

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

L. LEAU

Étude sur les fonctions entières orientées, d'ordre réel non entier

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 23 (1906), p. 33-120

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1906_3_23__33_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1906, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ÉTUDE
SUR LES
FONCTIONS ENTIÈRES ORIENTÉES,
D'ORDRE RÉEL NON ENTIER.

PAR M. L. LEAU.

INTRODUCTION.

En ces dernières années, les fonctions entières ont été l'objet de travaux nombreux et féconds. Depuis ceux qui ont été analysés ou indiqués dans le Livre de M. Borel ⁽¹⁾, il convient de citer principalement ceux de MM. Jensen ⁽²⁾, Ernst Lindelöf ⁽³⁾, P. Boutroux ⁽⁴⁾ et Maillet ⁽⁵⁾.

Ce n'est qu'exceptionnellement qu'on y suppose une certaine régularité dans la distribution des zéros; or une telle hypothèse, en même temps qu'elle est très naturelle au point de vue pratique, s'impose absolument si, après avoir obtenu des théorèmes d'un caractère très général, on veut recueillir des renseignements plus détaillés, établir des propriétés très précises; c'est une seconde étape qu'il faut inévitablement franchir.

Étant donnée une fonction entière $F(z)$ dont le produit canonique est de genre k , je me suis proposé, on va voir dans quel but, de

⁽¹⁾ *Leçons sur les fonctions entières*, Gauthier-Villars, 1900.

⁽²⁾ *Acta mathematica*, t. XXII.

⁽³⁾ *Mémoire sur la théorie des fonctions entières de genre fini* (*Acta societatis scientiarum fennicæ*).

⁽⁴⁾ *Sur quelques propriétés des fonctions entières* (*Acta mathematica*, t. XXVIII).

⁽⁵⁾ *Sur les fonctions entières et quasi-entières* (*Journal de M. Jordan*, 1902).

déterminer, abstraction faite d'un certain voisinage des racines, des valeurs asymptotiques de F et de $\frac{F'}{z^{k-1}F}$, ou à leur défaut le signe et l'ordre de grandeur soit de la partie réelle, soit du coefficient de i . Dans ce dessein, j'ai fait, au sujet de la distribution des racines, les hypothèses que la méthode d'approximation qui s'offrait rendait strictement nécessaires. Convenons de dire d'une suite illimitée de racines ($a_n = r_n e^{i\alpha_n}$) qu'elle est :

alignée, si α_n a une limite α ;

dirigée, si elle est alignée et si, posant

$$\frac{r_{n+1}}{r_n} = 1 + \frac{l_n}{n},$$

l_n a une limite l ;

orientée, si elle est dirigée et si $(\alpha_n - \alpha)$ et $(l_n - l)Ln$ ont pour limite zéro ⁽¹⁾.

Il s'agira de fonctions dont les racines forment une ou plusieurs suites *orientées*; ceci exclut le cas d'un ordre réel nul (cas certainement plus simple et qui demande à être traité séparément); on admettra en outre que cet ordre n'est pas *entier*. C'est, comme l'on voit, un cas douteux, à laisser d'abord de côté.

Une notion est utile à introduire : celle de la *densité* relative de deux suites de racines (quelconques); on entendra par là la limite, si elle existe, du rapport des nombres de racines de ces deux suites, contenues à l'intérieur d'un cercle infiniment grand dont le centre est à l'origine.

$F(z)$ étant une fonction à orientation simple, de genre k , d'ordre ρ ($k < \rho$), l'équation $F(z) + 1 = 0$ se prête à une étude approfondie grâce aux connaissances acquises sur F et sur $\frac{F'}{z^{k-1}F}$. On classe ses racines en plusieurs suites *dirigées* dont on déterminera les *densités* par rapport à la suite des zéros de F ; ces densités dépendent de la différence $\rho - k$, qui joue un rôle important dans toutes ces questions et

(1) Ces dénominations sont arbitraires; il était nécessaire qu'elles fussent différentes d'aspect et simples.

que j'appelle l'*ordre excédent*; s'il est inférieur à $\frac{1}{2}$, on voit apparaître une suite orientée formée de racines infiniment voisines de celles de F . Tous ces résultats s'étendent en général à l'équation $F(z) + G(z) = 0$, G étant une fonction entière d'ordre inférieur à celui de F et dont les racines sont d'ailleurs arbitrairement distribuées.

La recherche des racines de la dérivée d'une fonction orientée $F(z)$ est l'objet d'une seconde application des Chapitres préliminaires. L'expression $\frac{F'}{z^{k-1}F}$ permet en quelque sorte de sonder les diverses régions du plan; elle décèle la présence des zéros de F' , et l'on obtient les propriétés que voici: en général, *la dérivée d'une fonction orientée est une fonction orientée*; la différence des nombres de racines des deux fonctions dans un cercle infiniment grand, dont le centre est à l'origine, est finie; les racines de F' et de F se groupent en plusieurs suites deux à deux associées, et dans un couple de suites elles se correspondent une à une, à partir d'un module assez grand, b_n à a_n , en sorte que $\left| \frac{b_n - a_n}{a_{n+1} - a_n} \right|$ ait une limite finie et que l'on peut déterminer. Ces faits précis prouvent que la définition des fonctions orientées n'est pas seulement inspirée par des nécessités de calcul, mais qu'elle est dans la nature même des choses.

La méthode qui m'a servi dans le problème précédent s'applique, convenablement modifiée, à des fonctions dont les zéros sont réels, leurs modules se suivant d'une manière quelconque. On ne doit pas en être surpris; ici l'argument des racines est constant, ce que l'on perd en variation de l'argument, on le gagne dans l'irrégularité du module. Laguerre a établi, comme l'on sait, un théorème concernant les racines de la dérivée d'une fonction entière (réelle) de genre fini, ayant un nombre limité de racines imaginaires. J'ai précisé ce théorème sur un point qu'il laissait douteux et je l'ai étendu dans des cas fréquents à des fonctions possédant des racines imaginaires en nombre infini (¹).

(¹) Les principaux résultats de cette étude ont été indiqués, à un changement de dénomination près, dans une Note parue aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, le 24 octobre 1904.

CHAPITRE I.

SUITES ORIENTÉES ; CALCUL DE CERTAINES INTÉGRALES DÉFINIES.

1. *Données et notations.* — Dans ce qui suit, il sera question de suites illimitées de nombres $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, dont les modules ne diminuent point; on posera généralement $a_n = r_n e^{i\alpha_n}$. De plus, r_n sera infiniment grand avec n , et l'on introduira un nombre r compris entre r_n et r_{n+1} . Il y aura fréquemment à étudier des expressions dépendant de ces diverses quantités n, r_n, r , lorsque celles-ci deviennent infiniment grandes; aussi cette dernière condition, supposée d'ordinaire, sera souvent sous-entendue. Enfin, les notations $\varepsilon_n, \varepsilon'_n, \dots, \varepsilon_r, \varepsilon'_r, \dots$ désigneront des quantités infiniment petites.

2. *Suite alignée.* — Une suite est dite *alignée* si α_n a une limite α .

3. *Suite dirigée.* — Une suite est dite *régulièrement dirigée* ou, plus simplement, *dirigée* si elle est alignée et si, $\frac{r_{n+1}}{r_n}$ étant mis sous la forme $1 + \frac{l_n}{n}$, l_n a une limite l .

La quantité l est, comme on le voit aisément, l'inverse de l'ordre du produit canonique dont les zéros sont les a_n .

4. *Suite orientée.* — Une suite est dite *régulièrement orientée* ou, plus simplement, *orientée* si elle est dirigée et si $(\alpha_n - \alpha)n$ et $(l_n - l)n$ ont pour limite *zéro*.

La majeure partie de ce Mémoire est consacrée aux fonctions entières dont les racines forment une ou plusieurs suites orientées.

5. *Première transformation de cette définition des suites orientées.* — Il y a intérêt à donner d'autres formes aux conditions relatives aux r_n . En voici une première :

Si l'on pose

$$\frac{r_{n+1}}{r_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\lambda_n},$$

pour que les conditions imposées à l_n soient vérifiées, il faut et il suffit qu'elles soient satisfaites par λ_n , et les limites sont les mêmes.

La démonstration est aisée : supposons d'abord que l_n tende vers l , et $(l_n - l)Ln$ vers 0. Puisque

$$\frac{r_{n+1}}{r_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n \frac{\lambda_n}{n}},$$

$\frac{\lambda_n}{n}$ tend vers 0, et, par suite, on a

$$\frac{r_{n+1}}{r_n} = 1 + \frac{\lambda_n}{n}(1 + \varepsilon_n),$$

et

$$l_n = \lambda_n(1 + \varepsilon_n),$$

ε_n étant infiniment petit. Donc λ_n tend vers l ; dès lors on peut poser

$$\frac{r_{n+1}}{r_n} = 1 + \frac{\lambda_n}{n} \left(1 - \frac{\frac{1}{2} + \eta_n}{n}\right)$$

et

$$l_n - \lambda_n = \frac{\lambda_n}{n} \left(\frac{1}{2} + \eta_n\right),$$

η_n étant infiniment petit, égalité qui achève la démonstration.

Si l'on suppose maintenant les conditions vérifiées pour λ_n , on peut écrire de suite l'égalité qui précède; la conclusion est immédiate.

6. *Deuxième transformation de la définition.* — Nous poserons

$$\frac{r_n}{r_p} = \left(\frac{n}{p}\right)^{\mu_{n,p}};$$

la seconde forme a trait aux quantités μ . Avant de la déterminer, nous établirons le lemme suivant :

LEMME. — *Si une suite $u_1, u_2, \dots, u_p, \dots, u_n, \dots$ a une limite u et si la série $a_1, a_2, \dots, a_p, \dots, a_n, \dots$ à termes positifs est divergente,*

l'expression

$$v_{p,n} = \frac{a_p u_p + a_{p+1} u_{p+1} + \dots + a_n u_n}{a_p + a_{p+1} + \dots + a_n}$$

a, pour n infini, et de quelque manière que varie p , u pour limite.

En effet, ε étant un nombre positif quelconque, soit q l'indice à partir duquel on a $u - \varepsilon < u_i < u + \varepsilon$, l'expression considérée pourra s'écrire

$$u + \frac{a_p(u_p - u) + \dots + a_{q-1}(u_{q-1} - u)}{\sum_p^n a_i} + \theta \varepsilon \frac{\sum_p^q a_i}{\sum_p^n a_i} \quad (|\theta| < 1),$$

n croissant indéfiniment; si le deuxième terme existe, ce qui suppose $p < q$, son numérateur est limité et son dénominateur est infiniment grand, donc il tend vers 0 et la proposition est établie. Il est d'ailleurs inutile de supposer $p \leq n$ (1).

7. Revenons aux quantités μ . Pour plus de brièveté, nous poserons

$$\mu_{n,1} = \mu_n;$$

quant à $\mu_{n+1,n}$, c'est λ_n .

Nous allons montrer que si les r_n forment une suite orientée, si p varie d'une manière quelconque et si n est infiniment grand :

1° $\mu_{n,p}$ tend vers l ;

2° $\frac{(\mu_{n,p} - l) L \frac{n}{p}}{L \frac{L n}{L p}}$ tend vers 0 ($p > 1$), et réciproquement.

(1) On peut, de plus, trouver une variable positive infiniment petite ε_n , telle que l'on ait toujours, quel que soit p ,

$$|v_{p,n} - u| < \varepsilon_n.$$

En effet, on a d'abord (p inférieur à n)

$$\begin{aligned} Lr_n - Lr_{n-1} - l[Ln - L(n-1)] &= (\mu_{n,n-1} - l)L\frac{n}{n-1}, \\ Lr_{n-1} - Lr_{n-2} - l[L(n-1) - L(n-2)] &= (\mu_{n-1,n-2} - l)L\frac{n-1}{n-2}, \\ \dots\dots\dots \\ Lr_{p+1} - Lr_p - l[L(p+1) - Lp] &= (\mu_{p+1,p} - l)L\frac{p+1}{p}, \end{aligned}$$

d'où

$$(1) \quad (\mu_{n,p} - l)L\frac{n}{p} = (\lambda_p - l)L\frac{p+1}{p} + \dots + (\lambda_{n-2} - l)L\frac{n-1}{n-2} + (\lambda_{n-1} - l)L\frac{n}{n-1}.$$

Appliquant le lemme précédent au second membre de cette égalité ($\lambda_n - l$ tendant vers zéro), on en conclut que

$$\frac{(\mu_{n,p} - l)L\frac{n}{p}}{L\frac{p+1}{p} + \dots + L\frac{n-1}{n-2} + L\frac{n}{n-1}}$$

ou $\mu_{n,p} - l$ a pour limite zéro.

On peut obtenir de suite le second résultat plus complet, en écrivant l'égalité (1)

$$(1') \quad (\mu_{n,p} - l)L\frac{n}{p} = (\lambda_p - l)Lp \left[\frac{L(p+1)}{Lp} - 1 \right] + \dots + (\lambda_{n-2} - l)L(n-2) \left[\frac{L(n-1)}{L(n-2)} - 1 \right] + (\lambda_{n-1} - l)L(n-1) \left[\frac{Ln}{L(n-1)} - 1 \right],$$

d'où l'on conclut, ($\lambda_n - l$)Ln ayant zéro pour limite, que

$$\frac{(\mu_{n,p} - l)L\frac{n}{p}}{\left(\frac{L(p+1)}{Lp} - 1 \right) + \dots + \left(\frac{L(n-1)}{L(n-2)} - 1 \right) + \left(\frac{Ln}{L(n-1)} - 1 \right)}$$

tend aussi vers zéro.

D'ailleurs le rapport du dénominateur à l'expression

$$\frac{1}{pLp} + \dots + \frac{1}{(n-2)L(n-2)} + \frac{1}{(n-1)L(n-1)}$$

tend vers 1, et le rapport de cette dernière somme à $L \frac{Ln}{Lp}$ reste supérieur à 1, en même temps qu'inférieur à un nombre fixe. Donc

$$\frac{(\mu_{n,p} - l)L \frac{n}{p}}{L \frac{Ln}{Lp}}$$

a bien pour limite zéro; pour n infini et de *quelque manière que varie* p ⁽¹⁾.

La réciproque est immédiate : remplaçant n par $n+1$ et p par n , j'ai, en particulier, par hypothèse

$$\lim \frac{(\lambda_n - l)L \frac{n+1}{n}}{L \frac{L(n+1)}{Ln}} = 0,$$

on en déduit

$$\lim (\lambda_n - l)Ln = 0.$$

8. *Troisième transformation de la définition.* — Elle a trait aux quantités $\mu_{n,l}$ ou μ_n .

Posons $(\mu_n - l)Ln = u_n$, quantité de même forme que celles considérées pour l_n et pour λ_n .

Pour que les r_n forment une suite orientée, *il faut et il suffit* que l'on ait

$$(2) \quad \lim (u_{n+1} - u_n)n.Ln = 0.$$

Cela résulte immédiatement de l'égalité

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\lambda_n} = \frac{(n+1)^{\mu_{n+1}}}{n^{\mu_n}}$$

(1) On peut évidemment lever la condition p inférieur à n .

qui peut s'écrire, en posant

$$\begin{aligned} \mathbf{L}(n+1) &= \mathbf{L}n + \frac{1 + \theta_n}{n}, \\ (\lambda_n - l)\mathbf{L}n(1 + \theta_n) &= n \cdot \mathbf{L}n(u_{n+1} - u_n). \end{aligned}$$

On remarquera que la condition (2) n'exige pas que u_n soit indéfiniment petit, mais seulement que $\frac{u_n}{\mathbf{L}n}$ tende vers zéro. Ce dernier point peut d'ailleurs s'établir directement, comme dans le cas de la deuxième transformation, avec une légère modification, tenant à ce que $p = 1$.

Il est intéressant de mettre la condition (2) sous une autre forme.

Posons

$$\begin{aligned} \mathbf{L}(n+1) &= \mathbf{L}n + \frac{1 + \theta_n}{n}, \\ \mathbf{L}\mathbf{L}(n+1) &= \mathbf{L}\mathbf{L}n + \frac{1 + \theta'_n}{n \mathbf{L}n} \quad (\theta_n \text{ et } \theta'_n \text{ infiniment petits}), \\ \lambda_n &= l + \frac{\varepsilon_n}{\mathbf{L}n} \quad \text{et} \quad \mu_n = l + \eta_n \frac{\mathbf{L}\mathbf{L}n}{\mathbf{L}n}. \end{aligned}$$

En partant de la même égalité que plus haut, on obtient

$$\varepsilon_n(1 + \theta_n) = (\eta_{n+1} - \eta_n)n \cdot \mathbf{L}n \cdot \mathbf{L}\mathbf{L}n + \eta_n(1 + \theta'_n).$$

Nous savons déjà qu'il faut que η_n tende vers zéro. S'il en est ainsi, et si l'on veut que ε_n soit infiniment petit, on doit exiger, en outre, que

$$(\eta_{n+1} - \eta_n)n \mathbf{L}n \mathbf{L}\mathbf{L}n$$

tende aussi vers zéro. D'ailleurs ce dernier fait peut se produire sans que η_n ait même une limite. Par suite, à la condition (2) on peut substituer simultanément les deux suivantes :

$$(3) \quad \begin{cases} \lim \eta_n = 0 & \left\{ \eta_n = \frac{(\mu_n - l)\mathbf{L}n}{\mathbf{L}\mathbf{L}n} \right\}, \\ \lim (\eta_{n+1} - \eta_n)n \mathbf{L}n \mathbf{L}\mathbf{L}n = 0. \end{cases}$$

9. *Expressions du rapport* $\frac{r}{r_p}$. — Soit $r_n \leq r < r_{n+1}$. Définissons ν par

la condition

$$\frac{r}{r_n} = \left(\frac{n + \nu}{n} \right)^{\mu_{n+1, n}};$$

quand r croîtra de r_n à r_{n+1} , ν variera de 0 à 1, et l'on a aussi

$$\frac{r}{r_{n+1}} = \left(\frac{n + \nu}{n + 1} \right)^{\mu_{n+1, n}}.$$

Posons maintenant

$$\frac{r}{r_p} = \left(\frac{n + \nu}{p} \right)^{\mu_{n, p}(r)}.$$

Il est aisé de constater que $\mu_{n, p}(r)$ est compris entre λ_n et $\mu_{n, p}$ si $p < n$, ou entre λ_n et $\mu_{n+1, p}$ si $p > n$.

Mais on peut aller plus loin. Le raisonnement du paragraphe 7 s'applique, avec une très légère modification, aux quantités $\mu_{n, p}(r)$. En tenant compte de la remarque faite au paragraphe 6, on peut énoncer le résultat très précis que voici :

Pour une suite simple donnée, il existe une variable positive infiniment petite ε_n telle que, *quel que soit r compris entre r_n et r_{n+1} et quel que soit p (> 1)*, l'on ait

$$(4) \quad \left| \frac{(\mu_{n, p}(r) - l) \mathbf{L} \frac{n}{p}}{\mathbf{L} \frac{\mathbf{L} n}{\mathbf{L} p}} \right| < \varepsilon_n.$$

Comme $\frac{\mathbf{L} \frac{\mathbf{L} n}{\mathbf{L} p}}{\mathbf{L} \frac{n}{p}}$ est une fonction décroissante de p , on en conclut

l'existence d'une fonction $f_n(p)$ décroissante et telle que l'on ait

$$(5) \quad |\mu_{n, p}(r) - l| \mathbf{L} n < \varepsilon_n f_n(p).$$

De plus, si l' et l'' sont deux nombres fixes, le premier inférieur et le second supérieur à 1, on peut supposer que pour

$$\frac{n}{p} \geq l'', \quad f_n(p) \leq \mathbf{L} \mathbf{L} n,$$

pour

$$t'' \geq \frac{n}{p} \geq t', \quad f_n(p) \leq 1,$$

pour $t' > \frac{n}{p}$ et p infiniment grand, $f_n(p)$ tend vers zéro.

Donnons une autre forme au rapport $\frac{r}{r_p}$, en posant

$$\frac{r}{r_p} = \left(\frac{n}{p - \nu} \right)^{\mu_{n,p}(r)}.$$

Comparant les deux expressions et appelant $\delta_{n,p}(r)$ la différence $\mu'_{n,p}(r) - \mu_{n,p}(r)$, j'obtiens

$$\delta_{n,p}(r) = \mu_{n,p}(r) \frac{\mathbf{L} \frac{(n + \nu)(p - \nu)}{np}}{\mathbf{L} \frac{n}{p - \nu}}.$$

D'ailleurs, on peut trouver une constante c (voisine de 1), telle que

$$\left| \frac{\mathbf{L} \frac{(n + \nu)(p - \nu)}{np}}{\mathbf{L} \frac{n}{p - \nu}} \right| < c \frac{n - p}{\mathbf{L} \frac{n}{p}}.$$

Cette dernière expression est décroissante quand p augmente; pour $p = 2$ elle est de l'ordre $\frac{1}{\mathbf{L}n}$; pour $t'' \geq \frac{n}{p} \geq t'$, de l'ordre $\frac{1}{n}$. On en conclut que $\mu'_{n,p}(r)$ satisfait à une inégalité de même forme que l'inégalité (5); on peut évidemment supposer les suites ε_n et $f_n(p)$ choisies de manière à avoir précisément aussi

$$(6) \quad |\mu'_{n,p}(r) - l| \mathbf{L}n < \varepsilon_n f_n(p).$$

10. *Remarque.* — On constate facilement que, posant

$$\frac{r}{r_p} = \left(\frac{n}{p - \nu'} \right)^{\mu'_{n,p}(r)},$$

il faut prendre $\nu' = \nu$ pour obtenir l'inégalité précédente.

11. *Produits canoniques dont les racines forment une suite orientée.*
 — Soient une suite orientée, ρ l'ordre (égal à $\frac{1}{l}$) du produit canonique correspondant, k son genre, z la variable ($z = re^{i\theta}$). Posons

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} P_k(u) = (1-u)e^{\frac{n}{1} + \frac{n^2}{2} + \dots + \frac{n^k}{k}}, \\ P(z) = \prod_1^{\infty} P_k\left(\frac{z}{\alpha_p}\right), \\ \varphi_p = \theta - \alpha_p, \quad \varphi = \theta - \alpha, \quad \varphi_p = \frac{r}{r_p} = \left(\frac{n+\nu}{p}\right)^{\nu_{n,p}(\nu)}, \quad u_p = \left(\frac{n}{p-\nu}\right)^l. \end{array} \right.$$

Supposons $k < \rho < k+1$, c'est-à-dire ρ non entier. Donnons enfin à z une valeur différente des racines.

Nous nous proposerons d'étudier les valeurs asymptotiques du produit et de sa dérivée logarithmique. Les applications du premier calcul se devinent, celles du second ont trait aux relations qui existent entre les racines de la fonction (ou de fonctions qui s'y rattachent simplement) et celles de sa dérivée.

12. *Substitution d'une intégrale définie à LP(z).* — On a

$$(8) \quad \text{LP}_k\left(\frac{z}{\alpha_p}\right) = \mathbf{H}_p = \mathbf{L}[1 - \varphi_p e^{i\varphi_p}] + \frac{\varphi_p e^{i\varphi_p}}{1} + \frac{\varphi_p^2 e^{2i\varphi_p}}{2} + \frac{\varphi_p^k e^{ki\varphi_p}}{k}.$$

Supposons $\varphi \neq 0$.

Rectifions en quelque sorte l'alignement des racines, en substituant à l'expression précédente la suivante

$$(9) \quad \mathbf{G}_p = \mathbf{L}(1 - u_p e^{i\varphi}) + \frac{u_p e^{i\varphi}}{1} + \frac{u_p^2 e^{2i\varphi}}{2} + \dots + \frac{u_p^k e^{ki\varphi}}{k}.$$

Puis, étalons les racines le long de la demi-droite qui les porte, en remplaçant $\sum_1^{\infty} \mathbf{G}_p$ par l'intégrale

$$\int_0^{\infty} f(x) dx,$$

après avoir posé

$$u = \left(\frac{n}{x}\right)^l$$

et

$$(10) \quad f(x) = \mathbf{L}(1 - ue^{i\varphi}) + \frac{ue^{i\varphi}}{1} + \frac{u^2 e^{2i\varphi}}{2} + \dots + \frac{u^k e^{ki\varphi}}{k} = f_1(x) + if_2(x).$$

On a

$$(11) \quad \int_{x'}^{x''} f(x) dx = [xf(x)]_{x'}^{x''} \\ + l \int_{x'}^{x''} \frac{-\left(\frac{n}{x}\right)^{(k+1)l} \cos(k+1)\varphi + \left(\frac{n}{x}\right)^{(k+2)l} \cos k\varphi}{1 - 2\left(\frac{n}{x}\right)^l \cos \varphi + \left(\frac{n}{x}\right)^{2l}} dx \\ + li \int_{x'}^{x''} \frac{\left(\frac{n}{x}\right)^{(k+2)l} \sin k\varphi - \left(\frac{n}{x}\right)^{(k+1)l} \sin(k+1)\varphi}{1 - 2\left(\frac{n}{x}\right)^l \cos \varphi + \left(\frac{n}{x}\right)^{2l}} dx.$$

D'ailleurs $xf(x)$ est nul pour $x=0$ et pour $x=+\infty$. Nous sommes donc ramenés au calcul des deux intégrales réelles entre les deux limites 0, $+\infty$. On devra (et ce sera l'objet du Chapitre II) montrer que l'on obtient bien par cette méthode la partie principale de $\mathbf{LP}(z)$.

13. *Substitution d'une intégrale définie à $\frac{\mathbf{P}'(z)}{z^{k-1}\mathbf{P}(z)}$.* — On a

$$\frac{1}{z^{k-1}} \frac{d}{dz} \mathbf{LP}_k\left(\frac{z}{a_p}\right) = - \frac{c_p^{k+1} e^{i[(k+1)(\varphi_p - \varphi) + \varphi - k\alpha]}}{r^k (1 - c_p e^{i\varphi_p})} = \mathbf{R}_p.$$

A cette expression nous substituons, en remplaçant comme plus haut φ_p par φ et c_p par u_p ,

$$\mathbf{Q}_p = - \frac{u_p^{k+1} e^{i(\varphi - k\alpha)}}{r^k (1 - u_p e^{i\varphi})},$$

et, à la place de la série $\sum_1^{\infty} \mathbf{Q}_p$, nous envisageons l'intégrale

$$- \int_0^{\infty} \frac{\left(\frac{n}{x}\right)^{(k+1)l} e^{i(\varphi - k\alpha)}}{r^k \left[1 - \left(\frac{n}{x}\right)^l e^{i\varphi}\right]} dx,$$

c'est-à-dire

$$\frac{e^{-lk\alpha}}{r^k} \left\{ \int_0^\infty \frac{\left(\frac{n}{x}\right)^{(k+2)l} - \left(\frac{n}{x}\right)^{(k+1)l} \cos \varphi}{1 - 2\left(\frac{n}{x}\right)^l \cos \varphi + \left(\frac{n}{x}\right)^{2l}} dx \right. \\ \left. - i \int_0^\infty \frac{\left(\frac{n}{x}\right)^{(k+1)l} \sin \varphi}{1 - 2\left(\frac{n}{x}\right)^l \cos \varphi + \left(\frac{n}{x}\right)^{2l}} dx \right\}.$$

Ici encore, nous aurons à préciser une limite de l'erreur commise. Nous allons d'abord étudier les intégrales que nous venons d'introduire dans ces deux paragraphes et qui rentrent pour $x' = 0$ et $x'' = +\infty$ dans les types suivants :

$$\mathbf{I}_{x'}^{x''} = \int_{x'}^{x''} \frac{\left(\frac{x}{n}\right)^{(k+2)l} \cos q\varphi - \left(\frac{x}{n}\right)^{(k+1)l} \cos(q+1)\varphi}{1 - 2\left(\frac{n}{x}\right)^l \cos \varphi + \left(\frac{n}{x}\right)^{2l}} dx, \\ \mathbf{J}_{x'}^{x''} = \int_{x'}^{x''} \frac{\left(\frac{n}{x}\right)^{(k+1)l} \sin(q+1)\varphi - \left(\frac{n}{x}\right)^{(k+2)l} \sin q\varphi}{1 - 2\left(\frac{n}{x}\right)^l \cos \varphi + \left(\frac{n}{x}\right)^{2l}} dx.$$

14. *Calculs préliminaires.* — Nous supposerons $0 < \varphi \leq \pi$. Nous examinerons d'abord le cas où l est commensurable, $l = \frac{r}{s}$ (r et s premiers entre eux, avec l'hypothèse r impair; la signification habituelle de r est provisoirement laissée de côté). Nous poserons, en introduisant la variable positive t ,

$$x = t^s, \quad n = \tau^s, \quad x' = t_1^s, \quad x'' = t_2^s, \\ r = 2p + 1, \quad s - kr = j \quad \left(j \geq 1, \frac{j}{r} < 1 \right), \\ \mathbf{K}_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{[\tau^r \cos q\varphi - t^r \cos(q+1)\varphi] t^{j-1}}{t^{2r} - 2\tau^r t^r \cos \varphi + \tau^{2r}} dt, \\ \mathbf{L}_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{[t^r \sin(q+1)\varphi - \tau^r \sin q\varphi] t^{j-1}}{t^{2r} - 2\tau^r t^r \cos \varphi + \tau^{2r}} dt;$$

on aura

$$I'_i = s\tau^{(k+1)r} K'_i, \quad J'_i = s\tau^{(k+1)r} L'_i.$$

Soient encore

$$L \cos \omega + K \sin \omega = M,$$

ω étant un angle quelconque et, par abréviation,

$$q\varphi - \omega = \mu,$$

$$A'_i = \int_{t_i}^{t'_i} \frac{(\tau^r - t^r \cos \varphi) t^{j-1}}{t^{2r} - 2\tau^r t^r \cos \varphi + \tau^{2r}} dt,$$

$$B'_i = \int_{t_i}^{t'_i} \frac{t^{r+j-1} \sin \varphi}{t^{2r} - 2\tau^r t^r \cos \varphi + \tau^{2r}} dt,$$

on aura

$$M'_i = B'_i \cos \mu - A'_i \sin \mu$$

et l'on est ramené aux intégrales A et B.

15. *Intégrale A.* — Pour évaluer l'intégrale indéfinie

$$A^t = \int \frac{(\tau^r - t^r \cos \varphi) t^{j-1}}{t^{2r} - 2\tau^r t^r \cos \varphi + \tau^{2r}} dt,$$

nous décomposons la fonction en éléments simples; nous obtenons ainsi

$$\begin{aligned} r\tau^{r-j} A^t = & \frac{1}{2} \sum_{-p}^{+p} -\cos \frac{j}{r}(\varphi + 2h\pi) \mathbf{L} \left(t^2 - 2t\tau \cos \frac{\varphi + 2h\pi}{r} + \tau^2 \right) \\ & + \sum_{-p}^{+p} \sin \frac{j}{r}(\varphi + 2h\pi) \operatorname{arc tang} \frac{t - \tau \cos \frac{\varphi + 2h\pi}{r}}{\tau \sin \frac{\varphi + 2h\pi}{r}}. \end{aligned}$$

Nous conviendrons de prendre la détermination de l'arc tang entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$. On a, pour $0 \leq x < 1$,

$$\operatorname{arc tang} \frac{x - \cos \xi}{\sin \xi} = \lambda\pi + \frac{\pi}{2} + \xi + x \sin \xi + \frac{x^2}{2} \sin 2\xi + \frac{x^3}{3} \sin 3\xi + \dots,$$

λ étant entier. Si $\xi = \frac{\varphi + 2h\pi}{r}$, on constate aisément qu'il faut prendre

$$\lambda = 0 \quad \text{pour} \quad h < 0$$

et

$$\lambda = -1 \quad \text{pour} \quad h \geq 0.$$

De même, pour $0 \leq x < 1$,

$$\text{arc tang} \frac{1 - x \cos \xi}{x \sin \xi} = \lambda \pi + \frac{\pi}{2} - \left(x \sin \xi + \frac{x^2}{2} \sin 2\xi + \frac{x^3}{3} \sin 3\xi + \dots \right)$$

avec

$$\lambda = -1 \quad \text{pour} \quad h < 0$$

et

$$\lambda = 0 \quad \text{pour} \quad h \geq 0.$$

Cela posé, *supposons d'abord* $\frac{t}{\tau} < 1$.

Si l'on observe que

$$\sum_1^p h \sin \frac{2h\pi j}{r} = \frac{\cos \frac{\pi j}{r} - \cos \pi j}{2 \sin \frac{\pi j}{r}}$$

et que

$$\frac{2}{r} \sum_{-p}^{+p} h \sin \frac{j}{r} (\varphi + 2h\pi) = - \frac{\cos \frac{j\varphi}{r} \cos \pi j}{\sin \frac{\pi j}{r}},$$

on en conclut que

$$\begin{aligned} r \tau^{r-j} \Lambda^t = & - \frac{\pi \left[\cos \frac{(\pi - \varphi)j}{r} + \cos \pi j \cos \frac{j\varphi}{r} \right]}{2 \sin \frac{\pi j}{r}} \\ & + r \left(\frac{1}{j} \frac{t^j}{\tau^j} + \frac{\cos \varphi}{j+r} \frac{t^{j+r}}{\tau^{j+r}} + \frac{\cos 2\varphi}{j+2r} \frac{t^{j+2r}}{\tau^{j+2r}} + \dots \right) \end{aligned}$$

ou bien

$$r \tau^{r-j} \Lambda^t = - \frac{\pi \left[\cos \frac{(\pi - \varphi)j}{r} + \cos \pi j \cos \frac{j\varphi}{r} \right]}{2 \sin \frac{\pi j}{r}} + r \int_0^{\frac{t}{\tau}} \frac{x^{j-1} (1 - x^r \cos \varphi)}{1 - 2x^r \cos \varphi + x^{2r}} dx.$$

Il semble que l'on n'ait rien gagné à cette intégration, puisqu'elle introduit une intégrale qui ne diffère de celle que l'on veut étudier que par une constante. Mais *supposons à présent* $\frac{t}{\tau} > 1$; en opérant comme plus haut, on trouve la nouvelle forme

$$r^{\tau r - j} \Lambda^t = \frac{\pi \left[\cos \frac{(\pi - \varphi)j}{r} - \cos \pi j \cos \frac{j\varphi}{r} \right]}{2 \sin \frac{\pi j}{r}} + r \left(\frac{\cos \varphi}{r - j} \frac{\tau^{r-j}}{t^{r-j}} + \frac{\cos 2\varphi}{2r - j} \frac{\tau^{2r-j}}{t^{2r-j}} + \dots \right)$$

ou

$$r^{\tau r - j} \Lambda^t = \frac{\pi \left[\cos \frac{(\pi - \varphi)j}{r} - \cos \pi j \cos \frac{j\varphi}{r} \right]}{2 \sin \frac{\pi j}{r}} + r \int_0^{\frac{\tau}{t}} \frac{x^{r-j-1} (\cos \varphi - x^r)}{1 - 2x^r \cos \varphi + x^{2r}} dx.$$

Cette dernière intégrale peut s'écrire

$$- \int_{\frac{t}{\tau}}^{\infty} \frac{x^{j-1} (1 - x^r \cos \varphi)}{1 - 2x^r \cos \varphi + x^{2r}} dx.$$

Si nous remarquons que Λ^t et les deux expressions que nous venons d'en trouver selon le cas sont des fonctions analytiques de t , uniformes quand la variable est réelle, nous en concluons l'égalité de ces deux expressions.

Nous avons ainsi

$$r \int_0^{\infty} \frac{(1 - x^r \cos \varphi) x^{j-1}}{1 - 2x^r \cos \varphi + x^{2r}} dx = \frac{\pi \cos \frac{(\pi - \varphi)j}{r}}{\sin \frac{\pi j}{r}}$$

et, par suite,

$$\Lambda_0^\infty = \frac{\tau^j}{r} \frac{\pi \cos \frac{(\pi - \varphi)j}{r}}{\sin \frac{\pi j}{r}}.$$

16. *Intégrale B.* — Nous traiterons l'intégrale

$$B^t = \int \frac{t^{r+j-1} \sin \varphi}{t^{2r} - 2\tau^r t^r \cos \varphi + \tau^{2r}} dt$$

d'une façon analogue. On a

$$r^{\tau r-j} B^{\iota} = \frac{1}{2} \sum_{-p}^{+p} \sin \frac{j}{r} (\varphi + 2h\pi) L \left(\iota^2 - 2\iota\tau \cos \frac{\varphi + 2h\pi}{r} + \tau^2 \right) \\ + \sum_{-p}^{+p} \cos \frac{j}{r} (\varphi + 2h\pi) \operatorname{arc tang} \frac{\iota - \tau \cos \frac{\varphi + 2h\pi}{r}}{\tau \sin \frac{\varphi + 2h\pi}{r}}.$$

Pour $\frac{\iota}{\tau} < 1$, on trouve

$$r^{\tau r-j} B^{\iota} = - \frac{\pi \left[\sin \frac{(\pi - \varphi)j}{r} - \cos \pi j \sin \frac{j\varphi}{r} \right]}{2 \sin \frac{\pi j}{r}} + r \int_0^{\frac{\iota}{\tau}} \frac{x^{j+r-1} \sin \varphi}{1 - 2x^r \cos \varphi + x^{2r}} dx$$

et, pour $\frac{\iota}{\tau} > 1$,

$$r^{\tau r-j} B^{\iota} = \frac{\pi \left[\sin \frac{(\pi - \varphi)j}{r} + \cos \pi j \sin \frac{j\varphi}{r} \right]}{2 \sin \frac{\pi j}{r}} - r \int_{\frac{\iota}{\tau}}^{+\infty} \frac{x^{j+r-1} \sin \varphi}{1 - 2x^r \cos \varphi + x^{2r}} dx;$$

d'où, en égalant comme plus haut les deux expressions,

$$B_0^{\infty} = \frac{\tau^{j-r}}{r} \frac{\pi \sin \frac{(\pi - \varphi)j}{r}}{\sin \frac{\pi j}{r}}.$$

17. *Valeurs des intégrales* I_0^{∞} et J_0^{∞} . — Des expressions de A_0^{∞} et B_0^{∞} on déduit

$$M_0^{\infty} = \frac{\pi \sin [(\rho - k)(\pi - \varphi) - \mu]}{r^{\tau(k+1)r-s} \sin(\rho - k)\pi}, \\ I_0^{\infty} = \rho \pi n \frac{\sin \left[(\rho - k)(\pi - \varphi) + \frac{\pi}{2} - q\varphi \right]}{\sin(\rho - k)\pi}, \\ J_0^{\infty} = \rho \pi n \frac{\sin [(\rho - k)(\pi - \varphi) - q\varphi]}{\sin(\rho - k)\pi}.$$

Il est vrai que ces égalités n'ont été établies que pour ρ commensu-

rable et de la forme $\frac{s}{r}$, r étant impair. Mais, comme pour chacune d'elles les deux membres sont fonctions continues de ρ , les formules sont toujours exactes ($\rho \neq k$).

18. *Nombre des racines d'une suite orientée de module inférieur à r . Densités relatives des suites.* — Dans les deux Chapitres qui suivent nous allons montrer que, sauf dans certaines régions, les rapports des expressions $LP(z)$, $\frac{P'(z)}{z^{k-1}P(z)}$ aux intégrales qui leur sont substituées tendent uniformément vers 1 quand $|z|$ est infiniment grand. Or, de ces intégrales, la première contient n , la deuxième n et r . Peut-on conserver à volonté l'une de ces quantités qui dépendent l'une de l'autre? Nous allons voir que cela est impossible si l'on veut conserver le degré d'approximation obtenu. Cette question se ramène, au fond, à celle-ci : que sait-on sur le nombre des racines d'une suite orientée d'ordre ρ qui sont, en modules, inférieures à r ?

En premier lieu (§ 8), deux suites homothétiques par rapport à l'origine sont évidemment orientées en même temps. Pour deux pareilles suites, le quotient des modules des $n^{\text{ièmes}}$ racines est égal au rapport A d'homothétie et le rapport des nombres de racines de module inférieur à r tend, pour r infini, vers A^ρ . Cette simple remarque suffit à justifier notre proposition :

Il faut laisser les quantités n et r telles qu'elles sont introduites dans les intégrales pour bénéficier du degré d'approximation obtenu.

En second lieu, voyons dans quelle mesure on peut préciser le nombre des racines de module plus petit que r ? Nous supposons, pour simplifier, que la suite orientée a été transformée par homothétie, de manière que le module de la première racine soit l'unité.

Posons

$$\frac{1}{r_n} = \sigma_n;$$

on a l'identité

$$r_{n+1}^{\sigma_{n+1}} = r_n^{\sigma_n} + 1,$$

puisque

$$n = r_n^{\sigma_n}.$$

D'ailleurs

$$(\sigma_n - \rho) Lr_n = -\rho u_n.$$

Appelons cette quantité v_n (ou v'_r). Nous avons vu que $\frac{u_n}{LLn}$ tend vers zéro, on en déduit qu'il en est de même de $\frac{v'_r}{LLr}$.

La condition (2) devient

$$\lim (v_{n+1} - v_n) nLn = 0.$$

Soit donc une telle variable; on a

$$n = r^\varphi e^{v'_r};$$

de même une autre suite donnera

$$n' = r^\varphi e^{w'_r},$$

w'_r étant analogue à v'_r .

Par suite

$$\frac{n}{n'} = e^{v'_r - w'_r}.$$

Or la condition (2) n'exige nullement que v'_r et w'_r tendent vers 0; elle peut être réalisée si ces quantités et, par suite, leur différence sont de l'ordre de $\frac{LLr}{LLLr}$.

Il en résulte que le rapport $\frac{n}{n'}$ peut n'avoir aucune limite. Il en est évidemment de même des deux suites primitivement données. Si, pour elles, $\frac{n}{n'}$ a une limite, elle sera dite la *densité* de la première suite par rapport à la seconde. *Cette notion jouera un rôle important plus tard et s'étend à deux suites quelconques.*

Il est intéressant de remarquer que comme limites extrêmes (non atteintes) du rapport $\frac{n}{n'}$, on trouve Lr (1).

(1) Dans son très intéressant *Mémoire sur la théorie des fonctions entières de genre fini*, pages 49 et suivantes, M. Ernst Lindelöf a donné des formules dont quelques-unes sont équivalentes aux expressions asymptotiques que nous établissons. Mais les hypothèses faites étaient différentes : les a_n positifs, φ constant et différent de zéro.

Enfin, on a certainement, puisque $\varphi'_r = \varepsilon_n \text{L.L.}r$,

$$n = r^{\rho + \frac{\varepsilon_n \text{L.L.}r}{\text{L.L.}r}}.$$

Il est d'ailleurs évident que, si deux suites ont la même densité, elles ont le même ordre.

CHAPITRE II.

VALEUR ASYMPTOTIQUE D'UN PRODUIT CANONIQUE DONT LES ZÉROS FORMENT UNE SUITE ORIENTÉE, L'ORDRE N'ÉTANT PAS ENTIER.

1. *Position du problème.* — Conservons, sauf indications contraires, les notations du Chapitre I. Comme valeur approximative de $\text{LP}(z)$, nous avons, pour $0 \leq \varphi \leq \pi$,

$$(1) \quad n\pi \frac{\cos[\rho\varphi - (\rho - k)\pi] + i \sin[\rho\varphi - (\rho - k)\pi]}{\sin(\rho - k)\pi}.$$

Il faut préciser la nature de cette approximation. Nous prouverons que si, de chaque racine α_n comme centre, on trace un cercle C_n dont le rayon est une fraction arbitraire, mais fixe, de la distance au centre voisin et si l'on exclut ces cercles du domaine de la variable, on a, dans la région conservée,

$$(2) \quad \text{P}(z) = e^{n\pi \frac{e^{i[\rho\theta - \alpha] - (\rho - k)\pi}}{\sin(\rho - k)\pi} (1 + \varepsilon_n)},$$

avec le signe $+$ pour $\alpha \leq \theta \leq \alpha + \pi$, le signe $-$ pour $\alpha - \pi \leq \theta \leq \alpha$, et ε_n tendant vers 0 pour n infiniment grand.

Pour effectuer cette démonstration, que nous pouvons évidemment limiter au cas de $0 \leq \varphi$, nous procéderons par plusieurs étapes.

Posons

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_p &= \mathbf{V}_p + i\mathbf{V}'_p, \\ \mathbf{G}_p &= \mathbf{U}_p + i\mathbf{U}'_p, \\ \mathbf{K}_p &= \mathbf{L}(1 - v_p e^{i\varphi}) + \frac{v_p e^{i\varphi}}{1} + \frac{v_p^2 e^{2i\varphi}}{2} + \dots + \frac{v_p^k e^{ki\varphi}}{k} = \mathbf{W}_p + i\mathbf{W}'_p \end{aligned}$$

et enfin, avec $x_p = \left(\frac{n+\nu}{p}\right)^l$,

$$\mathbf{Q}_p = \mathbf{L}(1 - x_p e^{i\varphi}) + \frac{x_p e^{i\varphi}}{1} + \frac{x_p^2 e^{2i\varphi}}{2} + \dots + \frac{x_p^k e^{ki\varphi}}{k} = \mathbf{X}_p + i\mathbf{X}'_p.$$

Nous montrerons que l'on peut passer successivement, en introduisant des erreurs infiniment petites par rapport à n , de $\sum \mathbf{V}_p$ à $\sum \mathbf{U}_p$ par l'intermédiaire de $\sum \mathbf{W}_p$ et de $\sum \mathbf{X}_p$. On peut ensuite, si φ n'est pas très petit (locution qui sera précisée), faire varier r de r_n à r_{n+1} .

Or, pour une certaine valeur de r , la valeur exacte de $\sum \mathbf{U}_p$ sera fournie par l'expression $n\pi \frac{\cos[\rho\varphi - (\rho - k)\pi]}{\sin(\rho - k)\pi}$. Enfin, pour ces petites valeurs de φ dont nous venons de parler, nous pourrons (toujours avec une erreur négligeable) faire tendre φ vers 0 dans $\sum \mathbf{V}_p$ en restant simplement en dehors des petits cercles.

Cette marche s'applique également aux sommes accentuées : nous mènerons les deux calculs de front.

Pour faciliter le langage, je dirai qu'une expression \mathbf{E} , pour laquelle on cherche une limite maxima (ou minima) du module, est *comparable supérieurement* (ou *inférieurement*) à une autre \mathbf{E}' lorsque $\left|\frac{\mathbf{E}'}{\mathbf{E}}\right|$ est supérieur (ou inférieur) à une quantité *positive* fixe, indépendante des variables figurant dans \mathbf{E} et dans \mathbf{E}' . Il est clair que, si l'on considère une suite finie d'expressions telles que chacune d'elles soit comparable à la suivante et si l'on connaît une limite maxima (ou minima) du module de la dernière, cette limite, multipliée par une certaine constante (*sans aucun intérêt dans les questions que nous avons à traiter*), servira également pour la première de toutes.

Lorsque \mathbf{E} est comparable à la fois supérieurement et inférieure-

ment à E' , ou lorsqu'il n'y a pas de doute sur le sens qu'implique le calcul poursuivi, on dira plus brièvement que E est comparable à E' .

2. *Substitution à $\sum V_p$ et à $\sum V'_p$ de $\sum W_p$ et $\sum W'_p$.* — Posons

$$\varphi_p - \varphi = \psi_p.$$

Nous avons

$$V_p = W_p + \psi_p \left(\frac{\partial V_p}{\partial \varphi_p} \right)_{\varphi + \iota_p \psi_p} \quad (0 < \iota_p < 1).$$

D'ailleurs

$$V_p = \frac{1}{2} L(1 - 2v_p \cos \varphi_p + v_p^2) + \frac{v_p \cos \varphi_p}{1} + \frac{v_p^2 \cos 2\varphi_p}{2} + \dots + \frac{v_p^k \cos k\varphi_p}{k}$$

et, si l'on pose

$$\varphi + \iota_p \psi_p = \varphi'_p,$$

on a à évaluer une limite supérieure de

$$\sum \psi_p \frac{v_p^{k+1} \sin(k+1)\varphi'_p - v_p^{k+2} \sin k\varphi'_p}{1 - 2v_p \cos \varphi'_p + v_p^2} = \sum T_p.$$

De même

$$V'_p = W'_p + \psi_p \left(\frac{\partial V'_p}{\partial \varphi_p} \right)_{\varphi + \iota'_p \psi_p}$$

et

$$V'_p = - \text{arc tang} \frac{\sin \varphi_p}{1 - v_p \cos \varphi_p} + \frac{v_p \sin \varphi_p}{1} + \frac{v_p^2 \sin 2\varphi_p}{2} + \dots + \frac{v_p^k \sin k\varphi_p}{k}.$$

Posant encore

$$\varphi + \iota'_p \psi_p = \varphi'_p$$

(l'ambiguïté est sans inconvénient), on a aussi à trouver une limite de

$$\sum \psi_p \frac{v_p^{k+2} \cos k\varphi'_p - v_p^{k+1} \cos(k+1)\varphi'_p}{1 - 2v_p \cos \varphi'_p + v_p^2} = \sum T'_p.$$

Dans ce calcul et dans les suivants nous désignerons par a' et a'' deux nombres positifs fixes, le premier inférieur, le second supérieur à 1.

A ces nombres correspondent deux valeurs de p , $p' < n < p''$, telles que, pour

$$\begin{array}{lll} p \geq p'', & \text{on a} & v_p \leq \alpha'; \\ p' < p < p'', & \text{»} & \alpha' < v_p < \alpha''; \\ p \leq p', & \text{»} & \alpha'' \leq v_p. \end{array}$$

Si l'on considérait, au lieu de v_p , soit x_p , soit u_p , on introduirait des valeurs de p un peu différentes de p' et de p'' . Nous les désignerons néanmoins par les mêmes lettres, car il n'en résultera aucun inconvénient.

Observons à présent (Chap. I, § 9) que, si $l' < l < l''$, on peut supposer n assez grand pour que, quel que soit p , l'on ait

$$l' < \nu_{n,p}(r) < l''.$$

Enfin

$$(3) \quad |p \psi_p| \leq \eta_p,$$

η_p tendant vers 0 en décroissant.

Cela posé, examinons différents cas :

1° $v_p \leq \alpha'$. — T_p est le produit de $\psi_p v_p^{k+1}$ par une quantité limitée, de module maximum α , quel que soit φ'_p .

Donc

$$\left| \sum T_p \right| < \alpha \eta_n (n + \nu)^{l'(k+1)} \sum_{p''}^{\infty} \frac{1}{p^{l'(k+1)+1}} < \frac{\alpha}{l'} \eta_n \left(\frac{n + \nu}{p'' - 1} \right)^{l'(k+1)}.$$

D'ailleurs

$$\frac{n + \nu}{p'' - 1} < 1,$$

l'expression considérée est donc infiniment petite (pour n infiniment grand).

Même calcul et même résultat pour $\sum T'_p$.

2° $\alpha'' \leq v_p$. — T_p est le produit de $\psi_p v_p^k$ par une quantité limitée, de module maximum α , quel que soit φ'_p ; la variable η_p a un maximum β .

Donc

$$\left| \sum T_p \right| < \alpha \beta (n + \nu)^{l''k} \sum_{p'}^{\infty} \frac{1}{p^{l''k+1}}.$$

Cette dernière somme est limitée, l' peut être supposé tel que $l'k < 1$, donc l'expression trouvée est de la forme $n\varepsilon_n$.

Résultat identique pour $\sum T'_p$.

3° $\alpha' < \varphi_p < \alpha''$. — Remarquons d'abord que, si l'on suppose φ supérieur à une quantité fixe, il en est de même de

$$1 - 2v_p \cos \varphi'_p + v_p^2$$

et, par conséquent,

$$\left| \sum T_p \right| \quad \text{et} \quad \left| \sum T'_p \right|$$

sont supérieurement comparables à

$$\eta_{p'} \sum_{p'}^{p''} \frac{1}{p'}$$

ou, $\frac{p''}{p'}$ étant limité, à $\eta_{p'}$.

Le seul cas intéressant est donc celui des petits arcs.

Soient M, A_n , A_{n+1} les points figuratifs de la variable z et des racines α_n , α_{n+1} . Nous supposons que le point M reste en dehors de cercles C_n , C_{n+1} ayant pour centres A_n et A_{n+1} et dont les rayons sont des fractions déterminées de la distance $A_n A_{n+1}$. Interprétons ces conditions; on doit avoir

$$\frac{\overline{A_n M}^2}{\overline{A_n A_{n+1}}^2} = \frac{\left(\frac{r}{r_n}\right)^2 + 1 - 2\frac{r}{r_n} \cos \varphi_n}{\left(\frac{r_{n+1}}{r_n}\right)^2 + 1 - 2\frac{r_{n+1}}{r_n} \cos(\varphi_{n+1} - \varphi_n)} > \lambda \quad (0 < \lambda < 1)$$

ou bien

$$1 - 2v_n \cos \varphi_n + v_n^2 > \frac{l^2 \lambda'^2}{n^2} \quad (\lambda' \text{ voisin de } \lambda).$$

Si l'on observe que $1 - 2v_n \cos \varphi_n + v_n^2$ pouvant s'écrire

$$(v_n - 1)^2 + 4v_n \sin^2 \frac{\varphi_n}{2},$$

l'une des quantités $|v_n - 1|$, $|\varphi_n|$ est au moins d'ordre $\frac{1}{n}$, on en conclut

que les expressions

$$1 - 2v_n \cos \varphi'_n + v_n^2, \quad 1 - 2x_n \cos \varphi'_n + x_n^2, \quad 1 - 2u_n \cos \varphi'_n + u_n^2$$

sont aussi au moins d'ordre $\frac{1}{n^2}$.

La condition relative au cercle A_{n+1} se traduit par des inégalités analogues relatives à l'indice $n+1$.

En d'autres termes, les inverses des expressions précédentes, soit

$$\frac{1}{1 - 2v_n \cos \varphi'_n + v_n^2}, \quad \frac{1}{1 - 2v_{n+1} \cos \varphi'_{n+1} + v_{n+1}^2}, \quad \dots,$$

sont comparables à n^2 .

Cela posé, T_n et T_{n+1} sont comparables à $n\eta_n$.

Pour les autres valeurs de p , on peut successivement remplacer

$$T_p \quad \text{par} \quad \frac{\psi_p}{(v_p - 1)^2}, \quad \frac{\psi_p p^2}{(n + v - p)^2}, \quad \frac{r_p p}{(n - p)^2}$$

et $\sum T_p$ ($p = n$ et $p = n + 1$ étant exclus) est comparable à

$$r_p \cdot n \left(\sum_{p'}^{n-1} \frac{1}{(n - p)^2} + \sum_{a=2}^{p''} \frac{1}{(p - n)^2} \right),$$

c'est-à-dire à $n\eta_{p'}$.

Donc $\sum_{p'}^{p''} T_p$ peut se mettre sous la forme $n\epsilon_n$.

Tout ceci s'applique également à $\sum T'_p$.

3. *Substitution à $\sum W_p$ et à $\sum W'_p$ de $\sum X_p$ et de $\sum X'_p$.* — Posons

$$v_p - x_p = \delta x_p,$$

nous aurons

$$W_p = X_p + \delta x_p \left(\frac{\partial W_p}{\partial v_p} \right)_{\xi_p} \quad (x_p \leq \xi_p \leq v_p),$$

ξ_p peut s'écrire sous la forme $\left(\frac{n+\nu}{p}\right)^{m_{n,p}}$, $m_{n,p}$ étant compris entre $\mu_{n,p}$ et l .

L'erreur à évaluer est donc

$$\sum \partial x_p \frac{-\xi_p^k \cos(k+1)\varphi + \xi_p^{k+1} \cos k\varphi}{1 - 2\xi_p \cos \varphi + \xi_p^2} = \sum T_p.$$

De même, la substitution de $\sum X'_p$ à $\sum W'_p$ nous conduit à chercher une limite supérieure de

$$\sum \partial x_p \frac{\xi_p^{k+1} \sin k\varphi - \xi_p^k \sin(k+1)\varphi}{1 - 2\xi_p \cos \varphi + \xi_p^2} = \sum T'_p,$$

ξ_p n'a pas la même valeur dans T_p et T'_p , ce qui ne présente aucun inconvénient.

Rappelons que, si $l' < l < l''$, on peut supposer n assez grand pour que l'on ait, quel que soit p ,

$$l' < \mu_{n,p} < l''.$$

Rappelons aussi (Chap. I, § 9) que l'on a

$$|\mu_{n,p} - l| < \frac{\varepsilon_n \mathbf{L} \mathbf{L} n}{\mathbf{L} n} = \varepsilon'_n.$$

Dans ce qui suit, t_n désignera une variable infiniment grande telle que $t_n^{\varepsilon_n}$ tende vers 1 (il suffit, par exemple, de prendre $t_n = e^{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_n}}}$) et l'on posera

$$t_n^{\varepsilon_n} - 1 = \varepsilon''_n \quad (\varepsilon''_n > 0):$$

1° $\xi_p \leq \alpha'$. — $\frac{T_p}{\partial x_p}$ est comparable à ξ_p^k , et T_p à

$$\left(\frac{n}{p}\right)^{l(k+1)} \left[1 - \left(\frac{n}{p}\right)^{\varepsilon''_n}\right].$$

Soit

$$\frac{p_1}{n} \leq t_n < \frac{p_1 + 1}{n}.$$

De p'' à p_1 , l'expression précédente est inférieure à $\left(\frac{n}{p}\right)^{l'(k+1)} \varepsilon_n''$, d'où, en sommant,

$$\left| \sum_{p''}^{p_1} T_p \right| < n \left(\frac{n}{p''}\right)^{l'(k+1)-1} \varepsilon_n'' \quad (\text{à un facteur fixe près}).$$

De p_1 à $+\infty$, l'erreur est comparable à

$$n^{l'(k+1)} \sum_{p_1}^{\infty} \frac{1}{p^{l'(k+1)}}$$

ou à

$$n \frac{1}{l_n^{l'(k+1)-1}};$$

mais

$$l'(k+1) - 1 > 0;$$

donc ce résultat est encore de la forme annoncée.

2° $\alpha'' \leq \xi_p$. — T_p est comparable à

$$\left(\frac{n}{p}\right)^{l''k} \left[\left(\frac{n}{p}\right)^{\varepsilon_n''} - 1 \right].$$

Soit

$$\frac{p_2}{n} \leq \frac{1}{l_n} < \frac{p_2 + 1}{n}.$$

De $p = 1$ à $p = p_2$, l'erreur précédente est inférieure à $\left(\frac{n}{p}\right)^{l''k + \varepsilon_n''}$, ce qui donne, en sommant,

$$n \frac{1}{l_n^{l''k + \varepsilon_n''}};$$

or $l''k + \varepsilon_n'' < 1$.

De p_2 à p' , l'erreur est plus petite que $\left(\frac{n}{p}\right)^{l''k''} \varepsilon_n''$, ce qui donne, au total,

$$n \left(\frac{n}{p'}\right)^{l''k''-1} \varepsilon_n''.$$

C'est encore le résultat attendu.

3° $\alpha' < \xi_p < \alpha''$. — δx_p est comparable à $\varepsilon_n' \frac{|n + \nu - p|}{p}$.

Par suite, T_n et T_{n+1} peuvent être remplacés par $n\varepsilon'_n$.

Pour les autres valeurs de p , on compare successivement

$$T_p \quad \text{à} \quad \frac{\varepsilon'_n |n + \nu - p|}{p} \frac{p^2}{|n + \nu - p|^2},$$

puis à

$$\frac{n\varepsilon'_n}{|n - p|};$$

d'où, en sommant,

$$n\varepsilon'_n \left(\sum_{p'}^{n-1} \frac{1}{n-p} + \sum_{n+2}^{p''} \frac{1}{p-n} \right).$$

L'erreur est donc comparable à $n(\varepsilon'_n L n)$.

Or (Chap. I, § 6), si $p > p'$ (en sorte que $\frac{n}{p}$ soit inférieur à un nombre fixe l''), on peut, ε_n étant toujours un infiniment petit, écrire

$$|\mu_{n,p} - l| < \frac{\varepsilon_n}{L n} = \varepsilon'_n;$$

donc l'expression que nous venons de trouver est $n\varepsilon_n$; elle est bien de la forme annoncée.

Tout ce calcul s'applique aux T'_p .

4. *Substitution à $\sum X_p$ et à $\sum X'_p$ de $\sum U_p$ et de $\sum U'_p$.* — Cette nouvelle transformation est immédiate.

On sait que $u_p = \left(\frac{n}{p-\nu}\right)^l$. Posons

$$u_p = \left(\frac{n+\nu}{p}\right)^{m_{n,p}},$$

$m_{n,p}$ satisfait (Chap. I, § 10) aux mêmes conditions que $\mu_{n,p}$. U_p se présente donc sous la même forme que W_p tout à l'heure et, par conséquent, les différences $\sum U_p - \sum X_p$, $\sum U'_p - \sum X'_p$ sont, elles aussi, comparables à $n\varepsilon_n$.

5. *Passage de $\sum U_p$ et de $\sum U'_p$ aux intégrales.* — Voici une remarque préliminaire : soit une fonction $\varphi(x)$ sommable de 0 à $+\infty$; supposons qu'elle présente pour $x = a$, compris entre les entiers p et $p + 1$, un maximum ou un minimum, et que, dans chacun des intervalles 0, a , $a + \infty$, elle varie dans le même sens; désignons par Φ le plus grand des modules de $\varphi(p)$ et $\varphi(p + 1)$ et par S la série $\varphi(1) + \varphi(2) + \dots + \varphi(n) + \dots$, la quantité

$$\left| S - \int_0^{\infty} \varphi(x) dx \right|$$

est inférieure au plus grand des nombres

$$\Phi + \left| \int_0^1 \varphi(x) dx \right|, \quad \left| \int_p^{p+1} \varphi(x) dx \right|.$$

Posons (Chap. I, § 12)

$$f(x - \nu) = \varphi(x) + i\psi(x);$$

on a donc

$$U_n = \varphi(p) \quad \text{et} \quad U'_p = \psi(p).$$

Observons d'abord que les sommes des premiers termes, en nombre limité, des séries U_p , U'_p sont comparables à $n\varepsilon_n$, qu'il en est de même d'une intégrale $\int_0^c f(x) dx$, c étant un nombre fixe, et que, par conséquent, de telles quantités sont négligeables dans notre calcul.

Notons ensuite que $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ sont minimum ou maximum respectivement pour

$$(4) \quad u_x = \left(\frac{n}{x - \nu} \right)^l = \frac{\cos(k + 1)\varphi}{\cos k\varphi}$$

et

$$\left(\frac{n}{x - \nu} \right)^l = \frac{\sin(k + 1)\varphi}{\sin k\varphi}$$

(si toutefois ces valeurs sont positives et, d'après les observations précédentes, supérieures à c).

Or $\psi(x)$ est (quel que soit φ) comparable à $n\varepsilon_n$; il en est donc de même de la différence entre la série $\sum U_p$ et l'intégrale correspondante.

On arrive à la même conclusion pour la série $\sum U_p$. Il convient seulement de porter son attention sur le terme logarithmique. Si l'on considère les valeurs de l'angle φ supérieures par exemple à $e^{-\sqrt{n}}$, le module de ce terme est comparable à \sqrt{n} , il n'y a donc aucune difficulté. Si l'on considère maintenant les valeurs de l'angle inférieures à $e^{-\sqrt{n}}$, on constate sans peine que la valeur de x qui correspond au minimum et qui est racine de l'équation (3) est comprise entre n et $n + 1$. On sait d'ailleurs que

$$|\mathbf{L}[1 - 2a_n \cos \varphi + a_n^2]|, \quad |\mathbf{L}[1 - 2a_{n+1} \cos \varphi + a_{n+1}^2]|$$

sont comparables à L_n . D'autre part, négligeant φ , on voit que

$$\frac{1}{2} |\mathbf{L}(1 - 2a_x \cos \varphi + a_x^2)|$$

est comparable à

$$|\mathbf{L}(x - n - \nu)| + \mathbf{L}(x - \nu);$$

et cette dernière expression, intégrée de n à $n + 1$, est comparable aussi à L_n .

Ainsi, quel que soit l'angle φ , positif, la différence entre la série $U_p + iU'_p$ et l'expression (1) est de module inférieur à $n\varepsilon_n$. Cette conclusion subsiste pour $\varphi = 0$, puisque, pour cette valeur, la série (ν quelconque entre ν' et ν'') et l'expression sont continues.

La proposition énoncée au début du Chapitre II est donc entièrement justifiée.

Il n'est pas sans intérêt de remarquer que, φ étant positif, il existe deux valeurs de ν pour lesquelles les séries U_p et U'_p sont respectivement égales aux parties réelles et imaginaires de l'expression (1).

On a, en effet, pour la série U_p par exemple,

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} f_1(x) dx &= \int_0^1 f_1(x) dx + \int_1^2 f_1(x) dx + \dots + \int_p^{p+1} f_1(x) dx + \dots \\ &= \int_0^1 [f_1(x) + f_1(1+x) + \dots + f_1(p+x) + \dots] dx \\ &= f_1(1-\nu) + f_1(2-\nu) + \dots + f_1(p+1-\nu) + \dots \\ &= U_1 + U_2 + \dots + U_p + \dots \\ &\quad (0 < \nu < 1). \end{aligned}$$

Complément à l'étude précédente. — La valeur asymptotique trouvée pour $LP(z)$ est valable seulement à l'extérieur des cercles C_n entourant les racines. Il est intéressant et facile de voir comment se comporte la fonction dans le voisinage d'une racine. Pénétrons donc dans le cercle C_n . Si l'on supprime dans toutes les séries envisagées plus haut le terme de rang n , rien n'est changé évidemment dans les résultats que fournit leur comparaison. Supprime-t-on les parties correspondantes des deux intégrales? C'est une modification (paragraphe précédent) d'ordre Ln , et partant négligeable. D'ailleurs, dans le facteur isolé $P_n\left(\frac{z}{a_n}\right)$, l'exponentielle est sans intérêt. Donc, à l'intérieur du cercle, on a

$$P(z) = \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{n\pi \frac{e^{+i(\rho)^\nu - a} - (\rho - k)\pi}{\sin(\rho - k)\pi} (1 + z_n)}{1 + z_n}}.$$

CHAPITRE III.

VALEUR ASYMPTOTIQUE DE $\frac{P'(z)}{z^{k-1}P(z)}$, $P(z)$ ÉTANT UN PRODUIT CANONIQUE DE GENRE k DONT LES ZÉROS FORMENT UNE SUITE ORIENTÉE, L'ORDRE N'ÉTANT PAS ENTIER.

1. *Énoncé du problème.* — D'après le Chapitre I, nous avons comme valeur approximative de cette expression, pour $0 < \varphi \leq \pi$,

$$(1) \quad \frac{e^{-ik\alpha} \rho n \pi [\cos(\rho - k)(\pi - \varphi) - i \sin(\rho - k)(\pi - \varphi)]}{r^k \sin(\rho - k)\pi}.$$

Nous allons prouver que, si l'on imagine une région ayant pour axe la direction α , dont l'épaisseur entre les distances r_n et r_{n+1} est vue de l'origine sous l'angle $\frac{1}{nc_n}$ (et qui par conséquent contient les cercles C_n , Chap. II, § 2), on a, à l'extérieur,

$$(2) \quad \frac{P'(z)}{z^{k-1}P(z)} = \frac{\rho n \pi e^{-i(k\alpha \pm (\rho - k)(\pi - |\theta - \alpha|))}}{r^k \sin(\rho - k)\pi} (1 \pm \varepsilon_n),$$

avec le signe $+$ pour $\alpha \leq \theta \leq \alpha + \pi$, le signe $-$ pour $\alpha - \pi \leq \theta \leq \alpha$, ε_n et ε_n étant infiniment petits.

Nous découperons ensuite dans cette région englobant les racines des fragments de couronnes à l'intérieur desquels on pourra du moins déterminer le signe de la partie réelle ou de la partie imaginaire du quotient étudié. Ces résultats nous serviront dans la recherche des racines de la dérivée d'une fonction entière.

Afin de simplifier l'exposé, nous supprimerons partout le facteur $\frac{e^{-ik\alpha}}{r^k}$, nous nous bornerons au cas de $0 < \varphi \leq \pi$, et, *comme toute la première partie de la démonstration aura beaucoup d'analogie avec le Chapitre II*, nous ne reprendrons les calculs que lorsqu'il sera nécessaire de les approfondir davantage. En principe, les notations seront les mêmes.

Indiquons les principales. Comme plus haut

$$v_p = \frac{r}{r_p} = \left(\frac{n+\nu}{p}\right)^{\nu/p}, \quad u_p = \left(\frac{n}{p-\nu}\right)^{\nu}, \quad x_p = \left(\frac{n+\nu}{p}\right)^{\nu}$$

et, d'une manière analogue, en partant de

$$\frac{1}{z^{k-1}} \frac{d}{dz} \text{LP}_k \left(\frac{z}{\alpha_p} \right) = - \frac{v_p^{k+1} e^{i[(k+1)(\varphi_p - \varphi) + \varphi - kz]}}{r^k (1 - v_p e^{i\varphi_p})} = \frac{e^{-ikz}}{r^k} \Pi_p,$$

$$\begin{aligned} \text{H}_p = \text{V}_p + i\text{V}'_p &= \frac{v_p^{k+1} \{ v_p \cos k(\varphi_p - \varphi) - \cos [(k+1)(\varphi_p - \varphi) + \varphi] \}}{1 - 2v_p \cos \varphi_p + v_p^2} \\ &\quad - i \frac{v_p^{k+1} \{ \sin [(k+1)(\varphi_p - \varphi) + \varphi] - v_p \sin k(\varphi_p - \varphi) \}}{1 - 2v_p \cos \varphi_p + v_p^2}, \end{aligned}$$

$$\text{G}_p = \text{U}_p + i\text{U}'_p = \frac{u_p^{k+1} (u_p - \cos \varphi)}{1 - 2u_p \cos \varphi + u_p^2} - i \frac{u_p^{k+1} \sin \varphi}{1 - 2u_p \cos \varphi + u_p^2},$$

avec les expressions intermédiaires

$$\begin{aligned} \text{K}_p = \text{W}_p + i\text{W}'_p &= \frac{v_p^{k+1} (v_p - \cos \varphi)}{1 - 2v_p \cos \varphi + v_p^2} - i \frac{v_p^{k+1} \sin \varphi}{1 - 2v_p \cos \varphi + v_p^2}, \\ \text{Q}_p = \text{X}_p + i\text{X}'_p &= \frac{x_p^{k+1} (x_p - \cos \varphi)}{1 - 2x_p \cos \varphi + x_p^2} - i \frac{x_p^{k+1} \sin \varphi}{1 - 2x_p \cos \varphi + x_p^2}. \end{aligned}$$

2. *Substitution à $\sum \text{V}_p$ et à $\sum \text{V}'_p$ de $\sum \text{W}_p$ et de $\sum \text{W}'_p$.* — On a à évaluer des limites supérieures les séries de modules que voici

$$\psi_p k v_p^{k+1} \frac{\sin \varphi \cos k t_p \psi_p + (\cos \varphi - v_p) \sin k t_p \psi_p}{1 - 2v_p \cos \varphi_p + v_p^2} = \text{T}_p,$$

$$\psi_p 2 v_p^{k+2} \frac{\sin \varphi'_p [(v_p - \cos \varphi) \cos k t_p \psi_p + \sin \varphi \sin k t_p \psi_p]}{(1 - 2v_p \cos \varphi'_p + v_p^2)^2} = \text{C}_p$$

(première substitution);

$$\psi_p \frac{v_p^{k+1} \{ [(k+1) \cos \varphi'_p - k v_p] \cos k t_p \psi_p - (k+1) \sin \varphi \sin k t_p \psi_p \}}{1 - 2v_p \cos \varphi'_p + v_p^2} = \text{T}'_p,$$

$$\psi_p \frac{2 v_p^{k+2} \sin \varphi'_p [\sin \varphi'_p \cos k t_p \psi_p + (\cos \varphi'_p - v_p) \sin k t_p \psi_p]}{(1 - 2v_p \cos \varphi'_p + v_p^2)^2} = \text{C}'_p$$

(deuxième substitution).

1° $v_p \leq a'$ et 2° $a'' < v_p$, comme au Chapitre II; 3° $a' < v_p < a''$.

Appelons γ_{ρ} celui des modules $|\varrho_{p-1}|, |\varphi'_p|$ qui est le plus grand; $\varphi, \varrho_p - \cos \varphi, \varrho_p - \cos \varphi'_p$ sont comparables à γ_{ρ} . On en conclut aisément que les divers termes $T_p, \mathfrak{C}_p, T'_p$ et \mathfrak{C}'_p sont comparables, soit à $\frac{\psi_p}{\gamma_{\rho}}$, soit à $\frac{\psi_p}{\gamma_{\rho}^2}$.

Le point z étant au dehors des cercles de centres A_n et A_{n+1} , les expressions $\frac{\psi_n}{\gamma_n}, \frac{\psi_{n+1}}{\gamma_{n+1}}, \frac{\psi_n}{\gamma_n^2}, \frac{\psi_{n+1}}{\gamma_{n+1}^2}$ sont comparables à $n\eta_n$. Quant aux autres, on peut remplacer leurs sommes respectivement par

$$\eta_{\rho} \left(\sum_{n=1}^{\rho'} \frac{1}{n-\rho} + \sum_{n+1}^{\rho''} \frac{1}{\rho-n} \right) \quad \text{ou} \quad \eta_{\rho} \mathbf{L} n$$

et

$$n\eta_{\rho} \left(\sum_{n=1}^{\rho'} \frac{1}{(n-\rho)^2} + \sum_{n+1}^{\rho''} \frac{1}{(\rho-n)^2} \right) \quad \text{ou} \quad n\eta_{\rho}'.$$

3. *Substitution à $\sum W_{\rho}$ et à $\sum W'_{\rho}$ de $\sum X_{\rho}$ et $\sum X'_{\rho}$.* — Les erreurs se présentent ici sous les formes

$$\partial x_{\rho} \frac{(k+2)\xi_{\rho}^{k+1} - (k+1)\cos \xi_{\rho}^k}{1 - 2\xi_{\rho} \cos \varphi + \xi_{\rho}^2} - 2 \partial x_{\rho} \frac{\xi_{\rho}^{k+1}(\xi_{\rho} - \cos \varphi)^2}{(1 - 2\xi_{\rho} \cos \varphi + \xi_{\rho}^2)^2},$$

différence que nous désignerons par $T_{\rho} - \mathfrak{C}_{\rho}$, et

$$\partial x_{\rho} \frac{(k+1)\xi_{\rho}^k \sin \varphi}{1 - 2\xi_{\rho} \cos \varphi + \xi_{\rho}^2} - 2 \partial x_{\rho} \frac{(\xi_{\rho} - \cos \varphi)\xi_{\rho}^{k+1} \sin \varphi}{(1 - 2\xi_{\rho} \cos \varphi + \xi_{\rho}^2)^2},$$

que nous écrirons $T'_{\rho} - \mathfrak{C}'_{\rho}$.

1° $\xi_{\rho} \leq a'$; 2° $a'' < \xi_{\rho}$ (voir Chap. II); 3° $a' < \xi_{\rho} < a''$. C'est aussi le même calcul dès que l'on a observé que

$$\frac{|\xi_{\rho} - \cos \varphi|}{\sqrt{1 - 2\xi_{\rho} \cos \varphi + \xi_{\rho}^2}} \quad \text{et} \quad \frac{\sin \varphi}{\sqrt{1 - 2\xi_{\rho} \cos \varphi + \xi_{\rho}^2}}$$

sont inférieurs à 1.

4. *Substitution à $\sum X_{\rho}$ et à $\sum X'_{\rho}$ de $\sum U_{\rho}$ et de $\sum U'_{\rho}$.* — Même raisonnement qu'au Chapitre II.

5. *Passage de $\sum U_p$ et de $\sum U'_p$ aux intégrales.* — Nous nous appuyons sur la même théorie qu'au Chapitre II.

Posons (Chap. I, § 13)

$$f(x) = -\frac{\left(\frac{n}{x}\right)^{(k+1)l} e^{i\varphi}}{1 - \left(\frac{n}{x}\right)^l e^{i\varphi}} \quad \text{et} \quad f(x - \nu) = \varphi(x) + i\psi(x).$$

Il vient

$$U_p = \varphi(p) \quad \text{et} \quad U'_p = \psi(p).$$

Ici encore, les sommes des premiers termes, en nombre limité, des séries U_p , U'_p et l'intégrale $\int_0^c f(x) dx$, où c désigne une constante quelconque positive, sont comparables à $n\varepsilon_n$ et sont, par conséquent, négligeables.

Les maxima ou minima de $\varphi(x)$ et de $\psi(x)$ sont en nombre limité; ceux qui se présenteraient pour $u_x \leq a'$ ou pour $a'' \leq u_x$ donnent lieu, par l'application du théorème que nous venons de rappeler, à des erreurs inférieures, en valeur absolue, à $n\varepsilon_n$, et dont il n'y a par conséquent pas lieu de se préoccuper. D'ailleurs, quand $a' \leq u_x \leq a''$, $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ sont respectivement comparables à

$$\frac{u_x - \cos \varphi}{1 - 2u_x \cos \varphi + u_x^2}, \quad \frac{\sin \varphi}{1 - 2u_x \cos \varphi + u_x^2},$$

dont les maxima et minima sont comparables à $\frac{1}{\varphi}$. Donc, si $\varphi \geq \frac{1}{nc_n}$, e_n tendant vers zéro, les différences entre les séries et les intégrales sont inférieures en module à $n\varepsilon_n$, ε_n étant un infiniment petit, supérieur notamment à e_n et à η_n [Chap. II, § 2, (3)].

Imaginons que l'on choisisse e_n , la condition précédente définit une zone à l'intérieur de laquelle la variable ne doit point pénétrer. Cherchons à définir autrement la ligne frontière. Si le point z est sur cette ligne, sa distance à la demi-droite qui fixe l'orientation des racines est

$$r\varphi \quad \text{ou} \quad \frac{Cn^{\psi'_{n,1}}}{ne_n} \quad \text{ou} \quad \frac{C}{n \frac{e_n}{n^{\psi'_{n,1}}}};$$

elle est donc de la forme $\frac{1}{n\varepsilon_n}, \varepsilon'_n n^{\mu'_n}$, tendant vers 0. Comme μ'_{n+1} tend vers $\frac{1}{\rho}$, si l'on pose $\rho' < \rho < \rho''$, il suffira, réciproquement, que la distance soit de la forme $\frac{1}{n\varepsilon_n}, \varepsilon'_n n^{\frac{1}{\rho'}}$ tendant vers 0, pour que la ligne séparative soit de la nature indiquée.

Concevons la suite indéfinie de cercles concentriques de centre O, de rayons $r_1, r_2, \dots, r_n, r_{n+1}, \dots$. Sous la première forme, la ligne limite apparaît comme une succession de portions de rayons traversant les couronnes successives en se rapprochant sans cesse de l'axe des racines. Pour la seconde, elle prend l'aspect d'une suite de segments barrant aussi les couronnes, parallèles au même axe et tendant vers lui. Il est à peine utile de faire observer que l'on peut varier à l'infini le tracé d'une telle ligne. Je me borne à indiquer l'équation $y = x^{1+\rho_1\varepsilon_x}$, qui convient à une famille d'entre elles lorsqu'on prend l'axe des racines comme axe des x .

C'est donc la comparaison entre les dernières séries et les intégrales qui nous conduit à définir autour de l'axe z une bande de terrain interdite, très étroite sans doute, mais englobant cependant tous les cercles C_n du Chapitre II et, chose plus grave, ne laissant plus traverser à z la file des racines. Pour en justifier la nécessité, il ne suffit pas de montrer que le module maximum de $\varphi(x)$ ou de $\psi(x)$ est de l'ordre $\frac{1}{\varphi}$, car il ne s'ensuivrait pas que les termes $\varphi(n), \varphi(n+1), \psi(n), \psi(n+1)$ ou les portions d'intégrales $\int_n^{n+1} \varphi(x) dx, \int_n^{n+1} \psi(x) dx$ soient effectivement du même ordre. Mais ce point est bien facile à préciser. La somme des carrés de

$$\frac{u_x - \cos \varphi}{1 - 2u_x \cos \varphi + u_x^2}, \quad \frac{\sin \varphi}{1 - 2u_x \cos \varphi + u_x^2}$$

est

$$\frac{1}{1 - 2u_x \cos \varphi + u_x^2}.$$

Il faut, pour que les termes correspondants des séries soient négligeables, que cette fraction soit comparable à $n^2 \varepsilon_n^2$. Donc (Chap. II,

§ 2), il faut que

$$\frac{\overline{\Lambda_n M}^2}{\Lambda_n \Lambda_{n+1}} > \frac{1}{\varepsilon_n^2}.$$

Ainsi la distance du point z à Λ_n doit être infiniment grande par rapport à la distance des centres voisins $\Lambda_n \Lambda_{n+1}$.

D'ailleurs, comme $1 - 2u_x \cos \varphi + u_x^2 = (u_x - 1)^2 + 4 \sin^2 \frac{\varphi}{2}$ et que $u_x - 1$ est, pour les valeurs n et $n + 1$, comparable à $\frac{1}{n}$, on arrive précisément à la condition que φ doit être de l'ordre de $\frac{1}{n \varepsilon_n}$.

6. *Signe de $\sum V'_p$ pour les petites valeurs de φ .* — Dans la région ainsi exclue des considérations qui précèdent, nous chercherons à déterminer le signe soit de $\sum V_p$, soit de $\sum V'_p$. Les expressions simplifiées $\sum U_p$, $\sum U'_p$ sont d'une étude plus facile; or, pour les obtenir, il a suffi, *en restant en dehors des cercles C_n* , d'introduire des erreurs comparables supérieurement à $n \zeta_n$, ζ_n étant un certain infiniment petit qui, notamment, est au moins égal à η_n . Si donc nous trouvons qu'en certains points extérieurs à ces cercles, $\sum U_p$ ou $\sum U'_p$ a un signe bien déterminé et est inférieurement comparable à $n e'_n$, $\frac{e'_n}{\zeta_n}$ étant infiniment grand, nous serons fondés à en tirer les mêmes conclusions pour la première série correspondante, $\sum V_p$ ou $\sum V'_p$.

Commençons par $\sum U'_p$. Cette série est composée de termes tous négatifs. Changeons-en les signes et évaluons approximativement une partie du groupe le plus important des termes, groupe qui va de $p = n(1 - t_n)$ à $p = n(1 + t_n)$, t_n étant un infiniment petit que nous fixerons dans la mesure où ce sera utile. Nous considérerons seulement ceux qui correspondent aux valeurs de p inférieures à n ; les autres ne feraient que doubler sensiblement le résultat.

Dans ce qui suit, nous avons besoin de trouver des limites infé-

rieures de certaines expressions. Nous remplacerons donc ces expressions par d'autres auxquelles elles sont *inférieurement comparables*; il sera donc inutile de spécifier le sens de la comparaison dans la fin de ce Chapitre, sauf lorsqu'il devra être accidentellement renversé.

Pour les valeurs de p considérées,

$$(3) \quad \frac{u_p^{k+1} \sin \varphi}{1 - 2u_p \cos \varphi + u_p^2}$$

est comparable à $\frac{n^2 \varphi}{h^2 + n^2 \varphi^2}$ en posant $n - p = h$.

Or, si $\varphi < t_n$ et si $n(t_n - \varphi)$ est supérieur à un entier, 10, par exemple, il y aura des termes (de $p \geq n\varphi$ à $p \leq nt_n$) pour lesquels $h^2 \geq n^2 \varphi^2$; pour eux, $\frac{n^2 \varphi}{h^2 + n^2 \varphi^2}$ est comparable à $\frac{n^2 \varphi}{h^2}$.

D'ailleurs $n^2 \varphi \sum_{n\varphi}^{nt_n} \frac{1}{h^2}$ est sensiblement égal à $n^2 \varphi \left(\frac{1}{n\varphi} - \frac{1}{nt_n} \right)$. Donc, si $n\varphi \geq 1$, la somme des termes considérés est comparable à $n \left(1 - \frac{\varphi}{t_n} \right)$. Or, on peut supposer $\frac{\varphi}{t_n}$ inférieur à $\frac{1}{2}$ par exemple. Dans ce cas, le résultat cherché est donc atteint.

Si $n\varphi < 1$, nous avons à former la somme $n^2 \varphi \sum_1^{nt_n} \frac{1}{h^2}$ en prenant nt_n plus grand que 10 par exemple; elle est comparable à $n^2 \varphi \left(1 - \frac{1}{nt_n} \right)$ ou à $n^2 \varphi$. Il suffira donc que $n\varphi \geq e'_n$, avec la condition $\frac{e'_n}{\zeta_n}$ infiniment grand, comme il a été expliqué ci-dessus (notamment, $\frac{e'_n}{\eta_n}$ est infiniment grand).

Enfin, quand φ augmente, l'expression (3) augmente.

Ainsi, il existe une variable e'_n telle que, pour $\frac{e'_n}{n} \leq \varphi$, la série $\sum V'_p$ soit négative.

On peut lever facilement la restriction que z ne doit pas pénétrer dans les cercles C_n . Si l'on supprime, en effet, dans les diverses séries, le terme de rang n , les résultats provenant de leur comparaison ne sont, comme au Chapitre II, pas modifiés. La série $\sum V'_p (p \neq n)$ est,

par suite, négative. Vérifions que V'_n est négatif lui aussi, on a

$$-V'_p = \frac{v_p^{k+1} \{ \sin[(k+1)(\varphi_p - \varphi) + \varphi] - v_p \sin k(\varphi_p - \varphi) \}}{1 - 2v_p \cos \varphi_p + v_p^2}.$$

Comme $n(\varphi_n - \varphi)$ tend vers 0, et que l'on a choisi e'_n d'ordre inférieur à celui de ce produit, il en résulte que $-V'_n$ est positif. *Cette remarque complémentaire est très importante* (1).

7. *Signe de $\sum V_p$ pour les petites valeurs de φ ($\varphi \leq \frac{e''_n}{n}$).* — On pourra supposer e''_n d'ordre au plus égal à celui de e'_n et, par suite, inférieur à celui de η_n , ($n|\varphi_n - \varphi|$). Nous décomposerons cette somme en trois parties.

Soit h_1 un entier infiniment grand avec n et tel que $\frac{h_1}{n}$ tende vers 0. Nous poserons

$$\begin{aligned} S &= \sum_{p=1}^{p=n+1-h_1} V_p + \sum_{p=n+h_1}^{\infty} V_p, \\ S' &= \sum_{p=n-h_1}^{p=n+h_1-1} V_p \quad (p \neq n \text{ et } p \neq n+1), \\ S'' &= V_n + V_{n+1}, \\ I_{x''} &= \int_{x''}^{x''} \frac{\left(\frac{n}{x}\right)^{(k+1)t} \left[\left(\frac{n}{x}\right)^t - \cos \varphi \right]}{1 - 2\left(\frac{n}{x}\right)^t \cos \varphi + \left(\frac{n}{x}\right)^{2t}} dx \end{aligned}$$

(notation du Chapitre I avec $q = 0$).

Nous montrerons qu'en négligeant un nombre limité de quantités infiniment petites, on peut substituer à $S + S' + S''$ une expression

(1) Enfin, il résulte de cette analyse que l'on peut écrire, dans les conditions indiquées,

$$-\sum V'_p = -\left(\sum U'_p\right) (1 + \varepsilon_n),$$

et $-\sum U'_p$ est, pour une valeur donnée de v , une fonction décroissante de φ .

infiniment grande par rapport à n et d'un signe connu pour des zones déterminées où évolue z ; il en résulte le même signe et le même ordre de grandeur pour la somme considérée.

On observera d'abord que z pénétrant ou non dans les cercles C_n et C_{n+1} , S et S' peuvent, comme plus haut, être remplacés par les sommes correspondantes S_1 et S'_1 formées avec les U_p . On écrira

$$S + S' + S'' = (S - I_0^{n-h_1} - I_{n+1}^{+\infty}) + (S' - S'_1) - I_{n+1}^{n-h_1} + I_0^{\infty} + S'_1 + S''.$$

1° $S - I_0^{n-h_1} - I_{n+1}^{+\infty}$ est infiniment petit par rapport à n , comme l'élément de l'intégrale.

2° Il en est de même de $S' - S'_1$.

3° Nous allons prouver que le même fait a lieu pour $I_{n+1}^{n-h_1}$.

Un calcul préliminaire est nécessaire. Posons

$$\gamma_l = \left(1 - \frac{l}{n}\right)^{-l},$$

$$\mathcal{E} = \frac{\gamma_l^{k+1} [(\gamma_l - \cos \varphi_p) \cos k(\varphi_p - \varphi) + \sin k(\varphi_p - \varphi) \sin \varphi_p]}{1 - 2\gamma_l \cos \varphi_p + \gamma_l^2},$$

$\frac{l}{n}$ sera infiniment petit; p ne prendra que les valeurs n et $n+1$; $\varphi_p - \varphi$, de même que φ , est au moins d'ordre $\frac{c''}{n}$. Des quantités de même ordre au moins que $\frac{l}{n}$, $\frac{c''}{n}$, $\frac{|l| + c''}{n}$ seront respectivement désignées par α , α' , ...; β , β' , ...; γ , γ' , ...

Un calcul facile donne

$$(4) \quad \mathcal{E} = \frac{\left[1 + l(k+1) \frac{l}{n} (1 + \alpha)\right] \left[\frac{ll}{n} + \frac{l(l+1)}{2} \frac{l^2}{n^2} (1 + \alpha') \pm \beta^2\right]}{\frac{l^2 l^2}{n^2} + l^2(l+1) \frac{l^3}{n^3} (1 + \alpha'') + \varphi_p^2 (1 + \gamma)}$$

$\pm \beta^2$ se réduisant à $\frac{\varphi^2}{2} (1 - \beta'^2)$ quand on remplace φ_p par φ . Dans cette dernière hypothèse, on a évidemment

$$(5) \quad \mathcal{E} = \frac{\frac{ll}{n} (1 + \gamma') + \frac{\varphi^2}{2} (1 + \gamma'')}{\frac{l^2 l^2}{n^2} + \varphi^2}.$$

Lorsque $\frac{e_n'}{n}$ est infiniment petit par rapport à $\frac{t}{n}$, on peut écrire

$$(6) \quad \varepsilon = \frac{n}{lt} \left\{ 1 + \frac{t}{n} \left[l(k+1) - \frac{l+1}{2} + \alpha^m \right] - \left(\frac{n\varphi_p}{lt} \right)^2 (1 + \gamma^m) \right\}.$$

Cela posé, on a

$$I_{n-h_1}^{n+h_1} = \int_0^{h_1} \left[\frac{\gamma_t^{k+1} (\gamma_t - \cos \varphi)}{1 - 2\gamma_t \cos \varphi + \gamma_t^2} + \frac{\gamma_{-t}^{k+1} (\gamma_{-t} - \cos \varphi)}{1 - 2\gamma_{-t} \cos \varphi + \gamma_{-t}^2} \right] dt.$$

L'élément de l'intégrale est, en vertu de la forme (5), égal à

$$\frac{\frac{lt}{n} \gamma_1 + \varphi^2 (1 + \gamma_2)}{\frac{l^2 t^2}{n^2} + \varphi^2}$$

et, par suite, fini. Donc $I_{n-h_1}^{n+h_1}$ est au plus de l'ordre h_1 .

4° Nous savons que I_0^∞ est d'ordre d'infinitude de n .

5° Pour le calcul de S_1' , nous utiliserons l'expression (3) en remplaçant φ_p par φ .

Associons deux indices p et q tels que $p = n + 1 - h$ et $q = n + h$, h parcourant les entiers de 2 à $h_1 - 1$; et posons

$$t = h + \nu - 1, \quad t' = -(h - \nu).$$

Nous aurons

$$S_1' = \sum_2^{h_1-1} h \frac{n}{t} \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t'} \right) + \frac{l(2k+1) - 1}{l} + \alpha_1 - \frac{n^3 \varphi^2}{l^3} \left[\frac{1 + \gamma_1}{l^2} + \frac{1 + \gamma_2}{l'^2} \right].$$

Seul le premier terme donne un résultat d'ordre n . Si l'on se reporte au Chapitre I, paragraphe 45 et que l'on pose $\nu = \frac{s}{r}$ en supposant ν commensurable, on trouve que

$$\frac{l}{rn} \sum_2^{h_1-1} \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t'} \right) = \frac{2s-r}{s(r-s)} + \int_0^1 \frac{x^{s+h_1 r-1} - x^{-s+h_1 r-1}}{x^r - 1} dx + \int_0^1 \frac{x^{r-s-1} - x^{s-1}}{x^{r-1}} dx.$$

La première intégrale tend vers 0; la deuxième a une valeur finie;

elle s'écrit

$$\int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{1-x^r} dx$$

et, d'après l'égalité établie au passage indiqué,

$$r \int_0^\infty \frac{(1-x^r \cos \varphi) x^{j-1}}{1-2x^r \cos \varphi + x^{2r}} dx = \frac{\pi \cos \frac{(\pi - \varphi)j}{r}}{\sin \frac{\pi j}{r}},$$

égalité qui subsiste pour $\varphi = 0$; elle vaut

$$\frac{\pi}{r} \cot \nu \pi.$$

On a donc

$$S_1 = \frac{n}{l} \frac{\nu(\nu - \frac{1}{2})}{\nu(1-\nu)} + \frac{n}{l} \pi \cot \nu \pi + n \varepsilon_n,$$

et cela, évidemment, que ν soit commensurable ou non.

6° Nous prendrons encore la forme (6). On constate de suite que, si $\frac{\nu}{e_n^{\frac{2}{3}}}$ et $\frac{1-\nu}{e_n^{\frac{2}{3}}}$ sont infiniment grands, on a

$$S'' = \frac{n}{l} \frac{1-2\nu}{\nu(1-\nu)} + n \varepsilon_n.$$

Conclusions. — On a

$$\sum V_p = n \{ \pi \rho [\cot(\rho - k)\pi + \cot \nu \pi] + \varepsilon_n \}$$

ou

$$(7) \quad \sum V_p = n \left\{ \frac{\pi \rho \sin(\rho_1 + \nu)\pi}{\sin \rho_1 \pi \sin \nu \pi} + \varepsilon_n \right\}.$$

Ainsi, nous obtenons la valeur asymptotique de cette somme pour $\varphi < \frac{e_n}{n}$. Choisissons deux infiniment petits ν' et $1-\nu''$, tels que $\frac{\nu'}{e_n^{\frac{2}{3}}}$ et $\frac{1-\nu''}{e_n^{\frac{2}{3}}}$ soient infiniment grands, puis deux nombres fixes ν_1 et ν_2 , le premier inférieur, le second supérieur à $1-\rho_1$ et d'ailleurs aussi voisins de cette quantité que l'on voudra [on pourrait même les faire varier, et tendre vers $1-\rho_1$, pourvu que $\sin(\rho_1 + \nu_1)\pi$

et $\sin(\rho_1 + \nu_2)\pi$ soient infiniment grands par rapport à $l\varepsilon_n$ de l'égalité (7)]. Ces valeurs ν' et ν_1 , ν_2 et ν'' déterminent, lorsque φ varie de $-\frac{e''_n}{n}$ à $+\frac{e''_n}{n}$, deux fragments de couronne dans la zone qui contient les racines. Dans le premier fragment, $\sum V_p$ est positif; dans le second, il est négatif.

8. Valeur asymptotique de $\sum V_p$ pour toutes les valeurs infiniment petites de φ dans le cas où $\nu = \frac{1}{2}$. Dans ce cas particulier, la formule (7) donne

$$n\pi\rho(\cot\rho_1\pi + \varepsilon_n) \quad \text{pour} \quad \varphi \leq \frac{e''_n}{n}.$$

C'est aussi la valeur que l'on tire de l'expression asymptotique générale lorsque $\varphi = \frac{1}{ne_n}$.

Je me propose de combler la lacune entre ces valeurs de φ en montrant que la formule reste exacte.

Il suffit de reprendre, au paragraphe précédent, les calculs de S'_1 ou de S'' . Nous les ferons encore reposer sur l'expression \mathcal{E} .

Pour S'_1 , associons de nouveau les valeurs de l' et de l ; elles sont de signes contraires. On a donc, en vertu de la relation (5),

$$S'_1 = \sum_2^{h_1-1} h \frac{\frac{ll'}{n}\gamma_1 + \varphi^2(1 + \gamma_2)}{\frac{l^2 l'^2}{n^2} + \varphi^2},$$

γ_1 et γ_2 étant au moins du même ordre que $\frac{|l|}{n} + \varphi$; chaque élément de la somme étant fini, la somme elle-même est d'ordre d'infinitude inférieur à celui de n .

Pour S'' , observons que l'on a pu supposer e''_n infiniment grand par rapport à $n(\varphi_n - \varphi)$; il en résulte que $\varphi_n = \varphi(1 + \varepsilon_n)$. Les deux termes à sommer sont de la forme

$$\frac{\frac{ll'}{n}(1 + \varepsilon_n) + \frac{\varphi^2}{2}(1 + \varepsilon_n)}{\frac{l^2 l'^2}{n^2} + \varphi^2}$$

et, comme $t' = -t$, on a au total

$$\frac{n\varepsilon_n + n^2\varphi^2(1 + \varepsilon_n)}{l^2 t^2 + n^2\varphi^2},$$

expression négligeable, elle aussi.

CHAPITRE IV.

RÉSOLUTION D'ÉQUATIONS DE LA FORME $F(z) + G(z) = 0$, $F(z)$ ÉTANT UNE
FONCTION ORIENTÉE D'ORDRE ρ ET $G(z)$ UNE FONCTION D'ORDRE INFÉ-
RIEUR À ρ .

I. *Nombre des racines de l'équation $\mathfrak{F}(z) + 1 = 0$, à l'intérieur d'un contour, $\mathfrak{F}(z)$ étant une fonction holomorphe dont le logarithme est donné.* — Soit $\mathfrak{F}_1(z)$ la détermination donnée de ce logarithme. Nous poserons

$$\mathfrak{F}_1(z) = X_1 + iY_1, \quad \mathfrak{F}(z) = X + iY$$

et nous représenterons les variations de ces fonctions respectivement dans les plans \mathcal{Q}_1 et \mathcal{Q} . Dans le plan de la variable, \mathfrak{A} désignera l'aire d'holomorphisme.

Appelons *points homologues dans le plan \mathcal{Q}_1* les points qui correspondent à un même point du plan \mathcal{Q} ; ce sont les points situés sur une parallèle à l'axe des imaginaires et distants entre eux de multiples de 2π . A un contour fermé intérieur à \mathfrak{A} , et décrit par la variable, correspondent, dans \mathcal{Q}_1 , soit un contour fermé, soit une suite de tronçons tels que l'origine de l'un soit homologue de l'extrémité du précédent, et dans \mathcal{Q} un contour fermé. Soient \mathcal{L}_1 et \mathcal{L} les chemins tracés respectivement dans les deux plans. Si l'on joint le point (-1) au mobile qui parcourt \mathcal{L} , la variation d'argument de ce segment donne le nombre cherché des racines. Nous allons déduire de là un caractère relatif à la ligne \mathcal{L}_1 .

Dans le plan \mathcal{Q} , traçons, par les points $(2h + 1)\pi$ marqués sur l'axe des quantités imaginaires, les demi-droites D_h parallèles à la partie positive de l'axe des quantités réelles. Ces droites correspondent, dans le plan \mathcal{Q} , à la partie de l'axe des quantités négatives extérieure au segment $-1, 0$. On en conclut que toute suite fermée (chaque extrémité homologue de l'origine du suivant) du plan \mathcal{Q} , qui ne traverse pas les droites D n'introduit aucune variation d'argument et peut être supprimée. On peut, par suite, déformer comme l'on veut de tels tronçons, pourvu qu'on laisse fixes leurs extrémités. Enfin, comme les parcours, en sens inverses, de deux arcs homologues se neutralisent, on peut même déplacer une extrémité et une origine homologues en ayant soin de les laisser tels. Il en résulte manifestement que le chemin \mathcal{L} peut être considéré comme formé d'arcs pour chacun desquels le point de départ et le point d'arrivée sont homologues et qui traversent chacun une droite D et une seule. Or, un tel arc, selon qu'il est parcouru dans le sens positif ou dans le sens négatif de l'axe des imaginaires, donne lieu dans le plan \mathcal{Q} à une augmentation ou à une diminution de 2π . Donc, et c'est notre conclusion, *le nombre des racines est égal à l'excès du nombre des traversées ascendantes des demi-droites D par $\mathcal{F}_1(z)$ sur celui des traversées descendantes.*

2. *Ordre excédent, ordre déficient. Notations pour une fonction à orientation simple.* — Dans cette théorie, surtout dans le Chapitre V, deux quantités vont jouer un rôle prépondérant, ce sont les différences $\rho - k$ et $k + 1 - \rho$, nous leur donnerons respectivement les noms d'*ordre excédent* et d'*ordre déficient*, et les désignerons par ρ_1 et ρ_2 .

Soit $F(z)$ une fonction entière d'ordre ρ , à orientation simple, et de genre k .

Nous remarquons d'abord que les expressions asymptotiques relatives au produit canonique P sont valables pour la fonction F , la présence du facteur exponentiel ne modifiant en rien nos résultats, puisque ρ , n'étant pas entier, est supérieur à k .

Il sera commode d'introduire l'angle que fait la demi-droite aboutissant à z avec la direction opposée à α ; soit φ' cet angle compté de

— π à $+\pi$.

$$\begin{array}{ll} \text{Si } \theta > \alpha, & \text{on a } \varphi' = \varphi - \pi \\ \text{et si } \theta < \alpha, & \varphi' = \pi - |\varphi| \end{array} \quad (-\pi \leq \varphi \leq \pi)$$

et les expressions asymptotiques deviennent

$$(1) \quad \mathbf{L} F(z) = (-1)^k n \pi \frac{e^{i\rho\varphi'}}{\sin \rho_1 \pi} (1 + \varepsilon_n),$$

$$(2) \quad \frac{F'(z)}{z^{k-1} F(z)} = \frac{\rho n \pi e^{i(\rho_1 \varphi' - k\alpha)}}{r^k \sin \rho_1 \pi} (1 + \varepsilon_n).$$

3. Si $F(z)$ est une fonction à orientation simple, d'ordre ρ , d'ordre excédent plus petit que $\frac{1}{2}$ et si $G(z)$ est une fonction d'ordre inférieur à ρ , l'équation $F(z) + G(z) = 0$ admet une suite de racines de même orientation que celle de $F(z)$, infiniment voisines des premières quand leur module est infiniment grand. — Par cette dernière expression, j'entends que, à partir d'un certain module, il est possible de faire correspondre les racines des deux suites, a_n à a'_n , a_{n+1} à a'_{n+1} , a_{n+2} à a'_{n+2} , ..., de manière que la différence $a'_{n+p} - a_{n+p}$ tende vers zéro pour p infini. On a

$$F(z) + G(z) = F(z) \left[1 + \frac{G(z)}{F(z)} \right].$$

En dehors des cercles C_n ,

$$|F(z)| = e^{(-1)^k n \pi \frac{\cos \rho \varphi'}{\sin \rho_1 \pi} (1 + \varepsilon_n)}$$

si $\cos \rho \varphi' \neq 0$; pour $\varphi' = \pi$, cette expression se réduit à $e^{n\pi \cot \rho_1 \pi (1 + \varepsilon_n)}$. Si $\rho_1 < \frac{1}{2}$, l'exposant est positif et il reste positif pour les valeurs de φ' voisines de π ou de $-\pi$. D'ailleurs, $n = r^{\rho + \varepsilon_n}$ et $|G(z)| < e^{n^{\rho'}}$, ρ' étant arbitrairement pris entre les ordres de $G(z)$ et de $F(z)$; on en conclut que, pour r assez grand, $\left| \frac{G(z)}{F(z)} \right|$ reste plus petit que 1 et que, si nous décrivons un chemin englobant p racines de F ainsi que les cercles C correspondants, mais de manière que φ' ne s'écarte pas de π ou de $-\pi$ dans des limites faciles à fixer, ce même chemin comprendra à son intérieur le même nombre de racines de $F + G$.

Pénétrons maintenant dans les cercles C_n ; nous allons décrire à leur intérieur des cercles concentriques C'_n .

So

L. LEAU.

A l'intérieur de C_n , on a (Chap. II, § 6), en posant

$$|z - \alpha_n| = \delta_n,$$
$$|F(z)| = \frac{\delta_n}{r_n} e^{(-1)^k n \pi \frac{\cos \rho \varphi'}{\sin \rho_1 \pi} (1 + \varepsilon_n)}.$$

On en déduit que les conclusions précédentes subsistent si $\delta_n \geq \frac{1}{e^{n\varepsilon_n}}$.

Ayant fait choix d'un infiniment petit positif ε'_n , on prendra $\frac{1}{e^{n\varepsilon'_n}}$ comme rayon du cercle C'_n . A l'intérieur, il y aura une racine et une seule de $F + G$. Les conditions requises pour que la nouvelle suite soit orientée sont d'ailleurs vérifiées; en premier lieu, l'angle sous lequel le cercle C'_n est vu de l'origine est de l'ordre $\frac{1}{n^{\frac{1}{2}} e^{n\varepsilon'_n}}$. En second lieu, si

l'on désigne par r'_n le module de la racine de $F + G$ située à l'intérieur de C'_n , on a

$$\frac{r'_{n+1}}{r'_n} = \frac{r_{n+1}}{r_n} \left(1 + \frac{f_n}{r_n e^{n\varepsilon'_n}} \right),$$

f_n étant supérieurement limité; $|f_n|$ est par exemple, pour n assez grand, inférieur à 3. Cette égalité conduit aux résultats exigés des modules.

Quand l'ordre excédent est supérieur à $\frac{1}{2}$, il est aisé de constater que, s'il existe deux nombres α' et α'' comprenant α et tels qu'entre les demi-droites qu'ils définissent (l'angle θ variant de α' à α'') G n'ait pas de racines infiniment grandes, $F + G$ n'en a pas non plus. Mettons, en effet, $F + G$ sous la forme $G \left(1 + \frac{F}{G} \right)$. Il résulte d'un théorème de M. Hadamard que

$$(3) \quad |G(z)| > e^{-r''},$$

par suite

$$\left| \frac{F}{G} \right| < 1.$$

Si, dans le même angle, G a des racines infiniment grandes, l'inégalité (3) subsiste pourvu que la variable reste en dehors de petits cercles C'_n ayant ces racines pour centres. Nous pouvons donc dire

que, dans la région étudiée, les fonctions G et $F + G$ ont autant de racines infiniment grandes.

Lorsque l'ordre excédent est égal à $\frac{1}{2}$, la partie réelle de $LF(z)$ est, pour $\varphi' = \pi$, de l'ordre $n\varepsilon_n$; c'est un cas douteux.

On se rend bien compte de ces résultats, ainsi que de ceux que nous allons obtenir, en portant, pour chaque valeur de θ , sur la demi-droite correspondante, la partie réelle de $LF(z)$; les courbes obtenues sont (au facteur $1 + \varepsilon_n$ près) homothétiques pour les diverses valeurs de n . L'ensemble fournit (à la première approximation) des rayons de maxima et des rayons de minima. Il est intéressant d'observer les variations d'influence des racines, variations qui, se reproduisant identiques pour les divers modules de $|z|$, dépendent seulement de son angle d'écart avec la direction des racines.

4. *Étude de l'équation $F(z) + 1 = 0$, $F(z)$ étant une fonction à orientation simple.* — Dans ce cas particulier, nous allons déterminer toutes les files de racines infiniment grandes.

Nous ferons usage de la méthode indiquée au n° 1, en utilisant d'abord simplement l'expression asymptotique de $LF(z)$, puis en employant un procédé d'approximation plus précis.

Examinons d'abord l'hypothèse laissée précédemment de côté, celle de l'ordre excédent égal à $\frac{1}{2}$, en nous bornant encore aux racines de même direction que celles de F .

Posons

$$LF(z) = F_1 = X_1 + iY_1.$$

Soit, en premier lieu, $\varphi' < 0$ et $\varphi' = -\pi + \psi$; et, en second lieu, $\varphi' > 0$ et $\varphi' = \pi - \psi$.

Dans le premier cas

$$(4) \quad F_1(z) = n\pi(\sin\rho\psi - i\cos\rho\psi)(1 + \varepsilon_n).$$

Dans le second

$$(5) \quad F_1(z) = n\pi(\sin\rho\psi + i\cos\rho\psi)(1 + \varepsilon_n).$$

Imaginons que l'on fasse décrire à la variable z , dans le sens positif, un chemin ainsi défini : au-dessus de l'axe α , un arc de

cercle AB, de centre O, de rayon compris entre r_p et r_{p+1} et d'angle au centre ψ' , puis le segment BC dirigé vers l'origine, OC étant compris entre r_n et r_{n+1} ($n < p$), un arc CD concentrique au premier, enfin, une ligne DEFA symétrique de la ligne DCBA. Si ε_n était constamment nul, F_1 décrirait, dans le plan \mathcal{Q}_1 , dans le sens ascendant, deux chemins symétriques par rapport à l'axe des quantités réelles, situés à droite de l'axe des quantités imaginaires et limités à cet axe; en supposant, pour fixer les idées, que n et p soient pairs, le nombre des demi-droites D traversées serait égal à p . Tel serait donc aussi le nombre des racines de l'équation

$$(6) \quad F(z) + 1 = 0.$$

Mais il n'en est pas ainsi. Si l'on observe que les extrémités des chemins décrits par $F_1(z)$ sont des segments dont la longueur est d'ordre $n\psi'$ et $(n+p)\psi'$, que d'ailleurs l'erreur introduite par le facteur $1 + \varepsilon_n$ dans la situation de ces lignes est d'ordre $n\varepsilon_n$ (ou $n\varepsilon_{n+p}$), on en conclut que, si ψ' est fini ou s'il est d'ordre infinitésimal inférieur à celui de ε_n , la variation du nombre des lignes D traversées est d'ordre $n\varepsilon_n$. Donc, si l'ordre d'infinitude de p est au moins égal à celui de n , le nombre des racines à l'intérieur du contour est $p(1 + \varepsilon'_n)$.

Ainsi, il existe une file de racines de (6) dont l'argument tend vers α et qui a même densité que les racines de F.

D'une manière générale, que peut-on dire, quel que soit l'ordre excédent, du nombre total des racines de l'équation (6)?

Faisons encore abstraction du facteur $(1 + \varepsilon_n)$. Si z décrit un cercle dont l'origine est le centre et qui comprend les n premières racines de F, F_1 décrit, dans le sens direct, un arc plus grand qu'une circonférence et dont le centre est aussi l'origine. Soient n pair et n_1 le plus grand impair contenu dans $\frac{n}{\sin \rho_1 \pi}$; alors, toutes les demi-droites D étant traversées dans le sens ascendant, le nombre des racines de (6) contenues à l'intérieur du contour suivi par z est $2(k+1)n_1$ si $\rho_1 \geq \frac{1}{2}$ et $2kn_1 + n$ si $\rho_1 \leq \frac{1}{2}$. On en déduit, en tenant compte du facteur $(1 + \varepsilon_n)$, que la densité des racines de $F + 1$ par rapport à celles de F est $\frac{k+1}{\sin \rho_1 \pi}$ pour $\rho_1 \geq \frac{1}{2}$ et $\frac{k}{\sin \rho_1 \pi} + 1$ pour $\rho_1 \leq \frac{1}{2}$.

Ce fait met en évidence l'existence d'autres racines que celles dont l'argument tend vers α , existence certaine *a priori* lorsque $\rho_1 > \frac{1}{2}$, puisque ces dernières racines disparaissaient et que l'ordre de $F(z) + 1$ n'est pas entier. Nous allons constater sans peine que l'argument de ces nouvelles racines tend vers quelques limites bien déterminées.

Considérons les diverses valeurs de φ' telles que $\rho\varphi' = \frac{\pi}{2} + q\pi$, q étant un entier, et les valeurs voisines telles que $\rho\varphi'$ soit compris entre

$$\frac{\pi}{2} + q\pi - \psi_n \quad \text{et} \quad \frac{\pi}{2} + q\pi + \psi_n,$$

ψ_n désignant une variable infiniment petite. Elles définissent dans le champ de la variable z plusieurs angles dont les axes sont les directions $\varphi' = \frac{\pi}{2\rho} + \frac{q\pi}{\rho}$, angles de plus en plus effilés et dont l'épaisseur tend vers 0. Je dis que, si ψ_n est convenablement choisi, il n'y a pas de racines infiniment grandes à leur extérieur ⁽¹⁾. Soit, en effet, $\varepsilon_n = \varepsilon'_n + i\varepsilon''_n$; la partie réelle de $LF(z)$ est au signe près

$$\frac{n\pi[\cos\rho\varphi'(1 + \varepsilon'_n) - \sin\rho\varphi'\varepsilon''_n]}{\sin\rho_1\pi}.$$

Donc si ψ_n est d'ordre infinitésimal inférieur à la fois à ε_n et à $\frac{1}{n}$, cette expression est infiniment grande. c désignant un nombre positif fixe, on a

$$\frac{1}{e^c} < |F(z)| < e^c,$$

ce qui justifie la proposition.

Donc il faut chercher nos files de racines à l'intérieur des angles précédents.

Faisons suivre à z , dans le sens direct, un contour composé de portions des côtés curvilignes de l'angle relatif à la direction

$$\varphi' = \frac{\pi}{2\rho} + \frac{q\pi}{\rho}$$

(1) Et, bien entendu, à l'extérieur des cercles C_n .

et de deux arcs de cercle de centre O et de rayons respectivement compris entre r_n, r_{n+i} et r_{n+p}, r_{n+p+i} . Soient

$$(7) \quad \rho\varphi' = \frac{\pi}{2} + q\pi - \psi$$

et, comme plus haut,

$$\varepsilon_n = \varepsilon'_n + i\varepsilon''_n.$$

On a, pour $r_k < r < r_{k+1}$,

$$(8) \quad \begin{cases} X_1 = (-1)^{k+q} h\pi \frac{\sin\psi(1 + \varepsilon'_k) - \cos\psi\varepsilon''_k}{\sin\rho_1\pi}, \\ Y_1 = (-1)^{k+q} h\pi \frac{\cos\psi(1 + \varepsilon'_k) + \sin\psi\varepsilon''_k}{\sin\rho_1\pi}, \end{cases}$$

ψ variant aux différents points du contour.

On déduit aisément de là (et de l'hypothèse sur ψ_k) que le nombre des demi-droites D traversées, toutes dans le sens ascendant, serait, pour ε_n nul, à une unité près, $\frac{\rho}{2 \sin\rho_1\pi}$, ces demi-droites étant situées au-dessus ou au-dessous de l'axe des quantités réelles, selon que $k + q$ est pair ou impair. Par suite, la présence de ε_n nous permet seulement d'affirmer que la densité des racines situées dans l'angle est

$$\frac{1}{2 \sin\rho_1\pi}.$$

Or, si $\rho_1 > \frac{1}{2}$, il existe $2(k + 1)$ valeurs acceptables de q , $2k + 1$ si $\rho_1 = \frac{1}{2}$ et, si $\rho_1 < \frac{1}{2}$, $2k$ seulement. Nous retrouvons ainsi, dans chaque cas, la densité totale des racines.

Ainsi, l'équation (6) admet $2(k + 1)$ files de racines inférieures ou $2k + 1$ selon que ρ_1 est supérieur ou qu'il est au plus égal à $\frac{1}{2}$.

Nous allons étudier ces suites d'une manière plus précise. Soit z_0 une racine de l'une d'entre elles correspondant à la valeur de φ'

$$(9) \quad \varphi'_0 = \frac{\pi}{2\rho} + \frac{q\pi}{\rho} - \frac{\psi_0}{\rho}$$

et à un module compris entre r_n et r_{n+i} . Nous excluons, dans le cas de $\rho = \frac{1}{2}$, les racines infiniment voisines de celles de F.

Décrivons un segment de longueur s , d'argument ω , allant de z_0 à un point voisin quelconque z_1 , $\frac{s}{z_1}$ étant infiniment petit, on aura

$$(10) \quad F_1(z_1) = F_1(z_0) + s F_1'(z_2) \left(\frac{dz}{ds} \right)_2,$$

respectivement pour les parties réelles et imaginaires, z_2 désignant, dans chaque cas, un point (différent) du segment $z_0 z_1$. Or, d'après (2),

$$(11) \quad F_1'(z) = \frac{\rho e^{-i\theta}}{r} F_1(z) (1 + \varepsilon_n),$$

les infiniment petits ε_n que nous introduisons ici n'ayant aucun rapport (connu) entre eux; mais il est inutile de leur donner des noms différents. On posera

$$\varepsilon_n = \varepsilon'_n + i\varepsilon''_n,$$

et l'on désignera par l'indice correspondant les valeurs de n , de θ (7) qui correspondent aux diverses valeurs de z . Soient encore

$$(12) \quad \begin{aligned} \theta_0 - \omega &= \beta, & \theta_2 &= \theta_0 + \eta_n & (\eta_n \text{ infiniment petit}), \\ F_1(z_0) &= (-1)^{k+q} (2p+1)\pi i = (-1)^{k+q} n_0 \pi \frac{1+\varepsilon_n}{\sin \rho_1 \pi}. \end{aligned}$$

L'équation (10) devient

$$(13) \quad F_1(z_1) = (-1)^{k+q} (2p+1)\pi i + \frac{s\rho}{r n_2} (-1)^{k+q} e^{-i(\beta+\eta_n)} (2p+1)\pi (1+\varepsilon_n).$$

Quel chemin faire décrire à z_1 pour qu'il comprenne à son intérieur non seulement z_0 , mais aussi la racine suivante? Pour fixer les idées, supposons $k+q$ pair, le chemin devra être tel que, β allant de π à $-\pi$, pour $\beta = \frac{\pi}{2}$, s soit aussi petit que l'on voudra et que, pour $\beta = -\frac{\pi}{2}$, il soit assez grand pour que $\frac{s\rho}{r_2} (2p+1)\pi (1+\varepsilon'_n)$ dépasse 2π ; cette valeur de s doit être de la forme

$$\frac{2r_n \sin \rho_1 \pi}{\rho n} (1 + \varepsilon_n),$$

et cela suffit.

Soit n' le numéro d'ordre de la racine z_0 dans la suite considérée; la densité de cette suite étant $\frac{1}{2 \sin \rho_1 \pi}$, on a

$$(14) \quad \frac{r_{n'+1} - r_{n'}}{r_{n'}} n' = \frac{1 + \varepsilon_n}{\rho},$$

égalité qui prouve que les modules des racines, comme il arrivait déjà pour les arguments, satisfont à la définition des suites dirigées.

Nous avons donc la conclusion suivante *pour les racines de l'équation (6)* :

Si $\rho_1 < \frac{1}{2}$, une suite ORIENTÉE formée de racines infiniment voisines de celles de F, et si $\rho_1 = \frac{1}{2}$, une suite de même ALIGNEMENT et de même DENSITÉ. Pas de racines infiniment grandes ainsi alignées si $\rho_1 > \frac{1}{2}$.

En outre, il existe des suites DIRIGÉES de densité $\frac{1}{2 \sin \rho_1 \pi}$ au nombre de $2(k+1)$ si $\rho_1 > \frac{1}{2}$, de $2k$ si $\rho_1 \leq \frac{1}{2}$; leurs directions sont symétriques par rapport à la direction α ; à l'exception des deux qui comprennent précisément cette demi-droite, l'angle de deux voisines est $\frac{\pi}{\rho}$.

Remarque. — C'est un fait intéressant que, si l'on fait varier les racines de F de manière que l'ordre ρ reste entre les limites k et $k+1$, la densité totale des racines de $F+1$ est une fonction continue de ρ , bien que, pour $\beta_1 = \frac{1}{2}$, il y ait changement du nombre des suites.

5. *Relation asymptotique relative à l'ordre.* — La relation (11) a lieu en dehors de la zone d'épaisseur $\frac{1}{ne_n}$ (Chap. III, n° 5).

Elle peut s'écrire

$$(15) \quad \lim z \frac{dLLF(z)}{dz} = \rho,$$

le produit tendant uniformément vers sa limite pour z infini.

6. *Digression sur les fonctions entières quelconques de genre fini.* —

Dans ce paragraphe, nous garderons les notations nouvelles qui nous ont plus spécialement servi jusqu'ici pour des fonctions orientées.

M. Boutroux ⁽¹⁾ a trouvé diverses limites maxima du module de la dérivée logarithmique d'une fonction entière dans certaines régions ou en certains points, ou sur certaines lignes. Nous allons reprendre la question en cherchant moins à obtenir le même degré d'approximation qu'à étendre les aires où la limite est acceptable. La principale difficulté dans ce genre de questions consiste dans l'irrégularité possible de la distribution des zéros; il peut se produire, en des zones d'ailleurs inconnues, des *tassements* de racines dont M. Boutroux élimine l'influence par un artifice heureux dont nous ferons usage.

Il s'agit d'évaluer une limite supérieure de

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \sum \frac{z^k}{a_i^k (z - a_i)},$$

c'est-à-dire de

$$(16) \quad \sum \frac{r^k}{r_i^k |z - a_i|}.$$

Considérons deux cercles dont le centre est à l'origine et dont les rayons sont r' et $r'(1 + \eta_r)$, η_r étant un infiniment petit. Ils déterminent une couronne C dans laquelle va rester z ; imaginons les deux couronnes contiguës de même épaisseur. Ainsi se trouve définie une aire totale C_1 dans laquelle nous allons isoler les racines de la manière suivante :

Concevons d'abord C_1 découpée en portions de largeur comparable à $r'(1 + \eta_r)$, par exemple en secteurs circulaires; \mathfrak{A} étant l'une d'elles, appelons \mathfrak{A}_i la surface qu'elle forme avec les deux portions voisines. Soit maintenant un faisceau de lignes \mathfrak{L} balayant cette aire et tel que la plus courte distance d'un point de \mathfrak{L}_1 à \mathfrak{L}_2 (prolongée au besoin), \mathfrak{L}_1 et \mathfrak{L}_2 étant quelconques, varie dans des limites dont le rapport oscille entre deux nombres voisins de 1, fixes dans la question, $\frac{9}{10}$ et $\frac{11}{10}$ je suppose. On réaliserait de tels faisceaux, par exemple, avec des cercles dont le centre est à l'origine, les rayons de ces cercles, ou encore des droites parallèles. Pour simplifier ce langage, je m'en tiendrai à ce dernier cas. Projets tous les points de \mathfrak{A} sur une perpendi-

(1) *Sur quelques propriétés des fonctions entières*, p. 46 et suiv.

culaire Δ à la direction D adoptée, et la portion de Δ ainsi découpée, décomposons-la en segments égaux, de longueur $R = \frac{\eta_r}{r^{\rho''-1}}$, ρ'' désignant un nombre quelconque supérieur à ρ (mais voisin de lui). Isolons chaque segment portant p projections a'_i de racines au moyen de p segments à droite et de p segments à gauche, si l'un d'eux contient q racines, allongeons encore de q segments de chaque côté cette longueur protectrice, et ainsi de suite. Finalement, le nombre des segments qui portent ou isolent les points a'_i est infiniment petit relativement au nombre total. Car, si s est le nombre des racines situées dans \mathfrak{A}_1 , le rapport à évaluer est comparable à $\frac{s}{r^{\rho''}}$.

Or, dans la série convergente $\sum \frac{1}{r^{\rho''}}$, la somme des termes correspondants à ces s racines est comparable à $\frac{s}{r^{\rho''}}$, ce qui justifie notre affirmation. Les segments non marqués sont les projections de bandes parallèles, et l'on est certain que deux contiguës sont infiniment voisines par rapport à l'épaisseur $r' \eta_{r'}$ de C_1 . D'après la manière dont elles ont été obtenues, on constate de suite par projection que *les distances d'un point quelconque de l'une d'elles aux diverses racines sont respectivement supérieures à $R, 2R, \dots, sR$* (les courbes auraient introduit un facteur limité). Modifions la direction de D , nous aurons de nouvelles bandes parallèles jouissant de la même propriété. Avec deux directions successives seulement, on disposerait d'une infinité de chemins en zigzag pour aller, à une distance infiniment petite près par rapport aux dimensions de \mathfrak{A}_1 , d'un point quelconque à un autre point quelconque de cette aire.

En faisant effectuer à D une rotation complète, on ne laisserait plus subsister à l'intérieur de \mathfrak{A}_1 que des ilots contenant les racines et en dehors desquels la propriété obtenue plus haut est acquise.

Cela posé, laissons la variable dans l'aire B commune à C et à \mathfrak{A}_1 , et partageons la somme (16) en plusieurs parties.

Celle qui a trait aux racines de \mathfrak{A}_1 est comparable à $\frac{1}{R} Ls$ et, par conséquent, à $\frac{r^{\rho''-1} L r'}{\eta_r}$.

Passons maintenant aux racines situées en dehors de \mathfrak{A}_1 et sous lesquelles $\frac{r_i}{r}$ oscille, par exemple, entre $\frac{1}{2}$ et 2.

Si n et n' sont le plus bas et le plus haut indice, la quantité à calculer est inférieure à

$$\frac{1}{\eta_r} \sum_{n'}^{n''} \frac{1}{r_i},$$

et, puisque $\frac{i}{r_i \rho''}$ tend vers zéro, elle est comparable à $\frac{n'' \rho''^{\frac{1}{2}} (\rho''-1)}{\eta_r}$ ou à $\frac{r \rho''-1}{\eta_r}$, ou enfin à $\frac{r \rho''-1}{\eta_r}$.

Quant aux r_i pour lesquels $\frac{r_i}{r} < \frac{1}{2}$, il leur correspond une somme que l'on peut remplacer par

$$r^{k-1} \sum_1^{n'} \frac{1}{r_i^k},$$

puis par $r^{k-1} n'^{1-\frac{k}{\rho''}}$ et enfin par $r \rho''-1$.

Il reste les racines telles que $\frac{r_i}{r} > 2$; pour celles-là, on a la somme $r^k \sum_{n''}^{+\infty} \frac{1}{r_i^{k+1}}$; un calcul analogue donne la même expression.

On trouve donc comme limite supérieure $\frac{r \rho''-1 L_r}{\eta_r}$.

Mais, si η_r est par exemple de l'ordre $\frac{1}{L_r}$, comme ρ'' désigne un nombre quelconque supérieur à ρ , on peut profiter de cette indétermination pour prendre comme limite $r \rho^{-4+\varepsilon}$ sous la condition indiquée, ε étant un nombre positif arbitrairement choisi.

Si nous considérons maintenant, au lieu d'un produit canonique $P(z)$, une fonction entière $F(z)$ pouvant avoir un facteur exponentiel, le résultat précédent subsiste pourvu que ρ désigne l'ordre apparent de la fonction. *Tous ces résultats subsistent si k n'est pas le plus petit nombre assigné par la théorie de Weierstrass.*

Il est clair à présent que l'on pourra, en dehors des aires interdites, de manière à utiliser la limite trouvée, faire décrire à la variable un chemin passant auprès de points de repère donnés à des distances

infiniment petites par rapport à $r\eta_r$; il suffit, pour s'en assurer, de jeter sur cette ligne de repères des aires B empiétant les unes sur les autres, ce qui permet de passer de l'une à l'autre.

Il n'est pas sans intérêt de remarquer que, en se bornant au faisceau des circonférences, on pouvait choisir pour aire B la couronne C elle-même. Cela suffirait à démontrer l'existence de couronnes ouvertes à la variable dans C, le rapport de leur épaisseur à l'épaisseur totale de C tendant vers l'unité. Or, il est aisé de ramener des parcours quelconques à des circonférences.

Imaginons d'abord une famille de courbes fermées \mathcal{C} homothétiques par rapport à l'origine, telles que par chaque point du plan il en passe une et une seule; \mathcal{C}_λ provient de \mathcal{C}_1 avec le rapport λ ; le quotient des distances maxima et minima d'une ligne \mathcal{C} à l'origine est un nombre μ fini et différent de zéro. Classons les racines par ordre des λ croissants, ce qui ne change point la convergence ni la valeur de la série (16). Faisons glisser les racines et la variable sur les courbes \mathcal{C} jusqu'à ce qu'elles soient sur l'axe des quantités positives. Les divers termes de la série sont multipliés par des facteurs compris, en valeur absolue, entre des nombres fixes. Donc la limite maxima, à un coefficient constant près sans importance, n'est pas modifiée. Or on est ramené au calcul auquel les circonférences avaient donné lieu. La conclusion est donc ici qu'il y a des couronnes d'espèce \mathcal{C} permises à la variable; celles qui interceptent des parties de l'axe des x comprises entre r et $r(1 + \eta_r)$ ont une épaisseur totale dont le rapport à $r\eta_r$ tend vers 1.

De là, et sans insister davantage, on peut passer à une ligne AB telle que deux de ses points n'aient pas le même argument, on complète la ligne de manière à en faire une ligne susceptible d'engendrer un faisceau \mathcal{C} .

Enfin, si l'on a une courbe quelconque, on peut la décomposer en portions jouissant de la propriété précédente et empiétant l'une sur l'autre. Ces portions donneront lieu à des couronnes qui empiéteront également les unes sur les autres, il sera donc possible d'y tracer des chemins continus.

Nous allons tirer de l'existence de ces chemins une conclusion. D'un point A (qui peut être l'origine) intégrons jusqu'à un point B,

le rapport de la ligne suivie à la distance OA étant inférieur à un nombre fixe; nous aurons

$$(17) \quad |LF(z)| < r^{\rho+2},$$

si nous avons eu soin de prendre en A une détermination finie de la partie imaginaire.

Cette inégalité est donc vérifiée non seulement par le module de la partie réelle de $LF(z)$ [d'où le maximum et le *minimum* de $|F(z)|$], mais aussi *par celui de la partie imaginaire* sous les conditions indiquées.

7. *Retour de l'équation* $F(z) + G(z) = 0$. — Cette équation peut s'écrire

$$(18) \quad G(z) \left[\frac{F(z)}{G(z)} + 1 \right] = 0.$$

Posons

$$(19) \quad \frac{F(z)}{G(z)} = \Phi(z).$$

Si l'ordre apparent de $G(z)$ est inférieur à ρ , cette fonction entière étant d'ailleurs quelconque, les formules (1), (2) et (11) sont applicables à Φ et à Φ_1 , pourvu que l'on reste dans les aires où les résultats du numéro précédent ont été obtenus.

On peut notamment faire décrire à z une infinité de cercles infiniment grands (du centre à l'origine). Comme d'ailleurs la densité des racines de $G(z)$ par rapport à celles de $F(z)$ est nulle, on en conclut que *l'équation*

$$(20) \quad F(z) + G(z) = 0$$

a, pour toutes les fonctions $G(z)$, *sauf si* $G(z)$ *est identiquement nul, des racines dont la densité par rapport à celles de* $F(z)$ *est* $\frac{k+1}{\sin \rho_1 \pi}$ *pour* $\rho_1 \geq \frac{1}{2}$ *et* $\frac{k}{\sin \rho_1 \pi} + 1$ *pour* $\rho_1 \leq \frac{1}{2}$.

Le cas de $G(z)$ se réduisant à zéro est donc un cas exceptionnel pour l'équation (20).

L'existence des files de racines alignées dans les directions

$$\varphi' = \frac{\pi}{2\rho} + \frac{q\pi}{\rho}$$

se démontre comme au n° 4. Mais nous ne pouvons pas affirmer qu'il n'en existe pas d'infiniment grandes dans d'autres directions (même exception faite de celles de G) : en tout cas, leur densité est nulle relativement à celles de F.

S'il s'agit de racines infiniment grandes de G dans l'une de ces directions (dans l'angle mixtiligne dont on s'est servi alors), le même raisonnement est valable ; la suite correspondante des racines de (20) est régulièrement *dirigée*.

8. *Extension aux fonctions F(z) à orientation multiple.* — La méthode qui a été suivie dans ce Chapitre s'étend aux fonctions dont les racines forment plusieurs suites orientées. Je ne la développerai point, afin de ne pas donner trop d'ampleur à ce travail.



CHAPITRE V.

RELATIONS ENTRE LES RACINES D'UNE FONCTION ORIENTÉE ET CELLES DE SA DÉRIVÉE.



1. *Rappel des résultats du Chapitre III.* — Soient e_n, e'_n, e''_n des infiniment petits positifs, tels que e'_n soit suffisamment grand ($\frac{e'_n}{\xi_n}$ infini, n° 6) et que e''_n soit au moins égal à e'_n . Si $P(z)$ désigne le produit canonique orienté dont il a été question et si l'on pose

$$(1) \quad \frac{P'(z)}{z^{k-1}P(z)} = \mathcal{F}(z) = X + iY, \quad e^{ik\alpha}\mathcal{F} = X_1 + iY_1$$

on a, avec les notations du Chapitre IV,

$$1^{\circ} \quad e^{ik\alpha} \mathfrak{F}(z) = \frac{\rho n \pi e^{i\rho_1 \varphi'}}{r^k \sin \rho_1 \pi} (1 + \varepsilon_n) \quad \text{pour} \quad |\varphi| \geq \frac{1}{ne_n};$$

$$2^{\circ} \quad \varphi Y_1 < 0 \quad \text{pour} \quad \frac{e'_n}{n} \leq |\varphi| \leq \frac{1}{ne_n};$$

de plus, A étant un nombre fixe,

$$|Y_1| > \frac{A_n}{r^k} \quad \text{si} \quad \frac{1}{n} \leq |\varphi| \leq \frac{1}{ne_n},$$

et

$$|Y_1| > \frac{An^2 |\varphi|}{r^k} \quad \text{si} \quad \frac{e'_n}{n} \leq |\varphi| \leq \frac{1}{n} \quad (1);$$

$$3^{\circ} \quad X_1 = \frac{n}{r^k} \left[\frac{\pi \rho \sin(\rho_1 + \nu) \pi}{\sin \rho_1 \pi \sin \nu \pi} + \varepsilon_n \right] \quad \text{quand} \quad |\varphi| \leq \frac{e'_n}{n},$$

pourvu que $\frac{\nu}{e_n^{\frac{2}{3}}}$ et $\frac{1-\nu}{e_n^{\frac{2}{3}}}$ soient infiniment grands;

$$4^{\circ} \quad X_1 = \frac{n}{r^k} [\pi \rho \cot \rho_1 \pi + \varepsilon_n] \quad \text{pour} \quad \nu = \frac{1}{2},$$

et lorsque

$$|\varphi| \leq \frac{1}{ne_n}.$$

Toutes ces formules subsistent si, au lieu d'un produit canonique $P(z)$, on considère *une fonction* $F(z)$ *de même ordre*. Mais, en raison de l'introduction du facteur exponentiel, les infiniment petits ε_n des formules précédentes sont généralement d'ordre au moins égal à celui de $\frac{r^k}{n}$.

2. *Fonctions à orientation simple.* — Soit

$$\frac{F'(z)}{z^{k-1} F(z)} = \mathfrak{F}(z).$$

Faisons décrire à la variable un cercle dont le centre est à l'origine et qui dépasse un peu la $n^{\text{ième}}$ racine, et numérotions les quadrants

(1) Enfin, à un facteur près infiniment voisin de 1, $|Y_1|$ est, pour ν fixe, une fonction décroissante de $|\varphi|$.

formés par les axes en nous déplaçant dans le sens direct et en commençant par celui que forment les parties positives. Nous avons le Tableau suivant :

φ'	$-\pi$	$-\pi + \frac{e'_n}{n}$	$-\pi + \frac{1}{ne'_n}$	$-\varepsilon$	$+\varepsilon$	$\pi - \frac{1}{ne'_n}$	$\pi - \frac{e'_n}{n}$
$e^{ikz} X$	+			+			+
$e^{ikz} Y$		--	--		+	+	
$e^{ikz} \tilde{z}$	(4) ou (1)	(4) ou (3)	(4) ou (1)	(1) ou (2)	(1) ou (2)	(1) ou (4)	(1) ou (4)

La partie négative de l'axe des abscisses n'a donc pas été traversée par la fonction $e^{ikz} \tilde{z}$; c'est-à-dire que son argument n'a point varié. Donc $F'(z)$ possède, à l'intérieur du cercle, un nombre de racines égal à celui de $F(z)$ augmenté de $k - 1$.

Ces racines sont orientées et ont même orientation que celles de F .

Traçons, en effet, le contour suivant dont les arcs coupent la ligne des racines de F et ont leur centre à l'origine, et dont les segments prolongés iraient passer par ce dernier point : 1^o segment AB correspondant à $\varphi' = \pi - \frac{\sqrt{e'_n}}{n}$, avec OA un peu supérieur r_n et OB un peu plus petit que r_{n+1} ; 2^o arc BC, φ' étant égal en C à $-\pi + \frac{\sqrt{e'_n}}{n}$; 3^o segment CD; arc DA. On a

	AB	BC	CD	DA
X_1		--		+
Y_1	+		--	
$e^{ikz} \tilde{z}$	(1) ou (2)	(2) ou (3)	(3) ou (4)	(1) ou (4)

L'argument de \mathcal{F} a augmenté de 2π ; ainsi F' a une racine à l'intérieur du contour; nous en concluons immédiatement que les arguments des racines de la dérivée satisfont aux conditions des suites orientées. Il reste à vérifier le même fait pour les modules. Or, le contour ne cessera de comprendre la racine b_{k+n} si, le long de DA, $\rho_1 + \nu$ est inférieur à 1 et, le long de BC, supérieur à 1, la différence étant dans chaque cas d'un ordre infinitésimal inférieur à l'infiniment petit de l'expression asymptotique fournie pour X. Cela revient à dire que, si $|b_{k+n}| = r'_{k+n}$, il existe un ε_n tel que (Chap. I, § 7 et 9)

$$(2) \quad \frac{r'_{k+n}}{r_n} = \left(\frac{n+1-\rho_1+\varepsilon_n}{n} \right)^{\lambda_n}$$

et

$$(3) \quad \frac{r'_{k+n}}{r_{n+1}} = \left(\frac{n+1-\rho_1+\varepsilon_n}{n+1} \right)^{\lambda_n}.$$

On a aussi

$$(4) \quad \frac{r'_{k+n-1}}{r_n} = \left(\frac{n-\rho_1+\varepsilon_{n-1}}{n} \right)^{\lambda_{n-1}},$$

d'où l'on tire

$$(5) \quad \frac{r'_{k+n}}{r'_{k+n-1}} = \left(1 + \frac{1-\rho_1+\varepsilon_n}{n} \right)^{\lambda_n} \left(1 - \frac{\rho_1-\varepsilon_{n-1}}{n} \right)^{-\lambda_{n-1}}.$$

Mais, si l'on tient compte de ce que $(\lambda_n - l)Ln$ tend vers zéro, on conclut que $\frac{r'_{k+n}}{r'_{k+n-1}}$ est de la forme $1 + \frac{l}{n} + \frac{\varepsilon_n}{nLn}$, ce qui justifie la proposition.

On peut préciser davantage la situation des racines de la dérivée par rapport à celles de la fonction. A partir d'une certaine valeur de r , leurs modules se séparent comme on vient de le voir. Si l'on considère les *points-racines*, il est aisé de trouver la limite du rapport $\frac{a_n b_{n+k}}{a_{n+1} b_{n+k}}$. Le carré de ce rapport a pour expression

$$\frac{(r'_{n+k} - r_n)^2 + 4r_n r'_{n+k} \sin^2 \frac{1}{2} \widehat{\alpha_{n+1} o b_{n+k}}}{(r'_{n+1} - r'_{n+k})^2 + 4r_{n+1} r'_{n+k} \sin^2 \frac{1}{2} \widehat{\alpha_{n+1} o b_{n+k}}}.$$

Grâce à la connaissance d'une limite supérieure des angles introduits et des relations (2) et (3), on obtient comme limite $\left(\frac{1-\rho_1}{\rho_1}\right)^2$. Ainsi, le rapport des distances d'une racine de la dérivée aux racines précédente et postérieure de la fonction tend vers le rapport de l'ordre déficient à l'ordre excédent.

3. *Fonctions homogènes. Cas général.* -- Je dirai qu'une fonction à orientation multiple est homogène lorsque les diverses suites de ses racines ont même densité.

Nous devons nous demander en premier lieu quelle est la densité des racines de l'équation dérivée. Nous désignerons par $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ les arguments de la fonction donnée \mathcal{F} , par $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p, \varphi'_1, \varphi'_2, \dots, \varphi'_p$ les valeurs de φ et de φ' qui leur correspondent respectivement. Pour plus de simplicité, et bien que cela ne soit pas indispensable, on peut supposer que les e_n, e'_n, e''_n sont les mêmes pour ces diverses orientations. Les angles α ayant été classés dans leur ordre de croissance, faisons varier l'argument θ de z entre $\alpha_h + \frac{1}{ne_n}$ et $\alpha_{h+1} - \frac{1}{ne_n}$, la partie principale de \mathcal{F} est l'extrémité d'un vecteur qui apparaît comme la somme géométrique des vecteurs, de même longueur $\frac{\rho n \pi}{r^k \sin \rho_1 \pi}$, dont les points directeurs (à la distance $+1$ de l'origine) ont pour affixes les valeurs de $e^{i(\rho_1 \varphi' - k\alpha)}$. La variable se déplaçant, entre les limites fixées, sur le cercle de rayon r ($r_n < r < r_{n+1}$), tous ces vecteurs tournent du même angle et l'angle de rotation de \mathcal{F} (dans le sens direct) sera infiniment voisin de $\rho_1(\alpha_{h+1} - \alpha_h)$, si la somme géométrique des divers vecteurs n'était pas nulle. Il suffira de vérifier que, pour une valeur de θ (que l'on peut même prendre égale à α_h avec $\varphi'_h = -\pi$ ou à α_{h+1} avec $\varphi'_{h+1} = \pi$), l'on n'a pas à la fois

$$\sum \cos(\rho_1 \varphi' - k\alpha) = 0 \quad \text{et} \quad \sum \sin(\rho_1 \varphi' - k\alpha) = 0,$$

Supposons qu'il en soit bien ainsi et faisons poursuivre à z sa route, θ allant de $\alpha_{h+1} - \frac{1}{ne_n}$ à $\alpha_{h+1} + \frac{1}{ne_n}$. Pour suivre le vecteur qui correspond à cette racine, nous prendrons $\nu = \frac{1}{2}$; il tourne dans le sens

négatif ou positif selon que ρ_1 est inférieur ou supérieur à $\frac{1}{2}$, son extrémité décrivant un segment AA' perpendiculaire à la droite $\theta = -k\alpha_{h+1}$ et symétrique par rapport à elle (§ 1). A un infiniment petit près, $\vec{\rho}$ décrit donc un segment BB' équipollent, et *si ce segment ne passe pas par l'origine* (auquel cas on pourrait craindre que $\vec{\rho}$ ne tournât autour de ce point) la variation d'argument (dans un sens facile à déterminer pour chaque système donné des α) est inférieure à π en valeur absolue. La condition que nous venons de trouver, *et qui englobe l'autre*, peut s'exprimer ainsi : *la projection de la somme géométrique des vecteurs sur la direction $-k\alpha_{h+1}$ pour $\theta = \alpha_{h+1}$ ne doit pas être nulle* : cette projection ne change pas lorsque l'on traverse la direction α_{h+1} , mais la somme elle-même change brusquement dans l'angle infiniment petit

$$\alpha_{h+1} - \frac{1}{ne_n}, \quad \alpha_{h+1} + \frac{1}{ne_n}.$$

Admettons que, pour les p directions α , la condition d'inégalité correspondante ait lieu; il en résulte que la variation d'argument n'a pu dépasser dans la rotation complète $(p+1)\pi$; si nous appelons h le plus grand entier contenu dans $\frac{p+1}{2}$, le nombre des racines de F' est égal à

$$n+k-1+q, \quad |q| \leq h.$$

Il ne diffère donc de celui de F que d'un nombre fini, et *a fortiori* la densité des racines de F' est donc, en général, égale à 1 par rapport aux racines de F.

Il convient maintenant de déterminer la situation des racines de F'. Servons-nous du contour ABCD (§ 2), relatif à la direction α_h , les rayons de AB et de CD étant respectivement un peu inférieur et un peu supérieur à r_n ; et posons

$$e^{ik\alpha_h}\vec{\rho} = \vec{\rho}_1 = X_1 + iY_1.$$

Admettons, ce qui est le cas général, que la somme des projections des vecteurs des α (autres que α_h) sur la direction $-k\alpha_h + \frac{\pi}{2}$ soit différente de zéro, par exemple positive. On aura (si ν est pris

assez voisin de 1 et de 0),

	AB	BC	CD	DA
X ₁	—		+	
Y ₁		+		+
\tilde{x}_1	(2) ou (3)	(2) ou (1)	(1) ou (4)	(3) ou (1)

Done, variation d'argument nulle. F' a, comme F, une racine à l'intérieur du contour. La suite ainsi définie est régulièrement orientée dans la direction α_h et elle est infiniment voisine de la suite correspondante de F. En effet, le calcul du paragraphe précédent est valable si l'on remplace $1 - \rho_1$ par zéro.

Ainsi, en général, une fonction orientée homogène a pour dérivée une fonction orientée homogène dont les racines sont infiniment voisines des siennes; la différence totale des nombres de racines dans un cercle très grand est fixe et l'on peut en donner une limite supérieure.

Il n'est pas inutile de préciser les conditions dans lesquelles le théorème est exact. Il est aisé de voir qu'elles peuvent se condenser comme il suit. Lorsque $\theta = \alpha_h$, attribuons au point directeur de la suite correspondante l'affixe $e^{-i h \alpha_h} \cos \rho_1 \pi$, les projections des sommes géométriques des vecteurs prises pour chaque direction α_h sur les directions $-k\alpha_h$ et $-k\alpha_h + \frac{\pi}{2}$ devront être différentes de zéro.

Supposons que la dernière condition, relative à la projection sur l'axe $-k\alpha_h + \frac{\pi}{2}$, ne soit pas vérifiée. La somme des projections est nulle. Donc, pour $|\varphi| \leq \frac{1}{n}$, la partie de Y₁ qui ne provient pas de la suite α_h est infiniment petite par rapport à $\frac{n}{r^k}$, et, par suite, pour ε_n convenablement choisi (on peut supposer ensuite ε_n'' égal à cet ε_n), c'est

la partie provenant de la suite α_h qui donnera son signe à Y_1 , lorsque $|\varphi| = \frac{e''}{n}$. Nous déterminerons dans le contour ABCD les segments AB et CD conformément à cette valeur.

D'autre part, la portion de X_1 fournie par les suites autres que α_h est de la forme

$$\frac{n}{r^k} \left(\frac{\pi \rho A}{\sin \rho_1 \pi} + \varepsilon_n \right)$$

lorsque

$$|\varphi| = \frac{e''}{n}.$$

Comme $\frac{\sin(\rho_1 + \nu)\pi}{\sin \nu \pi}$ est une fonction décroissante de ν qui va de $+\infty$ à $-\infty$, il existe une valeur c de ν telle que $A + \frac{\sin(\rho_1 + c)\pi}{\sin c \pi} = 0$, valeur comprise bien entendu entre 0 et 1. On en conclut aisément l'existence d'un infiniment petit ε_n tel que, pour $\nu = c - \varepsilon_n$, X_1 soit positif, et négatif pour $\nu = c + \varepsilon_n$. Nous prendrons comme valeurs des rayons de DA et de BC celles qui correspondent à ces deux valeurs de ν .

On constate comme plus haut l'existence d'une racine de F à l'intérieur de la ligne ABCD, et, en répétant le raisonnement du paragraphe 2, on conclut que *si, contrairement aux conditions énoncées ci-dessus, la somme des projections des vecteurs sur l'axe $-k\alpha_h + \frac{\pi}{3}$ est nulle, il existe encore pour F' une suite de racines orientée dans la direction α_h ; mais elles ne sont plus infiniment voisines de celles de F; les modules de ces deux suites se séparent (au moins à partir d'une certaine valeur de r), le rapport des distances d'une racine de F' aux racines précédente et suivante de F tendant vers une limite.*

Réunissant ces résultats dans un seul énoncé, nous concluons : *si les projections des sommes géométriques des vecteurs pris pour chaque direction α_h sur l'axe correspondant $-k\alpha_h$ ne sont pas nulles, la fonction orientée homogène a pour dérivée une fonction orientée homogène dont les suites ont même orientation que les siennes; les modules des racines de deux suites de même orientation ou bien alternent ou bien ont deux à deux une différence infiniment petite par rapport à celle qu'ils ont avec les modules voisins.*

4. *Cas particulier : deux suites opposées.* — Soient α et $\alpha + \pi$ les deux directions. Relativement à l'une d'entre elles, α par exemple, on trouve que les projections sur les directions $-\kappa\alpha$ et $-\kappa\alpha + \frac{\pi}{2}$ sont respectivement $1 + \cos\varphi_1\pi$ et 0.

Reprenons brièvement les opérations du paragraphe précédent. Si l'on effectue un tour complet (pseudo-circulaire), la traversée des racines introduit, à des infiniment petits près, deux angles négatifs égaux qui doivent donc compenser exactement l'angle $2\varphi_1\pi$ décrit positivement. La vérification géométrique est facile : l'angle sous lequel on voit de l'origine le segment BB' est égal à $\varphi_1\pi$. Par conséquent, à l'intérieur du contour, les nombres de racines de F' et de F diffèrent de $k - 1$.

En ce qui concerne la disposition des racines, nous sommes dans le cas d'exception. On trouve que $c = \frac{1 - \rho_1}{2}$. On en conclut que le rapport des distances d'une racine de F' aux racines précédente et suivante de F tend vers $\frac{1 - \rho_1}{1 + \rho_1}$.

5. *Fonctions non homogènes.* — Supposons que les diverses suites n'aient pas même densité, mais que les densités relatives de deux quelconques d'entre elles existent et ne soient ni nulles ni infinies. Rien d'essentiel ne sera changé dans tout ce qui précède. Une suite quelconque étant prise comme unité, on devra simplement multiplier les longueurs des vecteurs correspondant aux diverses suites par les densités qui leur sont propres. A cette modification près, nos conclusions subsistent donc.

Si nous faisons ensuite l'hypothèse que quelques suites ont des densités nulles, les vecteurs correspondants disparaissent, les résultats ne sont encore pas modifiés (l'étude en détail en est aisée).

Nous pouvons grouper ces diverses fonctions sous le nom de *fonctions à densités définies*.

6. *Produit d'une fonction à densités définies par une fonction quelconque d'ordre inférieur.* — Soient $F(z)$ la première, $G(z)$ la seconde.

Désignons par ρ' un nombre quelconque intermédiaire entre les deux ordres. On a (Chap. IV, § 6)

$$\left| \frac{G'(z)}{G(z)} \right| < r^{\rho'-1} \quad (\text{en dehors de certains îlots}),$$

à partir d'une certaine valeur de r . On a déduit que l'expression asymptotique de $\frac{1}{z^{k-1}} \left(\frac{F'(z)}{F(z)} + \frac{G'(z)}{G(z)} \right)$ est la même que celle de $\frac{1}{z^{k-1}} \frac{F'(z)}{F(z)}$.

Dès lors, le nombre des racines de la dérivée du produit FG , situées à l'intérieur d'un contour pseudo-circulaire infiniment grand, diffère d'une quantité fixe de celui des racines du produit même, au moins en général. En général également, la dérivée possède les suites orientées qui tout à l'heure engrenaient avec celles de la fonction. Mais aux racines du facteur G correspondent dans la dérivée autant de racines sur la situation desquelles on ne sait rien *a priori*, nos raisonnements antérieurs étant, tels quels, inapplicables. Il est facile de montrer qu'elles sont infiniment voisines de celles de G . Soit un contour C , infiniment petit, entourant comme il a été expliqué au Chapitre précédent une ou plusieurs, soit h , racines de G , de sorte que le long de ce contour la limite supérieure de $\left| \frac{G'(z)}{G(z)} \right|$ soit acceptable. Si la somme des vecteurs relatifs à F n'est pas nulle à l'intérieur de C , ce qui ne pourrait se faire qu'accidentellement, le quotient par $\frac{1}{z^{k-1}}$ de la dérivée logarithmique de FG reste, à un infiniment petit près, constant lorsque z décrit la ligne. Donc il y a, à l'intérieur, h racines de $(FG)'$. *Les nouvelles racines forment une suite orientée*; même démonstration qu'au paragraphe suivant.

7. *Cas où la fonction orientée F est d'un genre p supérieur à ρ .* — On sait (Chap. IV, § 6) que, si ρ'' désigne un nombre supérieur à ρ et si l'on trace de chaque racine a_n comme centre un cercle de rayon $\frac{\varepsilon_n}{r^{\rho''-1}}$, on a, en dehors de ces cercles,

$$\left| \frac{F'(z)}{z^{k-1} F(z)} \right| < \frac{r^{\rho''-k} L r}{\varepsilon_r}.$$

D'ailleurs, le facteur exponentiel apporte dans l'expression de

$$\frac{F'(z)}{z^{k-1}F(z)}$$

un polygone de degré $p - k (\geq 1)$.

On prendra $\rho'' - k < 1$, ε_r d'un ordre infinitésimal inférieur à celui de $\frac{Lr}{r^{1-(\rho''-k)}}$. Il est aisé d'en conclure qu'à l'intérieur d'un contour qui évite les cercles, le nombre des racines de F' est égal à la somme de ceux de F et de z^{p-1} , si r est assez grand.

Notamment, à partir d'un certain module, *chacun de ces cercles contient une racine de la dérivée et il n'y en a plus en dehors*. Connaissant la valeur du rayon, il est aisé de conclure, d'après le Chapitre I, que *les racines de F' forment des suites orientées, qui correspondent à celles de F , les racines de deux suites associées se groupent par couples de manière que la longueur d'un couple soit infiniment petite par rapport à la distance au couple voisin*.

Ainsi, et c'est le résultat fondamental de ce Chapitre, *en général la dérivée d'une fonction orientée est une fonction orientée; la différence des nombres de racines des deux fonctions dans un cercle infiniment grand dont le centre est à l'origine est finie; à partir d'un module assez grand les racines de F' et de F se groupent en suites deux à deux associées, et, dans un couple de suites, elles se correspondent une à une, b_n à a_n , en sorte que $\left| \frac{b_n - a_n}{a_{n+1} - a_n} \right|$ ait une limite finie et que l'on peut déterminer.*

CHAPITRE VI.

RACINES DES DÉRIVÉES DE CERTAINES FONCTIONS RÉELLES DE GENRE FINI. COMPLÉMENT A UN THÉORÈME DE LAGUERRE.

1. *Théorème de Laguerre.* — Le théorème dont il s'agit est le suivant :

Étant donnée une fonction entière réelle $F(z)$ de genre p ayant un nombre fini f de racines imaginaires : 1° la fonction dérivée $F'(z)$ est

de genre p ; 2^o l'équation $F(z) = 0$, comme on le sait d'après le théorème de Rolle, une racine au moins dans l'intervalle de deux racines consécutives de l'équation $F(z) = 0$; on peut affirmer de plus que, en dehors de ces racines dont l'existence est décelée par le théorème de Rolle, il y a au plus $p + f$ autres racines, d'ailleurs réelles ou imaginaires.

Je me propose de compléter et d'étendre ce théorème par la même méthode qui m'a servi précédemment.

2. Quelques propriétés des suites d'ordre ρ . -- Posons

$$\frac{r_s}{r_h} = \left(\frac{s}{h}\right)^{\mu_{s,h}},$$

et soit, comme d'habitude, ρ' un nombre inférieur à ρ .

Je dis que l'on peut trouver une suite de valeurs de h telle que, pour $h < s < ch$ (c constant, égal à 2 par exemple), on ait $\mu_{s,h} \leq \frac{1}{\rho'}$. S'il n'en était pas ainsi, il existerait une suite illimitée de valeurs de h telles que

$$\begin{aligned} \frac{r_{h_2}}{r_{h_1}} &> \left(\frac{h_2}{h_1}\right)^{\frac{1}{\rho'}}, & h_1 < h_2 < ch_1, \\ \frac{r_{h_3}}{r_{h_2}} &> \left(\frac{h_3}{h_2}\right)^{\frac{1}{\rho'}}, & h_2 < h_3 < ch_2, \\ \frac{r_{h_4}}{r_{h_3}} &> \left(\frac{h_4}{h_3}\right)^{\frac{1}{\rho'}}, & h_3 < h_4 < ch_3, \\ & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \end{aligned}$$

La somme des h_j premiers termes de la série $\sum \frac{1}{r_h^{\rho'+\frac{\epsilon}{2}}}$ est donc inférieure à

$$\sum_1^{h_1-1} \frac{1}{r_h^{\rho'+\frac{\epsilon}{2}}} + \frac{h_2 - h_1}{r_{h_1}^{\rho'+\frac{\epsilon}{2}}} + \frac{h_3 - h_2}{r_{h_1}^{\rho'+\frac{\epsilon}{2}}} \frac{h_1^{1+\frac{\epsilon}{\rho'}}}{h_2^{1+\frac{\epsilon}{\rho'}}} + \dots + \frac{h_j - h_{j-1}}{r_{h_1}^{\rho'+\frac{\epsilon}{2}}} \frac{h_1^{1+\frac{\epsilon}{\rho'}}}{h_{j-1}^{1+\frac{\epsilon}{\rho'}}},$$

et, *a fortiori*, à

$$\sum_1^{h_1-1} \frac{1}{r_h^{\rho'+\frac{\epsilon}{2}}} + \frac{h_2 - h_1}{r_{h_1}^{\rho'+\frac{\epsilon}{2}}} + \left(\frac{ch_1}{r_{h_1}^{\rho'}}$$

Comme la série $\sum \frac{1}{n^{1+\frac{\varepsilon}{\rho'}}$ est convergente si petit que soit ε , et que l'on peut choisir ε de manière que la série $\sum \frac{1}{r_n^{\rho'+\varepsilon}}$ reste divergente, on arriverait ainsi à une contradiction.

Considérons maintenant l'ensemble E de toutes les valeurs de h satisfaisant à la condition posée; je dis que, parmi elles, il existe une suite illimitée telle que $\frac{r_h}{h^{\rho'}}$ tende vers zéro.

Observons d'abord que si l'on prend deux suites

$$\begin{array}{cccc} \frac{r_{h_1}}{h_1^{\rho'}}, & \frac{r_{h_2}}{h_2^{\rho'}}, & \frac{r_{h_3}}{h_3^{\rho'}}, & \dots, \\ \frac{r_{l_1}}{l_1^{\rho'}}, & \frac{r_{l_2}}{l_2^{\rho'}}, & \frac{r_{l_3}}{l_3^{\rho'}}, & \dots, \end{array}$$

telles que h_i et l_i appartiennent à une même valeur de E ; si l'une tend vers zéro, l'autre tend aussi vers zéro.

Cela posé, portons notre attention sur les minima de $\frac{r_s}{s^{\rho'}}$ dans chaque groupe de termes faisant cortège à ceux de l'ensemble E . Si leur suite ne tend pas vers zéro, il existe un nombre m tel que, à partir d'un certain groupe, g , on ait constamment

$$\frac{r_s}{s^{\rho'}} > m.$$

Observons à présent que, dès qu'un indice l n'appartient pas à E , c'est qu'il y a un autre indice l' supérieur à l et inférieur à cl , tel que

$$\frac{r_{l'}}{l'^{\rho'}} > \frac{r_l}{l^{\rho'}}.$$

Nous pouvons donc construire, à partir du groupe g , une chaîne de termes

$$\frac{r_{l_1}}{l_1^{\rho'}}, \quad \frac{r_{l_2}}{l_2^{\rho'}}, \quad \frac{r_{l_3}}{l_3^{\rho'}}, \quad \dots, \quad \left(\frac{l_2}{l_1} < c, \frac{l_3}{l_2} < c \right),$$

dont chacun est plus grand que m . Dès lors, en remplaçant m par un nombre fixe m' plus petit que lui, tous les termes $\frac{r_n}{n^{\frac{1}{\rho'}}$ (à partir du groupe g) seraient supérieurs à m' . Donc on aurait

$$\frac{1}{r_n^{\rho'+\varepsilon}} < \frac{m'^{\rho'+\varepsilon}}{n^{1+\frac{\varepsilon}{\rho'}}$$

ce qui, ainsi que nous l'avons déjà dit, est impossible pour les petites valeurs de ε .

Ainsi, *il existe une infinité de valeurs de h telles que, pour $h < s < ch$, $\mu_{s,h} \leq \frac{1}{\rho'}$, et que $\frac{r_h}{h^{\rho'}}$ tende vers zéro.* Nous appellerons leur ensemble E' .

Soit maintenant ρ'' un nombre tel que la série $\sum \frac{1}{r_n^{\rho''}}$ soit convergente; ρ'' est donc au moins égal à ρ ; il peut être égal à celui-ci si la série $\sum \frac{1}{r_n^{\rho}}$ converge, c'est-à-dire si ρ est l'ordre par excès. Nous allons prouver, par une démonstration analogue à la précédente, que l'on peut trouver une suite de valeurs de h telle que, pour $h < s < ch$ (c constant, égal à 2, par exemple), on ait $\mu_{s,h} \geq \frac{1}{\rho''}$.

Si cette propriété n'avait pas lieu, il existerait en effet une suite illimitée de valeurs de h telles que

$$\begin{aligned} \frac{r_{h_2}}{r_{h_1}} &< \left(\frac{h_2}{h_1}\right)^{\frac{1}{\rho''}} && (h_1 < h_2 < ch_1), \\ \frac{r_{h_3}}{r_{h_2}} &< \left(\frac{h_3}{h_2}\right)^{\frac{1}{\rho''}} && (h_2 < h_3 < ch_2), \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

La somme des h_j premiers termes de la série $\sum \frac{1}{r_n^{\rho''}}$ serait, par suite, supérieure à

$$\sum_1^{h_1} \frac{1}{r_h^{\rho''}} + \frac{h_2 - h_1}{r_{h_1}^{\rho''}} \frac{h_1}{h_2} + \frac{h_3 - h_2}{r_{h_2}^{\rho''}} \frac{h_2}{h_3} + \dots + \frac{h_j - h_{j-1}}{r_{h_{j-1}}^{\rho''}} \frac{h_{j-1}}{h_j},$$

donc à

$$\sum_1^{h_1-1} \frac{1}{r_h^{c^n}} + \frac{h_1}{cr_{h_1}^{c^n}} \left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_1+1} + \frac{1}{h_1+2} + \dots + \frac{1}{h_j-1} + \frac{1}{h_j} \right).$$

Or cette dernière somme devient infinie avec j , tandis que la série $\sum \frac{1}{r_h^{c^n}}$ est convergente.

De ce théorème, on tire la conclusion que voici : *soit une constante c' supérieure à 1; ou bien il existe une suite infinie de valeurs de h telles que, pour chacune d'elles, on ait*

$$\frac{r_s}{r_h} > c' \quad \text{si} \quad s > h,$$

ou bien il existe une suite infinie de valeurs de h telles que, pour chacune d'elles, il y ait des valeurs de s vérifiant la condition

$$c' \geq \frac{r_s}{r_h} \quad (s > h),$$

et que toutes ces valeurs de s donnent lieu à l'inégalité

$$\mu_{s,h} \geq \frac{1}{\rho^n}.$$

En effet, si, dans le théorème précédent, on prend $c < c'^n$, les dernières valeurs de s qui accompagnent un h de la suite satisfont à la relation $\frac{r_s}{r_h} > c'$; d'où l'alternative que nous avons signalée. D'ailleurs, il peut se faire que les deux conséquences, dont l'une est nécessaire, soient vérifiées simultanément par deux suites infinies.

Nous allons compléter ce corollaire : *Dans le second cas, si l'on considère la suite totale des valeurs de h jouissant de la propriété indiquée, elle contient une suite partielle infinie telle que $\frac{n!}{r_h^{c^n}}$ tende vers zéro lorsque n parcourt, en croissant, ses différents termes ainsi que les valeurs de s qui leur sont attachées.*

On sait bien (1) que, si u_n est le terme général positif et décrois-

(1) Voir une proposition plus précise dans le Mémoire cité de M. E. Lindelöf, page 5.

sant d'une série convergente, pour une infinité de valeurs de n , $u_n n \mathbf{L} n$ tend vers zéro; car, s'il n'en était pas ainsi, on aurait toujours, pour une certaine constante ε et à partir d'une valeur assez grande de n ,

$$u_n > \frac{\varepsilon}{n \mathbf{L} n};$$

or la série $\sum \frac{1}{n \mathbf{L} n}$ est divergente.

Appelons S une telle suite d'indices, et soit S' la suite sur laquelle porte la proposition, suite composée de groupes d'entiers $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_t, \dots$; γ_t est formée des nombres $h_t, h_t + 1, h_t + 2, \dots, h'_t$.

Si n appartient à S , on a

$$\frac{n \mathbf{L} n}{r_n^{\rho_n}} = \eta_n \quad (1).$$

Supposons que n ne fasse point partie de S' ; il est, par exemple, compris entre γ_t et γ_{t+1} , on peut alors le relier à un terme de γ_t , m par exemple, par une chaîne d'entiers croissants

$$m, m_1, m_2, \dots, m_i, n$$

jouissant des propriétés suivantes

$$\frac{m}{r_m^{\rho_m}} < \frac{m_1}{r_{m_1}^{\rho_{m_1}}} < \frac{m_2}{r_{m_2}^{\rho_{m_2}}} < \dots < \frac{m_i}{r_{m_i}^{\rho_{m_i}}} < \frac{n}{r_n^{\rho_n}} \quad \left(i \geq \frac{r_{m_2}}{r_m}, \frac{r_{m_3}}{r_{m_2}}, \dots, \frac{r_n}{r_{m_i}} \right).$$

Donc

$$\frac{m \mathbf{L} m}{r_m^{\rho_m}} < \eta_n.$$

D'ailleurs

$$c' \geq \frac{r_m}{r_{h_t}} \geq \left(\frac{m}{h_t} \right)^{\frac{1}{\rho_n}};$$

par suite

$$\frac{h_t \mathbf{L} h_t}{r_{h_t}^{\rho_{h_t}}} < C \eta_n,$$

C étant indépendant de t . Le corollaire est donc établi.

(1) On pourra, lorsque cela sera utile, supposer η_n décroissant.

On pourrait étendre ces propositions de diverses manières. J'indique la suivante :

Quel que soit l'exposant p , on peut trouver une suite de valeurs de h telle que, pour $h < s < h^p$, les quantités $\rho_{s,h}$ aient une limite supérieure finie.

3. *Étude du quotient par z^{k-1} de la dérivée logarithmique d'un produit canonique à racines réelles.* — Rappelons qu'avec des racines quelconques on a posé

$$a_s = r_s e^{i\alpha_s}, \quad \rho_s = \frac{r}{r_s}$$

de sorte qu'avec nos notations habituelles

$$(1) \quad \frac{1}{z^{k-1}} \frac{d}{dz} \mathbf{LP}_k \left(\frac{z}{a_s} \right) = \frac{e^{-ik\alpha_s}}{r^k} \frac{\rho_s^{k+2} - e^{i(\theta - \alpha_s)} \rho_s^{k+1}}{1 - 2\rho_s \cos(\theta - \alpha_s) + \rho_s^2};$$

$\mathbf{P}(z)$ étant un produit canonique d'ordre ρ , on désignera par $\mathfrak{w}(z)$ l'expression $\frac{1}{z^{k-1}} \frac{d}{dz} \mathbf{LP}(z)$. On étudiera successivement le cas de racines positives, de racines négatives, et celui d'une suite illimitée de racines positives et négatives. En général, et à moins d'indications contraires, k sera le plus petit entier imposé par la théorie des produits canoniques; parfois, il pourra être supérieur à ce nombre, et le fait sera signalé lorsqu'il présentera quelque utilité.

S'il s'agit de racines toutes positives, on a, pour le produit canonique,

$$(2) \quad \frac{1}{z^{k-1}} \frac{d}{dz} \mathbf{LP}(z) = \frac{1}{r^k} \sum \frac{\rho_s^{k+2} - e^{i\theta} \rho_s^{k+1}}{1 - 2\rho_s \cos \theta + \rho_s^2} = \mathbf{S}_1 - e^{i\theta} \mathbf{S}_2.$$

\mathbf{S}_1 et \mathbf{S}_2 sont, r étant constant, maxima pour $\theta = 0$, minima pour $\theta = \pi$.

Pour $\theta = 0$, on a

$$\mathbf{S}_1 - \mathbf{S}_2 = \frac{1}{r^k} \sum \frac{\rho_s^{k+1}}{\rho_s - 1}.$$

Cette expression est infiniment grande ($r_n < r < r_{n+1}$) et positive quand r tend vers r_n par valeurs décroissantes, infiniment grande et négative quand r tend vers r_{n+1} par valeurs croissantes.

Pour $\theta = \pi$, on a

$$S_1 + S_2 = \frac{1}{r^k} \sum \frac{\rho_s^{k+1}}{\rho_s + 1} = \sum \frac{1}{\frac{1}{r_s} + \frac{1}{r}}.$$

Prenons le cas particulier où ρ , l'ordre de P, est égal à k , $S_1 + S_2$ est infiniment grand avec r . En effet, les m premiers termes de la somme tendent, pour r infini, vers les m premiers termes de la série divergente

$$\sum \frac{1}{r_s^k}.$$

Les sommes S_1 et rS_2 sont, en même temps, infiniment grandes, car

$$S_1 = \sum \frac{1}{\left(\frac{1}{r_s} + \frac{1}{r}\right)^2}, \quad rS_2 = \sum \frac{1}{\left(\frac{1}{r_s} + \frac{1}{r}\right)^2}.$$

Proposons-nous, d'une manière générale, de trouver une limite inférieure du module de $\varpi(z)$ quel que soit ρ . On a

$$(3) \quad e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right)} \varpi(z) = (S_1 + S_2) \sin \frac{\theta}{2} + i(S_1 - S_2) \cos \frac{\theta}{2}.$$

Il suffira de s'occuper de la partie réelle. Nous supposons $\theta > 0$.

Si θ est inférieur à $\frac{1}{n}$, par exemple, on peut choisir r assez près de r_n pour que $\frac{r}{r_n} - 1$ soit au moins de l'ordre $\frac{1}{n}$; par suite, le terme $\frac{1}{r^k} \frac{\rho_n^{k+2} + \rho_n^{k+1}}{1 - 2\rho_n \cos \theta + \rho_n^2} \sin \frac{\theta}{2}$ est, à lui seul, comparable à $\frac{n}{r^k}$. Si, ce que nous allons supposer pour les autres valeurs de θ , n appartient à l'ensemble E' du paragraphe 2, $\frac{n}{r^k}$ peut être remplacé par $r^{\rho-k}$ (on peut aussi prendre $\left| \frac{r}{r_{n+1}} - 1 \right|$ très petit dans le même but).

Si θ est compris entre $\frac{1}{n}$ et un nombre petit ε , mais fixe, nous ferons varier l'indice s (dans le groupe qui accompagne n , même para-

graphe) de $n + 1$ à $n + nt$, t désignant une quantité petite et constante. On a, en appelant m un nombre un peu plus grand que $\frac{1}{\rho}$,

$$1 - \frac{r}{r_s} < \frac{r}{r_s} \left(\frac{r_s}{r_n} - 1 \right) < \frac{m(s-n)}{n}.$$

Ainsi,

$$(4) \quad \sum_n^{n(1+t)} \frac{1}{r^k} \frac{\rho_s^{k+2} + \rho_s^{k+1}}{1 - 2\rho_s \cos \theta + \rho_s^2} \sin \frac{\theta}{2} > \frac{2(1+t)^{k+2} \sin \frac{\theta}{2}}{r^k} \sum_n^{n(1+t)} \frac{1}{\frac{m^2(s-n)^2}{n^2} + \theta^2}.$$

Prenons seulement les termes pour lesquels $\frac{m(s-n)}{n} \geq \theta$; leur somme est supérieure à

$$(5) \quad \frac{(1+t)^{k+2}}{r^k} \frac{n \sin \frac{\theta}{2}}{\theta m} \left(1 - \frac{\theta}{tm} \right).$$

Comme on peut prendre t de façon que $\frac{\theta}{tm}$ soit inférieur à $\frac{1}{2}$, il en résulte que, pour toutes ces valeurs de r (et de θ), $\varpi(z)$ est inférieurement comparable à $\frac{n}{r^k}$ et, *a fortiori*, à $r^{\rho-k}$.

Si θ est supérieur à ε (et au plus égal à π), les termes de $S_1 + S_2$ dont les indices appartiennent au groupe qui correspond à n sont isolément comparables (inférieurement) à $\frac{1}{r^k}$ et, comme leur nombre est environ $(c-1)n$, il suit de là que $\varpi(z)$ est encore inférieurement comparable à $\frac{n}{r^k}$ et, *a fortiori*, à $r^{\rho-k}$ (r pouvant varier de r_n à r_{cn}).

Ainsi, le résultat est général pour toute valeur de θ [sauf pour $\theta = 0$, où $\varpi(z)$ peut être de signe arbitraire et aussi grand que l'on veut en valeur absolue] et il s'applique isolément à S_1 et à S_2 . Les calculs ne supposent nullement que k soit le plus petit possible.

Rappelons (Chap. IV, § 6) que $\varpi(z)$, la variable restant en dehors de petites aires comprenant les racines, est comparable supérieurement à $r^{\rho-k}$ ($\rho < \rho''$).

Si l'on s'agit de racines toutes négatives, on a

$$(6) \quad \varpi(z) = \frac{(-1)^k}{r^k} \sum \frac{\rho_s^{k+2} + e^{i\theta} \rho_s^{k+1}}{1 + 2\rho_s \cos \theta + \rho_s^2} = (-1)^k [S_1' + e^{i\theta} S_2'],$$

S'_1 et S'_2 jouissant des mêmes propriétés que S_1 et S_2 (pour les valeurs supplémentaires de θ).

Si l'on considère à la fois une suite infinie d'ordre ρ de racines positives et une suite infinie d'ordre σ de racines négatives, on a l'expression

$$(7) \quad \varpi(z) = S_1 - e^{i\theta} S_2 + (-1)^k (S'_1 + e^{i\theta} S'_2)$$

qui, pour $\theta = 0$ et pour $\theta = \pi$, peut être prise infiniment grande, d'un signe déterminé, en faisant passer z infiniment près de l'une des deux racines qui le comprennent.

Soient $r_1, r_2, \dots, r_n, \dots$ les racines positives; $-r'_1, -r'_2, \dots, -r'_n, \dots$ les racines négatives.

On a

$$(8) \quad e^{-i\theta} \varpi(z) = S_1 e^{-i\theta} - S_2 + (-1)^k (S'_1 e^{-i\theta} + S'_2).$$

Supposons d'abord ρ et σ *inégaux*, par exemple $\sigma < \rho$.

Lorsque θ varie de 0 à $\pi - \frac{1}{n}$, nous ferons décrire à z le même chemin que si les racines positives existaient seules. Rien ne sera changé dans les résultats, puisque S'_1 et S'_2 sont inférieurs à $r^{\sigma-k}$ et que l'on peut prendre $\sigma'' < \rho'$.

Lorsque θ varie de $\pi - \frac{1}{n}$ à π , nous prendrons r assez près de l'un des modules r'_n ou r'_{n+1} qui le comprennent pour que $(S'_1 + S'_2) \cos \frac{\theta}{2}$ soit inférieurement comparable à $\frac{n}{r^k}$ et, par conséquent, à $r^{\rho'-k}$. Comme $|S_1 - S_2| \cos \frac{\theta}{2}$ est comparable supérieurement à $\frac{r^{\rho'-k}}{n}$ et, par suite, à $r^{\rho''-\rho'-k}$, la propriété subsiste pour le coefficient de i .

Supposons maintenant que ρ et σ soient *égaux*.

Je vais d'abord chercher une limite minima de S_1 (et de S'_1), de S_2 (et de S'_2), quel que soit θ , pour toutes les valeurs de r (très grandes).

Par conséquent, n n'appartient pas nécessairement ici à l'ensemble E' .

On a

$$(9) \quad S_1 > \frac{1}{r^k} \sum_1^{\infty} \frac{\rho_s^{k+2}}{(\nu_s + 1)^2} > \frac{1}{r^k} \sum_1^n \frac{\rho_s^{k+2}}{(\nu_s + 1)^2} > \frac{1}{4r^k} \sum_1^n \rho_s^k,$$

d'où

$$S_1 > \psi(n),$$

$\psi(n)$ désignant la somme des n premiers termes de la série divergente

$$\frac{1}{4} \left(\frac{1}{r_1^k} + \frac{1}{r_2^k} + \dots \right).$$

De même

$$(10) \quad S_2 > \frac{1}{r^k} \sum_1^{\infty} \frac{\varrho_s^{k+1}}{(\varrho_s + 1)^2} > \frac{1}{4r^k} \sum_1^n \varrho_s^{k-1} > \frac{\psi_1(n)}{r},$$

$\psi_1(n)$ désignant la somme des n premiers termes de la série divergente

$$\frac{1}{4} \left(\frac{1}{r_1^{k-1}} + \frac{1}{r_2^{k-1}} + \dots \right).$$

Première hypothèse : k est pair. — Soit une valeur fixe de θ entre 0 et π ; par exemple $\frac{\pi}{3}$. De $\theta = 0$ à $\theta = \frac{\pi}{3}$, je fais décrire à z le même chemin que s'il n'y avait point de racines négatives.

D'après la formule (8), le module de $\varpi(z)$ est comparable inférieurement à celui de

$$(11) \quad (S_1 + S'_1) \cos \theta - S_2 + S'_2 - i(S_1 + S'_1) \sin \theta$$

et, par suite, à celui de

$$(S_1 + S'_1) \sin \theta;$$

donc enfin à

$$S_1 \sin \frac{\theta}{2},$$

ce qui nous ramène au cas de racines toutes positives.

Pour $\theta = \frac{\pi}{3}$ (1), je suis un fragment de rayon jusqu'à ce que j'arrive à une valeur r comprise entre r'_n et r'_{n+1} , n' appartenant à l'ensemble E' relatif aux racines négatives; puis, θ augmentant jusqu'à π , je tracerai le même contour que si les racines négatives existaient seules. Sur

(1) On peut évidemment suivre une ligne θ allant de θ' (> 0) à θ'' ($< \pi$).

ces deux arcs (et leurs symétriques par rapport à l'axe des quantités réelles), les résultats obtenus pour le cas de racines de même signe restent donc acquis. Sur le segment qu'il nous a fallu parcourir pour relier les deux lignes, $\varpi(z)$ est comparable à $\psi(n)$ en vertu de la formule (9).

Deuxième hypothèse : k est impair. — Nous raisonnerons comme précédemment, mais nous prendrons le coefficient

$$-(S_2 + S'_2) \sin \theta$$

de i dans $\varpi(z)$. Par conséquent, lorsque nous décrivons le segment, $\varpi(z)$ sera comparable inférieurement à $\frac{\psi_1(n)}{r}$, d'après la formule (10).

Recherche d'un maximum de $|\varpi(z)|$ dans le cas où $\rho = k + 1$. — Nous avons rappelé plus haut que, en dehors de certaines aires entourant les racines, on a, pour $|z|$ assez grand,

$$|\varpi(z)| < r^{\rho-k}.$$

Cette inégalité ne nous suffira pas lorsque $\rho = k + 1$, cas auquel $\sum \frac{1}{r_n^{\rho}}$ est une série convergente. Nous allons prouver qu'en dehors de petits cercles contenant les zéros, on a, pour des suites de valeurs infiniment grandes de r ,

$$\varpi(z) = r\varepsilon_n \quad (1).$$

Il suffit évidemment de prouver qu'il en est ainsi dans l'hypothèse de racines toutes positives.

Nous supposons $r_n \leq r \leq r_{n+1}$.

On a

$$(12) \quad |\varpi(z)| < \frac{1}{r^k} \sum \frac{\varrho_s^{k+1}}{\sqrt{1 - 2\varrho_s \cos \theta + \varrho_s^2}} = \frac{1}{r^k} \sum \frac{\varrho_s^{k+1}}{\sqrt{(\varrho_s - 1)^2 + 4 \sin^2 \frac{\theta}{2}}}.$$

(1) M. Boutroux, dans son Mémoire déjà cité, étudie avec détail cette question, mais il ne pousse point (p. 54) l'approximation tout à fait aussi loin qu'il nous est nécessaire. Nous allons, dans ce but, restreindre le champ qu'il donne aux valeurs de r .

Soit ε un nombre positif, petit, mais fixe.

Pour $\theta \geq \varepsilon$, je décompose la somme en deux parties :

1° $s \leq n$; elle est supérieurement comparable à

$$\frac{1}{r^k} \sum_1^n \rho_s^k = r \sum_1^n \frac{1}{r r_s^k} < r \frac{r_{s'}}{r} \sum_1^{s'} \frac{1}{r_s^{k+1}} + r \sum_{s'+1}^n \frac{1}{r_s^{k+1}}.$$

Si s' est infiniment grand avec r , mais de manière que $\frac{r_{s'}}{r}$ soit infiniment petit, cette première partie est de la forme $r\varepsilon_n$.

2° $n+1 \leq s$; elle est comparable à

$$\frac{1}{r^k} \sum_{n+1}^{\infty} \rho_s^{k+1} = r \sum_{n+1}^{\infty} \frac{1}{r_s^{k+1}} = r\varepsilon_n.$$

Pour $0 \leq \theta < \varepsilon$, nous prendrons ε dans les couronnes que nous allons définir.

Il existe (§ 2) une suite illimitée \mathcal{C} de valeurs de h jouissant de l'une des propriétés suivantes : ou bien, de r_h à $c'r_h$, il n'y a pas de valeur de r_s ; ou bien au contraire il y en a, alors pour elles $\rho_{s,h} \geq \frac{1}{\rho''}$ (ici $\rho'' = k+1$) et, de plus, $\frac{n \mathbf{L} n}{r_h^{\rho''}}$ tend vers 0 lorsque n parcourt les valeurs de h et des indices s qui les accompagnent.

Posons $c'r_h = r'_h$, et divisons l'intervalle $r'_h - r_h$ en trois parties égales; nous avons ainsi les valeurs croissantes

$$r_h, \quad r_h', \quad r_h'', \quad r_h''.$$

Dans le cas de la première propriété, nous choisirons r arbitrairement entre r_h et r_h'' . Mais, dans le cas de la seconde, nous restreignons ce champ : divisons l'intervalle total $r'_h - r_h$ en segments égaux à $\frac{tr_h}{h}$ (t pourra osciller, quand t croît, entre deux nombres petits et fixes). Si nous procédons comme au Chapitre IV, paragraphe 6, la longueur des segments supprimés est au plus égale à

$$3t(c'^{k+1} - 1)r_h,$$

puisqu'il y a au plus $h(c'^{k+1} - 1)$ racines de r_h à r'_h et que chaque

racine supprime au plus 3 segments. Le rapport de la longueur totale à celle que l'on va interdire est donc supérieur à

$$\frac{c' - 1}{3t(c'^{k+1} - 1)}$$

t peut être choisi assez petit pour que ce rapport soit plus grand que 3. Dès lors, il y a dans l'intervalle $r_h r_h'$ des segments qui subsistent, ils engendrent des couronnes où nous prendrons z . D'après la manière dont nous avons procédé, nous sommes sûrs que les distances de r aux racines r_s inférieures (et aux racines supérieures) de l'intervalle $r_h - r_h'$ sont respectivement plus grandes que $\frac{r_h}{h}$, $\frac{2tr_h}{h}$, $\frac{3tr_h}{h}$, ...

Cela posé, nous écrirons

$$|\varpi(z)| < \frac{1}{r^k} \sum \frac{c_s^{k+1}}{|c_s - 1|}$$

Nous décomposerons cette somme en trois parties :

1° $r_s \leq r_h$.

2° $r_h' \leq r_s$.

Elles donnent lieu aux mêmes calculs et aux mêmes résultats que les sommes examinées plus haut.

3° $r_h < r_s < r_h'$.

Cette partie n'existe que dans le cas de la deuxième propriété. Elle s'écrit

$$r \sum \frac{1}{r_s^k |r - r_s|}$$

et elle est inférieure à

$$2r \sum_{m=1}^{m=(h)} \frac{h}{r_s^k m t r_h}$$

si (h) désigne une limite maxima du nombre de racines de r_h à r_h' , par exemple $h(c'^{k+1} - 1)$. Elle est enfin comparable à

$$r \frac{h L h}{r_h^{k+1}}$$

c'est-à-dire à $r \varepsilon_n$, puisque $\frac{h L h}{r_h^{k+1}}$ tend vers 0.

4. *Résultats de l'étude précédente.* — On peut faire décrire à z des contours entourant l'origine et dont la plus courte distance à ce point croît au delà de toute limite, de manière à obtenir les propriétés que voici :

TABLEAU T.

Quel que soit θ , $|\varpi(z)| < r^{\rho'-k}$ (en dehors de petits cercles entourant l'origine).

1° *Racines positives, ordre ρ .*

Pour $\theta = 0$, $\varpi(z)$ infiniment grand de signe arbitraire.

A. $\rho > k$.

$$|\varpi(z)| > \frac{n}{r^k} (> r^{\rho'-k}).$$

B. $\rho = k$. — Les coefficients de i de $\frac{-\varpi(z)}{\sin \theta} e^{-i\theta}$ et $\frac{-r\varpi(z)}{\sin \theta}$ sont ($0 < \theta < \pi$) positifs et infiniment grands.

2° *Racines négatives, ordre ρ .*

Résultats analogues.

3° *Racines positives, ordre ρ ; négatives, ordre σ .*

Pour $\theta = 0$ et $\theta = \pi$, $\varpi(z)$ infiniment grand de signe arbitraire.

C. $\sigma < \rho$. — Les autres résultats comme s'il n'y avait que des racines positives.

D. $\sigma = \rho > k$.

α . k *pair*. — Pour $\theta = \frac{\pi}{3}$, par exemple (ou $0 < \theta' < \theta < \theta'' < \pi$), le coefficient de i de $-\varpi(z)e^{-i\theta}$ est positif et infiniment grand.

β . k *impair*. — Pour les mêmes valeurs de θ , le coefficient de i de $-r\varpi(z)$ est positif et infiniment grand.

α et β . — Les autres résultats pour $-\theta' < \theta < \theta'$, comme s'il n'y avait que des racines $+$; pour $-\pi \leq \theta < -\theta''$ et $\theta'' < \theta \leq \pi$, comme s'il n'y avait que des racines $-$.

E. $\sigma = \rho = k$.

γ . k pair. — Le coefficient de i de $\frac{-\varpi(z)}{\sin \theta} e^{-i\theta}$ est $+$ et ∞ .

δ . k impair. — Le coefficient de i de $\frac{-r\varpi(z)}{\sin \theta}$ est $+$ et ∞ .

4° Dans tous les cas, si $\rho = k + 1$, $|\varpi(z)| < r\varepsilon_n$.

5. *Adjonction d'un facteur exponentiel.* — Soient

$$Q(z) = c_0 z^q + c_1 z^{q-1} + \dots \quad (c_0 \neq 0),$$

$$\chi(z) = \frac{Q'(z)}{z^{k-1}}$$

et

$$F(z) = e^{Q(z)} P(z)$$

avec

$$\varphi(z) = \chi(z) + \varpi(z).$$

Nous appellerons p le plus grand des nombres k et q , c'est-à-dire le genre de $F(z)$.

Cela posé il est aisé, en se servant du Tableau précédent, d'établir le suivant :

1° $\rho > q$ ($k \geq q$). — Les résultats de T s'appliquent à $\varphi(z)$, *comme si $\chi(z)$ n'existait pas*.

2° $\rho < q$ ($k < q$). — On peut choisir le chemin de manière que les parties réelles et imaginaires de $\varphi(z)$ soient du même ordre de grandeur (et de même signe) que celles de $\chi(z)$, *comme si $\varpi(z)$ n'existait pas*.

3° $\rho = q = k$. — Comme au numéro 1

4° $\rho = q = k + 1$. — Comme au numéro 2.

En résumé, tout se passe lorsque q est inférieur à ρ , ou égal à ρ si l'ordre est par défaut ($\rho = k$), comme s'il n'y avait pas de facteur exponentiel, et lorsque q est supérieur à ρ , ou égal à ρ si l'ordre est par excès ($\rho = k + 1$), comme s'il n'y avait pas de produit canonique.

On remarquera que, si $\rho < q$, il ne serait pas nécessaire de supposer que k est le plus petit entier indiqué par la théorie.

6. *Adjonction d'autres racines.* — On ne change rien aux résultats précédents si l'on complète le produit canonique de la manière suivante :

1° Dans le cas de racines d'un signe donné, adjonction d'un nombre limité de racines de l'autre signe (il va de soi qu'il est inutile d'en admettre un nombre illimité);

2° Adjonction, soit d'un nombre limité de racines imaginaires conjuguées, soit d'un nombre illimité d'ordre τ ⁽¹⁾ aux conditions que voici :

A. Il n'y a pas une suite infinie de racines dont les arguments tendent vers 0 ou vers π ⁽²⁾, si $\rho > q$.

B. Si $k \leq \rho < q (= p)$, $\tau < q (= p)$ (τ peut être supérieur à p).

C. Si $\rho > k (= p) \geq q$, $\tau < \rho$, excepté si les racines positives et les racines négatives sont de même ordre, alors on suppose $\tau < k$ ou $\tau < k - 1$, selon que k est pair ou impair.

D. Si $\rho = k (= p) \geq q$, pas de suite infinie de racines imaginaires.

E. Si $\rho = q (= p) = k + 1$, $\tau < \rho (= p)$.

La vérification se fait sans difficulté, si l'on observe que :

Dans le cas d'un nombre limité de racines imaginaires (conjuguées), l'élément réel de la partie de $\varphi(z)$ qui leur correspond est fini pour r infini, et il en est de même pour le produit par $\frac{r}{\sin \theta}$ du coefficient de i (quel que soit θ).

Dans le cas d'un nombre illimité de racines imaginaires, le module de la partie de $\varphi(z)$ qui leur correspond est inférieur à $r^{\tau-k}$, pour r assez grand (τ quelconque supérieur à τ), et cela que k soit ou non le plus petit entier fixé par la théorie.

⁽¹⁾ Lors même que $\tau < k$, les facteurs primaires qui leur sont relatifs peuvent être de genre k ; en d'autres termes, il est inutile d'admettre que l'on a dissocié l'ensemble des racines de F en plusieurs ensembles donnant lieu à des produits canoniques séparés.

⁽²⁾ Elle n'est pas entièrement nécessaire, mais il me paraît sans intérêt de discuter ce point, de manière à obtenir le maximum de liberté dans les hypothèses.

7. *Nature des fonctions réelles* $F(z)$. — Résumant toute cette discussion, les résultats du paragraphe 5 ne sont pas modifiés si nous faisons sur $F(z)$ l'une des hypothèses suivantes :

1° Son genre est supérieur au genre de son produit canonique et à l'ordre de ses racines imaginaires.

2° Son genre est égal au genre de son produit canonique et à l'ordre de ses racines réelles; elle n'a qu'un nombre limité de racines imaginaires.

3° Son genre est égal au genre de son produit canonique et est inférieur à l'ordre de ses racines réelles; l'ordre de ses racines réelles est supérieur à celui de ses racines imaginaires. Toutefois, ce dernier est inférieur à k ou à $k - 1$, selon que k est pair ou impair si les racines positives et les racines négatives sont de même ordre. Enfin, il n'y a pas de suite illimitée de racines imaginaires dont les arguments tendent vers 0 ou vers π .

C'est de ces fonctions qu'il s'agira désormais; *elles comprennent comme cas particulier les fonctions envisagées par Laguerre.*

THÉORÈME DE LAGUERRE. 1° *A partir d'un module assez grand, les seules racines réelles sont celles prévues par le théorème de Rolle.*

2° *On peut tracer une suite infinie de contours (symétriques par rapport à l'axe des quantités réelles) contenant l'origine, dont la distance minima à ce point est infiniment grande et tels qu'à l'intérieur de chacun d'eux le nombre des racines de la dérivée soit égal à celui de la fonction, augmenté de $p - 1$, si la fonction est de genre p .*

Nous supposerons, uniquement pour simplifier l'exposé, que la fonction n'a que des racines simples.

La démonstration consistera à étudier la variation d'argument de $\varphi(z)$: 1° lorsque z décrit un contour embrassant h racines réelles et infiniment voisin de l'axe de ces quantités; 2° lorsque z parcourt un chemin infiniment grand autour de l'origine; les contours doivent, bien entendu, être tracés de façon à rendre applicables les résultats consignés dans les paragraphes précédents.

A. Le genre p de F est supérieur au genre k de son produit canonique et à l'ordre τ de ses racines imaginaires.

Alors la partie principale de $\varphi(z)$ est $\gamma(z)$, même si l'ordre ρ des racines réelles est égal à p , et l'on a (hors le voisinage des racines de F)

$$\varphi(z) = qc_n z^{\rho-k}(1 + \varepsilon_n).$$

Les deux propositions sont alors immédiates.

B. $p = k = \rho$, nombre limité de racines imaginaires.

1° Les racines positives et les racines négatives sont de même ordre ρ ; k est pair.

Pour $\theta = 0$ et $\theta = \pi$, $\varphi(z)$ est positif (le chemin étant convenablement choisi); la projection de $\varphi(z)$ sur l'axe $\frac{\pi}{2} + \theta$ est négative ou positive, selon que θ est positif ou négatif; donc la partie négative de l'axe des quantités réelles n'est pas traversée pour un tour complet.

2° Même hypothèse sur les racines, mais k est impair.

On projette sur l'axe des quantités imaginaires.

3° Les racines négatives (par exemple) sont en nombre limité, ou leur ordre est inférieur à celui des racines positives. On procède à volonté, comme dans l'un des deux cas précédents.

C. $p = k < \rho$, $\tau < \rho$, avec diverses restrictions énoncées au numéro 3 du paragraphe 7.

La variation d'argument de $\varphi(z)$ est la même que celle de la partie $\varpi_1(z)$ de $\varpi(z)$ qui correspond aux racines réelles, puisque le module de la différence des deux expressions est infiniment petit par rapport à celui de l'une d'entre elles.

1° k pair; on procède comme dans l'hypothèse B, n° 1.

2° k impair; comme dans le cas B, n° 2.