \log_k n,$$

quel que soit n ($n > m$).

Soit h un entier $> m$ pour lequel (8_1) a lieu et

$$(12_1) \qquad r_h^{\sigma} > \log_k h;$$

je détermine l' par la condition

$$(13_1) \qquad (\log_k h)^{\frac{1}{\sigma}} = (\log_k l')^{\frac{1}{\tau}},$$
$$E(l') = l \leqq l' < l + 1;$$

l' est plus grand que h.

J'écris, pour $m < n < h$ et $n \geqq l + 1$, les inégalités

$$(9'_1)\ (9''_1) \qquad r_n > (\log_k n)^{\frac{1}{\tau}};$$

pour $h \leqq n \leqq l$, l'inégalité

$$(\log_k n)^{\frac{1}{\tau}} \leqq (\log_k l')^{\frac{1}{\tau}} = (\log_k h)^{\frac{1}{\sigma}},$$

$$(14_1) \qquad r_n \geqq r_h > (\log_k h)^{\frac{1}{\sigma}}.$$

Je remarque que l'ensemble des facteurs primaires de $F(z)$ qui correspondent aux racines $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ ont un produit qui est une fonction entière d'ordre fini; on peut donc les négliger pour établir (11_1), car ici $k \geqq 1$.

On n'a à considérer que le produit

$$G(z) = \prod_{m+1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\alpha_n}\right) e^{\frac{z}{\alpha_n} + \ldots + \frac{z^{\rho_n}}{\rho_n \alpha_n^{\rho_n}}} = \prod_{m+1}^{\infty};$$

s étant un nombre fixe arbitraire compris entre σ et τ, je pose

$$(14_1\ bis) \qquad r = (\log_k h)^{\frac{1}{s}}, \qquad h = e_k(r^s),$$

et je cherche un maximum du module de $G(z)$ pour $|z| = r$, en écrivant

$$G(z) = \prod\nolimits_1 \prod\nolimits_2 \prod\nolimits_3,$$

$$\prod\nolimits_1 = \prod_{m+1}^{h-1} Q_{\rho_n}, \qquad \prod\nolimits_2 = \prod_{h}^{l} Q_{\rho_n}, \qquad \prod\nolimits_3 = \prod_{l+1}^{\infty} Q_{\rho_n}.$$

1° *Cas de* Π_1. — On a

$$\log \left| \prod\nolimits_1 \right| < \sum_{m+1}^{h-1} \left[\frac{2r}{r_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{r}{r_n}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{\rho_n}\left(\frac{r}{r_n}\right)^{\rho_n} \right].$$

On peut supposer $r_n > 2$; donc, le nombre des termes entre crochets étant $\rho_n < \theta' \rho_h$ ($\theta' =$ const. positive convenable, d'après la définition des produits canoniques, p. 272),

$$\log \left| \prod_1 \right| < \mu h \rho_h r^{\theta' \rho_h} \qquad (\mu = \text{const.}).$$

Or

$$h = e_k(r^s), \qquad \theta' \rho_h \leqq \theta \log h = \theta\, e_{k-1}(r^s) \qquad (\theta \text{ const. positive}),$$

$$r^{\theta' \rho_h} \leqq r^{\theta\, e_{k-1}(r^s)} = e^{\theta \log r\, e_{k-1}(r^s)} < e_k(r^{s+\varepsilon'});$$

$$\log \left| \prod_1 \right| < \mu_1 e_k(r^s) \theta e_{k-1}(r^s)\, e_k(r^{s+\varepsilon'}) < e_k(r^{s+\varepsilon''}),$$

$$\left| \prod_1 \right| < e_{k+1}(r^{s+\varepsilon''}),$$

où ε'' est aussi petit qu'on veut dès que r est assez grand et, si l'on veut,

$$s + \varepsilon'' < \rho - 2\varepsilon,$$

dès que h est assez grand.

2° *Cas de* Π_2. — On a

$$\log \prod_2 = -\sum_h^l \left[\frac{1}{\rho_n + 1} \left(\frac{z}{\alpha_n} \right)^{\rho_n + 1} + \frac{1}{\rho_n + 2} \left(\frac{z}{\alpha_n} \right)^{\rho_n + 2} + \ldots \right].$$

Ici, d'après (14_1) et (14_1 *bis*),

$$|\alpha_n| \geqq |\alpha_h| > (\log_k h)^{\frac{1}{\sigma}} > 2 (\log_k h)^{\frac{1}{s}} = 2r,$$

dès que h est assez grand; d'où

$$\left| \frac{1}{\rho_n + 1} \left(\frac{z}{\alpha_n} \right)^{\rho_n + 1} + \frac{1}{\rho_n + 2} \left(\frac{z}{\alpha_n} \right)^{\rho_n + 2} + \ldots \right| < \frac{1}{\rho_n + 1} \left(\frac{r}{r_n} \right)^{\rho_n + 1} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots \right)$$
$$= \frac{2}{\rho_n + 1} \left(\frac{r}{r_n} \right)^{\rho_n + 1},$$

$$\log \left| \prod_2 \right| < \sum_h^l \frac{2}{\rho_n + 1} \left(\frac{r}{r_n} \right)^{\rho_n + 1}.$$

Or, d'après (14_1) et (14_1 *bis*),

$$\frac{r}{r_n} < \frac{r}{(\log_k h)^{\frac{1}{\sigma}}} = (\log_k h)^{\frac{1}{s}-\frac{1}{\sigma}} = r^{1-\frac{s}{\sigma}},$$

$$\log\left|\prod_2\right| < \sum_h^l r^{\left(1-\frac{s}{\sigma}\right)(\rho_n+1)} < \sum_h^l r^{\left(1-\frac{s}{\sigma}\right)\theta_1 \log n},$$

θ_1 constante positive, puisque

$$1-\frac{s}{\sigma} < 0, \qquad \rho_n = \theta_n \log n, \qquad \rho_n + 1 > \theta_1 \log n \qquad (\theta_1 \text{ const. positive}).$$

Or

$$r^{\left(1-\frac{s}{\sigma}\right)\theta_1 \log n} = n^{\theta_1\left(1-\frac{s}{\sigma}\right)\log r} < n^{-\nu},$$

avec ν fixe > 2;

$$\sum_h^l n^{-\nu} < \int_{h-1}^l x^{-\nu}\,dx = \frac{1}{1-\nu}(x^{1-\nu})_{h-1}^l < \frac{(h-1)^{1-\nu}}{\nu-1} < 1,$$

$$\log\left|\prod_2\right| < 1.$$

3° *Cas de* Π_3. — On a, d'après ($9''_1$),

$$|\alpha_n| > (\log_k n)^{\frac{1}{\tau}} > (\log_k l')^{\frac{1}{\tau}} = (\log_k h)^{\frac{1}{\sigma}} > 2(\log_k h)^{\frac{1}{s}} = 2r.$$

Le calcul déjà fait pour Π_2 donne

$$\log\left|\prod_3\right| < \sum_{l+1}^{\infty} r^{\left(1-\frac{s}{\sigma}\right)(\rho_n+1)},$$

$$\frac{r}{r_n} < r^{1-\frac{s}{\sigma}},$$

$$\log\left|\prod_3\right| < \sum_{l+1}^{\infty}\left(r^{1-\frac{s}{\sigma}}\right)^{\rho_n+1} < \sum_{l+1}^{\infty} n^{-\nu} < \frac{l^{1-\nu}}{\nu-1} < 1.$$

Ainsi

$$\left|\prod_1\right| < e_{k+1}(r^{s+\varepsilon''}), \quad \left|\prod_2\right| < e, \quad \left|\prod_3\right| < e.$$

Par suite, la croissance de H n'est pas régulière. C. Q. F. D.

Théorème XI. — *Soit $f(z)$ une fonction entière d'ordre (k, ρ), k ou $\rho > 0$, à croissance régulière; si*

$$f(z) = F(z)e^{H(z)},$$

où F *est un produit canonique,* H *une fonction entière, et si* e^H *est d'ordre* $< (k, \rho)$, *la distribution des zéros de* $f(z)$ *est régulière.*

En effet, le produit $F(z)$ est d'ordre $\geqq (k, \rho)$; il ne peut être d'ordre supérieur (corollaire III du théorème IV); donc il est d'ordre (k, ρ). Sa croissance est d'ailleurs régulière, sans quoi, puisque e^H est d'ordre $< (k, \rho)$, il y aurait une infinité de valeurs de r indéfiniment croissantes telles que

$$|f| = |Fe^H| < e_{k+1}(r^{\rho-\lambda}),$$

λ positif fixe $< \rho$, et la croissance de $f(z)$ ne serait pas régulière. D'après le théorème X, la distribution de ses zéros est régulière.

C. Q. F. D.

Il resterait à trouver un moyen de reconnaître quand une fonction entière $f(z)$ à croissance régulière (¹) d'ordre (k, ρ) donnée par son développement taylorien, peut se mettre sous la forme $F(z)e^H$, où e^H est d'ordre $< (k, \rho)$, ou à indiquer des cas étendus où l'on peut le vérifier (lorsque $k = 0$, il suffit que ρ ne soit pas entier pour que ceci ait lieu).

Au contraire, on sait reconnaître (²) si une fonction entière donnée par son développement taylorien a sa croissance irrégulière, et alors le théorème IX permet d'affirmer que la distribution des zéros est irrégulière.

Je vais établir encore quelques propriétés de la multiplication des produits canoniques ou des fonctions entières au point de vue de la régularité de croissance.

(¹) Voir *Journal de l'École Polytechnique*, 1904 et 1905, p. 18. On sait vérifier la régularité de la croissance [ci-dessus note (1), p. 297].

(²) *Journal de l'École Polytechnique*, 1904 et 1905, p. 22 et, ci-dessus, p. 297.

Il ne faut pas croire que le théorème XI soit susceptible de s'étendre à toute fonction entière à croissance régulière d'ordre infini ; d'abord :

Lemme VII. — *Si l'ordre réel d'une fonction entière est plus petit que l'ordre apparent,* (k, ρ), *k ou $\rho > 0$, la croissance est régulière à la condition nécessaire et suffisante que celle du facteur exponentiel le soit.*

Quand $k = 0$, une pareille fonction a toujours sa croissance régulière.

La condition est évidemment nécessaire, car, si

$$f_1(z) = \Phi e^{\mathrm{H}},$$

f_1 étant d'ordre (k, ρ), on a constamment

$$|\Phi| \leqq e_{k+1}(r^\sigma), \qquad \sigma < \rho$$

et il y aura toujours une infinité de valeurs de r indéfiniment croissantes pour lesquelles

$$f_1 \leqq e_{k+1}(r^{\sigma'}), \qquad \rho - \sigma' \text{ fini positif,}$$

si e^{H} a sa croissance irrégulière.

La condition est suffisante. En effet, d'abord, en dehors de couronnes limitées par deux circonférences de rayon $r_i \pm e_k(r_i^\tau)^{-1}$ et déterminées comme au corollaire I du théorème IV, où (k, τ) est plus petit que (k, ρ) et plus grand que l'ordre de Φ, on a

$$|\Phi| > e_{k+1}(r^{\tau_1})^{-1}$$

avec $\tau_1 < \rho$, par suite, la croissance du facteur exponentiel étant supposée régulière, en dehors de ces couronnes,

$$|f_1| > e_{k+1}(r^{\rho-\varepsilon}).$$

A l'intérieur d'une de ces couronnes, puisque M_r croît avec r [1],

$$\mathrm{M}_r \geqq e_{k+1}[(r-\eta)^{\rho-\varepsilon}],$$

$r - \eta$ étant un peu plus petit que le rayon du bord intérieur de la

---

[1] Ci-dessus, p. 312, note (1). Il suffit d'ailleurs de remarquer que η est limité (p. 291).

couronne,

$$(r-\eta)^{\rho-\varepsilon} = r^{\rho-\varepsilon}\left(1-\frac{\eta}{r}\right)^{\rho-\varepsilon}$$

et

$$\eta < 2e_k(r^{\tau}_i)^{-1},$$

$$1-\frac{\eta}{r} > \frac{1}{2},$$

$$(r-\eta)^{\rho-\varepsilon} > \left(\frac{r}{2}\right)^{\rho-\varepsilon} = r^{\rho-\varepsilon'};$$

$$M_r \geqq e_{k+1}(r^{\rho-\varepsilon'}). \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

D'autre part, l'on peut former des fonctions entières d'ordre réel et apparent (k, ρ) (k ou $\rho > 0$) dont la croissance est régulière et la distribution des zéros irrégulière. Soit la fonction

$$f_1(z) = \Phi(z)e^{\mathrm{H}(z)},$$

où e^{H} est une fonction entière à croissance régulière d'ordre (k, ρ), avec $k > 0$. Je prendrai pour H une fonction entière à coefficients tous positifs; je supposerai d'autre part que Φ a toutes ses racines négatives.

On a vu (p. 268) que

$$\sum \mathrm{R}_n = \sum \frac{1}{z-\alpha_n}\left(\frac{z}{\alpha_n}\right)^{\rho_n};$$

si z est réel et positif, $\frac{1}{z-\alpha_n}$ est positif et, comme on peut toujours choisir ρ_n pair quel que soit n, $\sum \mathrm{R}_n$ sera toujours positif.

$$\sum\left[\log\left(1-\frac{z}{\alpha_n}\right) + \mathrm{P}_{\rho_n}\left(\frac{z}{\alpha_n}\right)\right] = \int_0^z \sum \mathrm{R}_n\,dz$$

sera aussi positif et

$$\Phi(z) = e^{\int_0^z \sum \mathrm{R}_n\,dz} > e.$$

D'autre part, pour $x = r$ assez grand, on sait que le maximum du module de H pour $|z| = r$ a lieu sur Ox, car le module de H est au plus égal à la somme des modules des termes de H. Donc, sur Ox, pour $x = r$,

$$e^{\mathrm{H}} \geqq e_{k+1}(r^{\rho-\varepsilon})$$

et

$$f_1(r) > e_{k+1}(r^{\rho-\varepsilon}),$$

en sorte que $f_1(z)$ a sa croissance régulière quelle que soit la distribution des zéros de $\Phi(z)$ sur la partie négative de Ox.

Lorsque $k = 0$, c'est-à-dire pour les fonctions entières d'ordre fini, un raisonnement identique est applicable quand ρ est entier pair et H un polynome à coefficients tous positifs. Donc :

LEMME VIII. — *Il existe toujours des fonctions entières f_1 d'ordre fini ρ quelconque pair, et d'ordre réel ρ, et aussi des fonctions entières d'ordre (k, ρ) infini $(k > 0)$ non transfini quelconque, et d'ordre réel (k, ρ) dont la croissance est régulière et la distribution des zéros irrégulière* (1).

Je vais encore établir le résultat suivant qui n'a pas encore été indiqué, à ce que je crois, même, dans toute sa généralité, pour l'ordre fini :

THÉORÈME XII. — *Soit Φ un produit canonique d'ordre (k, ρ), k ou $\rho > 0$, à croissance régulière,* F *une fonction entière d'ordre $< (k, \rho)$: le produit* $\mathrm{F}\Phi$ *a sa croissance régulière et la distribution de ses zéros régulière.*

Le produit $\mathrm{F}\Phi$ est d'ordre réel (k, ρ) d'après le corollaire II du théorème III, et d'ordre apparent (k, ρ), d'après le corollaire III du théorème IV, ou encore d'après le théorème II. La croissance de $\mathrm{F}\Phi$ sera régulière, d'après le théorème IX, si la distribution de ses zéros est régulière. Il suffira donc de vérifier ce dernier point.

---

(1) M. Borel, pour les fonctions entières d'ordre fini, pense que, *probablement*, parmi les diverses fonctions $\varphi f + \varphi_1$, où f est une fonction entière quelconque, à croissance régulière, d'ordre ρ, où φ, φ_1 sont des fonctions entières quelconques, d'ordre $< \rho$, une seule (et ses produits par une fonction entière φ_2 quelconque analogue à φ et φ_1) a la distribution de ses zéros irrégulière. On peut émettre une hypothèse analogue pour les fonctions entières $\varphi f + \varphi_1$, où f est d'ordre (k, ρ) $(k > 0)$, non transfini (voir *Intermédiaire des Math.*, 1905, p. 8 et 94, question 2864).

Soit α_n le $n^{\text{ième}}$ zéro de Φ et $|\alpha_n| = r_n$; la distribution des zéros de Φ étant régulière,

$$(25) \qquad r_n^{\rho(1+\varepsilon)} = \log_k n, \qquad n = e_k(r_n^{\rho(1+\varepsilon)}).$$

L'ordre de F est $\leqq (k, \sigma)$, σ fixe $< \rho$. Le nombre des zéros de F de module $\leqq r_n$ est j, et, si $s_1, s_2, \ldots, s_j$ sont leurs modules,

$$(26) \qquad r_n \geqq s_j > (\log_k j)^{\frac{1}{\tau}}, \qquad j < e_k(r_n^\tau),$$

où τ est fixe et $< \rho$, d'après (3).

Le $(n+j)^{\text{ième}}$ zéro de FΦ sera tel, si t_{n+j} est son module, que

$$r_n = t_{n+j} = (\log_k n)^{\frac{1}{\rho(1+\varepsilon)}}.$$

Je pose

$$t_{n+j} = [\log_k(n+j)]^{\frac{1}{\lambda}} = (\log_k n)^{\frac{1}{\rho(1+\varepsilon)}},$$
$$\log_k(n+j) = (\log_k n)^{\frac{\lambda}{\rho(1+\varepsilon)}}.$$

Or, d'après (25) et (26), $\frac{j}{n}$ a pour limite o quand n croît indéfiniment. Donc, d'après une formule déjà appliquée précédemment [1],

$$\log_k(n+j) = \log_k n + \frac{j(1+\eta)}{\log_{k-1} n \ldots \log n . n} \qquad (k > 0),$$
$$\log_k(n+j) = (\log_k n)^{\frac{\lambda}{\rho(1+\varepsilon)}} > \log_k n;$$

d'où

$$1 < \frac{\lambda}{\rho(1+\varepsilon)} < 1 + \varepsilon',$$

même si $k = 0$, mais $\rho > 0$, et

$$\lambda = \rho(1+\varepsilon'').$$

C'est dire que

$$t_{n+j} = \log_k(n+j)^{\frac{1}{\rho(1+\varepsilon'')}} = (\log_k n)^{\frac{1}{\rho(1+\varepsilon)}}.$$

---

(1) *Journal de l'École Polytechnique*, 1904, p. 162, et 1905, p. 17.

De même

$$r_{n+1} = t_{n+j+j_1} = [\log_k(n+1)]^{\frac{1}{\rho(1+\varepsilon_4)}},$$

$$\log_k(n+j+j_1)^{\frac{1}{\rho(1+\varepsilon_3)}} = (\log_k n)^{\frac{1}{\rho(1+\varepsilon_3)}}.$$

Alors si

$$0 < j' < j_1,$$

$t_{n+j+j'}$, compris entre t_{n+j} et t_{n+j+j_1}, est égal à $(\log_k n)^{\frac{1}{\rho(1+\varepsilon_4)}}$, $\log_k(n+j+j')$, compris entre $\log_k(n+j)$ et $\log_k(n+j+j_1)$, est égal à $(\log_k n)^{1+\varepsilon_5}$, et, par suite,

$$t_{n+j+j'} = (\log_k n)^{\frac{1}{\rho(1+\varepsilon_4)}} = [\log_k(n+j+j')]^{\frac{1}{\rho(1+\varepsilon_4)(1+\varepsilon_5)}}.$$

C'est la valeur la plus générale du module des zéros de $F\Phi$, dont la distribution des zéros est, par suite, régulière. C. Q. F. D.

Corollaire. — *Le produit d'une fonction entière f d'ordre réel et apparent (k, ρ), k ou $\rho > 0$, et de croissance régulière par une fonction entière F d'ordre moindre, a lui-même sa croissance régulière et est d'ordre réel et apparent (k, ρ).*

Si f a la distribution de ses zéros régulière, il en est de même de fF.

L'ordre réel du produit fF est (k, ρ), d'après le corollaire II du théorème III, et aussi l'ordre apparent, d'après le théorème II ou le corollaire III du théorème IV. La croissance de fF est régulière : la démonstration est analogue à celle du lemme VII.

Enfin, si f a la distribution de ses zéros régulière, il en est de même pour fF, d'après le théorème XII. C. Q. F. D.

TROISIÈME PARTIE.

CROISSANCE DES SOLUTIONS DES SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS LINÉAIRES A COEFFICIENTS QUASI-MÉROMORPHES.

VII.

Je me propose d'indiquer ici une extension de mon théorème VIII du Mémoire du *Journal de l'École Polytechnique* (1904, p. 162 et 1905, p. 71) et de son corollaire aux cas où les coefficients a_{jl} qui interviennent dans les formules (24) de ce Mémoire sont, non plus des fonctions quasi-entières, mais des fonctions quasi-méromorphes d'ordre fini ou infini non transfini dans le domaine d'un point essentiel isolé commun que l'on peut toujours supposer, grâce au changement de variable $z' = \frac{1}{z-a}$, être ∞ (1).

Je considère le système

$$(27)\qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{dx_1}{dz} = a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{dx_n}{dz} = a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n. \end{array}\right.$$

Soit le cercle C_μ de rayon μ fini assez grand ayant pour centre l'origine, le reste du plan constituant le domaine du point $z = \infty$, où les a_{jl} n'ont, en dehors de ∞, d'autres points critiques que des pôles, et sont monodromes. Je décris autour de chaque pôle, en dehors de C_μ, deux cercles de rayons $e_{k_1}(r_i^\tau)^{-1}$, $e_{k_1}(r_i^{\tau'})^{-1}$, avec $(k, \rho) < (k_1, \tau') < (k_1, \tau)$ [τ, τ' fixes et suffisamment grands, (k, ρ) ordre maximum des a_{jl}, k ou $\rho > 0$]. L'ensemble des cercles de chaque espèce forme une

(1) J'ai déjà indiqué cette extension pour le cas où les a_{jl} sont d'ordre fini, sans d'ailleurs préciser la démonstration (*loc. cit.*, p. 76).

région E, E' respectivement, et E' contient E. Soient H, H' les régions formées en supprimant du plan C_μ et, respectivement, E ou E'. On sait que l'on a dans H, *a fortiori* dans H',

$$|a_{jl}| > e_{k_1+1}(r^{\tau_1})^{-1},$$

τ_1 arbitraire, avec $(k_1, \tau_1) > (k, \rho)$ (corollaire II du théorème IV). Je prends encore un cercle C_R de rayon R arbitraire, de préférence petit, ayant pour centre l'origine [1].

Je vais d'abord établir le lemme suivant :

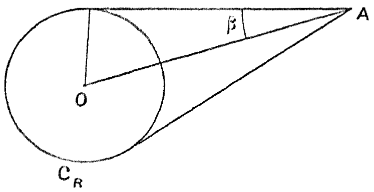
Lemme IX. — *Soit* A *un point de* H', *d'affixe* z, *avec* $|z| = r$; μ *étant choisi* a priori *suffisamment grand et fixe, ainsi que* $\tau - \tau'$, *l'angle sous lequel* C_R *est vu du point* A *est aussi grand qu'on veut par rapport à la somme des angles sous lesquels sont vus de* A *les cercles de* E, *quand* r *est suffisamment grand, mais quelconque.*

Par suite, il passe toujours par A *une infinité de droites qui coupent le cercle* C_R *et sont, en dehors du cercle* C_μ, *en entier dans la région* H.

Je crois qu'il y a intérêt, au point de vue de la clarté, à scinder la démonstration en deux parties : je considérerai d'abord le cas où $k_1 = k = 0$, ρ étant fini > 0; puis je traiterai le cas général.

Cas de l'ordre fini $\rho > 0$, *avec* $k_1 = k = 0$. — Le cercle C_R de rayon R

Fig. 1.



ayant pour centre l'origine est vu de A sous l'angle 2β, et

$$\sin\beta = \frac{R}{r}. \tag{28}$$

(1) R peut être pris fixe, d'ailleurs aussi petit qu'on veut, pourvu que μ et r soient assez grands.

Je cherche l'angle total sous lequel est vue la région E du point A, c'est-à-dire la somme des angles sous lesquels les cercles de E sont vus de A.

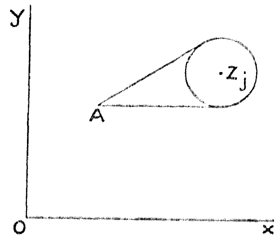
Je divise ces cercles en deux catégories : d'abord ceux pour lesquels

$$(1+\lambda)\,r \geqq r_j \geqq (1-\lambda)\,r, \tag{29}$$

λ fixe petit positif, ensuite les autres.

Première catégorie. — Soit $2\beta_j$ l'angle sous lequel on voit de A le

Fig. 2.



cercle de E ayant pour centre z_j

$$\sin\beta_j = \frac{r_j^{-\tau}}{|z - z_j|} \leqq \frac{r_j^{-\tau}}{|r - r_j|}.$$

A appartenant à H',

$$|r - r_j| \geqq r_j^{-\tau'} - r_j^{-\tau} = r_j^{-\tau}(r_j^{\tau-\tau'} - 1);$$

$$\sin\beta_j \leqq (r_j^{\tau-\tau'} - 1)^{-1} < 2\,r_j^{\tau'-\tau}, \tag{30}$$

si

$$r_j^{\tau-\tau'} - 1 > \frac{1}{2} r_j^{\tau-\tau'}, \qquad r_j^{\tau-\tau'} > 2,$$

ce qui a lieu, quels que soient τ et τ' fixes ($\tau > \tau'$), pour r_j assez grand.

$$\sin\beta_j = \beta_j - \frac{\beta_j^3}{6} + \ldots$$

est toujours petit, en sorte que

$$\beta_j \leqq b \sin\beta_j \qquad (b \text{ const. finie}).$$

Donc

$$\beta_j \leqq 2 b r_j^{\tau'-\tau},$$

d'après (30). L'angle total relatif à la première catégorie est

$$\sum_1 2\beta_j \leqq 4 b \sum_1 r_j^{\tau'-\tau}.$$

Ici

(3) $$r_j^{\rho+\varepsilon} > j.$$

Donc le nombre N des zéros qui entrent dans $\sum_1$ est

$$N < [(1+\lambda) r]^{\rho+\varepsilon},$$

puisque

$$r_j \leqq r(1+\lambda),$$

d'après (29). Dans $\sum_1$

$$r_j \geqq r(1-\lambda), \qquad r_j^{\tau'-\tau} \leqq r^{\tau'-\tau}(1-\lambda)^{\tau'-\tau},$$

d'après (29). Dès lors

$$\sum_1 \beta_j \leqq 2 b N r^{\tau'-\tau}(1-\lambda)^{\tau'-\tau},$$

$$\sum_1 \beta_j < 2b[(1+\lambda)r]^{\rho+\varepsilon} r^{\tau'-\tau}(1-\lambda)^{\tau'-\tau} < 2b(1+\lambda)^{\rho+\varepsilon}(1-\lambda)^{\tau'-\tau} r^{\rho+\varepsilon+\tau'-\tau}.$$

On peut évidemment disposer de $\tau - \tau'$ de façon que

$$\sum_1 2\beta_j < r^{-\tau''},$$

où τ'' est arbitraire.

Deuxième catégorie. — 1° $r_j < r(1-\lambda)$. Ici

$$\sin\beta_j \leqq \frac{r_j^{-\tau}}{r - r_j}, \qquad r - r_j \geqq \lambda r,$$

$$\sin\beta_j \leqq (r_j^{\tau}\lambda r)^{-1}, \qquad 2\beta_j \leqq b r^{-1} r_j^{-\tau}.$$

$$\sum_2 2\beta_j \leqq \frac{b}{r} \sum r_j^{-\tau}.$$

$\sum r_j^{-\tau}$ est fini, car c'est la somme d'une partie d'une série convergente, puisque $\tau > \rho$. De plus, si μ, rayon de C_μ, choisi *a priori* avant toute hypothèse sur r, est assez grand, $\sum r_j^{-\tau}$ est aussi petit qu'on veut : μ est aussi pris assez grand pour que les inégalités du genre de (3) soient applicables pour une valeur fixe de ε aussi petite qu'on veut. Donc

$$\sum_2 2\beta_j \leqq \frac{b_1}{r},$$

où b_1 est petit.

2° $r_j > r(1 + \lambda)$. — $|r - r_j| \geqq \lambda r$, comme ci-dessus, et

$$2\beta_j \leqq \frac{b_2}{r} r_j^{-\tau}.$$

Ici encore,

$$\sum_3 2\beta_j \leqq \frac{b_3}{r},$$

où b_3 est petit, et même aussi petit qu'on veut dès que r est assez grand.

Finalement

$$\sum 2\beta_j < r^{-\tau''} + \frac{b_1 + b_3}{r}.$$

D'autre part, d'après (28),

$$\beta > \sin\beta = \frac{R}{r};$$

$$\frac{2\beta}{\sum 2\beta_j} > \frac{2R}{b_1 + b_3 + r^{1-\tau''}}.$$

On peut toujours, R étant donné, prendre $\tau - \tau'$, τ'', μ assez grands pour que ce rapport soit au moins égal à un nombre arbitraire aussi grand qu'on veut et > 1 quel que soit r, dès que r est assez grand. Donc il passe par A, pris en dehors de E', dans H', une infinité de droites occupant un angle total 2γ avec $\gamma \geqq \frac{R}{cr}$, où c est une constante arbitraire > 1, et qui coupent le cercle de rayon R arbitraire ayant pour centre l'origine en restant en dehors de la région E. Ces droites passent, dans leur partie située en dehors du cercle C_μ de rayon μ assez grand, mais fini, ayant pour centre l'origine, à distance $> r_j^{-\tau}$ de tout pôle α_i, τ étant assez grand par rapport à $\tau'_1 > \rho$, mais fini (par exemple, $\tau'_1 = \rho + \varepsilon'$, τ assez grand).

Cas général. — Je suppose que l'ordre maximum des a_{jl} est (k, ρ) et non plus ρ. Je décris autour de chaque pôle, en dehors de C_μ, deux cercles de rayons $e_{k_1}(r_j^\tau)^{-1}$, $e_{k_1}(r_j^{\tau'})^{-1}$, avec $(k, \rho) < (k_1, \tau') < (k_1, \tau)$ (τ, τ' fixes). On obtient encore deux régions E, E', E' contenant E, et deux régions H, H'.

Je me contenterai d'indiquer les modifications aux raisonnements du cas précédent.

Première catégorie. — On a

$$\sin\beta_j \leqq \frac{e_{k_1}(r_j^\tau)^{-1}}{|r - r_j|}.$$

A appartenant à H',

$$r - r_j \geqq e_{k_1}(r_j^{\tau'})^{-1} - e_{k_1}(r_j^\tau)^{-1},$$
$$\sin\beta_j \leqq [e_{k_1}(r_j^\tau)\, e_{k_1}(r_j^{\tau'})^{-1} - 1]^{-1} < 2\, e_{k_1}(r_j^{\tau'})\, e_{k_1}(r_j^\tau)^{-1},$$

dès que r_j est assez grand, d'où

$$\beta_j \leqq 2b\, e_{k_1}(r_j^{\tau'})\, e_{k_1}(r_j^\tau)^{-1} \leqq 2b\, e_{k_1}(r_j^{\tau-\tau'})^{-1},$$
$$\sum\nolimits_1 \beta_j \leqq 2b \sum\nolimits_1 e_{k_1}(r_j^{\tau-\tau'})^{-1}.$$

Ici

(3) $$r_j^{\rho+\varepsilon} > \log_k j.$$
$$N < e_k\{[1+\lambda)r]^{\rho+\varepsilon}\} < e_k(r^{\rho+\varepsilon'}),$$
$$e_{k_1}(r_j^{\tau-\tau'})^{-1} \leqq e_{k_1}\{[r(1-\lambda)]^{\tau-\tau'}\}^{-1} \leqq e_{k_1}(r^{\tau-\tau'-\varepsilon_1})^{-1},$$
$$\sum\nolimits_1 \beta_j < 2b\, e_k(r^{\rho+\varepsilon'})\, e_{k_1}(r^{\tau-\tau'-\varepsilon_1})^{-1},$$
$$\sum\nolimits_1 2\beta_j < r^{-\tau''},$$

où τ'' est arbitraire ($\tau - \tau'$ assez grand).

Deuxième catégorie. — 1° $r_j < r(1-\lambda)$. Ici

$$\sin\beta_j \leqq \frac{e_{k_1}(r_j^\tau)^{-1}}{\lambda r},$$

$$\sum\nolimits_2 2\beta_j \leqq \frac{b}{r}\sum\nolimits_2 e_{k_1}(r_j^\tau)^{-1}.$$

La série $\sum_2 e_{k_1}(r_j^\tau)^{-1}$ est convergente ([1]), et sa valeur est aussi

---

([1]) En effet, si (k, ρ) (k ou $\rho > 0$) est l'ordre d'un produit canonique de zéros α_j ($|\alpha_j| = r_j$), je dis que

$$(31) \qquad \sum e_k(r_j^\sigma)^{-1} \qquad (\sigma \text{ fixe})$$

converge ou non suivant que σ est plus grand ou plus petit que ρ.

D'après (3),

$$r_j^\sigma > (\log_k j)^{\frac{\sigma}{\rho+\varepsilon}} > \log_k(j^{1+\nu}),$$

ν fixe et positif, $k \geqq 0$, dès que ε fixe, $\sigma > \rho + \varepsilon$ (ε est aussi petit qu'on veut si l'on ne considère que des valeurs de j assez grandes),

$$e_k(r_j^\sigma)^{-1} < j^{-1-\nu},$$

et (31) converge pour $\sigma > \rho$.

D'autre part, pour une infinité de valeurs de j, d'après la formule (9) du corollaire du théorème I,

$$r_j^{\rho-\varepsilon'} \leqq \log_k j,$$

$$r_j^\sigma \leqq (\log_k j)^{\frac{\sigma}{\rho-\varepsilon'}} < \log_k(j^{1-\nu}),$$

$k \geqq 0$, ν fixe positif, dès que ε' fixe, $\sigma < \rho - \varepsilon'$ (ε' comme ε);

$$e_k(r_j^\sigma)^{-1} > j^{-1+\nu}.$$

La série

$$\sum e_k(r_j^\sigma)^{-1},$$

renferme donc une infinité de termes de rang j qui sont $> j^{-1+\nu}$ et sa somme est infinie. Les nombres k et ρ jouissent, quels que soient k et ρ finis (k ou $\rho > 0$), de cette propriété que *la série* $\Sigma e_k(r_j^\sigma)^{-1}$, *où* σ *est fixe, converge quand* $\sigma > \rho$, *diverge quand* $\sigma < \rho$.

Les séries $\Sigma e_{k_1}(r_j^\tau)^{-1}$, où $(k_1, \tau) > (k, \rho)$, sont *a fortiori* convergentes (comparer Borel, *Leçons sur les fonctions entières*, p. 19).

petite qu'on veut dès que μ est assez grand :

$$\sum_2 2\beta_j \leqq \frac{b_1}{r},$$

où b_1 est une constante aussi petite qu'on veut.

2°

$$2\beta_j \leqq \frac{b_2}{r} e_{k_1}(r_j^{\tau})^{-1},$$

$$\sum_3 2\beta_j \leqq \frac{b_3}{r}.$$

Finalement

$$\sum 2\beta_j \leqq r^{-\tau''} + \frac{b_1+b_3}{r},$$

et l'on arrive aux mêmes conclusions. C. Q. F. D.

Je passe maintenant à la démonstration du théorème annoncé, que je formulerai ainsi :

THÉORÈME XIII. — *Soit le système*

$$(32)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dz} = a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{dx_n}{dz} = a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n, \end{cases}$$

où $a_{11}, \ldots, a_{nn}$ sont des fonctions quasi-méromorphes de z aux environs d'un point singulier essentiel isolé commun que l'on peut supposer être $z = \infty$. Si ces fonctions sont d'ordre maximum (k, ρ) pour $z = \infty$ (k ou $\rho > 0$), en tout point z pris en dehors des cercles décrits autour de chaque pôle α_j des a_{jl} comme [1] *centre avec un rayon $e_{k_1}(r_j^{\tau})^{-1}$ [$|\alpha_j| = r_j$, $(k_1, \tau') > (k, \rho)$, τ' fixe quelconque $> \rho$], on a, si $r = |z|$ est assez grand,*

$$|x_q| \leqq e_{k_1+2}(r^{\tau_1}), \qquad q = 1, 2, \ldots, n$$

[*τ_1 arbitraire pourvu que $(k_1, \tau_1) > (k, \rho)$*].

---

[1] On suppose, pour simplifier, que les a_{jl} aient tous les mêmes pôles, ce qu'on peut toujours réaliser en prenant pour dénominateur commun des a_{jl} le plus petit commun multiple P des produits canoniques dénominateurs (corollaire V du théorème III).

Soit A le point z : il est dans la région H'. D'après le lemme précédent, on peut mener par ce point une droite Δ qui coupe le cercle C_R, et, en dehors de C_μ, est en entier en dehors de E. Je prends un point z_0 de cette droite dans C_R : on a

$$z = z_0 + \theta e^{i\omega} = z_0 + t,$$

où θ est réel,

$$|z_0| = r_0 < R.$$

D'abord

$$\frac{dx_1}{dz} = \frac{dx_1}{dt}, \qquad \ldots, \qquad \frac{dx_n}{dz} = \frac{dx_n}{dt}.$$

Je considère encore la circonférence C'_μ de centre z_0 dans le plan des z (ou o dans le plan des t) et qui a pour rayon $r_0 + \mu$: elle est tangente à C_μ et comprend C_μ. En dehors de C'_μ, a_{jl} n'a d'autres points critiques que des pôles à distance finie : c'est donc, en dehors de C'_μ, dans le plan des t, une fonction quasi-méromorphe de t pour $t = \infty$. On a alors un système

$$(33) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n, \end{array} \right.$$

analogue au précédent, mais où la variable est t.

En dehors de E, pour $r = |z|$ assez grand,

$$|a_{jl}| < e_{k_1+1}(r^{\tau_1}),$$

$(k_1, \tau_1) > (k, \rho)$, τ_1 arbitraire, mais $> \rho$ si $k_1 = k$, d'après le théorème IV et son corollaire. Or

$$|z| = r = |z_0 + t| \leqq r_0 + \theta, \qquad \text{où } |t| = \theta,$$
$$r^{\tau_1} \leqq \theta^{\tau_1 + \varepsilon} \leqq \theta^{\tau_2},$$

quand r ou θ est assez grand, τ_2 étant analogue à τ_1, d'où

$$(33\ bis) \qquad |a_{jl}| < e_{k_1+1}(\theta^{\tau_2}),$$

pour $|t| = \theta$ assez grand.

En supposant qu'on ait chassé le dénominateur commun β' des a_{jl}, le système (33) prendra la forme

$$\beta' \frac{dx_1}{dt} = \beta_{11} x_1 + \ldots + \beta_{1n} x_n,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\beta' \frac{dx_n}{dt} = \beta_{n1} x_1 + \ldots + \beta_{nn} x_n,$$

où β' et les β_{jl} sont des fonctions quasi-entières pour $t = \infty$, d'ordres $\leqq (k, \rho)$.

Je pose alors

$$(34)\quad \left\{ \begin{array}{l} t = \theta e^{i\omega} \ (\theta \text{ réel, } \omega \text{ fixe} = \text{l'angle de } \Delta \text{ avec l'axe des } z \text{ réels}), \\ x_q = x'_q + i x''_q, \qquad i = \sqrt{-1} \ (x'_q, x''_q \text{ réels}), \\ \dfrac{dx_q}{dt} = \dfrac{dx_q}{d\theta} (\cos\omega - i \sin\omega), \end{array} \right.$$

et, ω ayant la valeur ci-dessus,

$$\beta' = \gamma + i\delta, \qquad \beta_{jl} = \gamma_{jl} + i\delta_{jl},$$

où γ, δ, γ_{jl}, δ_{jl} sont réels et fonctions de θ.

On en conclut :

$$(\gamma + i\delta)(\cos\omega - i\sin\omega)\left(\frac{dx'_j}{d\theta} + i\frac{dx''_j}{d\theta}\right) = \sum_l (\gamma_{jl} + i\delta_{jl})(x'_l + i x''_l);$$

$$(\gamma\cos\omega + \delta\sin\omega)\frac{dx'_j}{d\theta} + (\gamma\sin\omega - \delta\cos\omega)\frac{dx''_j}{d\theta} = \sum_l (\gamma_{jl} x'_l - \delta_{jl} x''_l),$$

$$(-\gamma\sin\omega + \delta\cos\omega)\frac{dx'_j}{d\theta} + (\gamma\cos\omega + \delta\sin\omega)\frac{dx''_j}{d\theta} = \sum_l (\delta_{jl} x'_l + \gamma_{jl} x''_l),$$

d'où, en résolvant par rapport à $\frac{dx'_j}{d\theta}$, $\frac{dx''_j}{d\theta}$:

$$(35)\quad \left\{ \begin{array}{l} (\gamma^2 + \delta^2)\dfrac{dx'_j}{d\theta} = \displaystyle\sum_l (\gamma_{jl} x'_l - \delta_{jl} x''_l)(\gamma\cos\omega + \delta\sin\omega) \\ \qquad\qquad\qquad - \displaystyle\sum_l (\delta_{jl} x'_l + \gamma_{jl} x''_l)(\gamma\sin\omega - \delta\cos\omega), \\ (\gamma^2 + \delta^2)\dfrac{dx''_j}{d\theta} = \ldots \qquad (^1). \end{array} \right.$$

(1) Quand on donne *maintenant* dans ce système à θ des valeurs réelles ou imaginaires γ, δ, γ_{jl}, δ_{jl} et les coefficients sont des fonctions quasi-entières pour $\theta = \infty$ d'ordre $\leqq (k, \rho)$.

Je considère à présent ce système (35) où θ est réel ou imaginaire.

On a (en apparence au moins) de nouveaux pôles pour les coefficients de ce système, à savoir les zéros $\theta = \theta_m$ de $\gamma - \delta i$.

Si θ_m est réel, $\gamma(\theta_m) = 0$, $\delta(\theta_m) = 0$, et $\gamma(\theta_m) + i\delta(\theta_m) = 0$: θ_m n'est pas un nouveau pôle. D'ailleurs

$$\beta(t) = \beta_1(t) + i\beta_2(t),$$

où β_1, β_2 sont des fonctions réelles de t. Si $\theta'_1 + i\theta'_2$ est un zéro de $\gamma + i\delta$, $\theta'_1 - i\theta'_2$ est un zéro de $\gamma - i\delta$. Considérant la région E ou E' relative à $\gamma + i\delta$, celle analogue E_1 ou E'_1 relative à $\gamma - i\delta$ s'obtient en faisant tourner le plan des t de 180° autour de l'axe des θ réels. Dans cette rotation la distance des zéros à la droite Δ se conserve. Par conséquent A est en dehors à la fois de $E + E_1$ et $E' + E'_1$ ($E + E_1$ par exemple est la région formée par la réunion de E et E_1) et Δ en dehors de $E + E_1$.

Finalement, on obtient d'après (35) un système (36) tout à fait analogue à (33); mais, par rapport à ce système, le point A sur lequel on a à raisonner a son affixe réel et la droite Δ est l'axe des quantités réelles. Ce système est :

$$(36)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dx_1}{d\theta} &= \lambda_{11}x_1 + \ldots + \lambda_{1n}x_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \frac{dx_n}{d\theta} &= \lambda_{n1}x_1 + \ldots + \lambda_{nn}x_n. \end{aligned}\right.$$

On est ramené, pour établir le théorème, à montrer que, si θ réel est assez grand, au point A où $\theta = \theta_1$ (θ_1 assez grand),

$$|x_q| < e_{k_1+2}(\theta_1^{\tau_1}),$$

$(k_1, \tau_1) > (k, \rho)$, τ_1 arbitraire sous cette condition, $q = 1, 2, \ldots, n$.

On peut maintenant raisonner comme je l'ai fait pour les fonctions quasi-entières d'ordre fini ou infini non transfini [1]. Je pose

$$x_q = y_q\, e_{k_2+2}(\theta^{\sigma})^{\mu}, \qquad \mu = \pm 1;$$

---

[1] Pour la clarté, je crois préférable d'indiquer ici le raisonnement modifié, en abrégeant au besoin.

d'où

$$\frac{dx_q}{d\theta} = \frac{dy_q}{d\theta} e_{k_2+2}(\theta^\sigma)^\mu + \mu y_q \sigma e_{k_2+2}(\theta^\sigma)^\mu e_{k_2+1}(\theta^\sigma) \dots e_1(\theta^\sigma)\,\theta^{\sigma-1}.$$

Si l'on substitue dans (36),

$$\frac{dy_1}{d\theta} = [\lambda_{11} - \mu\sigma e_{k_2+1}(\theta^\sigma) \dots e_1(\theta^\sigma)\,\theta^{\sigma-1}]\, y_1 + \lambda_{12} y_2 + \dots + \lambda_{1n} y_n,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$\frac{dy_n}{d\theta} = \lambda_{n1} y_1 + \dots + [\lambda_{nn} - \mu\sigma e_{k_2+1}(\theta^\sigma) \dots \theta^{\sigma-1}]\, y_n.$$

Multipliant les deux membres par $y_1, \dots, y_n$ et ajoutant

$$\frac{1}{2}\frac{d(y_1^2 + \dots + y_n^2)}{d\theta}$$
$$= [\lambda_{11} - \mu\sigma e_{k_2+1}(\theta^\sigma) \dots e_1(\theta^\sigma)\,\theta^{\sigma-1}]\, y_1^2 + \lambda_{12} y_1 y_2 + \dots = f(y_1, \dots, y_n),$$
$$f = A_{11} y_1^2 + 2 P y_1 + Q;$$

P ne contient pas les termes en $\mu\sigma$, et

$$f = \frac{1}{A_{11}}(A_{11} y_1^2 + P)^2 + Q - \frac{P^2}{A_{11}}.$$

Soient k_2 et σ assez grands et $\mu = +1$: A_{11} est négatif et, en valeur absolue, aussi grand qu'on veut, dès que θ est assez grand, c'est-à-dire dès que $\theta \geqq \theta_2$, puisque alors

$$(37) \qquad |\lambda_{jl}| \leqq e_{k_1+1}(\theta^{\tau_3}),$$

(τ_3 analogue à τ_2) d'après (33 *bis*). $Q - \dfrac{P^2}{A_{11}}$ est alors une forme quadratique à $n-1$ variables, analogue à f, où les coefficients de y_2^2, $y_3^2, \dots, y_n^2$ sont négatifs et, en valeur absolue, aussi grands qu'on veut, dès que $\theta \geqq \theta_2$ (θ_2 assez grand).

Ainsi le coefficient de y_q^2 est ($q \geqq 2$)

$$\lambda_{qq} - \mu\sigma e_{k_2+1}(\theta^\sigma) \dots \theta^{\sigma-1} - \frac{1}{4 A_{11}}(\lambda_{1q} + \lambda_{q1})^2,$$

car

$$2P = (\lambda_{12} + \lambda_{21}) y_2 + \dots + (\lambda_{1n} + \lambda_{n1}) y_n.$$

Finalement

$$f = \mu_1 P_1^2 + \ldots + \mu_n P_n^2,$$

où $P_1, \ldots, P_n$ sont réels, $\mu_1, \ldots, \mu_n$ négatifs dès que $\theta \geqq \theta_2$ (quand $\mu = -1$, l'inverse a lieu, $\mu_1, \ldots, \mu_n$ sont positifs). Donc $f < 0$ pour $\theta \geqq \theta_2$ ($f > 0$ quand $\mu = -1$).

θ variant de θ_2 à $+\infty$ le long de Δ, $y_1^2 + \ldots + y_n^2$ va en diminuant. Dès que $\theta \geqq \theta_2$, on peut assigner une limite supérieure fixe M à $|y_q|$, quel que soit q.

Si l'on a eu soin de choisir *a priori* $\theta_1 > \theta_2$, et θ_1 assez grand par rapport à θ_2, on voit que

$$|y_q| \leqq \mathbf{M}, \qquad \mathbf{M} \text{ limité},$$
$$|x_q| \leqq e_{k_2+2}(\theta_1^{\sigma+\varepsilon}),$$

ε aussi petit qu'on veut quand θ_1 est assez grand.

Pour qu'on puisse raisonner de la sorte il suffira que l'on ait

$$(k_2, \sigma) > (k, \rho) \qquad \text{et} \qquad k_2 \geqq k_1.$$

En effet, d'après les conditions spécifiées dans l'énoncé du théorème et les formules (33 *bis*) et (37), on a toujours

$$|\lambda_{jl}| \leqq e_{k_1+1}(\theta^{\tau_3}),$$

τ_3 quelconque, dès que $(k_1, \tau_3) > (k, \rho)$, pour θ assez grand; il suffira donc

$$(k_2, \sigma) > (k_1, \tau_3) > (k, \rho),$$

c'est-à-dire $k_2 \geqq k_1$, $\sigma > \tau_3$. C. Q. F. D.

Corollaire. — *Ceci s'étend de suite au cas d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre n dont les coefficients sont des fonctions quasi-méromorphes d'ordre non transfini pour $z = \infty$.*

Remarque I. — Une manière avantageuse d'appliquer le théorème XIII sera évidemment de faire $k_1 = k$, $\tau_1 = \rho + \varepsilon_1$.

Remarque II. — Quand on fait $k_1 = k$, $\tau_1 = \rho + \varepsilon_1$, et qu'on suppose que $a_{11}, \ldots, a_{nn}$ sont des fonctions quasi-entières pour $z = \infty$, les mêmes raisonnements s'appliquent, mais l'espace E' est évanouissant; l'inégalité indiquée dans l'énoncé s'applique pour tout point situé à une distance assez grande de l'origine. C'est alors le théorème que j'ai établi dans le Mémoire précité du *Journal de l'École Polytechnique*, p. 71 (théorème VIII).

Remarque III. — Quand dans la démonstration précédente on prend $\mu = -1$, on voit encore que, parmi les n fonctions

$$x_q e_{k_2+2}(\theta_1^{\sigma+\varepsilon}),$$

une au moins a son module limité inférieurement pour θ_1 assez grand et est $\neq 0$; ceci a lieu dès que

$$(k_2, \sigma) > (k_1, \tau_3) > (k, \rho)$$

comme tout à l'heure. Si l'on prend par exemple $k_1 = k$, $\tau_3 = \rho + \varepsilon_1$, on pourra poser $k_2 = k$, $\sigma = \rho + \varepsilon_2$ $(\varepsilon_2 > \varepsilon_1)$.

VIII.

INDICATION DE SUJETS D'ÉTUDES.

1° Dans la théorie des fonctions entières d'ordre zéro il reste à obtenir une formule donnant une limite inférieure analogue à la formule (3) pour le module du $n^{\text{ième}}$ zéro, et aussi exacte, si la chose est possible; on a à montrer que l'analogie avec les fonctions entières d'ordre > 0 ne se poursuit pas (comparer p. 280 et 281).

2° Dans la théorie des fonctions quasi-entières proprement dites (fonctions monodromes n'ayant qu'un nombre limité de points singuliers essentiels isolés), étendre le théorème de Laguerre sur la réalité des racines (sauf un nombre fini) de la dérivée d'une fonction entière d'ordre fini qui a toutes ses racines réelles au cas d'une fonction quasi-entière ayant au moins un de ses ordres fini $\geqq 2$. J'ai fait voir que l'extension est possible quand tous les ordres sont < 2 (*Journ. de Math.*, 1902, p. 375).

Même problème pour une fonction monodrome d'ordre fini $\geqq 2$ aux environs d'un point singulier essentiel isolé. J'ai traité le cas où l'ordre est < 2 (*Bull. Soc. math.*, 1903, théorème II, p. 33).

3° Quand une fonction entière est d'ordre fini non entier, si sa croissance est régulière (ce qu'on sait décider d'après le développement taylorien), on peut affirmer que la distribution de ses zéros est régulière. Si l'on pouvait reconnaître dans des cas étendus que le facteur exponentiel d'une fonction entière d'ordre (k, ρ) infini non transfini à croissance régulière (ce qu'on sait décider d'après le développement taylorien) est d'ordre $< (k, \rho)$, on pourrait affirmer (théorème XI) que la distribution des zéros est régulière, ce qui serait un beau résultat.

Étude du même facteur exponentiel (comp. *Journ. de Math.*, 1902, p. 353), en précisant au besoin la notion de produit canonique.

4° Distribution des zéros de $\varphi f + \varphi_1$, où $f(z)$ a sa croissance régulière [*voir* note (¹), p. 321, et *Intermédiaire des Mathématiciens*, t. XI, 1905, p. 8 et 94].

5° Croissance des séries

$$\sum \left(\frac{r}{(\log_k i)^{\frac{1}{\sigma + \varepsilon_i}}} \right)^{\theta \log_p i},$$

k, p entiers (*voir* p. 275).

6° Étude de l'influence des lacunes sur la réalité des racines d'une fonction entière. Conditions pour que, sur n racines (n assez grand), il y en ait au plus εn imaginaires, ε tendant vers o quand n croît indéfiniment (voir *Journ. de Math.*, 1902, p. 349).

On pourra se guider sur les résultats que j'ai obtenus pour les fonctions quasi-algébriques (*voir*, par exemple, *Journ. de l'École Polyt.*, 1903, p. 91 et *Interm. des Math.*, 1906, p. 135) (¹).

(¹) J'ai ajouté par endroits quelques renseignements bibliographiques relatifs aux travaux dont j'ai eu connaissance depuis que mon *Mémoire* a été rédigé.

Bourg-la-Reine, mars 1905.