ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

P. DUHEM

Recherches sur l'élasticité

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 23 (1906), p. 169-223

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1906_3_23__169_0>

RECHERCHES SUR L'ÉLASTICITÉ.

PAR M. P. DUHEM.

QUATRIÈME PARTIE.

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES ONDES DANS LES MILIEUX VISQUEUX ET NON VISQUEUX.

CHAPITRE I.

THÉORIE GÉNÉRALE DE LA PROPAGATION DES ONDES AU SEIN DES MILIEUX DÉNUÉS DE VISCOSITÉ.

I. — Quelques lemmes de Cinématique.

Lorsque nous aurons à étudier la propagation d'une onde au sein d'un milieu élastique, nous aurons à rapporter cette onde tantôt au milieu pris dans son état primitif, c'est-à-dire à l'espace des a, b, c, tantôt au milieu déformé, c'est-à-dire à l'espace des x, y, z.

Dans le premier cas, nous désignerons par Σ la surface d'onde tracée dans l'espace des a, b, c; par l, m, n les cosinus directeurs de la demi-normale à cette surface, cette demi-normale étant orientée de la région que nous nommerons 2 à la région que nous nommerons 1; par $\mathfrak{N}$ la *vitesse de propagation de l'onde* Σ, *rapportée à l'espace des* a, b, c, *et comptée positivement dans la direction de la demi-normale* (l, m, n).

Dans le second cas, nous désignerons par S la surface d'onde, par α, β, γ les cosinus directeurs de la demi-normale à la surface S, orientée de la région 2 à la région 1; par $\mathfrak{U}$ la *vitesse de propagation de l'onde rapportée à l'espace des* x, y, z, *et comptée positivement suivant la direction de la demi-normale* (α, β, γ).

Entre les cosinus α, β, γ et les cosinus l, m, n existent des relations fort simples, données par Hugoniot. On peut écrire, en effet [*Recherches sur l'Hydrodynamique*, 1re série, deuxième Partie, Chapitre IV, § 3, égalités (244) et (245)],

$$
(1) \qquad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial a}{\partial x} l + \frac{\partial b}{\partial x} m + \frac{\partial c}{\partial x} n = \mathrm{K}\alpha, \\
&\frac{\partial a}{\partial y} l + \frac{\partial b}{\partial y} m + \frac{\partial c}{\partial y} n = \mathrm{K}\beta, \\
&\frac{\partial a}{\partial z} l + \frac{\partial b}{\partial z} m + \frac{\partial c}{\partial z} n = \mathrm{K}\gamma,
\end{aligned}
\right.
$$

K étant une quantité qui diffère de *zéro* et qui varie selon le point que l'on considère sur la surface Σ ou sur la surface S.

Ces relations, respectivement multipliées par $\frac{\partial x}{\partial a}$, $\frac{\partial y}{\partial a}$, $\frac{\partial z}{\partial a}$ et ajoutées membre à membre, donnent la première relation d'un nouveau groupe; ce nouveau groupe est

$$
(2) \qquad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial x}{\partial a}\alpha + \frac{\partial y}{\partial a}\beta + \frac{\partial z}{\partial a}\gamma = \frac{l}{\mathrm{K}}, \\
&\frac{\partial x}{\partial b}\alpha + \frac{\partial y}{\partial b}\beta + \frac{\partial z}{\partial b}\gamma = \frac{m}{\mathrm{K}}, \\
&\frac{\partial x}{\partial c}\alpha + \frac{\partial y}{\partial c}\beta + \frac{\partial z}{\partial c}\gamma = \frac{n}{\mathrm{K}}.
\end{aligned}
\right.
$$

En même temps, les deux vitesses $\mathfrak{N}$ et $\mathfrak{U}$ seront liées par l'égalité [*Recherches sur l'Hydrodynamique*, 1re série, deuxième Partie, égalité (250)]

$$
(3) \qquad \left(\mathfrak{U} - \alpha\frac{\partial \xi}{\partial t} - \beta\frac{\partial \eta}{\partial t} - \gamma\frac{\partial \zeta}{\partial t}\right)^2 = \frac{\mathfrak{N}^2}{\mathrm{K}^2},
$$

qui est due également à Hugoniot.

La quantité K, qui figure dans ces diverses formules, est susceptible de deux expressions différentes et équivalentes; les égalités (1), en effet, donnent

$$
(4) \qquad
\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial a}{\partial x} l + \frac{\partial b}{\partial x} m + \frac{\partial c}{\partial x} n\right)^2 \\
&+ \left(\frac{\partial a}{\partial y} l + \frac{\partial b}{\partial y} m + \frac{\partial c}{\partial y} n\right)^2 \\
&+ \left(\frac{\partial a}{\partial z} l + \frac{\partial b}{\partial z} m + \frac{\partial c}{\partial z} n\right)^2 = \mathrm{K}^2,
\end{aligned}
$$

tandis que les égalités (2) permettent d'écrire

$$
\begin{aligned}
(5)\qquad & \left(\frac{\partial x}{\partial a}\alpha + \frac{\partial y}{\partial a}\beta + \frac{\partial z}{\partial a}\gamma\right)^2 \\
& + \left(\frac{\partial x}{\partial b}\alpha + \frac{\partial y}{\partial b}\beta + \frac{\partial z}{\partial b}\gamma\right)^2 \\
& + \left(\frac{\partial x}{\partial c}\alpha + \frac{\partial y}{\partial c}\beta + \frac{\partial z}{\partial c}\gamma\right)^2 = \frac{1}{\mathrm{K}^2}.
\end{aligned}
$$

Considérons une *onde* qui, dans l'espace des a, b, c, soit *du second ordre par rapport à l'élongation* (ξ, η, ζ). En chaque point de la surface Σ il existe un vecteur $(\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H})$ tel que l'on ait

$$
(6)\quad \left\{
\begin{array}{llll}
\left[\dfrac{\partial^2 \xi}{\partial a^2}\right]_1^2 = l^2 \mathcal{F}, & \left[\dfrac{\partial^2 \xi}{\partial a\, \partial b}\right]_1^2 = lm\, \mathcal{F}, & \ldots, & \left[\dfrac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}\right]_1^2 = \mathcal{N}^2 \mathcal{F}, \\
\left[\dfrac{\partial^2 \eta}{\partial a^2}\right]_1^2 = l^2 \mathcal{G}, & \left[\dfrac{\partial^2 \eta}{\partial a\, \partial b}\right]_1^2 = lm\, \mathcal{G}, & \ldots, & \left[\dfrac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}\right]_1^2 = \mathcal{N}^2 \mathcal{G}, \\
\left[\dfrac{\partial^2 \zeta}{\partial a^2}\right]_1^2 = l^2 \mathcal{H}, & \left[\dfrac{\partial^2 \zeta}{\partial a\, \partial b}\right]_1^2 = lm\, \mathcal{H}, & \ldots, & \left[\dfrac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}\right]_1^2 = \mathcal{N}^2 \mathcal{H}.
\end{array}
\right.
$$

Le vecteur $(\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H})$ est la *perturbation d'élongation, rapportée à l'espace des* a, b, c, et propagée par l'onde Σ.

La surface S sera nécessairement, dans l'espace des x, y, z, une onde du second ordre par rapport à l'élongation (ξ, η, ζ). En chaque point de la surface S il existera un vecteur (Φ, Ψ, X) tel que l'on ait

$$
(7)\quad \left\{
\begin{array}{llll}
\left[\dfrac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\right]_1^2 = \alpha^2 \Phi, & \left[\dfrac{\partial^2 \xi}{\partial x\, \partial y}\right]_1^2 = \alpha\beta\, \Phi, & \ldots, & \left[\dfrac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}\right]_1^2 = \mathfrak{N}^3 \Phi, \\
\left[\dfrac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}\right]_1^2 = \alpha^2 \Psi, & \left[\dfrac{\partial^2 \eta}{\partial x\, \partial y}\right]_1^2 = \alpha\beta\, \Psi, & \ldots, & \left[\dfrac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}\right]_1^2 = \mathfrak{N}^2 \Psi, \\
\left[\dfrac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}\right]_1^2 = \alpha^2 \mathrm{X}, & \left[\dfrac{\partial^2 \zeta}{\partial x\, \partial y}\right]_1^2 = \alpha\beta\, \mathrm{X}, & \ldots, & \left[\dfrac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}\right]_1^2 = \mathfrak{N}^2 \mathrm{X}.
\end{array}
\right.
$$

Le vecteur (Φ, Ψ, X) est la *perturbation d'élongation, rapportée à l'espace des* x, y, z, et propagée par l'onde S.

Il est facile de trouver les relations qui existent, entre le vecteur $(\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H})$ relatif à un point de la surface Σ et le vecteur (Φ, Ψ, X), relatif au point correspondant de la surface S.

On a, en effet,

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial x}{\partial a}\right)\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{\partial x}{\partial a}\right)\frac{\partial b}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{\partial x}{\partial a}\right)\frac{\partial c}{\partial x},$$

ou bien, en vertu des égalités (2) de la première Partie de ces *Recherches sur l'Élasticité*,

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial a} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial a^2}\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial a\,\partial b}\frac{\partial b}{\partial x} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial a\,\partial c}\frac{\partial c}{\partial x}.$$

Cette égalité, jointe aux égalités (1) et (6), donne la première des relations

$$(8)\quad \left\{\begin{array}{lll}
\left[\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial a}\right]_1^2 = \mathrm{K}\alpha l \mathcal{F}, & \left[\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\partial x}{\partial a}\right]_1^2 = \mathrm{K}\beta l \mathcal{F}, & \left[\dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{\partial x}{\partial a}\right]_1^2 = \mathrm{K}\gamma l \mathcal{F}, \\
\left[\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial b}\right]_1^2 = \mathrm{K}\alpha m \mathcal{F}, \quad \ldots, & \left[\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial c}\right]_1^2 = \mathrm{K}\alpha n \mathcal{F}, & \ldots, \\
\left[\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial y}{\partial a}\right]_1^2 = \mathrm{K}\alpha l \mathcal{G}, \quad \ldots, & & \\
\left[\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial z}{\partial a}\right]_1^2 = \mathrm{K}\alpha l \mathcal{H}, \quad \ldots. & &
\end{array}\right.$$

Considérons maintenant l'identité

$$\frac{\partial \xi}{\partial a} = \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial \xi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial a}$$

et différentions-en les deux membres par rapport à x; nous trouvons l'identité

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 \xi}{\partial a^2}\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial a\,\partial b}\frac{\partial b}{\partial x} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial a\,\partial c}\frac{\partial c}{\partial x} \\
&\quad = \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial x\,\partial z}\frac{\partial z}{\partial a} + \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial \xi}{\partial z}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial a}.
\end{aligned}$$

Mais les égalités (1) de la première Partie de ces *Recherches sur l'Élasticité* donnent

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = 1 - \frac{\partial a}{\partial x}, \qquad \frac{\partial \xi}{\partial y} = -\frac{\partial a}{\partial y}, \qquad \frac{\partial \xi}{\partial z} = -\frac{\partial a}{\partial z}.$$

L'identité précédente devient donc

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 \xi}{\partial a^2}\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial a\,\partial b}\frac{\partial b}{\partial x} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial a\,\partial c}\frac{\partial c}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial a} \\
&\quad = \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial x\,\partial z}\frac{\partial z}{\partial a} - \left(\frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial a}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial a}{\partial z}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial a}\right).
\end{aligned}
$$

Selon les égalités (1), (6), (7) et (8), cette identité donne, en tout point de la surface Σ, la première des égalités

$$
(9)\qquad
\left\{
\begin{aligned}
\Phi &= \mathrm{K}^2\left(\frac{\partial a}{\partial x}\mathcal{F} + \frac{\partial a}{\partial y}\mathcal{G} + \frac{\partial a}{\partial z}\mathcal{H}\right),\\
\Psi &= \mathrm{K}^2\left(\frac{\partial b}{\partial x}\mathcal{F} + \frac{\partial b}{\partial y}\mathcal{G} + \frac{\partial b}{\partial z}\mathcal{H}\right),\\
\mathrm{X} &= \mathrm{K}^2\left(\frac{\partial c}{\partial x}\mathcal{F} + \frac{\partial c}{\partial y}\mathcal{G} + \frac{\partial c}{\partial z}\mathcal{H}\right).
\end{aligned}
\right.
$$

Les deux autres s'obtiennent d'une manière analogue.

Multiplions respectivement ces égalités par $\frac{\partial x}{\partial a}$, $\frac{\partial x}{\partial b}$, $\frac{\partial x}{\partial c}$ et ajoutons membre à membre les résultats obtenus; nous trouvons la première des égalités

$$
(10)\qquad
\left\{
\begin{aligned}
\mathcal{F} &= \frac{1}{\mathrm{K}^2}\left(\frac{\partial x}{\partial a}\Phi + \frac{\partial x}{\partial b}\Psi + \frac{\partial x}{\partial c}\mathrm{X}\right),\\
\mathcal{G} &= \frac{1}{\mathrm{K}^2}\left(\frac{\partial y}{\partial a}\Phi + \frac{\partial y}{\partial b}\Psi + \frac{\partial y}{\partial c}\mathrm{X}\right),\\
\mathcal{H} &= \frac{1}{\mathrm{K}^2}\left(\frac{\partial z}{\partial a}\Phi + \frac{\partial z}{\partial b}\Psi + \frac{\partial z}{\partial c}\mathrm{X}\right).
\end{aligned}
\right.
$$

Les deux autres s'obtiennent de même.

Multiplions respectivement les égalités (9) par l, m, n et ajoutons-les membre à membre en tenant compte des égalités (1); nous trouvons la relation

$$
(11)\qquad l\Phi + m\Psi + n\mathrm{X} = \mathrm{K}^3(\alpha\mathcal{F} + \beta\mathcal{G} + \gamma\mathcal{H}).
$$

Nous aurions trouvé la même relation en multipliant respectivement les égalités (10) par α, β, γ, en ajoutant membre à membre les résultats obtenus et en tenant compte des égalités (2).

Proposons-nous de former $\left[\frac{\partial \omega}{\partial x}\right]_1^2$.

Nous avons

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\varpi}{\partial x} = {} & \frac{\partial\varpi}{\partial\frac{\partial x}{\partial a}}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial\varpi}{\partial\frac{\partial x}{\partial b}}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial b} + \frac{\partial\varpi}{\partial\frac{\partial x}{\partial c}}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial c} \\
& + \frac{\partial\varpi}{\partial\frac{\partial y}{\partial a}}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial\varpi}{\partial\frac{\partial y}{\partial b}}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial b} + \frac{\partial\varpi}{\partial\frac{\partial y}{\partial c}}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial c} \\
& + \frac{\partial\varpi}{\partial\frac{\partial z}{\partial a}}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial a} + \frac{\partial\varpi}{\partial\frac{\partial z}{\partial b}}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial b} + \frac{\partial\varpi}{\partial\frac{\partial z}{\partial c}}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial c} \\
= {} & \frac{D(y,z)}{D(b,c)}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{D(y,z)}{D(c,a)}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial b} + \frac{D(y,z)}{D(a,b)}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial c} \\
& + \frac{D(z,x)}{D(b,c)}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial a} + \frac{D(z,x)}{D(c,a)}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial b} + \frac{D(z,x)}{D(a,b)}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial c} \\
& + \frac{D(x,y)}{D(b,c)}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial a} + \frac{D(x,y)}{D(c,a)}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial b} + \frac{D(x,y)}{D(a,b)}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial c}.
\end{aligned}$$

Selon les égalités (26) de la première Partie de ces *Recherches sur l'Élasticité,* cette égalité devient

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\varpi}{\partial x} = \varpi\Big(& \frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial b}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial b} + \frac{\partial c}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial c} \\
& + \frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial b}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial b} + \frac{\partial c}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial c} \\
& + \frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial a} + \frac{\partial b}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial b} + \frac{\partial c}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial c}\Big).
\end{aligned}$$

Les égalités (8) et (1) donnent alors la première des égalités

$$(12)\qquad \left\{\begin{aligned}
\left[\frac{\partial\varpi}{\partial x}\right]_1^2 &= K^2\varpi(\alpha\mathcal{F}+\beta\mathcal{G}+\gamma\mathcal{H})\alpha, \\
\left[\frac{\partial\varpi}{\partial y}\right]_1^2 &= K^2\varpi(\alpha\mathcal{F}+\beta\mathcal{G}+\gamma\mathcal{H})\beta, \\
\left[\frac{\partial\varpi}{\partial z}\right]_1^2 &= K^2\varpi(\alpha\mathcal{F}+\beta\mathcal{G}+\gamma\mathcal{H})\gamma.
\end{aligned}\right.$$

Les deux autres s'établissent d'une manière analogue.

En vertu de l'égalité (11), ces égalités peuvent encore s'écrire

$$(13)\qquad \left\{\left[\frac{\partial\varpi}{\partial a}\right]_1^2 = \frac{\varpi}{K}(l\Phi+m\Psi+nX)\alpha,\right.$$

Nous avons

$$\frac{\partial \mathcal{O}}{\partial a} = \frac{\partial \mathcal{O}}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial \mathcal{O}}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial \mathcal{O}}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial a}.$$

Cette égalité, jointe aux égalités (12) et (2), donne la première des égalités

$$(14) \qquad \left\{ \begin{aligned} \left[\frac{\partial \mathcal{O}}{\partial a}\right]_1^2 &= \mathrm{K}\,\mathcal{O}(\alpha\mathcal{F} + \beta\mathcal{G} + \gamma\mathcal{H})\,l, \\ \left[\frac{\partial \mathcal{O}}{\partial b}\right]_1^2 &= \mathrm{K}\,\mathcal{O}(\alpha\mathcal{F} + \beta\mathcal{G} + \gamma\mathcal{H})\,m, \\ \left[\frac{\partial \mathcal{O}}{\partial c}\right]_1^2 &= \mathrm{K}\,\mathcal{O}(\alpha\mathcal{F} + \beta\mathcal{G} + \gamma\mathcal{H})\,n. \end{aligned} \right.$$

Les deux autres s'établissent d'une manière analogue.

En vertu de l'égalité (11), ces égalités peuvent encore s'écrire

$$(15) \qquad \left\{ \begin{aligned} \left[\frac{\partial \mathcal{O}}{\partial a}\right]_1^2 &= \frac{\mathcal{O}}{\mathrm{K}^2}(l\Phi + m\Psi + n\mathrm{X})\,l, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \right.$$

L'équation de continuité

$$\rho\mathcal{O} = \rho_0$$

nous montre que les surfaces Σ et S sont, en général, ondes du premier ordre pour la densité ρ. On a donc

$$(16) \qquad \frac{\partial(\rho_2 - \rho_1)}{\partial a} = \mathcal{R}\,l, \qquad \frac{\partial(\rho_2 - \rho_1)}{\partial b} = \mathcal{R}\,m, \qquad \frac{\partial(\rho_2 - \rho_1)}{\partial c} = \mathcal{R}\,n,$$

$$(17) \qquad \frac{\partial(\rho_2 - \rho_1)}{\partial x} = \mathrm{P}\alpha, \qquad \frac{\partial(\rho_2 - \rho_1)}{\partial y} = \mathrm{P}\beta, \qquad \frac{\partial(\rho_2 - \rho_1)}{\partial z} = \mathrm{P}\gamma,$$

les égalités (16) se rapportant à un point de la surface Σ et les égalités (17) à un point de la surface S.

L'équation de continuité donne

$$\frac{\partial \rho}{\partial a} = -\frac{\rho_0}{\mathcal{O}^2}\frac{\partial \mathcal{O}}{\partial a},$$

relation qui, jointe à la première égalité (14) et à la première égalité (16), donne

$$(18) \qquad \mathfrak{R} = -\frac{K\rho_0}{\mathfrak{O}}(\alpha\mathfrak{F} + \beta\mathfrak{G} + \gamma\mathfrak{H})$$

ou bien, en vertu de l'égalité (11),

$$(19) \qquad \mathfrak{R} = -\frac{\rho_0}{K^2\mathfrak{O}}(l\Phi + m\Psi + n\mathrm{X}).$$

L'équation de continuité donne aussi

$$\frac{\partial\rho}{\partial x} = -\frac{\rho_0}{\mathfrak{O}^2}\frac{\partial\mathfrak{O}}{\partial x},$$

relation qui, jointe à la première égalité (12) et à la première égalité (17), donne

$$(20) \qquad \mathrm{P} = -\frac{K^2\rho_0}{\mathfrak{O}}(\alpha\mathfrak{F} + \beta\mathfrak{G} + \gamma\mathfrak{H})$$

ou bien, en vertu de l'égalité (11),

$$(21) \qquad \mathrm{P} = -\frac{\rho_0}{K\mathfrak{O}}(l\Phi + m\Psi + n\mathrm{X}).$$

La comparaison des égalités (18) et (20), ou bien des égalités (19) et (21), donne

$$(22) \qquad \mathrm{P} = K\mathfrak{R}.$$

La condition pour qu'une onde, du second ordre par rapport aux composantes ξ, η, ζ de l'élongation, soit d'ordre supérieur au premier pour la densité ρ s'exprime alors indifféremment par l'une ou l'autre des relations, équivalentes entre elles,

$$(23) \qquad \alpha\mathfrak{F} + \beta\mathfrak{G} + \gamma\mathfrak{H} = 0,$$

$$(24) \qquad l\Phi + m\Psi + n\mathrm{X} = 0.$$

Ces relations n'expriment nullement que la *perturbation d'élongation* propagée par l'onde soit transversale ni dans le milieu primitif, ce qu'exprimerait l'égalité

$$(23\ bis) \qquad l\mathfrak{F} + m\mathfrak{G} + n\mathfrak{H} = 0,$$

ni dans le milieu déformé, ce qu'exprimerait l'égalité

$$(24\ bis)\qquad \alpha\Phi + \beta\Psi + \gamma X = 0.$$

Considérons les composantes u, v, w de la vitesse d'un point matériel; on peut les exprimer en fonctions de a, b, c, t ou bien en fonctions de x, y, z, t. Dans le premier cas, on a

$$(25)\qquad u = \frac{\partial\xi(a, b, c, t)}{\partial t}, \qquad v = \frac{\partial\eta(a, b, c, t)}{\partial t}, \qquad w = \frac{\partial\zeta(a, b, c, t)}{\partial t}.$$

La surface Σ étant, dans l'espace des (a, b, c), une onde du second ordre pour l'élongation (ξ, η, ζ), est onde du premier ordre pour la vitesse (u, v, w). Soient $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$ les composantes de la *perturbation de vitesse* que propage cette onde; nous aurons, en tout point de la surface Σ,

$$(26)\qquad \left[\frac{\partial u}{\partial a}\right]_1^2 = l\mathfrak{v}, \qquad \left[\frac{\partial u}{\partial b}\right]_1^2 = m\mathfrak{v}, \qquad \left[\frac{\partial u}{\partial c}\right]_1^2 = n\mathfrak{v}, \qquad \left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]_1^2 = -\mathfrak{N}\mathfrak{v}$$

et des égalités analogues concernant v et w. Les égalités (6), (25) et (26) donnent alors

$$(27)\qquad \mathfrak{v} = -\mathfrak{N}\mathfrak{F}, \qquad \mathfrak{V} = -\mathfrak{N}\mathfrak{G}, \qquad \mathfrak{W} = -\mathfrak{N}\mathfrak{H}.$$

Dans le milieu primitif, l'onde Σ propage une perturbation d'élongation et une perturbation de vitesse orientées suivant la même ligne.

Dans l'espace des (x, y, z), la surface S est onde du premier ordre par rapport aux composantes u, v, w de la vitesse; si l'on désigne par U, V, W les composantes de la *perturbation de vitesse* qu'elle propage, on aura

$$(28)\qquad \left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]_1^2 = \alpha U, \qquad \left[\frac{\partial u}{\partial y}\right]_1^2 = \beta U, \qquad \left[\frac{\partial u}{\partial z}\right]_1^2 = \gamma U, \qquad \left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]_1^2 = -\mathfrak{n} U$$

et des égalités analogues concernant v et w.

D'autre part, la première égalité (25) donne

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2\xi}{\partial a\,\partial t}\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial^2\xi}{\partial b\,\partial t}\frac{\partial b}{\partial x} + \frac{\partial^2\xi}{\partial c\,\partial t}\frac{\partial c}{\partial x}.$$

Cette égalité, jointe aux égalités (6) et (1), donne l'égalité

$$\left[\frac{\partial \dot{u}}{\partial x}\right]_1^2 = -\mathrm{K}\alpha\,\mathfrak{N}\,\mathfrak{F}.$$

Celle-ci, comparée à la première des égalités (28), donne la première des égalités

$$(29) \qquad \mathrm{U} = -\mathrm{K}\,\mathfrak{N}\,\mathfrak{F}, \qquad \mathrm{V} = -\mathrm{K}\,\mathfrak{N}\,\mathfrak{G}, \qquad \mathrm{W} = -\mathrm{K}\,\mathfrak{N}\,\mathfrak{H}.$$

Les deux autres s'obtiennent d'une manière analogue.

Dans le milieu déformé, l'onde S *propage une perturbation de vitesse qui est parallèle à la perturbation correspondante d'élongation que propage l'onde* Σ *dans le milieu primitif et, partant, à la perturbation de vitesse que propage cette même onde* Σ (1).

Les égalités (18) et (20), jointes aux égalités (29), permettent d'écrire

$$(18\ bis) \qquad \mathfrak{R} = \frac{\rho_0}{\mathfrak{N}\,\mathfrak{O}}(\alpha\mathrm{U} + \beta\mathrm{V} + \gamma\mathrm{W}),$$

$$(20\ bis) \qquad \mathrm{P} = \frac{\mathrm{K}\rho_0}{\mathfrak{N}\,\mathfrak{O}}(\alpha\mathrm{U} + \beta\mathrm{V} + \gamma\mathrm{W}).$$

Pour qu'une onde du second ordre par rapport aux composantes ξ, η, ζ *de l'élongation soit, par rapport à la densité* ρ, *d'ordre supérieur au premier* ($\mathfrak{R} = 0$, $\mathrm{P} = 0$), *il faut que l'on ait*

$$(30) \qquad \alpha\mathrm{U} + \beta\mathrm{V} + \gamma\mathrm{W} = 0$$

ou, en d'autres termes, que cette onde soit, dans le milieu déformé, transversale par rapport aux composantes u, v, w *de la vitesse; et cela suffit si la vitesse* $\mathfrak{N}$ *avec laquelle la surface d'onde se propage dans le milieu primitif n'est pas égale à zéro.*

Si, dans la première Partie de ces *Recherches sur l'Élasticité*, on con-

(1) *Sur la propagation des ondes dans un milieu parfaitement élastique affecté de déformations finies* (*Comptes rendus*, t. CXXXVI, 8 juin 1903, p. 1379).

sidère les égalités (2) et (8), on obtient sans peine l'égalité

$$\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial x} = \frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial y}{\partial a}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial z}{\partial a}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial a}.$$

Cette égalité, jointe aux égalités (8), permet d'écrire, en tout point de l'onde,

$$\left[\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial x}\right]_1^2 = \mathrm{K}\alpha l\left(\frac{\partial x}{\partial a}\mathcal{F} + \frac{\partial y}{\partial a}\mathcal{G} + \frac{\partial z}{\partial a}\mathcal{H}\right).$$

Posons

$$(31)\qquad \begin{cases} \mathrm{A} = \dfrac{\partial x}{\partial a}\mathcal{F} + \dfrac{\partial y}{\partial a}\mathcal{G} + \dfrac{\partial z}{\partial a}\mathcal{H}, \\ \mathrm{B} = \dfrac{\partial x}{\partial b}\mathcal{F} + \dfrac{\partial y}{\partial b}\mathcal{G} + \dfrac{\partial z}{\partial b}\mathcal{H}, \\ \mathrm{C} = \dfrac{\partial x}{\partial c}\mathcal{F} + \dfrac{\partial y}{\partial c}\mathcal{G} + \dfrac{\partial z}{\partial c}\mathcal{H}, \end{cases}$$

et l'égalité précédente deviendra la première des égalités [1]

$$(32)\qquad \begin{cases} \left[\dfrac{\partial \varepsilon_1}{\partial x}\right]_1^2 = \mathrm{K}\alpha l\mathrm{A}, & \left[\dfrac{\partial \varepsilon_1}{\partial y}\right]_1^2 = \mathrm{K}\beta l\mathrm{A}, & \left[\dfrac{\partial \varepsilon_1}{\partial z}\right]_1^2 = \mathrm{K}\gamma l\mathrm{A}, \\ \left[\dfrac{\partial \varepsilon_2}{\partial x}\right]_1^2 = \mathrm{K}\alpha m\mathrm{B}, & \dots, \\ \left[\dfrac{\partial \varepsilon_3}{\partial x}\right]_1^2 = \mathrm{K}\alpha n\mathrm{C}, & \dots, \\ \left[\dfrac{\partial \gamma_1}{\partial x}\right]_1^2 = \mathrm{K}\alpha(n\mathrm{B} + m\mathrm{C}), & \left[\dfrac{\partial \gamma_1}{\partial y}\right]_1^2 = \mathrm{K}\beta(n\mathrm{B} + m\mathrm{C}), & \left[\dfrac{\partial \gamma_1}{\partial z}\right]_1^2 = \mathrm{K}\gamma(n\mathrm{B} + m\mathrm{C}), \\ \left[\dfrac{\partial \gamma_2}{\partial x}\right]_1^2 = \mathrm{K}\alpha(l\mathrm{C} + n\mathrm{A}), & \dots, \\ \left[\dfrac{\partial \gamma_3}{\partial x}\right]_1^2 = \mathrm{K}\alpha(m\mathrm{A} + l\mathrm{B}), & \dots . \end{cases}$$

Les autres égalités (32) s'établissent comme la première.

Les égalités (31) nous donnent les expressions des quantités A, B,

---

(1) Ces égalités ont été données dans le cours que nous avons professé en 1901-1902 à la Faculté des Sciences de Bordeaux. M. Hadamard, qui les avait obtenues de son côté, les a publiées en 1903 dans ses *Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'Hydrodynamique*, p. 249.

C en fonctions des quantités $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$; parfois nous aurons besoin d'exprimer les mêmes quantités A, B, C en fonctions des grandeurs Φ, Ψ et X; nous y parviendrons de la manière suivante :

La première égalité (31), jointe aux égalités (10), donne

$$K^2 A = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial a}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial a}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial a}\right)^2\right]\Phi + \left(\frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial x}{\partial b} + \frac{\partial y}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial b} + \frac{\partial z}{\partial a}\frac{\partial z}{\partial b}\right)\Psi + \left(\frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial x}{\partial c} + \frac{\partial y}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial c} + \frac{\partial z}{\partial a}\frac{\partial z}{\partial c}\right)X.$$

Moyennant les égalités (1) et (8) de la première Partie de ces *Recherches sur l'Élasticité*, cette égalité devient la première des égalités

$$(33)\quad \begin{cases} K^2 A = (1 + 2\varepsilon_1)\Phi + \gamma_3 \Psi + \gamma_2 X, \\ K^2 B = \gamma_3 \Phi + (1 + 2\varepsilon_2)\Psi + \gamma_1 X, \\ K^2 C = \gamma_2 \Phi + \gamma_1 \Psi + (1 + 2\varepsilon_3) X. \end{cases}$$

Les deux autres s'obtiennent d'une manière analogue.

II. — Propagation d'une onde au sein d'un milieu dénué de viscosité. Composantes de l'élongation rapportées au milieu primitif.

Passons maintenant à des considérations dynamiques.

Pour ne pas les compliquer outre mesure, nous ne garderons pas ici toute la généralité qu'avaient les formules établies en la première Partie de ces *Recherches*. Nous admettrons, aussi bien au cours du présent Chapitre qu'au cours du Chapitre suivant, que *chaque masse élémentaire est soumise seulement à une action extérieure newtonienne;* nous désignerons par X_e, Y_e, Z_e les composantes du champ et nous supposerons ces quantités continues ainsi que leurs dérivées partielles des divers ordres.

En second lieu, au présent Chapitre, *nous supposerons le milieu dénué de viscosité.*

En revanche, dans les considérations que la première Partie de ces *Recherches* a développées, nous introduirons une généralisation; cette généralisation, sans compliquer les calculs, augmentera beaucoup la portée des résultats.

Nous avons supposé, en la première Partie de ces *Recherches,* que les déformations du milieu étaient rapportées à un état initial homogène et *isotrope;* la possibilité de rapporter l'état actuel du milieu à un tel état initial définit le milieu *vitreux*. Au présent Chapitre, nous admettrons encore que l'état initial (a, b, c) auquel nous rapportons les déformations soit homogène, mais nous ne supposerons plus qu'il soit forcément *isotrope;* en d'autres termes, nous admettrons que le milieu étudié puisse être soit un milieu *vitreux,* soit un milieu *cristallisé*.

Si nous passons en revue les raisonnements développés dans notre première Partie, nous verrons que, pour un milieu vitreux soumis exclusivement à des actions extérieures newtoniennes et dénué de viscosité, l'isotropie de l'état initial n'a été invoquée que trois fois :

Une première fois, en passant des égalités (45) aux égalités (45 *bis*) de la première Partie, pour déterminer de quelle manière $e_1, e_2, e_3, g_1, g_2, g_3$ dépendent de $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$; au présent Chapitre, nous ferons exclusivement usage des égalités (45) de la première Partie.

Une seconde fois, en passant des égalités (85) aux égalités (85 *bis*) de la première Partie, pour déterminer de quelle manière $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_3, \mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_3$ dépendent de $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$; au présent Chapitre, nous ferons exclusivement usage des égalités (85) de la première Partie.

Une troisième fois, enfin, dans l'étude de la propagation de la chaleur par conductibilité, lorsque nous avons admis que les trois quantités k_1, k_2, k_3 écrites en l'égalité (89) de la première Partie étaient les trois déterminations $k(\mathrm{T}, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, $k(\mathrm{T}, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_1)$, $k(\mathrm{T}, \sigma_3, \sigma_1, \sigma_2)$ d'une même fonction $k(\mathrm{T}, \sigma, \sigma', \sigma'')$; mais les formules qui suivent cette égalité (89) ont une forme indépendante de cette hypothèse; nous pourrons donc en faire usage.

Les égalités (82) de la première Partie et (6) du présent Chapitre nous enseignent que l'on a, en tout point de l'onde,

$$(34)\quad \left\{\begin{aligned} &\left(\frac{\partial \mathrm{N}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{T}_z}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{T}_y}{\partial z}\right)_1^2 + \rho\,\mathfrak{I}\mathfrak{b}^2\mathcal{F} = 0,\\ &\left(\frac{\partial \mathrm{T}_z}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{N}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{T}_x}{\partial z}\right)_1^2 + \rho\,\mathfrak{I}\mathfrak{b}^2\mathcal{G} = 0,\\ &\left(\frac{\partial \mathrm{T}_y}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{T}_x}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{N}_z}{\partial z}\right)_1^2 + \rho\,\mathfrak{I}\mathfrak{b}^2\mathcal{H} = 0. \end{aligned}\right.$$

Proposons-nous de former la quantité

$$\left[\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial T_z}{\partial y} + \frac{\partial T_y}{\partial z}\right]_1^2.$$

Les quantités N_i, T_i sont données par les égalités (62) de la première Partie où, selon les égalités (61) de la même Partie, les quantités ε_i, $\mathcal{G}_i$ doivent être réduites à e_i, g_i.

Nous aurons alors

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial T_z}{\partial y} + \frac{\partial T_y}{\partial z} = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 \tag{35}$$

avec

$$\varphi_1 = \frac{N_x}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{T_z}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{T_y}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial z}, \tag{36}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_2 = \rho \Big\{ \quad & e_1 \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial a}\right)^2 + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial z}{\partial a}\right] \\
+ & e_2 \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial b}\right)^2 + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial y}{\partial b} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial z}{\partial b}\right] \\
+ & e_3 \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial c}\right)^2 + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial c}\frac{\partial y}{\partial c} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial x}{\partial c}\frac{\partial z}{\partial c}\right] \\
+ & g_1 \Big[\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial x}{\partial c} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial y}{\partial c} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial z}{\partial c} \\
& \quad + \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial c}\frac{\partial x}{\partial b} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial c}\frac{\partial y}{\partial b} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial x}{\partial c}\frac{\partial z}{\partial b}\Big] \\
+ & g_2 \Big[\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial c}\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial c}\frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial x}{\partial c}\frac{\partial z}{\partial a} \\
& \quad + \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial x}{\partial c} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial c} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial z}{\partial c}\Big] \\
+ & g_3 \Big[\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial x}{\partial b} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial b} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial z}{\partial b} \\
& \quad + \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial z}{\partial a}\Big]\Big\},
\end{aligned} \tag{37}$$

$$\varphi_3 = \rho \sum_{\lambda} \left\{ \begin{aligned} & \left(\frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial a}\frac{\partial \lambda}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial a}\frac{\partial \lambda}{\partial z}\right)\frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial e_1}{\partial \lambda} \\ & + \left(\frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial b}\frac{\partial \lambda}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial b}\frac{\partial \lambda}{\partial z}\right)\frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial e_2}{\partial \lambda} \\ & + \left(\frac{\partial x}{\partial c}\frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial c}\frac{\partial \lambda}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial c}\frac{\partial \lambda}{\partial z}\right)\frac{\partial x}{\partial c}\frac{\partial e_3}{\partial \lambda} \\ & + \left[\left(\frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial b}\frac{\partial \lambda}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial b}\frac{\partial \lambda}{\partial z}\right)\frac{\partial x}{\partial c} + \left(\frac{\partial x}{\partial c}\frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial c}\frac{\partial \lambda}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial c}\frac{\partial \lambda}{\partial z}\right)\frac{\partial x}{\partial b}\right]\frac{\partial g_1}{\partial \lambda} \\ & + \left[\left(\frac{\partial x}{\partial c}\frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial c}\frac{\partial \lambda}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial c}\frac{\partial \lambda}{\partial z}\right)\frac{\partial x}{\partial a} + \left(\frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial a}\frac{\partial \lambda}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial a}\frac{\partial \lambda}{\partial z}\right)\frac{\partial x}{\partial c}\right]\frac{\partial g_2}{\partial \lambda} \\ & + \left[\left(\frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial a}\frac{\partial \lambda}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial a}\frac{\partial \lambda}{\partial z}\right)\frac{\partial x}{\partial b} + \left(\frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial b}\frac{\partial \lambda}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial b}\frac{\partial \lambda}{\partial z}\right)\frac{\partial x}{\partial a}\right]\frac{\partial g_3}{\partial \lambda} \end{aligned} \right\},$$

$$(\lambda = \varepsilon_2,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3,\ \gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3),$$

$$) \quad \varphi_4 = \rho \left\{ \begin{aligned} & \left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial a}\right)\frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial e_1}{\partial \mathrm{T}} \\ & + \left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial b} + \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial b} + \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial b}\right)\frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial e_2}{\partial \mathrm{T}} \\ & + \left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial c} + \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial c} + \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial c}\right)\frac{\partial x}{\partial c}\frac{\partial e_3}{\partial \mathrm{T}} \\ & + \left[\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial b} + \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial b} + \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial b}\right)\frac{\partial x}{\partial c} + \left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial c} + \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial c} + \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial c}\right)\frac{\partial x}{\partial b}\right]\frac{\partial g_1}{\partial \mathrm{T}} \\ & + \left[\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial c} + \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial c} + \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial c}\right)\frac{\partial x}{\partial a} + \left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial a}\right)\frac{\partial x}{\partial c}\right]\frac{\partial g_2}{\partial \mathrm{T}} \\ & + \left[\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial a}\right)\frac{\partial x}{\partial b} + \left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial b} + \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial b} + \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial b}\right)\frac{\partial x}{\partial a}\right]\frac{\partial g_3}{\partial \mathrm{T}} \end{aligned} \right\}.$$

On peut écrire

$$(40) \qquad \left[\frac{\partial \mathrm{N}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{T}_z}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{T}_y}{\partial z}\right]_1^2 = [\varphi_1]_1^2 + [\varphi_2]_1^2 + [\varphi_3]_1^2 + [\varphi_4]_1^2.$$

Les égalités (36) et (12) donnent, en remarquant que $\rho\varpi = \rho_0$,

$$(41) \qquad [\varphi_1]_1^2 = -\mathrm{K}^2[\alpha \mathrm{N}_x + \beta \mathrm{T}_z + \gamma \mathrm{T}_y)(\alpha \mathcal{F} + \beta \mathcal{G} + \gamma \mathcal{H}).$$

Les égalités (37), (8) et (2) donnent

$$(42)\quad [\varphi_2]_1^2 = \rho(e_1 l^2 + e_2 m^2 + e_3 n^2 + 2 g_1 mn + 2 g_2 nl + 2 g_3 lm)\mathcal{F}$$
$$+ \mathrm{K}\rho\Big[e_1 l \frac{\partial x}{\partial a} + e_2 m \frac{\partial x}{\partial b} + e_3 n \frac{\partial x}{\partial c}$$
$$+ g_1\left(m\frac{\partial x}{\partial c} + n\frac{\partial x}{\partial b}\right) + g_2\left(n\frac{\partial x}{\partial a} + l\frac{\partial x}{\partial c}\right) + g_3\left(l\frac{\partial x}{\partial b} + m\frac{\partial x}{\partial a}\right)\Big]$$
$$\times (\alpha\mathcal{F} + \beta\mathcal{G} + \gamma\mathcal{H}).$$

D'ailleurs, les égalités (2), jointes aux égalités (62) de la première Partie de ces *Recherches*, donnent l'égalité

$$\mathrm{K}(\alpha \mathrm{N}_x + \beta \mathrm{T}_z + \gamma \mathrm{T}_y)$$
$$= \rho\Big[e_1 l \frac{\partial x}{\partial a} + e_2 m \frac{\partial x}{\partial b} + e_3 n \frac{\partial x}{\partial c}$$
$$+ g_1\left(m\frac{\partial x}{\partial c} + n\frac{\partial x}{\partial b}\right) + g_2\left(n\frac{\partial x}{\partial a} + l\frac{\partial x}{\partial c}\right) + g_3\left(l\frac{\partial x}{\partial b} + m\frac{\partial x}{\partial a}\right)\Big].$$

Les égalités (41) et (42) se réunissent donc en une seule; posons

$$(43)\qquad \mathrm{Q} = -(e_1 l^2 + e_2 m^2 + e_3 n^2 + 2 g_1 mn + 2 g_2 nl + 2 g_3 lm)$$

et nous aurons simplement

$$(44)\qquad [\varphi_1]_1^2 + [\varphi_2]_1^2 = -\rho \mathrm{Q}\mathcal{F}.$$

Les égalités (38), (32) et (2) donnent

$$(45)\quad [\varphi_3]_1^2 = \rho\Big\{\Big[\left(l\frac{\partial e_1}{\partial \varepsilon_1} + m\frac{\partial e_1}{\partial \gamma_3} + n\frac{\partial e_1}{\partial \gamma_2}\right) l\frac{\partial x}{\partial a}$$
$$+ \left(l\frac{\partial e_2}{\partial \varepsilon_1} + m\frac{\partial e_2}{\partial \gamma_3} + n\frac{\partial e_2}{\partial \gamma_2}\right) m\frac{\partial x}{\partial b}$$
$$+ \left(l\frac{\partial e_3}{\partial \varepsilon_1} + m\frac{\partial e_3}{\partial \gamma_3} + n\frac{\partial e_3}{\partial \gamma_2}\right) n\frac{\partial x}{\partial c}$$
$$+ \left(l\frac{\partial g_1}{\partial \varepsilon_1} + m\frac{\partial g_1}{\partial \gamma_3} + n\frac{\partial g_1}{\partial \gamma_2}\right)\left(m\frac{\partial x}{\partial c} + n\frac{\partial x}{\partial b}\right)$$
$$+ \left(l\frac{\partial g_2}{\partial \varepsilon_1} + m\frac{\partial g_2}{\partial \gamma_3} + n\frac{\partial g_2}{\partial \gamma_2}\right)\left(n\frac{\partial x}{\partial a} + l\frac{\partial x}{\partial c}\right)$$
$$+ \left(l\frac{\partial g_3}{\partial \varepsilon_1} + m\frac{\partial g_3}{\partial \gamma_3} + n\frac{\partial g_3}{\partial \gamma_2}\right)\left(l\frac{\partial x}{\partial b} + m\frac{\partial x}{\partial a}\right)\Big]\mathrm{A}$$

$$+\left[\quad\left(l\frac{\partial e_1}{\partial\gamma_3}+m\frac{\partial e_1}{\partial\varepsilon_2}+n\frac{\partial e_1}{\partial\gamma_1}\right)\quad l\frac{\partial x}{\partial a}+\ldots\ldots\right]\mathrm{B}$$
$$+\left[\quad\left(l\frac{\partial e_1}{\partial\gamma_2}+m\frac{\partial e_1}{\partial\gamma_1}+n\frac{\partial e_1}{\partial\varepsilon_3}\right)\quad l\frac{\partial x}{\partial a}+\ldots\ldots\right]\mathrm{C}\Big\}.$$

Selon l'élégante notation indiquée par M. J. Hadamard (¹), posons

$$(46)\qquad \begin{cases} l\mathrm{A}=\mathrm{E}_1, & m\mathrm{B}=\mathrm{E}_2, & n\mathrm{C}=\mathrm{E}_3,\\ m\mathrm{C}+n\mathrm{B}=\mathrm{G}_1, & n\mathrm{A}+l\mathrm{C}=\mathrm{G}_2, & l\mathrm{B}+m\mathrm{A}=\mathrm{G}_3 \end{cases}$$

et

$$(47)\qquad \mathrm{J}=\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_1}\mathrm{E}_1+\frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_2}\mathrm{E}_2+\frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_3}\mathrm{E}_3+\frac{\partial\Phi}{\partial\gamma_1}\mathrm{G}_1+\frac{\partial\Phi}{\partial\gamma_2}\mathrm{G}_2+\frac{\partial\Phi}{\partial\gamma_3}\mathrm{G}_3\right)^{(2)}.$$

Dans cette égalité (47), (2) désigne un carré symbolique où l'on doit remplacer, par exemple, $\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_1}\right)^2$ par $\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_1^2}$ et $\frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_1}\frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_2}$ par $\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_1\,\partial\varepsilon_2}$.

J est une forme quadratique en

$$\mathrm{E}_1,\quad \mathrm{E}_2,\quad \mathrm{E}_3,\quad \mathrm{G}_1,\quad \mathrm{G}_2,\quad \mathrm{G}_3;$$

partant, selon les égalités (46), c'est aussi une forme quadratique en

$$\mathrm{A},\quad \mathrm{B},\quad \mathrm{C},$$

et les égalités (31) la transforment en une forme quadratique des trois grandeurs

$$\mathfrak{F},\quad \mathfrak{G},\quad \mathfrak{H}.$$

On peut aisément mettre l'égalité (45) sous la forme

$$\begin{aligned} 2[\varphi_3]_1^2 = &-\rho l\left(\frac{\partial\mathrm{J}}{\partial\mathrm{E}_1}\frac{\partial x}{\partial a}+\frac{\partial\mathrm{J}}{\partial\mathrm{G}_3}\frac{\partial x}{\partial b}+\frac{\partial\mathrm{J}}{\partial\mathrm{G}_2}\frac{\partial x}{\partial c}\right)\\ &-\rho m\left(\frac{\partial\mathrm{J}}{\partial\mathrm{G}_3}\frac{\partial x}{\partial a}+\frac{\partial\mathrm{J}}{\partial\mathrm{E}_2}\frac{\partial x}{\partial b}+\frac{\partial\mathrm{J}}{\partial\mathrm{G}_1}\frac{\partial x}{\partial c}\right)\\ &-\rho n\left(\frac{\partial\mathrm{J}}{\partial\mathrm{G}_2}\frac{\partial x}{\partial a}+\frac{\partial\mathrm{J}}{\partial\mathrm{G}_1}\frac{\partial x}{\partial b}+\frac{\partial\mathrm{J}}{\partial\mathrm{E}_3}\frac{\partial x}{\partial c}\right). \end{aligned}$$

(¹) J. Hadamard, *Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'Hydrodynamique*, p. 251. Paris, 1903.

En vertu des égalités (46), cette égalité peut encore s'écrire

$$2[\varphi_3]_1^2 = -\rho\left(\frac{\partial J}{\partial A}\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial J}{\partial B}\frac{\partial x}{\partial b} + \frac{\partial J}{\partial C}\frac{\partial x}{\partial c}\right).$$

En vertu des égalités (31), elle se réduit à

$$(48) \qquad 2[\varphi_3]_1^2 = -\rho\frac{\partial J}{\partial \mathcal{F}}.$$

Reste à évaluer $[\varphi_4]_1^2$.

Si l'onde Σ est du premier ordre par rapport à la température absolue T, il existe en tout point de l'onde Σ une grandeur $\mathfrak{J}$ telle que l'on ait

$$(49) \quad \left\{\begin{aligned} \left[\frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial T}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial T}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial a}\right]_1^2 &= \left[\frac{\partial T}{\partial a}\right]_1^2 = l\mathfrak{J}, \\ \left[\frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial b} + \frac{\partial T}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial b} + \frac{\partial T}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial b}\right]_1^2 &= \left[\frac{\partial T}{\partial b}\right]_1^2 = m\mathfrak{J}, \\ \left[\frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial c} + \frac{\partial T}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial c} + \frac{\partial T}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial c}\right]_1^2 &= \left[\frac{\partial T}{\partial c}\right]_1^2 = n\mathfrak{J}. \end{aligned}\right.$$

Si, par rapport à la température absolue T, l'onde Σ est d'ordre supérieur au premier, on a

$$(50) \qquad \mathfrak{J} = 0.$$

Par rapport à la température absolue T, l'onde S, tracée dans l'espace des (x, y, z), est du même ordre que l'onde Σ; on a donc, en tout point de l'onde S, une grandeur Θ, nulle en même temps que $\mathfrak{J}$, et vérifiant, lorsqu'elle n'est pas nulle, les égalités

$$(51) \qquad \left[\frac{\partial T}{\partial x}\right]_1^2 = \alpha\Theta, \qquad \left[\frac{\partial T}{\partial y}\right]_1^2 = \beta\Theta, \qquad \left[\frac{\partial T}{\partial z}\right]_1^2 = \gamma\Theta.$$

Les égalités (2), (49) et (51) montrent que la valeur de $\mathfrak{J}$ en un point de l'onde Σ et la valeur de Θ au point correspondant de l'onde S sont reliées par l'égalité

$$(52) \qquad \Theta = K\mathfrak{J}.$$

Si, par rapport à la température absolue, l'onde Σ est d'ordre supérieur au premier, les égalités (39), (49) et (50) donnent immédiatement

$$(53) \qquad [\varphi_4]_1^2 = 0.$$

Si, au contraire, l'onde Σ est du premier ordre par rapport à la température absolue T, les égalités (39) et (49) donnent

$$(54)\quad [\varphi_4]_1^2 = \rho\Big[l\frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial e_1}{\partial T} + m\frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial e_2}{\partial T} + n\frac{\partial x}{\partial c}\frac{\partial e_3}{\partial T} + \left(m\frac{\partial x}{\partial c} + n\frac{\partial x}{\partial b}\right)\frac{\partial g_1}{\partial T} + \left(n\frac{\partial x}{\partial a} + l\frac{\partial x}{\partial c}\right)\frac{\partial g_2}{\partial T} + \left(l\frac{\partial x}{\partial b} + m\frac{\partial x}{\partial a}\right)\frac{\partial g_3}{\partial T}\Big].$$

La détermination de $\mathfrak{S}$ se tire de la relation supplémentaire [(*Recherches sur l'élasticité*, 1re Partie, égalité (94)].

Si le milieu est bon conducteur de la chaleur, cas auquel les coefficients de conductibilité ne sont pas tous nuls, la relation supplémentaire montre immédiatement que l'onde est au moins du second ordre par rapport à la température T; c'est donc l'égalité (53) qui doit être employée dans ce cas.

Dans le cas où le milieu ne conduit pas la chaleur, la relation supplémentaire exprime simplement que la quantité de chaleur dégagée, dans le temps dt, par chacun des éléments du système est nulle. Comme le milieu n'est pas visqueux, l'égalité (86) de la première Partie réduit cette relation à

$$c\frac{\partial T}{\partial t} + \mathrm{e}_1\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial t} + \mathrm{e}_2\frac{\partial \varepsilon_2}{\partial t} + \mathrm{e}_3\frac{\partial \varepsilon_3}{\partial t} + \mathrm{g}_1\frac{\partial \gamma_1}{\partial t} + \mathrm{g}_2\frac{\partial \gamma_2}{\partial t} + \mathrm{g}_3\frac{\partial \gamma_3}{\partial t} = 0$$

ou bien, par comparaison entre les égalités (45) et (85) de la première Partie, à

$$(54\,bis)\quad c\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{T}{E}\left(\frac{\partial e_1}{\partial T}\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial t} + \frac{\partial e_2}{\partial T}\frac{\partial \varepsilon_2}{\partial t} + \frac{\partial e_3}{\partial T}\frac{\partial \varepsilon_3}{\partial t} + \frac{\partial g_1}{\partial T}\frac{\partial \gamma_1}{\partial t} + \frac{\partial g_2}{\partial T}\frac{\partial \gamma_2}{\partial t} + \frac{\partial g_3}{\partial T}\frac{\partial \gamma_3}{\partial t}\right) = 0.$$

D'ailleurs, les égalités (23) de la première Partie donnent

$$(55)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial t} &= \frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial^2 \xi}{\partial a\,\partial t} + \frac{\partial y}{\partial a}\frac{\partial^2 \eta}{\partial a\,\partial t} + \frac{\partial z}{\partial a}\frac{\partial^2 \zeta}{\partial a\,\partial t},\\ \frac{\partial \gamma_1}{\partial t} &= \frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial^2 \xi}{\partial c\,\partial t} + \frac{\partial y}{\partial b}\frac{\partial^2 \eta}{\partial c\,\partial t} + \frac{\partial z}{\partial b}\frac{\partial^2 \zeta}{\partial c\,\partial t}\\ &\quad + \frac{\partial x}{\partial c}\frac{\partial^2 \xi}{\partial b\,\partial t} + \frac{\partial y}{\partial c}\frac{\partial^2 \eta}{\partial b\,\partial t} + \frac{\partial z}{\partial c}\frac{\partial^2 \zeta}{\partial b\,\partial t},\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}\right.$$

Enfin, parmi les égalités (6), nous trouvons

$$(56)\quad \left\{\begin{array}{lll} \left[\dfrac{\partial^2\xi}{\partial a\,\partial t}\right]_1^2 = -\mathfrak{N}\,l\mathfrak{F}, & \left[\dfrac{\partial^2\eta}{\partial a\,\partial t}\right]_1^2 = -\mathfrak{N}\,l\mathfrak{G}, & \left[\dfrac{\partial^2\zeta}{\partial a\,\partial t}\right]_1^2 = -\mathfrak{N}\,l\mathfrak{H}, \\ \left[\dfrac{\partial^2\xi}{\partial b\,\partial t}\right]_1^2 = -\mathfrak{N}\,m\mathfrak{F}, & \dots, & \\ \left[\dfrac{\partial^2\xi}{\partial c\,\partial t}\right]_1^2 = -\mathfrak{N}\,n\mathfrak{F}, & \dots, & \end{array}\right.$$

tandis qu'aux égalités (49) on doit joindre l'égalité

$$(57)\qquad \left[\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial t}\right]_1^2 = -\mathfrak{N}\mathfrak{J}.$$

Si à toutes ces égalités nous joignons les égalités (31) et si nous supposons $\mathfrak{N}$ différent de o, nous trouvons

$$(58)\qquad \mathfrak{J} = -\frac{\mathrm{T}}{\mathrm{E}}\mathfrak{T},$$

égalité dans laquelle $\mathfrak{T}$ représente une forme linéaire en A, B, C; en vertu des égalités (31), c'est aussi une forme linéaire en $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$,

$$(59)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{T} = &\left(l\frac{\partial e_1}{\partial \mathrm{T}} + m\frac{\partial g_3}{\partial \mathrm{T}} + n\frac{\partial g_2}{\partial \mathrm{T}}\right)\mathrm{A} \\ &+ \left(l\frac{\partial g_3}{\partial \mathrm{T}} + m\frac{\partial e_2}{\partial \mathrm{T}} + n\frac{\partial g_1}{\partial \mathrm{T}}\right)\mathrm{B} \\ &+ \left(l\frac{\partial g_2}{\partial \mathrm{T}} + m\frac{\partial g_1}{\partial \mathrm{T}} + n\frac{\partial e_3}{\partial \mathrm{T}}\right)\mathrm{C}. \end{aligned}$$

Les égalités (54), (58) et (59) nous donnent alors, pour un corps mauvais conducteur de la chaleur,

$$[\varphi_4]_1^2 = -\rho\frac{\mathrm{T}}{\mathrm{E}}\mathfrak{T}\left(\frac{\partial\mathfrak{T}}{\partial \mathrm{A}}\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial\mathfrak{T}}{\partial \mathrm{B}}\frac{\partial x}{\partial b} + \frac{\partial\mathfrak{T}}{\partial \mathrm{C}}\frac{\partial x}{\partial c}\right)$$

ou bien, selon les égalités (31),

$$(60)\qquad [\varphi_4]_1^2 = -\frac{\rho\mathrm{T}}{2\mathrm{E}}\frac{\partial\mathfrak{T}^2}{\partial\mathfrak{F}}.$$

Dès lors, *si le milieu est bon conducteur de la chaleur*, les égalités (40), (44), (48) et (53) transforment la première des égalités (34) en la première des égalités

$$(61)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial J}{\partial \mathcal{F}} + Q\mathcal{F} - \mathfrak{N}^2\mathcal{F} = 0, \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial J}{\partial \mathcal{G}} + Q\mathcal{G} - \mathfrak{N}^2\mathcal{G} = 0, \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial J}{\partial \mathcal{H}} + Q\mathcal{H} - \mathfrak{N}^2\mathcal{H} = 0. \end{cases}$$

Les deux dernières égalités (61) découlent de même des deux dernières équations (34).

Si l'on remplace dans J les lettres $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ par les lettres X, Y, Z, elle devient une certaine forme quadratique en X, Y, Z, J(X, Y, Z). L'équation que doit vérifier $\mathfrak{N}^2$ pour que les équations (61) soient compatibles est l'équation qui donne les carrés inverses des demi-axes de la surface du second degré

$$(62)\quad J(X, Y, Z) + Q(X^2 + Y^2 + Z^2) = 1.$$

Si le milieu est mauvais conducteur de la chaleur, les égalités (40), (44), (48) et (60) transforment la première des égalités (34) en la première des égalités

$$(63)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial \mathcal{F}}\left(J + \dfrac{\rho T}{E}\mathfrak{T}^2\right) + Q\mathcal{F} - \mathfrak{N}^2\mathcal{F} = 0, \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial \mathcal{G}}\left(J + \dfrac{\rho T}{E}\mathfrak{T}^2\right) + Q\mathcal{G} - \mathfrak{N}^2\mathcal{G} = 0, \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial \mathcal{H}}\left(J + \dfrac{\rho T}{E}\mathfrak{T}^2\right) + Q\mathcal{H} - \mathfrak{N}^2\mathcal{H} = 0. \end{cases}$$

Les deux dernières égalités (63) dérivent de même des deux dernières égalités (34).

$\mathfrak{T}$ est une fonction linéaire et homogène de $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$. Si nous y remplaçons $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ par X, Y, Z, elle devient une fonction linéaire et homogène de X, Y, Z, $\mathfrak{T}$(X, Y, Z).

Pour que les équations (63) soient compatibles, il faut et il suffit que $\mathfrak{N}^2$ vérifie une certaine équation du troisième degré; c'est l'équation qui donne les carrés inverses des demi-axes de la quadrique

$$(64)\qquad J(X,Y,Z)+Q(X^2+Y^2+Z^2)+\frac{\rho T}{E}[\mathfrak{C}(X,Y,Z)]^2=1.$$

Étudions la nature des surfaces du second degré que représentent les équations (62) et (64).

Selon l'égalité (127) de la troisième Partie de ces *Recherches sur l'élasticité* (¹), on doit avoir l'inégalité

$$(65)\qquad \begin{aligned}&\Big[\frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_1}\left(\frac{\partial x}{\partial a}a_{11}+\frac{\partial y}{\partial a}a_{21}+\frac{\partial z}{\partial a}a_{31}\right)+\ldots\\ &+\frac{\partial\Phi}{\partial\gamma_1}\Big(\frac{\partial x}{\partial b}a_{13}+\frac{\partial y}{\partial b}a_{23}+\frac{\partial z}{\partial b}a_{33}\\ &\qquad+\frac{\partial x}{\partial c}a_{12}+\frac{\partial y}{\partial c}a_{22}+\frac{\partial z}{\partial c}a_{32}\Big)+\ldots\Big]^{(2)}\\ &+\frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_1}(a_{11}^2+a_{21}^2+a_{31}^2)+\ldots\\ &+2\frac{\partial\Phi}{\partial\gamma_1}(a_{12}a_{13}+a_{22}a_{23}+a_{32}a_{33})+\ldots\qquad>0,\end{aligned}$$

quelles que soient les valeurs attribuées aux quantités a_{ij}.

Dans cette inégalité, faisons (²)

$$(66)\qquad \begin{cases}a_{11}=l\mathcal{F}, & a_{12}=m\mathcal{F}, & a_{13}=n\mathcal{F},\\ a_{21}=l\mathcal{G}, & a_{22}=m\mathcal{G}, & a_{23}=n\mathcal{G},\\ a_{31}=l\mathcal{H}, & a_{32}=m\mathcal{H}, & a_{33}=n\mathcal{H}.\end{cases}$$

Cette inégalité (65) deviendra, en tenant compte des égalités (31),

$$\begin{aligned}&\Big[\frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_1}lA+\frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_2}mB+\frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_3}nC\\ &+\frac{\partial\Phi}{\partial\gamma_1}(mC+nB)+\frac{\partial\Phi}{\partial\gamma_2}(nA+lC)+\frac{\partial\Phi}{\partial\gamma_3}(lB+mA)\Big]^{(2)}\\ &+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_1}l^2+\frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_2}m^2+\frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_3}n^2+2\frac{\partial\Phi}{\partial\gamma_1}mn+2\frac{\partial\Phi}{\partial\gamma_2}nl+2\frac{\partial\Phi}{\partial\gamma_3}lm\right)(\mathcal{F}^2+\mathcal{G}^2+\mathcal{H}^2)>0\end{aligned}$$

(¹) En la troisième Partie de ces *Recherches*, les lettres ε_1, ε_2, ε_2, γ_1, γ_2, γ_3 sont remplacées par e_1, e_2, e_3, g_1, g_2, g_3; les quantités a_{ij} sont remplacées par les symboles δa_{ij}.

(²) Les égalités (66) ont la forme indiquée aux égalités (137) de la troisième Partie, forme à laquelle se rattachent certaines considérations de stabilité, dues à M. J. Hadamard, et discutées en cette troisième Partie, Chapitre III, § 4.

ou bien, selon les égalités (43), (46) et (47),

$$J(\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}) + Q(\mathcal{F}^2 + \mathcal{G}^2 + \mathcal{H}^2) > 0. \tag{67}$$

Cette inégalité ayant lieu quels que soient $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$, nous voyons que la *surface représentée par l'équation* (62) *est un ellipsoïde réel* $\mathcal{E}$.

On peut donc énoncer le théorème suivant :

A chaque point d'une onde Σ, du second ordre par rapport à l'élongation (ξ, η, ζ), tracée dans l'espace (a, b, c) qui représente l'état initial du milieu conducteur de la chaleur, correspond un ellipsoïde réel $\mathcal{E}$. Pour qu'une perturbation d'élongation, rapportée au même état initial, puisse être propagée par l'onde Σ, il faut qu'elle soit dirigée suivant un des axes de l'ellipsoïde $\mathcal{E}$. La vitesse de propagation, rapportée également à l'espace des (a, b, c), est l'inverse de la moitié de cet axe.

Ce beau théorème est dû à M. J. Hadamard [1]; mais, par suite d'une inadvertance, M. Hadamard l'a énoncé, non pas pour la perturbation d'élongation rapportée au milieu initial, mais pour la perturbation d'élongation rapportée au milieu dans son état actuel de déformation, c'est-à-dire à l'espace des (x, y, z); au prochain paragraphe, nous verrons qu'il serait alors inexact.

En outre, la démonstration de M. Hadamard supposait que la température du milieu demeurait invariable tandis que l'onde s'y propageait; la nôtre suppose seulement que le milieu étudié est capable de propager la chaleur par conductibilité.

Le théorème de M. Hadamard a été précédé par des propositions dues à Green [2] et à Poisson [3].

Ni Green, ni Poisson, cela va sans dire, n'ont traité le problème de la propagation des ondes au point de vue qu'ont considéré les premiers Christoffel et Hugoniot; ils ont traité la propagation d'*ondes*

---

[1] J. HADAMARD, *Leçons sur la théorie des ondes et sur les équations de l'Hydrodynamique*. Paris, 1903, p. 252.

[2] G. GREEN, *On the propagation of light in crystallized media* (*Cambridge Phil. Soc.*, 20 mai 1839; *Mathematical Papers of the late George Green*).

[3] POISSON, *Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des corps cristallisés*, lu à l'Académie le 28 octobre 1839 (*Mémoires de l'Académie des Sciences*, t. XVIII).

planes au sens classique de ce mot; en outre, Poisson supposait le milieu infiniment peu déformé et Green, après avoir supposé que les déformations pouvaient être finies, introduisait dans l'évaluation du potentiel interne une restriction qui n'est acceptable que pour les déformations infiniment petites. Enfin, Green, comme Poisson, ne tenait aucun compte des variations possibles de la température.

Dans ces conditions restreintes, les deux illustres géomètres ont démontré un théorème semblable à la proposition, due à M. Hadamard, dont nous avons rappelé l'énoncé.

Si la surface représentée par l'égalité (62) est un ellipsoïde réel $\mathcal{E}$, *la surface représentée par l'égalité* (64) *est*, a fortiori, *un ellipsoïde réel* $\mathcal{E}'$; de plus, *l'ellipsoïde* $\mathcal{E}'$ *est, en entier, situé à l'intérieur de l'ellipsoïde* $\mathcal{E}$.

On peut donc, *pour tout milieu non conducteur de la chaleur*, énoncer le théorème suivant :

A chaque point d'une onde Σ, *du second ordre par rapport aux composantes* ξ, η, ζ *de l'élongation, et tracée dans l'espace des* (a, b, c), *qui représente l'état initial du milieu, correspond un ellipsoïde réel* $\mathcal{E}'$. *Pour qu'une perturbation d'élongation, rapportée au même état initial, puisse être propagée par l'onde* Σ, *il faut qu'elle soit dirigée suivant un des axes de l'ellipsoïde* $\mathcal{E}'$. *La vitesse de propagation, rapportée également à l'espace des* (a, b, c), *est l'inverse de la moitié de cet axe.*

III. — Propagation des ondes au sein d'un milieu dénué de viscosité. Perturbation de la vitesse.

Au paragraphe I, nous avons démontré ce théorème :

Soit qu'on la rapporte au milieu primitif (a, b, c), *soit qu'on la rapporte au milieu déformé* (x, y, z), *la perturbation de vitesse a même orientation ; elle est parallèle à la perturbation d'élongation rapportée au milieu primitif* (a, b, c).

Ce théorème, rapproché de ceux qui ont été établis au paragraphe précédent, donne les propositions suivantes :

Si l'on se donne un point, soit dans le milieu primitif, soit dans le *milieu déformé, et l'orientation d'une onde passant par ce point, la perturbation de vitesse que cette onde peut propager est susceptible, en ce point, de trois orientations distinctes; ces trois orientations sont celles des axes principaux de l'ellipsoïde $\mathcal{E}$ si le milieu conduit la chaleur et celles des axes principaux de l'ellipsoïde $\mathcal{E}'$ si le milieu est dénué de toute conductibilité.*

IV. — Propagation des ondes dans les milieux dénués de viscosité. Composantes de l'élongation rapportées au milieu déformé.

Nous allons traiter les questions déjà examinées au paragraphe I en rapportant les grandeurs inconnues à l'état déformé (x, y, z) du milieu; au lieu de déterminer $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$, nous aurons à déterminer Φ, Ψ, X.

Dans ce but, multiplions respectivement les égalités (34) par $K^2\frac{\partial a}{\partial x}$, $K^2\frac{\partial a}{\partial y}$, $K^2\frac{\partial a}{\partial z}$ et ajoutons-les membre à membre.

La première égalité (9) nous donnera

$$K^2\rho\,\mathfrak{T}^2\left(\frac{\partial a}{\partial x}\mathcal{F}+\frac{\partial a}{\partial y}\mathcal{G}+\frac{\partial a}{\partial z}\mathcal{H}\right)=\rho\,\mathfrak{T}^2\Phi. \tag{68}$$

L'égalité (41), qui donne $[\varphi_1]_1^2$, et les égalités analogues qui donneraient $[\psi_1]_1^2$, $[\chi_1]_1^2$, jointes aux égalités (62) de la première Partie et à l'égalité (11) de cette quatrième Partie, donnent aisément

$$\begin{aligned}K^2\left\{\frac{\partial a}{\partial x}[\varphi_1]_1^2+\frac{\partial a}{\partial y}[\psi_1]_1^2+\frac{\partial a}{\partial z}[\chi_1]_1^2\right\}&\\ =-\rho(e_1 l+g_3 m+g_2 n)(l\Phi+m\Psi+nX).&\end{aligned}\tag{69}$$

L'égalité (42), qui donne $[\varphi_2]_1^2$, et les égalités analogues, qui donneraient $[\psi_2]_1^2$, $[\chi_2]_1^2$, jointes aux égalités (10) et (11), donnent l'égalité

$$\begin{aligned}K^2\left\{\frac{\partial a}{\partial x}[\varphi_2]_1^2+\frac{\partial a}{\partial y}[\psi_2]_1^2+\frac{\partial a}{\partial z}[\chi_2]_1^2\right\}&\\ =\ \rho(e_1 l+g_3 m+g_2)(l\Phi+m\Psi+nX)&\\ +\rho(e_1 l^2+e_2 m^2+e_3 n^2+2g_1 mn+2g_2 nl+2g_3 lm)\Phi.&\end{aligned}\tag{70}$$

L'égalité (45), qui donne $[\varphi_3]_1^2$, et les égalités analogues qui donneraient $[\psi_3]_1^2$, $[\chi_3]_1^2$, jointes aux égalités (33), donnent

$$(71)\quad K^2\left\{\frac{\partial a}{\partial x}[\varphi_3]_1^2+\frac{\partial a}{\partial y}[\psi_3]_1^2+\frac{\partial a}{\partial z}[\chi_3]_1^2\right\}$$

$$\begin{aligned}
=\ &\rho\Big[\left(l\frac{\partial e_1}{\partial \varepsilon_1}+m\frac{\partial e_1}{\partial \gamma_3}+n\frac{\partial e_1}{\partial \gamma_2}\right)l+\left(l\frac{\partial g_3}{\partial \varepsilon_1}+m\frac{\partial g_3}{\partial \gamma_3}+n\frac{\partial g_3}{\partial \gamma_2}\right)m\\
&\quad+\left(l\frac{\partial g_2}{\partial \varepsilon_1}+m\frac{\partial g_2}{\partial \gamma_3}+n\frac{\partial g_2}{\partial \gamma_2}\right)n\Big][(1+2\varepsilon_1)\Phi+\gamma_3\Psi+\gamma_2 X]\\
+&\rho\Big[\left(l\frac{\partial e_1}{\partial \gamma_3}+m\frac{\partial e_1}{\partial \varepsilon_2}+n\frac{\partial e_1}{\partial \gamma_1}\right)l+\left(l\frac{\partial g_3}{\partial \gamma_3}+m\frac{\partial g_3}{\partial \varepsilon_2}+n\frac{\partial g_3}{\partial \gamma_1}\right)m\\
&\quad+\left(l\frac{\partial g_2}{\partial \gamma_3}+m\frac{\partial g_2}{\partial \varepsilon_2}+n\frac{\partial g_2}{\partial \gamma_1}\right)n\Big][\gamma_3\Phi+(1+2\varepsilon_2)\Psi+\gamma_1 X]\\
+&\rho\Big[\left(l\frac{\partial e_1}{\partial \gamma_2}+m\frac{\partial e_1}{\partial \gamma_1}+n\frac{\partial e_1}{\partial \varepsilon_3}\right)l+\left(l\frac{\partial g_3}{\partial \gamma_2}+m\frac{\partial g_3}{\partial \gamma_1}+n\frac{\partial g_3}{\partial \varepsilon_3}\right)m\\
&\quad+\left(l\frac{\partial g_2}{\partial \gamma_2}+m\frac{\partial g_2}{\partial \gamma_1}+n\frac{\partial g_2}{\partial \varepsilon_3}\right)n\Big][\gamma_2\Phi+\gamma_1\Psi+(1+2\varepsilon_3)X].
\end{aligned}$$

Si le milieu est bon conducteur de la chaleur, l'équation (63) et les équations analogues qui donneraient $[\psi_4]_1^2$, $[\chi_4]_1^2$ permettent d'écrire

$$(72)\qquad K^2\left\{\frac{\partial a}{\partial x}[\varphi_4]_1^2+\frac{\partial a}{\partial y}[\psi_4]_1^2+\frac{\partial a}{\partial z}[\chi_4]_1^2\right\}=0.$$

Si le milieu est mauvais conducteur de la chaleur, l'égalité (60) qui donne $[\varphi_4]_1^2$, et les égalités analogues qui donneraient $[\psi_4]_1^2$ et $[\chi_4]_1^2$, jointes aux égalités (59) et (33), permettent d'écrire

$$(73)\quad K^2\left\{\frac{\partial a}{\partial x}[\varphi_4]_1^2+\frac{\partial a}{\partial y}[\psi_4]_1^2+\frac{\partial a}{\partial z}[\chi_4]_1^2\right\}$$

$$\begin{aligned}
=-\frac{T\rho}{Ec}&\left(l\frac{\partial e_1}{\partial T}+m\frac{\partial g_3}{\partial T}+n\frac{\partial g_2}{\partial T}\right)\\
\times\Big\{&\left(l\frac{\partial e_1}{\partial T}+m\frac{\partial g_3}{\partial T}+n\frac{\partial g_2}{\partial T}\right)[1+2\varepsilon_1)\Phi+\gamma_3\Psi+\gamma_2 X]\\
&\left(l\frac{\partial g_3}{\partial T}+m\frac{\partial e_2}{\partial T}+n\frac{\partial g_1}{\partial T}\right)[\gamma_3\Phi+(1+2\varepsilon_2)\Psi+\gamma_1 X]\\
&\left(l\frac{\partial g_2}{\partial T}+m\frac{\partial g_1}{\partial T}+n\frac{\partial e_3}{\partial T}\right)[\gamma_2\Phi+\gamma_1\Psi+(1+2\varepsilon_3)X]\Big\}.
\end{aligned}$$

En ajoutant ensemble les seconds membres des égalités (68), (69), (70), (71) et (72) ou (73), nous trouvons un résultat nul, ce qui nous donne la première des égalités

$$(74)\qquad \left\{\begin{aligned} &(S_{11}+\mathcal{M}^2)\Phi + S_{12}\Psi + S_{13}X = 0,\\ &S_{21}\Phi + (S_{22}+\mathcal{M}^2)\Psi + S_{23}X = 0,\\ &S_{31}\Phi + S_{32}\Psi + (S_{33}+\mathcal{M}^2)X = 0. \end{aligned}\right.$$

Les coefficients S_{ij} dépendent de la déformation au point considéré, de la température T, et des cosinus directeurs l, m, n de la normale à l'onde, ces cosinus étant rapportés à l'état initial du milieu. Les coefficients S_{ij} n'ont pas même valeur selon que le milieu est ou n'est pas conducteur de la chaleur.

Lorsque i et j sont distincts, on n'a pas

$$(75)\qquad S_{ij} = S_{ji}.$$

Vérifions cette proposition en écrivant, pour le cas où le milieu est bon conducteur de la chaleur, les expressions de S_{12} et de S_{21}. Nous avons

$$(76)\qquad \left\{\begin{aligned}
S_{22} = {} & \Bigg[\left(l\frac{\partial e_1}{\partial \varepsilon_1} + m\frac{\partial e_1}{\partial \gamma_3} + n\frac{\partial e_1}{\partial \gamma_2}\right) l + \left(l\frac{\partial g_3}{\partial \varepsilon_1} + m\frac{\partial g_3}{\partial \gamma_3} + n\frac{\partial g_3}{\partial \gamma_2}\right) m \\
& \qquad + \left(l\frac{\partial g_2}{\partial \varepsilon_1} + m\frac{\partial g_2}{\partial \gamma_3} + n\frac{\partial g_2}{\partial \gamma_2}\right) n\Bigg]\gamma_3 \\
& + \Bigg[\left(l\frac{\partial e_1}{\partial \gamma_3} + m\frac{\partial e_1}{\partial \varepsilon_2} + n\frac{\partial e_1}{\partial \gamma_1}\right) l + \left(l\frac{\partial g_3}{\partial \gamma_3} + m\frac{\partial g_3}{\partial \varepsilon_2} + n\frac{\partial g_3}{\partial \gamma_1}\right) m \\
& \qquad + \left(l\frac{\partial g_2}{\partial \gamma_3} + m\frac{\partial g_2}{\partial \varepsilon_2} + n\frac{\partial g_2}{\partial \gamma_1}\right) n\Bigg](1 + 2\varepsilon \\
& + \Bigg[\left(l\frac{\partial e_1}{\partial \gamma_2} + m\frac{\partial e_1}{\partial \gamma_1} + n\frac{\partial e_1}{\partial \varepsilon_3}\right) l + \left(l\frac{\partial g_3}{\partial \gamma_2} + m\frac{\partial g_3}{\partial \gamma_1} + n\frac{\partial g_3}{\partial \varepsilon_3}\right) m \\
& \qquad + \left(l\frac{\partial g_2}{\partial \gamma_2} + m\frac{\partial g_2}{\partial \gamma_1} + n\frac{\partial g_2}{\partial \varepsilon_3}\right) n\Bigg]\gamma_1, \\
S_{21} = {} & \Bigg[\left(l\frac{\partial g_3}{\partial \varepsilon_1} + m\frac{\partial g_3}{\partial \gamma_3} + n\frac{\partial g_3}{\partial \gamma_2}\right) l + \left(l\frac{\partial e_2}{\partial \varepsilon_1} + m\frac{\partial e_2}{\partial \gamma_3} + n\frac{\partial e_2}{\partial \gamma_2}\right) m \\
& \qquad + \left(l\frac{\partial g_1}{\partial \varepsilon_1} + m\frac{\partial g_1}{\partial \gamma_3} + n\frac{\partial g_1}{\partial \gamma_2}\right) n\Bigg](1 + 2\varepsilon \\
& + \Bigg[\left(l\frac{\partial g_3}{\partial \gamma_3} + m\frac{\partial g_3}{\partial \varepsilon_2} + n\frac{\partial g_3}{\partial \gamma_1}\right) l + \left(l\frac{\partial e_2}{\partial \gamma_3} + m\frac{\partial e_2}{\partial \varepsilon_2} + n\frac{\partial e_2}{\partial \gamma_1}\right) m \\
& \qquad + \left(l\frac{\partial g_1}{\partial \gamma_3} + m\frac{\partial g_1}{\partial \varepsilon_2} + n\frac{\partial g_1}{\partial \gamma_1}\right) n\Bigg]\gamma_3 \\
& + \Bigg[\left(l\frac{\partial g_3}{\partial \gamma_2} + m\frac{\partial g_3}{\partial \gamma_1} + n\frac{\partial g_3}{\partial \varepsilon_3}\right) l + \left(l\frac{\partial e_2}{\partial \gamma_2} + m\frac{\partial e_2}{\partial \gamma_1} + n\frac{\partial e_2}{\partial \varepsilon_3}\right) m \\
& \qquad + \left(l\frac{\partial g_1}{\partial \gamma_2} + m\frac{\partial g_1}{\partial \gamma_1} + n\frac{\partial g_1}{\partial \varepsilon_3}\right) n\Bigg]\gamma_2.
\end{aligned}\right.$$

Visiblement, ces deux coefficients ne sauraient être égaux entre eux, car l'expression de S_{12} contient un terme en ε_2 et un terme en γ_1 que ne contient pas l'expression de S_{21}, tandis que celle-ci contient un terme en ε_1 et un terme en γ_2 que ne contient pas l'expression de S_{12}. Le coefficient du terme en ε_2 dans S_{12} est égal au coefficient du terme en ε_1 dans S_{21}, en vertu des égalités (45) de la première Partie.

Si donc on se donne l'état d'un milieu, dénué de viscosité, au voisinage d'un certain point et l'orientation d'une onde qui passe par ce point, cette onde peut propager trois directions de la perturbation relative aux composantes de l'élongation; chacune de ces trois directions correspond à une vitesse de propagation déterminée dont la valeur, rapportée à l'état initial du milieu, est une des racines de l'équation

$$(77)\qquad \begin{vmatrix} S_{11}+\mathfrak{N}^2 & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22}+\mathfrak{N}^2 & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33}+\mathfrak{N}^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Les trois directions de perturbation ne sont pas forcément rectangulaires entre elles.

V. — Propagation des ondes au sein d'un milieu dénué de viscosité et très peu déformé.

Laissant absolument quelconque l'état initial du milieu, nous supposerons que les divers points du milieu subissent seulement, à partir de cet état initial, des déplacements très petits et des variations de température très petites.

Dans ce cas, les quantités $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ seront très petites; il en sera de même des quantités Φ, Ψ, X; nous pourrons négliger, devant chacune de ces quantités, le carré de l'une quelconque d'entre elles ou le produit de deux d'entre elles; enfin, les quantités $e_1, e_2, e_3, g_1, g_2, g_3$ seront négligeables devant les dérivées de ces mêmes quantités par rapport aux variables $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, T.

Dès lors, si le milieu est bon conducteur de la chaleur, nous avons, en vertu des égalités (45) de la première Partie et (69), (70), (71), (72), de la présente Partie,

$$\left\{\begin{aligned}
S_{11} &= -\left[l^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_1^2}+m^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial\gamma_3^2}+n^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial\gamma_2^2}+2mn\frac{\partial^2\Phi}{\partial\gamma_2\,\partial\gamma_3}+2l\left(m\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_1\,\partial\gamma_3}+n\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_1\,\partial\gamma_2}\right)\right],\\
S_{22} &= -\left[l^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial\gamma_3^2}+m^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_2^2}+n^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial\gamma_1^2}+2nl\frac{\partial^2\Phi}{\partial\gamma_3\,\partial\gamma_1}+2m\left(n\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_2\,\partial\gamma_1}+l\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_2\,\partial\gamma_3}\right)\right],\\
S_{33} &= -\left[l^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial\gamma_2^2}+m^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial\gamma_1^2}+n^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_3^2}+2lm\frac{\partial^2\Phi}{\partial\gamma_1\,\partial\gamma_2}+2n\left(l\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_3\,\partial\gamma_2}+m\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_3\,\partial\gamma_1}\right)\right],\\
S_{23} = S_{32} &= -\left\{l^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial\gamma_3\,\partial\gamma_2}+m^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_2\,\partial\gamma_1}+n^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial\gamma_1\,\partial\varepsilon_3}+mn\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_2\,\partial\varepsilon_3}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial\gamma_1^2}\right)\right.\\
&\qquad\left.+\,l\left[m\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_2\,\partial\gamma_2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial\gamma_3\,\partial\gamma_1}\right)+n\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_3\,\partial\gamma_3}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial\gamma_1\,\partial\gamma_2}\right)\right]\right\},\\
S_{31} = S_{13} &= -\left\{l^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial\gamma_2\,\partial\varepsilon_1}+m^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial\gamma_1\,\partial\gamma_3}+n^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_3\,\partial\gamma_2}+nl\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_3\,\partial\varepsilon_1}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial\gamma_2^2}\right)\right.\\
&\qquad\left.+\,m\left[n\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_3\,\partial\gamma_3}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial\gamma_1\,\partial\gamma_2}\right)+l\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_1\,\partial\gamma_1}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial\gamma_2\,\partial\gamma_3}\right)\right]\right\},\\
S_{12} = S_{21} &= -\left\{l^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_1\,\partial\gamma_3}+m^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial\gamma_3\,\partial\varepsilon_2}+n^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial\gamma_2\,\partial\gamma_1}+lm\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_1\,\partial\varepsilon_2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial\gamma_3^2}\right)\right.\\
&\qquad\left.+\,n\left[l\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_1\,\partial\gamma_1}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial\gamma_2\,\partial\gamma_3}\right)+m\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_2\,\partial\gamma_2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial\gamma_3\,\partial\gamma_1}\right)\right]\right\}.
\end{aligned}\right.$$

Selon les égalités (74) et (77), *les trois valeurs de $\mathfrak{N}$ sont maintenant les inverses des trois demi-axes de la quadrique*

$$(79)\qquad S_{11}x^2+S_{22}y^2+S_{33}z^2+2S_{23}yz+2S_{31}zx+2S_{12}xy+1=0,$$

et, selon les égalités (74), *les trois directions de perturbation que l'onde peut propager sont les directions de ces mêmes axes, qu'il s'agisse de perturbation d'élongation ou de perturbation de vitesse, et que la perturbation soit rapportée à l'état initial du milieu ou à son état déformé.*

Pour que les trois valeurs de la vitesse de propagation et les trois directions de perturbation auxquelles elles correspondent soient réelles, il faut et il suffit que l'équation (79) représente un ellipsoïde réel.

Or, si nous posons

$$(80)\qquad \left\{\begin{aligned} &E_1 = lx, && E_2 = my, && E_3 = nz,\\ &G_1 = ny+mz, && G_2 = lz+nx, && G_3 = mx+ly, \end{aligned}\right.$$

nous aurons

$$(81)\qquad \begin{aligned} &S_{11}x^2 + S_{22}y^2 + S_{33}z^2 + 2S_{23}yz + 2S_{31}zx + 2S_{12}xy \\ &= -\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_1}E_1 + \frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_2}E_2 + \frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_2}E_3 + \frac{\partial\Phi}{\partial\gamma_1}G_1 + \frac{\partial\Phi}{\partial\gamma_2}G_2 + \frac{\partial\Phi}{\partial\gamma_3}G_3\right)^{(2)}, \end{aligned}$$

(2) représentant un carré symbolique.

Or, quels que soient E_1, E_2, E_3, G_1, G_2, G_3, on a [*Recherches sur l'élasticité,* 3e Partie; égalité (145)]

$$(82)\qquad \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_1}E_1 + \frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_2}E_2 + \frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_3}E_3 + \frac{\partial\Phi}{\partial\gamma_1}G_1 + \frac{\partial\Phi}{\partial\gamma_2}G_2 + \frac{\partial\Phi}{\partial\gamma_3}G_3\right)^{(2)} > 0.$$

Selon (81) et (82), l'*équation* (79) *représente assurément un ellipsoïde réel.*

Les égalités (78) ont été établies en faisant usage de l'égalité (72), partant en supposant que le milieu était conducteur de la chaleur; si le milieu est dénué de conductibilité pour la chaleur, il faut, à l'égalité (72), substituer l'égalité (73); alors les égalités (78) sont remplacées par les suivantes :

$$(83)\qquad \left\{\begin{aligned} S'_{11} = -\Big[& l^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_1^2} + m^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial\gamma_3^2} + n^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial\gamma_2^2} + 2mn\frac{\partial^2\Phi}{\partial\gamma_2\,\partial\gamma_3} + 2l\left(n\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_1\,\partial\gamma_2} + m\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_1\,\partial\gamma_3}\right) \\ & + \frac{T}{Ec}\left(l\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_1\,\partial T} + m\frac{\partial^2\Phi}{\partial\gamma_3\,\partial T} + n\frac{\partial^2\Phi}{\partial\gamma_2\,\partial T}\right)^2\Big], \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ S'_{23} = S'_{32} = -\Big\{ & l^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial\gamma_3\,\partial\gamma_2} + m^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_2\,\partial\gamma_1} + n^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial\gamma_1\,\partial\varepsilon_3} + mn\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_2\,\partial\varepsilon_3} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\gamma_1^2}\right) \\ & + l\left[m\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_2\,\partial\gamma_2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\gamma_3\,\partial\gamma_1}\right) + n\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_3\,\partial\gamma_3} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\gamma_1\,\partial\gamma_2}\right)\right] \\ & + \frac{T}{Ec}\left(l\frac{\partial^2\Phi}{\partial\gamma_3\,\partial T} + m\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_2\,\partial T} + n\frac{\partial^2\Phi}{\partial\gamma_1\,\partial T}\right)\left(l\frac{\partial^2\Phi}{\partial\gamma_2\,\partial T} + m\frac{\partial^2\Phi}{\partial\gamma_1\,\partial T} + n\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_3\,\partial T}\right)\Big\}, \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}\right.$$

En vertu des égalités (80) et (83), l'égalité (81) est remplacée par l'égalité

$$(84)\qquad \begin{aligned} &S'_{11}x^2 + S'_{22}y^2 + S'_{33}z^2 + 2S'_{23}yz + 2S'_{31}zx + 2S'_{12}xy \\ &= -\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_1}E_1 + \frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_2}E_2 + \frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_3}E_3 + \frac{\partial\Phi}{\partial\gamma_1}G_1 + \frac{\partial\Phi}{\partial\gamma_2}G_2 + \frac{\partial\Phi}{\partial\gamma_3}G_3\right)^{(2)} \\ &\quad - \frac{T}{Ec}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_1\,\partial T}E_1 + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_2\,\partial T}E_2 + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_3\,\partial T}E_3 + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\gamma_1\,\partial T}G_1 + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\gamma_2\,\partial T}G_2 + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\gamma_3\,\partial T}G_3\right)^2, \end{aligned}$$

(2) désignant encore un carré symbolique.

La surface représentée par l'équation

$$(85)\qquad S'_{11}x^2 + S'_{22}y^2 + S'_{33}z^2 + 2S'_{23}yz + 2S'_{31}zx + 2S'_{12}xy + 1 = 0,$$

est alors un ellipsoïde réel situé à l'intérieur de l'ellipsoïde que représente l'équation (79).

Considérons un milieu homogène, de température T, dont la déformation très petite, la même en chaque point, soit représentée par les six quantités ε_1, ε_2, ε_3, γ_1, γ_2, γ_3; les six quantités N_x, N_y, N_z, T_x, T_y, T_z ont des valeurs bien déterminées, les mêmes en chaque point.

A cette déformation, donnons une variation homogène définie par les égalités

$$(86)\qquad \begin{cases} \partial\varepsilon_1 = u H_1, & \partial\varepsilon_2 = u H_2, & \partial\varepsilon_3 = u H_3, \\ \partial\gamma_1 = u K_1, & \partial\gamma_2 = u K_2, & \partial\gamma_3 = u K_3, \end{cases}$$

H_1, H_2, H_3, K_1, K_2, K_3 étant six quantités indépendantes de x, y, z et u une quantité infiniment petite qui est aussi indépendante de x, y, z.

Si cette variation laisse invariable la température, elle ne peut conduire à un nouvel état d'équilibre à moins que N_x, N_y, N_z, T_x, T_y, T_z n'éprouvent des variations δN_x, δN_y, δN_z, δT_x, δT_y, δT_z; et l'on a [*Recherches sur l'élasticité*, 3e Partie, égalité (148)]

$$(87)\qquad \begin{aligned} &\delta N_x\,\partial\varepsilon_1 + \delta N_y\,\partial\varepsilon_2 + \delta N_z\,\partial\varepsilon_3 + \delta T_x\,\partial\gamma_1 + \delta T_y\,\partial\gamma_2 + \delta T_z\,\partial\gamma_3 \\ &\quad = -u^2\rho_0\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_1}H_1 + \frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_2}H_2 + \frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_3}H_3 + \frac{\partial\Phi}{\partial\gamma_1}K_1 + \frac{\partial\Phi}{\partial\gamma_2}K_2 + \frac{\partial\Phi}{\partial\gamma_3}K_3\right)^{(2)}. \end{aligned}$$

Si, au contraire, la variation (86) laisse invariable l'entropie de chaque élément, N_x, N_y, N_z, T_x, T_y, T_z éprouvent des variations $\delta' N_x$, $\delta' N_y$, $\delta' N_z$, $\delta' T_x$, $\delta' T_y$, $\delta' T_z$ et l'on a [*Recherches sur l'élasticité*, 3e Partie, égalités (148) et (150)]

$$(88)\qquad \begin{aligned} &\delta' N_x\,\partial\varepsilon_1 + \delta' N_y\,\partial\varepsilon_2 + \delta' N_z\,\partial\varepsilon_3 + \delta' T_x\,\partial\gamma_1 + \delta' T_y\,\partial\gamma_2 + \delta' T_z\,\partial\gamma_3 \\ &\quad = -u^2\rho_0\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_1}H_1 + \frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_2}H_2 + \frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_3}H_3 + \frac{\partial\Phi}{\partial\gamma_1}K_1 + \frac{\partial\Phi}{\partial\gamma_2}K_2 + \frac{\partial\Phi}{\partial\gamma_3}K_3\right)^{(2)} \\ &\quad\quad - u^2\frac{\rho_0 T}{E c}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_1\,\partial T}H_1 + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_2\,\partial T}H_2 + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_3\,\partial T}H_3 + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\gamma_1\,\partial T}K_1 + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\gamma_2\,\partial T}K_2 + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\gamma_3\,\partial T}K_3\right)^2. \end{aligned}$$

Entre les deux ellipsoïdes représentés par les égalités (79) et (84), ces égalités (87) et (88) donnent une remarquable relation.

Prenons un point déterminé de l'onde et, en ce point, une direction dont λ, μ, ν sont les cosinus directeurs; sur cette direction, l'ellipsoïde $\mathcal{E}$, relatif au milieu supposé conducteur de la chaleur, détermine un rayon vecteur R. Si, dans l'équation (79), on remplace x, y, z par λR, μR, νR, cette équation sera vérifiée, en sorte que l'on aura

$$(89)\qquad S_{11}\lambda^2 + S_{22}\mu^2 + S_{33}\nu^2 + 2S_{23}\mu\nu + 2S_{31}\nu\lambda + 2S_{12}\lambda\mu = -\frac{1}{R^2}.$$

D'autre part, si nous posons

$$(90)\qquad \begin{cases} H_1 = l\lambda, & H_2 = m\mu, & H_3 = n\nu, \\ K_1 = m\nu + n\mu, & K_2 = n\lambda + l\nu, & K_3 = l\mu + m\lambda, \end{cases}$$

les égalités (80) deviendront

$$\begin{array}{lll} E_1 = RH_1, & E_2 = RH_2, & E_3 = RH_3, \\ G_1 = RK_1, & G_2 = RK_2, & G_3 = RK_3, \end{array}$$

et l'égalité (81) deviendra

$$(91)\qquad \begin{aligned} &S_{11}\lambda^2 + S_{22}\mu^2 + S_{33}\nu^2 + 2S_{23}\mu\nu + 2S_{31}\nu\lambda + 2S_{12}\lambda\mu \\ &\quad = -\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_1}H_1 + \frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_2}H_2 + \frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_3}H_3 + \frac{\partial\Phi}{\partial\gamma_1}K_1 + \frac{\partial\Phi}{\partial\gamma_2}K_2 + \frac{\partial\Phi}{\partial\gamma_3}K_3\right)^{(2)}. \end{aligned}$$

Les égalités (89) et (91) donneront

$$(92)\qquad \frac{1}{R^2} = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_1}H_1 + \frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_2}H_2 + \frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_3}H_3 + \frac{\partial\Phi}{\partial\gamma_1}K_1 + \frac{\partial\Phi}{\partial\gamma_2}K_2 + \frac{\partial\Phi}{\partial\gamma_3}K_3\right)^{(2)}.$$

Sur la direction considérée, l'ellipsoïde $\mathcal{E}'$, relatif au milieu dénué de conductibilité intercepte un rayon vecteur R'. Si, à partir des égalités (84) et (85), nous instituons un raisonnement semblable à celui qui nous a donné l'égalité (92), nous trouvons l'égalité

$$(93)\qquad \begin{aligned} \frac{1}{R'^2} = {} & \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_1}H_1 + \frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_2}H_2 + \frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_3}H_3 \right. \\ & \quad \left. + \frac{\partial\Phi}{\partial\gamma_1}K_1 + \frac{\partial\Phi}{\partial\gamma_2}K_2 + \frac{\partial\Phi}{\partial\gamma_3}K_3\right)^{(2)} \\ & + \frac{T}{Ec}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_1\,\partial T}H_1 + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_2\,\partial T}H_2 + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_3\,\partial T}H_3 \right. \\ & \quad \left. + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\gamma_1\,\partial T}K_1 + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\gamma_2\,\partial T}K_2 + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\gamma_3\,\partial T}K_3\right)^2. \end{aligned}$$

Les égalités (87), (88), (92) et (93) conduisent alors au théorème suivant :

A chaque point M *de l'onde et à chaque direction* $D(\lambda, \mu, \nu)$ *issue de ce point, on peut attacher une certaine variation* $\delta\varepsilon_1$, $\delta\varepsilon_2$, $\delta\varepsilon_3$, $\delta\gamma_1$, $\delta\gamma_2$, $\delta\gamma_3$ *de la déformation, variation définie par les égalités* (86) *et* (90).

D'autre part, sur la direction D, *l'ellipsoïde* $\mathcal{E}$, *qui convient au milieu conducteur de la chaleur, intercepte un rayon vecteur* R, *tandis que l'ellipsoïde* $\mathcal{E}'$, *qui convient aux milieux dénués de conductibilité, intercepte un rayon vecteur* R'. *On a*

$$(94)\quad \frac{R}{R'} = \sqrt{\frac{\delta' N_x\,\delta\varepsilon_1 + \delta' N_y\,\delta\varepsilon_2 + \delta' N_z\,\delta\varepsilon_3 + \delta' T_x\,\delta\gamma_1 + \delta' T_y\,\delta\gamma_2 + \delta' T_z\,\delta\gamma_3}{\delta N_x\,\delta\varepsilon_1 + \delta N_y\,\delta\varepsilon_2 + \delta N_z\,\delta\varepsilon_3 + \delta T_x\,\delta\gamma_1 + \delta T_y\,\delta\gamma_2 + \delta T_z\,\delta\gamma_3}}.$$

Si l'on se reporte au rôle que les ellipsoïdes $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ jouent dans la détermination de la vitesse de propagation de l'onde, on voit que la proposition qui vient d'être énoncée remplace, dans le cas qui nous occupe, cette proposition vraie pour les fluides :

La vitesse de propagation d'une onde au sein d'un fluide supposé privé de conductibilité est à la vitesse de propagation d'une onde au sein du même fluide supposé conducteur, comme la racine carrée du coefficient de détente adiabatique est à la racine carrée du coefficient de détente isothermique.

Dans le cas des fluides, ce dernier rapport est égal à la racine carrée du rapport de la chaleur spécifique sous pression constante à la chaleur spécifique sous volume constant; peut-on, pour les corps élastiques peu déformés, énoncer une proposition analogue?

Si c est la chaleur spécifique normale et C la chaleur spécifique lorsqu'on maintient constantes les six quantités N_x, N_y, N_z, T_x, T_y, T_z, on a [*Recherches sur l'élasticité*, 3e Partie, égalité (158)]

$$(95)\qquad \frac{C}{c} = \frac{\delta' N_x \frac{d\varepsilon_1}{dT} + \delta' N_y \frac{d\varepsilon_2}{dT} + \delta' N_z \frac{d\varepsilon_3}{dT} + \delta' T_x \frac{d\gamma_1}{dT} + \delta' T_y \frac{d\gamma_2}{dT} + \delta' T_z \frac{d\gamma_3}{dT}}{\delta N_x \frac{d\varepsilon_1}{dT} + \delta N_y \frac{d\varepsilon_2}{dT} + \delta N_z \frac{d\varepsilon_3}{dT} + \delta T_x \frac{d\gamma_1}{dT} + \delta T_y \frac{d\gamma_2}{dT} + \delta T_z \frac{d\gamma_3}{dT}}.$$

Le second membre de cette égalité (95) n'est pas, en général, le carré du second membre de l'égalité (94); c'est seulement, en effet, dans des cas exceptionnels que les quantités $\delta\varepsilon_1$, $\delta\varepsilon_2$, $\delta\varepsilon_3$, $\delta\gamma_1$, $\delta\gamma_2$, $\delta\gamma_3$, définies par les égalités (86) et (90), seront respectivement proportionnelles aux six quantités $\frac{d\varepsilon_1}{dT}, \frac{d\varepsilon_2}{dT}, \frac{d\varepsilon_3}{dT}, \frac{d\gamma_1}{dT}, \frac{d\gamma_2}{dT}, \frac{d\gamma_3}{dT}$.

Le théorème de Laplace ne s'étend donc pas aux milieux élastiques peu déformés.

VI. — Propagation des ondes au sein d'un milieu vitreux très peu déformé.

Ce qui a été dit au paragraphe précédent a trait à un milieu très peu déformé quelconque; supposons maintenant que le milieu soit vitreux.

En vertu de l'égalité [*Recherches sur l'élasticité*, 2e Partie, égalité (6)],

$$(96)\quad \begin{aligned} \Phi = {} & \varphi_0(T) + \varphi_1(T)(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) \\ & + \frac{\Lambda(T)}{2\rho_0}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)^2 + \frac{M(T)}{2\rho_0}(2\varepsilon_1^2 + 2\varepsilon_2^2 + 2\varepsilon_3^2 + \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2), \end{aligned}$$

on a

$$(97)\quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_1^2} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_2^2} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_3^2} = \frac{\Lambda(T) + 2M(T)}{\rho_0}, \\ & \frac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_2\,\partial\varepsilon_3} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_3\,\partial\varepsilon_1} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_1\,\partial\varepsilon_2} = \frac{\Lambda(T)}{\rho_0}, \\ & \frac{\partial^2\Phi}{\partial\gamma_1^2} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial\gamma_2^2} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial\gamma_3^2} = \frac{M(T)}{\rho_0}, \\ & \frac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_1\,\partial T} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_2\,\partial T} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_3\,\partial T} = \frac{d\varphi_1(T)}{dT}. \end{aligned} \right.$$

Les autres dérivées secondes de Φ sont nulles ou infiniment petites.

Ces égalités (97), jointes aux égalités (79), (80), (81), montrent que l'équation de l'ellipsoïde $\mathcal{E}$ peut s'écrire

$$(98)\quad \begin{aligned} & \frac{\Lambda(T)}{\rho_0}(lx + my + nz)^2 \\ & \quad + \frac{M(T)}{\rho_0}[2l^2x^2 + 2m^2y^2 + 2n^2z^2 + (ny + mz)^2 \\ & \qquad + (lz + nx)^2 + (mx + ly)^2] = 1. \end{aligned}$$

Les mêmes égalités (97), jointes aux égalités (80), (84), (85), montrent que l'équation de l'ellipsoïde $\mathcal{E}'$ peut s'écrire

$$(99)\quad \left\{\frac{A(T)}{\rho_0} + \frac{T}{Ec}\left[\frac{d\varphi_1(T)}{dT}\right]^2\right\}(lx+my+nz)^2 + \frac{M(T)}{\rho_0}\left[2l^2x^2+2m^2y^2+2n^2z^2+(ny+mz)^2 + (lz+nx)^2+(mx+ly)^2\right]=1.$$

Prenons pour axe des z la normale à l'onde au point considéré, ce qui nous donnera

$$l=0, \qquad m=0, \qquad n=1.$$

L'équation (98) deviendra

$$(100)\quad \frac{A(T)+2M(T)}{\rho_0}z^2+\frac{M(T)}{\rho_0}(x^2+y^2)=1,$$

tandis que l'équation (99) deviendra

$$(101)\quad \frac{A(T)+\dfrac{T\rho_0}{Ec}\left[\dfrac{d\varphi_1(T)}{dT}\right]^2+2M(T)}{\rho_0}z^2+\frac{M(T)}{\rho_0}(x^2+y^2)=1.$$

Ces deux équations équivalent au théorème suivant :

Au sein d'un milieu vitreux très peu déformé, l'ellipsoïde $\mathcal{E}$ et l'ellipsoïde $\mathcal{E}'$ sont tous deux de révolution autour de la normale à l'onde; en tous deux, le rayon de l'équateur a pour valeur

$$\sqrt{\frac{\rho_0}{M(T)}}.$$

En l'ellipsoïde $\mathcal{E}$, le demi-axe de révolution a pour longueur

$$\sqrt{\frac{\rho_0}{A(T)+2M(T)}},$$

tandis qu'en l'ellipsoïde $\mathcal{E}'$, ce même demi-axe a pour longueur

$$\sqrt{\frac{\rho_0}{A(T)+\dfrac{T\rho_0}{Ec}\left[\dfrac{d\varphi_1(T)}{dT}\right]^2+2M(T)}}.$$

La perturbation qu'une onde persistante peut propager est, ou exclusivement transversale, ou exclusivement longitudinale.

Que le milieu soit ou non conducteur de la chaleur, une perturbation transversale se propage avec une vitesse

$$\mathfrak{N} = \sqrt{\frac{M(T)}{\rho_0}}. \tag{102}$$

Au sein d'un milieu conducteur, une perturbation longitudinale se propage avec une vitesse

$$\mathfrak{N} = \sqrt{\frac{\Lambda(T) + 2M(T)}{\rho_0}}, \tag{103}$$

tandis qu'au sein d'un milieu non conducteur de la chaleur, elle se propage avec une vitesse

$$\mathfrak{N}' = \sqrt{\frac{\Lambda(T) + \frac{T\rho_0}{Ec}\left[\frac{d\varphi_1(T)}{dT}\right]^2 + 2M(T)}{\rho_0}}. \tag{104}$$

Ces égalités (102), (103), (104) avaient été obtenues directement [*Recherches sur l'élasticité*, 2^e Partie, égalités (80), (76), (101)].

Pour un milieu vitreux très peu déformé, nous savons que l'on a [*Recherches sur l'élasticité*, 3^e Partie, égalité (164)]

$$\frac{C}{c} = \frac{3\Lambda(T) + \frac{3T\rho_0}{Ec}\left[\frac{d\varphi_1(T)}{dT}\right]^2 + 2M(T)}{3\Lambda(T) + 2M(T)}. \tag{105}$$

La comparaison des égalités (103), (104), (105) montre que l'on n'a pas

$$\frac{\mathfrak{N}'^2}{\mathfrak{N}^2} = \frac{C}{c},$$

à moins que l'on ait l'égalité

$$M(T) = 0,$$

qui caractérise les fluides.

Ainsi, *en général, la correction de Laplace ne peut servir à calculer la vitesse de propagation des perturbations longitudinales au sein d'un milieu vitreux, peu déformé, supposé dénué de conductibilité, lorsqu'on connaît la valeur de cette vitesse pour le même milieu, supposé doué de conductibilité. Cette correction ne peut être employée que si le milieu est fluide.*

CHAPITRE II.

THÉORIE DES ONDES AU SEIN DES MILIEUX DOUÉS DE VISCOSITÉ.

I. — Des ondes du premier ordre par rapport aux composantes de la vitesse, au sein des milieux vitreux doués de viscosité.

Supposons d'abord que l'onde *se propage* au sein du milieu considéré :

$$\mathfrak{N} \gtrless 0. \tag{106}$$

D'après ce que nous avons vu en la troisième partie de ces *Recherches* (Chap. II, § I), l'onde ne peut être d'ordre inférieur au second par rapport aux composantes ξ, η, ζ du déplacement; elle est aussi du premier ordre par rapport à la densité ρ; d'après ce qui a été vu au Paragraphe II du même Chapitre, elle est au moins du premier ordre par rapport à la température T.

Comme dans le cas précédent, le milieu est soumis exclusivement à des actions extérieures qui sont newtoniennes. Comme dans le cas précédent, aussi, nous désignerons par :

Σ la surface d'onde dans l'espace des a, b, c;
l, m, n les cosinus directeurs de sa normale;
S la surface d'onde dans l'espace des x, y, z;
α, β, γ les cosinus directeurs de sa normale.

L'onde étant du second ordre par rapport aux composantes ξ, η, ζ du déplacement, on peut écrire les égalités suivantes, en tout point de l'onde Σ :

$$
(107) \quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{1}{l}\left[\frac{\partial^2\xi}{\partial a\,\partial t}\right]_1^2 &= \frac{1}{m}\left[\frac{\partial^2\xi}{\partial b\,\partial t}\right]_1^2 = \frac{1}{n}\left[\frac{\partial^2\xi}{\partial c\,\partial t}\right]_1^2 = -\mathcal{M}\mathcal{F},\\
\frac{1}{l}\left[\frac{\partial^2\eta}{\partial a\,\partial t}\right]_1^2 &= \frac{1}{m}\left[\frac{\partial^2\eta}{\partial b\,\partial t}\right]_1^2 = \frac{1}{n}\left[\frac{\partial^2\eta}{\partial c\,\partial t}\right]_1^2 = -\mathcal{M}\mathcal{G},\\
\frac{1}{l}\left[\frac{\partial^2\zeta}{\partial a\,\partial t}\right]_1^2 &= \frac{1}{m}\left[\frac{\partial^2\zeta}{\partial b\,\partial t}\right]_1^2 = \frac{1}{n}\left[\frac{\partial^2\zeta}{\partial c\,\partial t}\right]_1^2 = -\mathcal{M}\mathcal{H}.
\end{aligned}\right.
$$

Les égalités (26), (27), (28) de la première Partie et (1) de la quatrième Partie donnent alors, en tout point de la surface S,

$$
(108) \quad \left\{
\begin{aligned}
&[D'_1]_1^2 = -K\mathcal{M}\alpha\mathcal{F}, \qquad [D'_2]_1^2 = -K\mathcal{M}\beta\mathcal{G}, \qquad [D'_3]_1^2 = -K\mathcal{M}\gamma\mathcal{H},\\
&[G'_1]_1^2 = -K\mathcal{M}(\beta\mathcal{H} + \gamma\mathcal{G}),\\
&[G'_2]_1^2 = -K\mathcal{M}(\gamma\mathcal{F} + \alpha\mathcal{H}),\\
&[G'_3]_1^2 = -K\mathcal{M}(\alpha\mathcal{G} + \beta\mathcal{F}).
\end{aligned}\right.
$$

Moyennant ces égalités (108), les égalités (33) de la première Partie donnent

$$
(109) \quad \left\{
\begin{aligned}
\mathfrak{d}_1 = [\Delta'_1]_1^2 &= -K\mathcal{M}\,(\alpha\mathcal{X}_1 + \beta\mathcal{Y}_1 + \gamma\mathcal{Z}_1)(\mathcal{X}_1\mathcal{F} + \mathcal{Y}_1\mathcal{G} + \mathcal{Z}_1\mathcal{H}),\\
\mathfrak{d}_2 = [\Delta'_2]_1^2 &= -K\mathcal{M}\,(\alpha\mathcal{X}_2 + \beta\mathcal{Y}_2 + \gamma\mathcal{Z}_2)(\mathcal{X}_2\mathcal{F} + \mathcal{Y}_2\mathcal{G} + \mathcal{Z}_2\mathcal{H}),\\
\mathfrak{d}_3 = [\Delta'_3]_1^2 &= -K\mathcal{M}\,(\alpha\mathcal{X}_3 + \beta\mathcal{Y}_3 + \gamma\mathcal{Z}_3)(\mathcal{X}_3\mathcal{F} + \mathcal{Y}_3\mathcal{G} + \mathcal{Z}_3\mathcal{H}),\\
\mathfrak{g}_1 = [\Gamma'_1]_1^2 &= -K\mathcal{M}[\,(\alpha\mathcal{X}_2 + \beta\mathcal{Y}_2 + \gamma\mathcal{Z}_2)(\mathcal{X}_3\mathcal{F} + \mathcal{Y}_3\mathcal{G} + \mathcal{Z}_3\mathcal{H})\\
&\qquad + (\alpha\mathcal{X}_3 + \beta\mathcal{Y}_3 + \gamma\mathcal{Z}_3)(\mathcal{X}_2\mathcal{F} + \mathcal{Y}_2\mathcal{G} + \mathcal{Z}_2\mathcal{H})],\\
\mathfrak{g}_2 = [\Gamma'_2]_1^2 &= -K\mathcal{M}[\,(\alpha\mathcal{X}_3 + \beta\mathcal{Y}_3 + \gamma\mathcal{Z}_3)(\mathcal{X}_1\mathcal{F} + \mathcal{Y}_1\mathcal{G} + \mathcal{Z}_1\mathcal{H})\\
&\qquad + (\alpha\mathcal{X}_1 + \beta\mathcal{Y}_1 + \gamma\mathcal{Z}_1)(\mathcal{X}_3\mathcal{F} + \mathcal{Y}_3\mathcal{G} + \mathcal{Z}_3\mathcal{H})],\\
\mathfrak{g}_3 = [\Gamma'_3]_1^2 &= -K\mathcal{M}[\,(\alpha\mathcal{X}_1 + \beta\mathcal{Y}_1 + \gamma\mathcal{Z}_1)(\mathcal{X}_2\mathcal{F} + \mathcal{Y}_2\mathcal{G} + \mathcal{Z}_2\mathcal{H})\\
&\qquad + (\alpha\mathcal{X}_2 + \beta\mathcal{Y}_2 + \gamma\mathcal{Z}_2)(\mathcal{X}_1\mathcal{F} + \mathcal{Y}_1\mathcal{G} + \mathcal{Z}_1\mathcal{H})].
\end{aligned}\right.
$$

Ce que nous venons de dire, joint aux égalités (62) de la première Partie, montre que les quantités N_x, N_y, N_z, T_x, T_y, T_z varient d'une manière continue au travers de la surface S. Mais il n'en est pas de même des quantités ν_x, ν_y, ν_z, τ_x, τ_y, τ_z données par les égalités (77) de la première Partie.

Désignons par $\mathfrak{f}$ ce que devient la fonction dissipative $\mathcal{F}$ lorsqu'on y remplace

$$\Delta'_1, \quad \Delta'_2, \quad \Delta'_3, \quad \Gamma'_1, \quad \Gamma'_2, \quad \Gamma'_3 \quad \cdot$$

par

$$\mathfrak{d}_1, \quad \mathfrak{d}_2, \quad \mathfrak{d}_3, \quad \mathfrak{g}_1, \quad \mathfrak{g}_2, \quad \mathfrak{g}_3.$$

Il est facile de voir que les expressions de

$$[\nu_x]_1^2, \quad [\nu_y]_1^2, \quad [\nu_z]_1^2, \quad [\tau_x]_1^2, \quad [\tau_y]_1^2, \quad [\tau_z]_1^2$$

se tireront des expressions (77) de la première Partie qui donnent

$$\nu_x, \quad \nu_y, \quad \nu_z, \quad \tau_x, \quad \tau_y, \quad \tau_z$$

en remplaçant $\mathfrak{F}$ par $\mathfrak{f}$.

En raisonnant comme nous l'avons fait en la 1re série, deuxième Partie, de nos *Recherches sur l'Hydrodynamique* [Chapitre III, § 1, égalités (137)], nous verrons que l'on doit avoir, en tout point de la surface S,

$$(110) \quad \begin{cases} [\nu_x]_1^2\,\alpha + [\tau_z]_1^2\,\beta + [\tau_y]_1^2\,\gamma = 0, \\ [\tau_z]_1^2\,\alpha + [\nu_y]_1^2\,\beta + [\tau_x]_1^2\,\gamma = 0, \\ [\tau_y]_1^2\,\alpha + [\tau_x]_1^2\,\beta + [\nu_z]_1^2\,\gamma = 0. \end{cases}$$

D'après ce qui vient d'être dit, ces égalités peuvent s'écrire :

$$(111) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial\mathfrak{f}}{\partial\mathfrak{d}_1}(\mathfrak{X}_1\alpha + \mathfrak{Y}_1\beta + \mathfrak{Z}_1\gamma)\mathfrak{X}_1 + \dfrac{\partial\mathfrak{f}}{\partial\mathfrak{d}_2}(\mathfrak{X}_2\alpha + \mathfrak{Y}_2\beta + \mathfrak{Z}_2\gamma)\mathfrak{X}_2 \\ \qquad\qquad + \dfrac{\partial\mathfrak{f}}{\partial\mathfrak{d}_3}(\mathfrak{X}_3\alpha + \mathfrak{Y}_3\beta + \mathfrak{Z}_3\gamma)\mathfrak{X}_3 \\ \quad + \dfrac{\partial\mathfrak{f}}{\partial\mathfrak{g}_1}[(\mathfrak{X}_2\alpha + \mathfrak{Y}_2\beta + \mathfrak{Z}_2\gamma)\mathfrak{X}_3 + (\mathfrak{X}_3\alpha + \mathfrak{Y}_3\alpha + \mathfrak{Z}_3\gamma)\mathfrak{X}_2] \\ \quad + \dfrac{\partial\mathfrak{f}}{\partial\mathfrak{g}_2}[(\mathfrak{X}_3\alpha + \mathfrak{Y}_3\beta + \mathfrak{Z}_3\gamma)\mathfrak{X}_1 + (\mathfrak{X}_1\alpha + \mathfrak{Y}_1\beta + \mathfrak{Z}_1\gamma)\mathfrak{X}_3] \\ \quad + \dfrac{\partial\mathfrak{f}}{\partial\mathfrak{g}_3}[(\mathfrak{X}_1\alpha + \mathfrak{Y}_1\beta + \mathfrak{Z}_1\gamma)\mathfrak{X}_2 + (\mathfrak{X}_2\alpha + \mathfrak{Y}_2\beta + \mathfrak{Z}_2\gamma)\mathfrak{X}_1] = 0, \\ \qquad\qquad \dfrac{\partial\mathfrak{f}}{\partial\mathfrak{d}_1}(\mathfrak{X}_1\alpha + \mathfrak{Y}_1\beta + \mathfrak{Z}_1\gamma)\mathfrak{Y}_1 + \ldots = 0, \\ \qquad\qquad \dfrac{\partial\mathfrak{f}}{\partial\mathfrak{d}_1}(\mathfrak{X}_1\alpha + \mathfrak{Y}_1\beta + \mathfrak{Z}_1\gamma)\mathfrak{Z}_1 + \ldots = 0. \end{cases}$$

Multiplions respectivement ces égalités par $\mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{Y}_1$, $\mathfrak{Z}_1$ et ajoutons membre à membre les résultats obtenus ; nous trouvons la première des égalités

$$
(112)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \mathfrak{d}_1}(\mathcal{X}_1\alpha+\mathcal{Y}_1\beta+\mathcal{Z}_1\gamma)+\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \mathfrak{g}_3}(\mathcal{X}_2\alpha+\mathcal{Y}_2\beta+\mathcal{Z}_2\gamma)+\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \mathfrak{g}_2}(\mathcal{X}_3\alpha+\mathcal{Y}_3\beta+\mathcal{Z}_3\gamma)=0,\\
&\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \mathfrak{g}_3}(\mathcal{X}_1\alpha+\mathcal{Y}_1\beta+\mathcal{Z}_1\gamma)+\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \mathfrak{d}_2}(\mathcal{X}_2\alpha+\mathcal{Y}_2\beta+\mathcal{Z}_2\gamma)+\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \mathfrak{g}_1}(\mathcal{X}_3\alpha+\mathcal{Y}_3\beta+\mathcal{Z}_3\gamma)=0,\\
&\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \mathfrak{g}_2}(\mathcal{X}_1\alpha+\mathcal{Y}_1\beta+\mathcal{Z}_1\gamma)+\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \mathfrak{g}_1}(\mathcal{X}_2\alpha+\mathcal{Y}_2\beta+\mathcal{Z}_2\gamma)+\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \mathfrak{d}_3}(\mathcal{X}_3\alpha+\mathcal{Y}_3\beta+\mathcal{Z}_3\gamma)=0.
\end{aligned}
\right.
$$

Les deux dernières s'obtiennent d'une manière analogue.

Multiplions respectivement les égalités (112) par

$$
\begin{aligned}
&-\mathrm{K}\,\mathcal{N}(\mathcal{X}_1\mathcal{F}+\mathcal{Y}_1\mathcal{G}+\mathcal{Z}_1\mathcal{H}),\\
&-\mathrm{K}\,\mathcal{N}(\mathcal{X}_2\mathcal{F}+\mathcal{Y}_2\mathcal{G}+\mathcal{Z}_2\mathcal{H}),\\
&-\mathrm{K}\,\mathcal{N}(\mathcal{X}_3\mathcal{F}+\mathcal{Y}_3\mathcal{G}+\mathcal{Z}_3\mathcal{H})
\end{aligned}
$$

et ajoutons membre à membre les résultats obtenus, en tenant compte des égalités (109); nous trouvons l'égalité

$$
(113)\qquad \mathfrak{d}_1\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \mathfrak{d}_1}+\mathfrak{d}_2\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \mathfrak{d}_2}+\mathfrak{d}_3\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \mathfrak{d}_3}+\mathfrak{g}_1\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \mathfrak{g}_1}+\mathfrak{g}_2\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \mathfrak{g}_2}+\mathfrak{g}_3\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \mathfrak{g}_3}=0.
$$

Mais la fonction $\mathfrak{f}$ est homogène et du second degré en $\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{d}_2$, $\mathfrak{d}_3$, $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$, $\mathfrak{g}_3$; l'égalité (113) équivaut donc à l'égalité

$$
(114)\qquad \mathfrak{f}=0.
$$

La forme $\mathcal{F}$ est une forme définie positive en Δ'_1, Δ'_2, Δ'_3, Γ'_1, Γ'_2, Γ'_3; partant, la forme $\mathfrak{f}$ est une forme définie positive en $\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{d}_2$, $\mathfrak{d}_3$, $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$, $\mathfrak{g}_3$ et l'égalité (114) équivaut aux égalités

$$
(115)\qquad \mathfrak{d}_1=0,\quad \mathfrak{d}_2=0,\quad \mathfrak{d}_3=0,\quad \mathfrak{g}_1=0,\quad \mathfrak{g}_2=0,\quad \mathfrak{g}_3=0.
$$

Ces égalités (115) nous permettent évidemment d'écrire

$$
2\mathfrak{d}_1(\mathcal{X}_1\alpha+\mathcal{Y}_1\beta+\mathcal{Z}_1\gamma)+\mathfrak{g}_3(\mathcal{X}_2\alpha+\mathcal{Y}_2\beta+\mathcal{Z}_2\gamma)+\mathfrak{g}_2(\mathcal{X}_3\alpha+\mathcal{Y}_3\beta+\mathcal{Z}_3\gamma)=0.
$$

Dans cette égalité, remplaçons $\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{g}_3$, $\mathfrak{g}_2$ par leurs valeurs tirées des égalités (109); en observant que

$$
(\mathcal{X}_1\alpha+\mathcal{Y}_1\beta+\mathcal{Z}_1\gamma)^2+(\mathcal{X}_2\alpha+\mathcal{Y}_2\beta+\mathcal{Z}_2\gamma)^2+(\mathcal{X}_3\alpha+\mathcal{Y}_3\beta+\mathcal{Z}_3\gamma)^2=1,
$$

nous trouvons l'égalité

$$
\begin{aligned}
(116)\quad -\mathrm{K}\,\mathfrak{M}(\mathfrak{X}_1\mathfrak{F}+\mathfrak{Y}_1\mathfrak{G}+\mathfrak{Z}_1\mathfrak{H})& \\
-\mathrm{K}\,\mathfrak{M}(\mathfrak{X}_1\alpha+\mathfrak{Y}_1\beta+\mathfrak{Z}_1\gamma)\big[&(\mathfrak{X}_1\alpha+\mathfrak{Y}_1\beta+\mathfrak{Z}_1\gamma)(\mathfrak{X}_1\mathfrak{F}+\mathfrak{Y}_1\mathfrak{G}+\mathfrak{Z}_1\mathfrak{H}) \\
&+(\mathfrak{X}_2\alpha+\mathfrak{Y}_2\beta+\mathfrak{Z}_2\gamma)(\mathfrak{X}_2\mathfrak{F}+\mathfrak{Y}_2\mathfrak{G}+\mathfrak{Z}_2\mathfrak{H}) \\
&+(\mathfrak{X}_3\alpha+\mathfrak{Y}_3\beta+\mathfrak{Z}_3\gamma)(\mathfrak{X}_3\mathfrak{F}+\mathfrak{Y}_3\mathfrak{G}+\mathfrak{Z}_3\mathfrak{H})\big]=0.
\end{aligned}
$$

Selon les égalités (109), la quantité entre crochets peut s'écrire

$$\mathfrak{d}_1+\mathfrak{d}_2+\mathfrak{d}_3$$

et elle est nulle par les égalités (115). En tenant compte de l'inégalité (116), nous trouvons la première des égalités

$$
(117)\qquad \left\{
\begin{aligned}
\mathfrak{X}_1\mathfrak{F}+\mathfrak{Y}_1\mathfrak{G}+\mathfrak{Z}_1\mathfrak{H}&=0,\\
\mathfrak{X}_2\mathfrak{F}+\mathfrak{Y}_2\mathfrak{G}+\mathfrak{Z}_2\mathfrak{H}&=0,\\
\mathfrak{X}_3\mathfrak{F}+\mathfrak{Y}_3\mathfrak{G}+\mathfrak{Z}_3\mathfrak{H}&=0.
\end{aligned}\right.
$$

Les deux autres s'obtiennent d'une manière analogue. Multiplions respectivement ces égalités (117) par $\mathfrak{X}_1, \mathfrak{Y}_1, \mathfrak{Z}_1$ en observant que

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{X}_1^2\ +\ \mathfrak{Y}_1^2\ +\ \mathfrak{Z}_1^2\ &=1,\\
\mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_2+\mathfrak{Y}_1\mathfrak{Y}_2+\mathfrak{Z}_1\mathfrak{Z}_2&=0,\\
\mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_3+\mathfrak{Y}_1\mathfrak{Y}_3+\mathfrak{Z}_1\mathfrak{Z}_3&=0,
\end{aligned}
$$

et nous trouvons la première des égalités

$$(118)\qquad \mathfrak{F}=0,\qquad \mathfrak{G}=0,\qquad \mathfrak{H}=0.$$

Les deux autres s'établissent d'une manière analogue.

Ces résultats, rapprochés de l'inégalité (106) et des indications générales données en la seconde Partie, Chapitre II, § 1 et 2, conduisent au théorème suivant :

Au sein d'un milieu vitreux, doué de viscosité, une onde du premier ordre par rapport aux composantes u, v, w de la vitesse ne peut se propager; les seules ondes de cet ordre qui puissent persister dans un tel milieu séparent constamment les deux mêmes portions du milieu ; elles sont alors surfaces de discontinuité pour la densité ρ *et pour les six quantités* N_i, T_i; *si le milieu est mauvais conducteur de la chaleur, elles sont également surfaces de discontinuité pour la température* T.

II. — Des ondes du second ordre par rapport aux composantes de la vitesse dans les milieux vitreux doués de viscosité.

Admettons que nous ayons encore l'inégalité (106).

L'onde, du second ordre par rapport à u, v, w, sera, selon ce que nous avons vu (*Recherches sur l'Élasticité*, 2e Partie, Chap. II, § 1 et 2), du troisième ordre par rapport à ξ, η, ζ, du second ordre par rapport à ρ, et au moins du second ordre par rapport à T. Selon les égalités (62) de la première Partie, elle sera du second ordre par rapport aux six quantités N_i, T_i. Les équations (82) de la première Partie exigeront alors que l'on ait, en tout point de la surface S,

$$(119)\quad \left\{\begin{aligned} &\left[\frac{\partial\nu_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_z}{\partial y}+\frac{\partial\tau_y}{\partial z}\right]_1^2=0,\\ &\left[\frac{\partial\tau_z}{\partial x}+\frac{\partial\nu_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_x}{\partial z}\right]_1^2=0,\\ &\left[\frac{\partial\tau_y}{\partial x}+\frac{\partial\tau_x}{\partial y}+\frac{\partial\nu_z}{\partial z}\right]_1^2=0. \end{aligned}\right.$$

Formons explicitement ces égalités.

En chaque point de la surface Σ il existe un vecteur $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ tel que

$$(120)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{l^2}\left[\frac{\partial^3\xi}{\partial a^2\,\partial t}\right]_1^2=\frac{1}{lm}\left[\frac{\partial^3\xi}{\partial a\,\partial b\,\partial t}\right]_1^2=\ldots=\mathfrak{N}^2\mathcal{F},\\ &\frac{1}{l^2}\left[\frac{\partial^3\eta}{\partial a^2\,\partial t}\right]_1^2=\frac{1}{lm}\left[\frac{\partial^3\eta}{\partial a\,\partial b\,\partial t}\right]_1^2=\ldots=\mathfrak{N}^2\mathcal{G},\\ &\frac{1}{l^2}\left[\frac{\partial^3\zeta}{\partial a^2\,\partial t}\right]_1^2=\frac{1}{lm}\left[\frac{\partial^3\zeta}{\partial a\,\partial b\,\partial t}\right]_1^2=\ldots=\mathfrak{N}^2\mathcal{H}. \end{aligned}\right.$$

Nous avons

$$\frac{\partial D'_1}{\partial x}=\frac{\partial D'_1}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial x}+\frac{\partial D'_1}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial x}+\frac{\partial D'_1}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial x}$$

et, en vertu des égalités (24) de la première Partie,

$$\begin{aligned}\left[\frac{\partial D'_1}{\partial x}\right]_1^2=&\left(\frac{\partial a}{\partial x}\right)^2\left[\frac{\partial^3\xi}{\partial a^2\,\partial t}\right]_1^2+\left(\frac{\partial b}{\partial x}\right)^2\left[\frac{\partial^3\xi}{\partial b^2\,\partial t}\right]_1^2+\left(\frac{\partial c}{\partial x}\right)^2\left[\frac{\partial^3\xi}{\partial c^2\,\partial t}\right]_1^2\\ &+2\frac{\partial b}{\partial x}\frac{\partial c}{\partial x}\left[\frac{\partial^3\xi}{\partial b\,\partial c\,\partial t}\right]_1^2+2\frac{\partial c}{\partial x}\frac{\partial a}{\partial x}\left[\frac{\partial^3\xi}{\partial c\,\partial a\,\partial t}\right]_1^2+2\frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial b}{\partial x}\left[\frac{\partial^3\xi}{\partial a\,\partial b\,\partial t}\right]_1^2.\end{aligned}$$

En vertu des égalités (1) et (120) cette égalité devient la première des égalités

$$
(121)\quad
\left\{
\begin{aligned}
&\left[\frac{\partial D'_1}{\partial x}\right]_1^2 = K^2\mathcal{M}^2\alpha^2\mathcal{F}, \qquad \left[\frac{\partial D'_1}{\partial y}\right]_1^2 = K^2\mathcal{M}^2\beta\alpha\mathcal{F}, \qquad \left[\frac{\partial D'_1}{\partial z}\right]_1^2 = K^2\mathcal{M}^2\gamma\alpha\mathcal{F},\\
&\left[\frac{\partial D'_2}{\partial x}\right]_1^2 = K^2\mathcal{M}^2\alpha\beta\mathcal{G}, \qquad \ldots;\\
&\qquad\qquad\qquad \left[\frac{\partial G'_1}{\partial x}\right]_1^2 = K^2\mathcal{M}^2\alpha(\beta\mathcal{H}+\gamma\mathcal{G}),\\
&\qquad\qquad\qquad \left[\frac{\partial G'_1}{\partial y}\right]_1^2 = K^2\mathcal{M}^2\beta(\beta\mathcal{H}+\gamma\mathcal{G}),\\
&\qquad\qquad\qquad \left[\frac{\partial G'_1}{\partial z}\right]_1^2 = K^2\mathcal{M}^2\gamma(\beta\mathcal{H}+\gamma\mathcal{G}),\\
&\qquad\qquad\qquad \left[\frac{\partial G'_2}{\partial x}\right]_1^2 = K^2\mathcal{M}^2\alpha(\gamma\mathcal{F}+\alpha\mathcal{H}),\\
&\qquad\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
\right.
$$

Les autres s'établissent d'une manière analogue.

Les égalités (33) de la première Partie donnent

$$
(122)\quad
\left\{
\begin{aligned}
\left[\frac{\partial \Delta'_1}{\partial x}\right]_1^2 = {} & \mathcal{X}_1^2\left[\frac{\partial D'_1}{\partial x}\right]_1^2 + \mathcal{Y}_1^2\left[\frac{\partial D'_2}{\partial x}\right]_1^2 + \mathcal{Z}_1^2\left[\frac{\partial D'_3}{\partial x}\right]_1^2\\
& + \mathcal{Y}_1\mathcal{Z}_1\left[\frac{\partial G'_1}{\partial x}\right]_1^2 + \mathcal{Z}_1\mathcal{X}_1\left[\frac{\partial G'_2}{\partial x}\right]_1^2 + \mathcal{X}_1\mathcal{Y}_1\left[\frac{\partial G'_3}{\partial x}\right]_1^2,\\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
\right.
$$

Posons

$$
(123)\quad
\left\{
\begin{aligned}
\mathfrak{D}_1 &= (\alpha\mathcal{X}_1+\beta\mathcal{Y}_1+\gamma\mathcal{Z}_1)(\mathcal{X}_1\mathcal{F}+\mathcal{Y}_1\mathcal{G}+\mathcal{Z}_1\mathcal{H}),\\
\mathfrak{D}_2 &= (\alpha\mathcal{X}_2+\beta\mathcal{Y}_2+\gamma\mathcal{Z}_2)(\mathcal{X}_2\mathcal{F}+\mathcal{Y}_2\mathcal{G}+\mathcal{Z}_2\mathcal{H}),\\
\mathfrak{D}_3 &= (\alpha\mathcal{X}_3+\beta\mathcal{Y}_3+\gamma\mathcal{Z}_3)(\mathcal{X}_3\mathcal{F}+\mathcal{Y}_3\mathcal{G}+\mathcal{Z}_3\mathcal{H}),\\
\mathfrak{G}_1 &= \quad(\alpha\mathcal{X}_2+\beta\mathcal{Y}_2+\gamma\mathcal{Z}_2)(\mathcal{X}_3\mathcal{F}+\mathcal{Y}_3\mathcal{G}+\mathcal{Z}_3\mathcal{H})\\
&\quad + (\alpha\mathcal{X}_3+\beta\mathcal{Y}_3+\gamma\mathcal{Z}_3)(\mathcal{X}_2\mathcal{F}+\mathcal{Y}_2\mathcal{G}+\mathcal{Z}_2\mathcal{H}),\\
\mathfrak{G}_2 &= \quad(\alpha\mathcal{X}_3+\beta\mathcal{Y}_3+\gamma\mathcal{Z}_3)(\mathcal{X}_1\mathcal{F}+\mathcal{Y}_1\mathcal{G}+\mathcal{Z}_1\mathcal{H})\\
&\quad + (\alpha\mathcal{X}_1+\beta\mathcal{Y}_1+\gamma\mathcal{Z}_1)(\mathcal{X}_3\mathcal{F}+\mathcal{Y}_3\mathcal{G}+\mathcal{Z}_3\mathcal{H}),\\
\mathfrak{G}_3 &= \quad(\alpha\mathcal{X}_1+\beta\mathcal{Y}_1+\gamma\mathcal{Z}_1)(\mathcal{X}_2\mathcal{F}+\mathcal{Y}_2\mathcal{G}+\mathcal{Z}_2\mathcal{H})\\
&\quad + (\alpha\mathcal{X}_2+\beta\mathcal{Y}_2+\gamma\mathcal{Z}_2)(\mathcal{X}_1\mathcal{F}+\mathcal{Y}_1\mathcal{G}+\mathcal{Z}_1\mathcal{H}).
\end{aligned}
\right.
$$

Les égalités (122) deviendront, en vertu des égalités (121),

$$(124)\quad \left\{\begin{array}{l} \left[\dfrac{\partial \Delta_1'}{\partial x}\right]_1^2 = \mathrm{K}^2 \mathfrak{M}^2 \alpha \mathfrak{D}_1, \qquad \left[\dfrac{\partial \Delta_1'}{\partial y}\right]_1^2 = \mathrm{K}^2 \mathfrak{M}^2 \beta \mathfrak{D}_1, \qquad \left[\dfrac{\partial \Delta_1'}{\partial z}\right]_1^2 = \mathrm{K}^2 \mathfrak{M}^2 \gamma \mathfrak{D}_1, \\ \left[\dfrac{\partial \Delta_2'}{\partial x}\right]_1^2 = \mathrm{K}^2 \mathfrak{M}^2 \alpha \mathfrak{D}_2, \qquad \ldots, \\ \left[\dfrac{\partial \Gamma_1'}{\partial x}\right]_1^2 = \mathrm{K}^2 \mathfrak{M}^2 \alpha \mathfrak{E}_1, \qquad \ldots. \end{array}\right.$$

Or, en vertu des égalités (77) de la première Partie, la première des égalités (119) devient

$$(125)\quad \begin{array}{rl} \dfrac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial \Delta_1'^2} & \left\{ \mathfrak{X}_1 \left[\dfrac{\partial \Delta_1'}{\partial x}\right]_1^2 + \mathfrak{Y}_1 \left[\dfrac{\partial \Delta_1'}{\partial y}\right]_1^2 + \mathfrak{Z}_1 \left[\dfrac{\partial \Delta_1'}{\partial z}\right]_1^2 \mathfrak{X}_1 \right\} + \text{etc.} \\ + \dfrac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial \Delta_2' \partial \Delta_3'} & \left\{ \left(\mathfrak{X}_3 \left[\dfrac{\partial \Delta_2'}{\partial x}\right]_1^2 + \mathfrak{Y}_3 \left[\dfrac{\partial \Delta_2'}{\partial y}\right]_1^2 + \mathfrak{Z}_3 \left[\dfrac{\partial \Delta_2'}{\partial z}\right]_1^2 \right) \mathfrak{X}_2 \right. \\ & \left. + \left(\mathfrak{X}_2 \left[\dfrac{\partial \Delta_3'}{\partial x}\right]_1^2 + \mathfrak{Y}_2 \left[\dfrac{\partial \Delta_3'}{\partial y}\right]_1^2 + \mathfrak{Z}_2 \left[\dfrac{\partial \Delta_3'}{\partial z}\right]_1^2 \right) \mathfrak{X}_3 \right\} + \text{etc.} \\ + \dfrac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial \Gamma_1'^2} & \left\{ \left(\mathfrak{X}_3 \left[\dfrac{\partial \Gamma_1'}{\partial x}\right]_1^2 + \mathfrak{Y}_3 \left[\dfrac{\partial \Gamma_1'}{\partial y}\right]_1^2 + \mathfrak{Z}_3 \left[\dfrac{\partial \Gamma_1'}{\partial z}\right]_1^2 \right) \mathfrak{X}_2 \right. \\ & \left. + \left(\mathfrak{X}_2 \left[\dfrac{\partial \Gamma_1'}{\partial x}\right]_1^2 + \mathfrak{Y}_2 \left[\dfrac{\partial \Gamma_1'}{\partial y}\right]_1^2 + \mathfrak{Z}_2 \left[\dfrac{\partial \Gamma_1'}{\partial z}\right]_1^2 \right) \mathfrak{X}_3 \right\} + \text{etc.} \\ + \dfrac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \Gamma_2' \partial \Gamma_3'} & \left\{ \left(\mathfrak{X}_2 \left[\dfrac{\partial \Gamma_2'}{\partial x}\right]_1^2 + \mathfrak{Y}_2 \left[\dfrac{\partial \Gamma_2'}{\partial y}\right]_1^2 + \mathfrak{Z}_2 \left[\dfrac{\partial \Gamma_2'}{\partial z}\right]_1^2 \right) \right. \\ & + \left(\mathfrak{X}_3 \left[\dfrac{\partial \Gamma_3'}{\partial x}\right]_1^2 + \mathfrak{Y}_3 \left[\dfrac{\partial \Gamma_3'}{\partial y}\right]_1^2 + \mathfrak{Z}_3 \left[\dfrac{\partial \Gamma_3'}{\partial z}\right]_1^2 \right) \mathfrak{X}_1 \\ & + \left(\mathfrak{X}_1 \left[\dfrac{\partial \Gamma_2'}{\partial x}\right]_1^2 + \mathfrak{Y}_1 \left[\dfrac{\partial \Gamma_2'}{\partial y}\right]_1^2 + \mathfrak{Z}_1 \left[\dfrac{\partial \Gamma_2'}{\partial z}\right]_1^2 \right) \mathfrak{X}_2 \\ & \left. + \left(\mathfrak{X}_1 \left[\dfrac{\partial \Gamma_2'}{\partial x}\right]_1^2 + \mathfrak{Y}_1 \left[\dfrac{\partial \Gamma_3'}{\partial y}\right]_1^2 + \mathfrak{Z}_1 \left[\dfrac{\partial \Gamma_3'}{\partial z}\right]_1^2 \right) \mathfrak{X}_3 \right\} + \text{etc.} \\ + \sum\limits_{ij} \dfrac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial \Delta_i' \partial \Gamma_j'} & \left\{ \left(\mathfrak{X}_i \left[\dfrac{\partial \Gamma_j'}{\partial x}\right]_1^2 + \mathfrak{Y}_i \left[\dfrac{\partial \Gamma_j'}{\partial y}\right]_1^2 + \mathfrak{Z}_i \left[\dfrac{\partial \Gamma_j'}{\partial z}\right]_1^2 \right) \mathfrak{X}_i \right. \\ & + \left(\mathfrak{X}_{j'} \left[\dfrac{\partial \Delta_i'}{\partial x}\right]_1^2 + \mathfrak{Y}_{j'} \left[\dfrac{\partial \Delta_i'}{\partial y}\right]_1^2 + \mathfrak{Z}_{j'} \left[\dfrac{\partial \Delta_i'}{\partial z}\right]_1^2 \right) \mathfrak{X}_{j''} \\ & \left. + \left(\mathfrak{X}_{j''} \left[\dfrac{\partial \Delta_i'}{\partial x}\right]_1^2 + \mathfrak{Y}_{j''} \left[\dfrac{\partial \Delta_i'}{\partial y}\right]_1^2 + \mathfrak{Z}_{j''} \left[\dfrac{\partial \Delta_i'}{\partial z}\right]_1^2 \right) \mathfrak{X}_{j'} \right\} = 0. \end{array}$$

Dans cette égalité, chaque signe *etc.* remplace deux termes qui se déduisent du terme explicitement écrit avant ce signe en permutant les indices 1, 2, 3. L'indice i est un quelconque des indices 1, 2, 3. Les indices j, j', j'' sont les indices 1, 2, 3, pris dans un ordre quelconque.

Les égalités (124) et (125) donnent, après suppression du facteur $K^2 \mathcal{M}^2$ qui, en vertu de l'inégalité (106), diffère de o, la première égalité

$$
(126)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial \Delta_1'^2}(\alpha \mathcal{X}_1 + \beta \mathcal{Y}_1 + \gamma \mathcal{Z}_1)\mathcal{X}_1 \mathfrak{D}_1 + \text{etc.} \\
&\quad + \frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial \Delta_2' \partial \Delta_3'}[(\alpha \mathcal{X}_3 + \beta \mathcal{Y}_3 + \gamma \mathcal{Z}_3)\mathcal{X}_3 \mathfrak{D}_2 + (\alpha \mathcal{X}_2 + \beta \mathcal{Y}_2 + \gamma \mathcal{Z}_2)\mathcal{X}_2 \mathfrak{D}_3] + \text{etc.} \\
&\quad + \frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial \Gamma_1'^2}[(\alpha \mathcal{X}_3 + \beta \mathcal{Y}_3 + \gamma \mathcal{Z}_3)\mathcal{X}_2 + (\alpha \mathcal{X}_2 + \beta \mathcal{Y}_2 + \gamma \mathcal{Z}_2)\mathcal{X}_3]\mathfrak{G}_1 + \text{etc.} \\
&\quad + \frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial \Gamma_2' \partial \Gamma_3'}\Big\{ [(\alpha \mathcal{X}_1 + \beta \mathcal{Y}_1 + \gamma \mathcal{Z}_1)\mathcal{X}_2 + (\alpha \mathcal{X}_2 + \beta \mathcal{Y}_2 + \gamma \mathcal{Z}_2)\mathcal{X}_1]\mathfrak{G}_2 \\
&\qquad\qquad + [(\alpha \mathcal{X}_3 + \beta \mathcal{Y}_3 + \gamma \mathcal{Z}_3)\mathcal{X}_1 + (\alpha \mathcal{X}_1 + \beta \mathcal{Y}_1 + \gamma \mathcal{Z}_1)\mathcal{X}_3]\mathfrak{G}_3 \Big\} + \text{etc.} \\
&\quad + \sum_{ij} \frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial \Delta_i' \partial \Gamma_j'}\Big\{ (\alpha \mathcal{X}_i + \beta \mathcal{Y}_i + \gamma \mathcal{Z}_i)\mathcal{X}\mathfrak{G}_{ij} \\
&\qquad\qquad + [(\alpha \mathcal{X}_{j'} + \beta \mathcal{Y}_{j'} + \gamma \mathcal{Z}_{j'})\mathcal{X}_{j''} + (\alpha \mathcal{X}_{j''} + \beta \mathcal{Y}_{j''} + \gamma \mathcal{Z}_{j''})\mathcal{X}_{j'}]\mathfrak{D}_i \Big\} = 0, \\
&\qquad\qquad\qquad \frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial \Delta_1'^2}(\alpha \mathcal{X}_1 + \beta \mathcal{Y}_1 + \gamma \mathcal{Z}_1)\mathcal{Y}_1 \mathfrak{D}_1 + \ldots\ldots = 0, \\
&\qquad\qquad\qquad \frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial \Delta_1'^2}(\alpha \mathcal{X}_1 + \beta \mathcal{Y}_1 + \gamma \mathcal{Z}_1)\mathcal{Z}_1 \mathfrak{D}_1 + \ldots\ldots = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

Les deux autres se tirent d'une manière analogue des deux dernières égalités (119).

Multiplions respectivement ces égalités (126) par $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ et ajoutons-les membre à membre en tenant compte des égalités (123); nous trouvons l'égalité

$$
(127)\quad \left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \Delta_1'}\mathfrak{D}_1 + \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \Delta_2'}\mathfrak{D}_2 + \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \Delta_3'}\mathfrak{D}_3 + \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \Gamma_1'}\mathfrak{G}_1 + \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \Gamma_2'}\mathfrak{G}_2 + \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \Gamma_3'}\mathfrak{G}_3\right)^{(2)} = 0,
$$

où (2) représente un carré symbolique.

Mais la fonction dissipative $\mathfrak{F}$ est une forme quadratique en Δ_1', Δ_2', Δ_3', Γ_1', Γ_2', Γ_3'; ses dérivées partielles du second ordre par rapport à ces six variables sont donc indépendantes de ces variables. Dès lors, si l'on désigne par $\mathfrak{f}$ ce que devient la forme $\mathfrak{F}$ lorsque aux variables

$$\Delta'_1,\quad \Delta'_2,\quad \Delta'_3,\quad \Gamma'_1,\quad \Gamma'_2,\quad \Gamma'_3$$

on substitue les variables

$$\mathfrak{D}_1,\quad \mathfrak{D}_2,\quad \mathfrak{D}_3,\quad \mathfrak{G}_1,\quad \mathfrak{G}_2,\quad \mathfrak{G}_3,$$

on aura

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial \Delta_i'^2} = \frac{\partial^2 \mathfrak{f}}{\partial \mathfrak{D}_i^2}, \qquad \frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial \Gamma_i'^2} = \frac{\partial^2 \mathfrak{f}}{\partial \mathfrak{G}_i^2},$$

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial \Delta'_i \partial \Delta'_j} = \frac{\partial^2 \mathfrak{f}}{\partial \mathfrak{D}_i \partial \mathfrak{D}_j}, \qquad \frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial \Gamma'_i \partial \Delta'_j} = \frac{\partial^2 \mathfrak{f}}{\partial \mathfrak{G}_i \partial \mathfrak{D}_j}, \qquad \frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial \Gamma'_i \partial \Gamma'_j} = \frac{\partial^2 \mathfrak{f}}{\partial \mathfrak{G}_i \partial \mathfrak{G}_j},$$

et l'égalité (127) deviendra

$$\left(\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \mathfrak{D}_1}\mathfrak{D}_1 + \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \mathfrak{D}_2}\mathfrak{B}_2 + \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \mathfrak{D}_3}\mathfrak{D}_3 + \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \mathfrak{G}_1}\mathfrak{C}_1 + \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \mathfrak{G}_2}\mathfrak{C}_2 + \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \mathfrak{G}_3}\mathfrak{G}_3\right)^{(2)} = 0$$

ou bien, en vertu du théorème d'Euler,

$$\mathfrak{f} = 0.$$

Mais la forme $\mathfrak{F}$ est une forme définie positive en $\Delta'_1, \Delta'_2, \Delta'_3, \Gamma'_1, \Gamma'_2, \Gamma'_3$; la forme $\mathfrak{f}$ est donc une forme définie positive en $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \mathfrak{D}_3, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \mathfrak{G}_3$, et l'égalité précédente entraîne les égalités

$$(128)\qquad \mathfrak{D}_1 = 0,\qquad \mathfrak{D}_2 = 0,\qquad \mathfrak{D}_3 = 0,\qquad \mathfrak{G}_1 = 0,\qquad \mathfrak{G}_2 = 0,\qquad \mathfrak{G}_3 = 0.$$

Ces égalités (128) permettent d'écrire l'égalité

$$2(\alpha\mathcal{X}_1 + \beta\mathcal{Y}_1 + \gamma\mathcal{Z}_1)\mathfrak{D}_1 + (\alpha\mathcal{X}_2 + \beta\mathcal{Y}_2 + \gamma\mathcal{Z}_2)\mathfrak{G}_3 + (\alpha\mathcal{X}_3 + \beta\mathcal{Y}_3 + \gamma\mathcal{Z}_3)\mathfrak{G}_2 = 0.$$

En vertu de l'égalité (123) et de l'égalité

$$(\alpha\mathcal{X}_1 + \beta\mathcal{Y}_1 + \gamma\mathcal{Z}_1)^2 + (\alpha\mathcal{X}_2 + \beta\mathcal{Y}_2 + \gamma\mathcal{Z}_2)^2 + (\alpha\mathcal{X}_3 + \beta\mathcal{Y}_3 + \gamma\mathcal{Z}_3)^2 = 1,$$

l'égalité précédente devient

$$\begin{aligned}
&\mathcal{X}_1\mathcal{F} + \mathcal{Y}_1\mathcal{G} + \mathcal{Z}_1\mathcal{H} \\
&\quad + (\alpha\mathcal{X}_1 + \beta\mathcal{Y}_1 + \gamma\mathcal{Z}_1)[(\alpha\mathcal{X}_1 + \beta\mathcal{Y}_1 + \gamma\mathcal{Z}_1)(\mathcal{X}_1\mathcal{F} + \mathcal{Y}_1\mathcal{G} + \mathcal{Z}_1\mathcal{H}) \\
&\qquad\qquad + (\alpha\mathcal{X}_2 + \beta\mathcal{Y}_2 + \gamma\mathcal{Z}_2)(\mathcal{X}_2\mathcal{F} + \mathcal{Y}_2\mathcal{G} + \mathcal{Z}_2\mathcal{H}) \\
&\qquad\qquad + (\alpha\mathcal{X}_3 + \beta\mathcal{Y}_3 + \gamma\mathcal{Z}_3)(\mathcal{X}_3\mathcal{F} + \mathcal{Y}_3\mathcal{G} + \mathcal{Z}_3\mathcal{H})] = 0.
\end{aligned}$$

Mais la quantité entre [ ], égale à $(\mathfrak{D}_1 + \mathfrak{D}_2 + \mathfrak{D}_3)$ en vertu des égalités (123), est nulle d'après les égalités (128); nous obtenons donc la première des égalités

$$(129)\quad \begin{cases} \mathcal{X}_1 \mathcal{F} + \mathcal{Y}_1 \mathcal{G} + \mathcal{Z}_1 \mathcal{H} = 0, \\ \mathcal{X}_2 \mathcal{F} + \mathcal{Y}_2 \mathcal{G} + \mathcal{Z}_2 \mathcal{H} = 0, \\ \mathcal{X}_3 \mathcal{F} + \mathcal{Y}_3 \mathcal{G} + \mathcal{Z}_3 \mathcal{H} = 0. \end{cases}$$

Les deux autres égalités (129) se démontrent d'une manière analogue.

Ces égalités (129) donnent sans peine, en tout point de la surface S,

$$\mathcal{F} = 0, \qquad \mathcal{G} = 0, \qquad \mathcal{H} = 0.$$

Donc, *au sein d'un milieu vitreux, une onde du second ordre par rapport aux composantes u, v, w de la vitesse ne peut avoir une vitesse de propagation $\mathfrak{N}$ différente de 0. Les seules ondes de cet ordre qui puissent subsister en un tel milieu séparent constamment les deux mêmes portions du milieu; elles sont alors surfaces de discontinuité pour la densité ρ et pour les quantités N_i, T_i; en outre, si le milieu est mauvais conducteur, elles sont surfaces de discontinuité pour la température* T.

Ainsi sont étendues aux milieux vitreux doués de viscosité les propositions que nous avions démontrées pour les fluides (*Recherches sur l'Hydrodynamique*, 1re série, 1re Partie, Chapitre III).

De plus, pour démontrer ces propositions, nous ne nous sommes nullement servi des symétries particulières qui caractérisent les milieux vitreux; par exemple, en ce qui concerne les actions de viscosité, nous avons supposé seulement que la fonction dissipative $\mathfrak{F}$ était une forme quadratique définie de Δ'_1, Δ'_2, Δ'_3, Γ'_1, Γ'_2, Γ'_3, ce qui est également vrai pour les milieux vitreux et pour les milieux cristallisés. Nous pouvons donc affirmer qu'*au sein d'un milieu affecté de viscosité, qu'il soit fluide ou solide, vitreux ou cristallisé, aucune onde ne peut se propager. Toute onde persistante sépare indéfiniment les deux mêmes parties du milieu. Si une telle onde est d'ordre n par rapport aux composantes u, v, w de la vitesse, elle est d'ordre $(n-1)$ par rapport à la densité ρ et aux quantités N_i, T_i. Par rapport à la température* T, *elle est d'ordre n ou d'ordre $(n-1)$, selon que le milieu est conducteur de la chaleur ou qu'il est privé de conductibilité.*

III. — Intersection d'une onde-cloison et de la surface libre du milieu [1].

Dans les milieux fluides ou élastiques, qui sont doués de viscosité, nous avons montré que les seules ondes possibles sont des ondes qui séparent constamment les deux mêmes masses fluides; à ces ondes, nous donnerons le nom d'*ondes-cloisons* parce que, semblables à des cloisons étanches, elles partagent la masse fluide en *cellules* telles qu'aucun échange de matière ne se produise d'une cellule à l'autre.

Nous allons, au présent paragraphe, porter notre attention sur celles de ces ondes qui sont du premier ordre par rapport aux composantes u, v, w de la vitesse, c'est-à-dire sur celles qui ont été étudiées au paragraphe I; nous allons mettre en évidence une importante propriété de la ligne suivant laquelle une telle onde coupe la surface libre qui termine le milieu.

Au moyen des six quantités

$$N_x+\nu_x,\quad N_y+\nu_y,\quad N_z+\nu_z,\quad T_x+\tau_x,\quad T_y+\tau_y,\quad T_z+\tau_z,$$

formons l'équation

$$\begin{aligned}(130)\qquad &(N_x+\nu_x)X^2+(N_y+\nu_y)Y^2+(N_z+\nu_z)Z^2\\ &+2(T_x+\tau_x)YZ+2(T_y+\tau_y)ZX+2(T_z+\tau_z)XY=1,\end{aligned}$$

qui représente, en chaque point du milieu et à chaque instant, la *quadrique des pressions*.

En général, la forme et l'orientation de la quadrique des pressions varient d'une manière continue d'un point à l'autre du milieu; mais cette forme et cette orientation varient d'une façon brusque si l'on vient à traverser une *onde-cloison* qui soit du premier ordre par rapport aux composantes u, v, w de la vitesse.

Soit M un point pris sur une *onde-cloison;* la quadrique des pressions tend vers deux formes limites distinctes Q_1, Q_2, selon que l'on s'approche du point M en demeurant du côté 1 de l'onde ou du côté 2. Entre ces deux formes limites, existe une relation. En effet,

---

[1] *Sur les ondes-cloisons* (*Comptes rendus*), t. CXXXVII, p. 237, Séance du 27 juillet 1903).

au point M, on doit avoir les égalités

$$(131)\quad \left\{\begin{array}{l} (N_x+\nu_x)_1\alpha+(T_z+\tau_z)_1\beta+(T_y+\tau_y)_1\gamma=(N_x+\nu_x)_2\alpha+(T_z+\tau_z)_2\beta+(T_y+\tau_y)_2\gamma, \\ (T_z+\tau_z)_1\alpha+(N_y+\nu_y)_1\beta+(T_x+\tau_x)_1\gamma=(T_z+\tau_z)_2\alpha+(N_y+\nu_y)_2\beta+(T_x+\tau_x)_2\alpha, \\ (T_y+\tau_y)_1\alpha+(T_x+\tau_x)_1\beta+(N_z+\nu_z)_1\gamma=(T_y+\tau_y)_2\alpha+(T_x+\tau_x)_2\beta+(N_z+\nu_z)_2\gamma, \end{array}\right.$$

égalités qui sont le fondement des raisonnements développés au paragraphe I.

Ces égalités signifient que *le plan diamétral conjugué à la direction* (α, β, γ) *de la normale à l'onde a même orientation dans les deux quadriques limites* Q_1, Q_2.

La normale à l'onde ne coïncide, en général, avec un des axes principaux *ni* pour la quadrique Q_1, *ni* pour la quadrique Q_2; d'ailleurs, si elle était axe principal de l'une de ces quadriques, elle serait forcément, en vertu du théorème précédent, axe principal de l'autre.

Imaginons que la surface libre du milieu supporte une pression normale Π; la normale à cette surface, dirigée vers l'intérieur du milieu, fait avec les axes de coordonnées des angles dont les cosinus seront désignés par λ, μ, ν. Nous aurons alors, en tout point de la surface libre,

$$(132)\quad \left\{\begin{array}{l} (N_x+\nu_x-\Pi)\lambda+(T_z+\tau_z)\mu+(T_y+\tau_y)\nu=0, \\ (T_z+\tau_z)\lambda+(N_y+\nu_y-\Pi)\mu+(T_x+\tau_x)\nu=0, \\ (T_y+\tau_y)\lambda+(T_x+\tau_x)\mu+(N_z+\nu_z-\Pi)\nu=0. \end{array}\right.$$

De ces égalités on peut tirer, entre autres conséquences, la proposition suivante :

En chaque point de la surface libre, la normale à cette surface trace l'un des axes principaux de la quadrique des pressions qui se rapporte à ce point.

Considérons maintenant la ligne L, intersection de la surface libre par une *onde-cloison;* de part et d'autre de l'*onde-cloison*, la quadrique des pressions n'a pas, en général, ses axes principaux orientés de la même manière; la normale à la surface libre subira donc, en général, un changement brusque d'orientation à la traversée de la ligne L; d'où la proposition suivante :

L'intersection d'une onde-cloison du premier ordre par rapport à la vitesse et de la surface libre qui limite le milieu est une arête de cette dernière surface.

Cette arête peut, d'ailleurs, se dessiner en saillie ou en creux.

Nous avons déjà signalé (¹) l'analogie des *ondes-cloisons* qui peuvent se former au sein des fluides visqueux avec la division en cellules que M. H. Bénard (²) a observée au sein de liquides inégalement échauffés; cette analogie est complétée par le théorème précédent; en même temps, nous venons de reconnaître qu'une telle division en cellules peut se produire au sein de tous les milieux affectés de viscosité, qu'ils soient fluides ou solides, vitreux ou cristallisés; et, en effet, des phénomènes analogues à ceux que M. H. Bénard a étudiés ont été observés par M. J. Cartaud (³) dans les milieux visqueux les plus divers.

On remarquera que les propositions développées en ce Chapitre et dans le Chapitre précédent permettraient de reprendre, au sujet des milieux élastiques, tout ce que nous avons dit de la propagation des *quasi-ondes* au sein des fluides (⁴).

CHAPITRE III.

CONTINUITÉ DE L'ÉTAT LIQUIDE ET DE L'ÉTAT VITREUX.

Que faut-il entendre en disant qu'un solide vitreux, sans être très compressible, est très aisément déformable? Nous donnerons à ces mots le sens suivant :

Les propriétés du milieu pris dans un état autre que l'état initial

(¹) *Recherches sur l'Hydrodynamique*, 2ᵉ Partie, Conclusion (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 2ᵉ série, t. IV, 1902).

(²) H. Bénard, *Journal de Physique*, 2ᵉ série, t. IX, 1900, p. 513; t. X, 1901, p. 254.

(³) *Revue générale des Sciences*, 14ᵉ année, 1903, p. 114.

(⁴) *Recherches sur l'Hydrodynamique*, 2ᵉ Partie (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 2ᵉ série, t. V, 1903).

changent notablement si l'on vient à changer la densité en chaque point; mais, si l'on déforme les divers éléments sans en changer la densité, les propriétés du milieu varient extrêmement peu.

Suivons les conséquences de cette définition.

Les propriétés statiques du milieu sont entièrement définies par la forme de son *potentiel interne;* la connaissance de cette forme ne suffit plus pour fixer les propriétés dynamiques du milieu : il faut y joindre la forme de la *fonction dissipative.*

La forme du potentiel interne dépend de deux fonctions, les fonctions Φ et Ψ comme l'enseigne l'égalité (41) de la première Partie. Suivons, en chacune de ces deux fonctions, l'influence de notre définition.

La fonction Φ dépend, en général, de la température T et des trois quantités J_1, J_2, J_3. Si un changement de forme de l'élément auquel elle se rapporte devait la laisser rigoureusement invariable lorsqu'il n'entraîne aucun changement de température ni de densité, la grandeur Φ serait une fonction des seules variables ρ et T; *notre définition exige donc que la fonction Φ soit de la forme*

$$\Phi = \zeta(\rho, T) + \varphi(T, J_1, J_2, J_3), \tag{133}$$

la fonction $\zeta(\rho, T)$ ayant une valeur notable, tandis que la fonction $\varphi(T, J_1, J_2, J_3)$ a une valeur extrêmement petite.

Considérons maintenant la fonction Ψ, dont dépend l'action mutuelle de deux éléments; nous avons énuméré en (43) de la première Partie les éléments dont cette fonction peut dépendre. Si elle devait demeurer rigoureusement invariable dans toute modification qui déforme les deux éléments sans altérer ni leur densité, ni leur position relative, elle ne pourrait dépendre que des densités ρ et ρ' des deux éléments et de leur distance mutuelle r; on aurait alors

$$\Psi = \psi(\rho, \rho', r).$$

D'après notre définition, cette égalité ne doit être qu'une égalité approchée et *l'on doit avoir*

$$\Psi = \psi(\rho, \rho', r) + \chi, \tag{134}$$

la fonction ψ ayant une valeur notable, tandis que la fonction χ, qui peut dépendre de tous les éléments énumérés en (43) *de la première Partie, a toujours une très petite valeur.*

D'après les égalités (41) de la première Partie, (133) et (134), *le potentiel interne du système s'exprimera par l'égalité*

$$(135) \qquad \begin{aligned} \mathcal{F} = & \int \zeta(\rho, T)\, dm + \frac{1}{2}\int\int \psi(\rho, \rho', r)\, dm\, dm' \\ & + \int \varphi(T, J_1, J_2, J_3)\, dm + \frac{1}{2}\int\int \chi\, dm\, dm'. \end{aligned}$$

Les termes de la seconde ligne ont, en toute circonstance, des valeurs très petites. Les termes de la première ligne, qui seuls ont des valeurs notables, reproduisent le potentiel interne d'une masse fluide, tel que le présente l'égalité (66) de la première Partie de nos *Recherches sur l'Hydrodynamique*.

Dès lors, il est bien évident, sans aucun calcul, que les milieux étudiés vont nous redonner, mais à titre de lois approchées, toutes les propositions qui découlaient rigoureusement, pour les fluides, de la seule forme de leur potentiel interne.

Si, comme nous l'avons fait en la première Partie de nos *Recherches sur l'Hydrodynamique* [égalités (67) et (75)], nous posons

$$(136) \qquad \left\{ \begin{aligned} A &= \int \frac{\partial \psi(\rho, \rho, r)}{\partial \rho}\, dm', \\ \Pi &= \rho^2 \frac{\partial \zeta(\rho, T)}{\partial \rho} - \rho^2 A, \end{aligned} \right.$$

nous aurons les ÉGALITÉS APPROCHÉES

$$(137) \qquad \left\{ \begin{aligned} N_x &= N_y = N_z = \Pi, \\ T_x &= T_y = T_z = 0. \end{aligned} \right.$$

Si nous comparons en particulier ces égalités aux égalités (8) de la première Partie de ces *Recherches sur l'Élasticité*, qui conviennent à un milieu peu écarté de l'état initial, nous parvenons au théorème suivant :

En un milieu très aisément déformable qui est peu écarté de son état initial, la fonction M(T) *a des valeurs très petites par rapport aux valeurs de* Λ(T).

Examinons maintenant la forme qu'il convient d'attribuer à la fonction dissipative en un milieu très aisément déformable.

Si les propriétés du milieu étaient absolument indépendantes de la déformation subie par chaque élément, mais seulement de la variation de densité à partir de l'état initial, la valeur de la fonction dissipative devrait rester absolument la même quel que soit le trièdre trirectangle dont les arêtes sont les trois axes principaux de dilatation de l'élément considéré. Sa forme se déterminerait alors par les raisonnements que nous avons suivis au Chapitre I, § II de la première Partie de ces *Recherches sur l'Élasticité*. Cette forme, analogue à la forme (17) de cette première Partie, serait

$$\begin{aligned}\mathfrak{f} = {} & \frac{\lambda(\rho, \mathrm{T})}{2}(\mathrm{D}'_1 + \mathrm{D}'_2 + \mathrm{D}'_3)^2 \\ & + \frac{\mu(\rho, \mathrm{T})}{2}(\mathrm{D}'^2_1 + \mathrm{D}'^2_2 + \mathrm{D}'^2_3 + 2\,\mathrm{G}'^2_1 + 2\,\mathrm{G}'^2_2 + 2\,\mathrm{G}'^2_3).\end{aligned}$$

Mais les propriétés du milieu éprouvent une variation non nulle, bien que très faible, dans une déformation qui laisse invariables la température et la densité; l'égalité précédente doit donc être non pas rigoureuse, mais approchée; en toute rigueur, *la fonction dissipative doit s'obtenir en posant*

$$(138)\qquad \begin{aligned}\mathfrak{f} = {} & \frac{\lambda(\rho, \mathrm{T})}{2}(\mathrm{D}'_1 + \mathrm{D}'_2 + \mathrm{D}'_3)^2 \\ & + \frac{\mu(\rho, \mathrm{T})}{2}(\mathrm{D}'^2_1 + \mathrm{D}'^2_2 + \mathrm{D}'^2_3 + 2\,\mathrm{G}'^2_1 + 2\,\mathrm{G}'^2_2 + 2\,\mathrm{G}'^2_3) + \mathfrak{f}.\end{aligned}$$

f *est une expression donnée par une égalité de même forme que l'égalité* (74), *de la première Partie, mais dont la valeur est toujours très petite.*

Dire que les propriétés du milieu changent très peu lorsque l'on déforme les divers éléments sans en changer la densité, ni la température, c'est évidemment supposer, comme nous venons de le faire, que la valeur de la fonction dissipative à l'instant t dépend de la température et de la densité de chaque élément à cet instant, mais est presque indépendante de la déformation de l'élément. Ce n'est pas forcément admettre que le travail de viscosité dans le temps dt est sensiblement nul si la modification du système pendant ce temps ne fait point changer la densité de divers éléments. On conçoit que l'on puisse faire la première hypothèse sans faire la seconde; en d'autres termes, *on conçoit que* $\mathfrak{F}$ *puisse prendre la forme* (138) *sans que la fonction* $\mu(\rho, T)$ *soit négligeable devant* $\lambda(\rho, T)$.

Ainsi *un milieu solide, vitreux, très déformable, mais non très compressible, obéit approximativement aux lois qu'il est d'usage d'admettre en un liquide visqueux. Le liquide visqueux représente la forme limite d'un tel milieu très déformable.*

Cette manière de voir concorde avec celle à laquelle les expérimentateurs sont conduits par des recherches de diverses natures.

On soupçonnait depuis longtemps et l'on sait aujourd'hui d'une manière certaine, grâce surtout aux travaux de M. Tammann, que beaucoup de corps, liquides et peu visqueux à une certaine température, deviennent de plus en plus visqueux lorsque la température s'abaisse, et se transforment finalement en solides vitreux. Cette *continuité entre l'état liquide et l'état vitreux* sera parfaitement conforme aux formules précédentes, si l'on suppose que les fonctions φ, χ, f, très petites lorsque la température a une valeur suffisamment élevée, augmentent et prennent des valeurs très notables lorsque la température s'abaisse à un certain degré.

Un corps dont chaque élément est supposé dans un état entièrement défini par la connaissance de la densité ρ et de la température T est un corps *isotrope par définition*; donc, *un fluide proprement dit et anisotrope serait un non-sens.* Il n'en est pas de même pour un corps vitreux très aisément déformable; ce corps est forcément isotrope dans l'état initial; mais, lorsqu'il a été déformé, il n'est plus forcément isotrope; il peut agir sur la lumière comme un corps doué d'une faible biréfringence. Or, les recherches de Maxwell et d'une foule d'autres expérimentateurs ont mis cette vérité hors de contestation : Lorsqu'un liquide, même très peu visqueux, est en mouvement, il est biréfringent. La biréfringence des liquides en mouvement s'accorde donc avec les théories développées au présent Chapitre.

Nous venons de montrer comment l'état liquide pouvait être regardé comme l'état limite d'un milieu solide, vitreux, très aisément déformable. De la même manière, en prenant pour point de départ un *milieu cristallin*, dont l'état initial est homogène, mais non isotrope, nous pourrions traiter du *milieu cristallin très aisément déformable*; nous serions ainsi conduits, par une voie théorique, à la notion de *cristaux fluides*, à laquelle M. Lehmann a été conduit expérimentalement. Cette notion de cristaux fluides apparaît, au contraire, comme un non-sens au point de vue de la théorie rigoureuse du fluide, où chaque élément, entièrement défini par sa température et sa densité, est toujours et essentiellement isotrope.