ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

A. DAVIDOGLOU

Étude de l'équation différentielle $\frac{d^2\left[\theta(x)\frac{d^2y}{dx^2}\right]}{dx^2} = k\phi(x)y$

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 22 (1905), p. 539-565

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1905_3_22__539_0>

ÉTUDE

DE

L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE

$$\frac{d^2\left[\theta(x)\dfrac{d^2 y}{dx^2}\right]}{dx^2} = k\,\varphi(x)\,y,$$

PAR M. A. DAVIDOGLOU,

AGRÉGÉ A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE BUCAREST.

INTRODUCTION.

L'équation différentielle dont l'étude fait l'objet de ce Mémoire se rencontre dans la théorie des vibrations des verges [1]. Dans le cas où $\theta(x) = \text{const.}$, l'équation résultante a été étudiée dans ma thèse [2]; on y a démontré l'existence d'une suite indéfinie de *valeurs remarquables* du paramètre k et c'est ce même problème que nous allons aborder dans le cas général. D'une manière précise, étant donné un intervalle ab, il sera démontré qu'il existe une suite infinie de valeurs de k, k_1, k_2, ... toutes positives et une suite correspondante d'intégrales : $y_1(x)$, $y_2(x)$, ... telles que l'on ait

$$\frac{d^2\left[\theta(x)\dfrac{d^2 y_i}{dx^2}\right]}{dx^2} = k_i\,\varphi(x)\,y_i(x),$$

(1) V. LORD RAYLEIGH, *Theory of sound*, p. 240 et *Encyklopädie der math.*, Bd. II, Heft 4, p. 449.

(2) *Annales de l'École Normale supérieure*, 1900.

la courbe intégrale $y_i(x)$ étant doublement tangente à Ox en $x=a$ et $x=b$ et s'annulant $i-1$ fois entre a et b.

La méthode employée est tout autre que celle dont je me suis servi dans ma thèse; en particulier, il ne sera pas fait usage des constantes de Schwartz-Picard. Tout ce qui précède se rapporte au cas où la verge est encastrée en a et b. Je termine par quelques remarques sur les solutions périodiques.

I.

Dans l'étude de l'équation différentielle :

$$\frac{d^2(\theta y'')}{dx^2} = k\varphi(x)y, \tag{1}$$

nous supposerons constamment que les fonctions continues $\varphi(x)$ et $\theta(x)$ satisfont, dans les intervalles où on les considère, aux inégalités suivantes :

$$0 < m_1 < \varphi(x) < M_1,$$
$$0 < n_1 < \theta(x) < N_1.$$

Ces hypothèses sont légitimes et dans la nature physique de la question.

De même, nous aurons souvent dans la suite à considérer des intégrales de l'équation (1) déterminées par des conditions initiales au point $x=a$. Faisant usage d'un théorème classique nous pourrons dire que les intégrales considérées varient infiniment peu si les conditions initiales et même le paramètre k varient infiniment peu.

On dira aussi que la différence entre les ordonnées de deux intégrales déterminées par des conditions initiales et des valeurs de k suffisamment voisines, diffèrent en un point x d'aussi peu qu'on le veut. Il en résulte que, si l'une des deux intégrales *coupe* Ox, il en sera de même de l'autre.

1. L'intégrale de l'équation

$$\frac{d^2(\theta z'')}{dx^2} = 0$$

telle que

$$z(a)=z'(a)=0,$$
$$z''(a)=1,$$
$$z''(b)=0, \qquad (b>a)$$

est positive pour $a<x<b$.

En effet, supposons qu'elle s'annule pour un point $x=b_1$ entre $x=a$ et $x=b$. Dans ce cas la dérivée $\frac{dz}{dx}$ aurait au moins trois zéros dans l'intervalle ab.

L'expression $\theta\frac{d^2z}{dx^2}$ aurait, dans cette hypothèse, au moins deux zéros distincts, ce qui est impossible, cette dernière quantité ayant, d'après l'équation différentielle, la forme c_1x+c_2, c_1 et c_2 étant des constantes qui ne sont pas nulles toutes deux, car $\frac{c_1a+c_2}{\theta(a)}=1$.

Remarque. — On peut écrire

$$z(x)=\theta(u)\frac{F(x)\Phi(b)-F(b)\Phi(x)}{\Phi(b)-aF(b)}$$

où

$$F(x)=\int_a^x dx\int_a^x\frac{dx}{\theta(x)}; \qquad \Phi(x)=\int_a^x dx\int_a^x\frac{x\,dx}{\theta(x)}.$$

2. Si une intégrale $y(x)$ de l'équation

$$\text{(1)} \qquad \frac{d^2(\theta y'')}{dx^2}=k\varphi(x)y$$

est déterminée par les conditions initiales suivantes

$$y(a)=y'(a)=y''(a)=0,$$
$$\left[\frac{d(\theta y'')}{dx}\right]_{x=a}>0,$$

elle va constamment en croissant à partir de son point de contact $x=a$.

En effet, soit ax_1 un intervalle tel que la quantité $\frac{d(\theta y'')}{dx}$ soit positive.

On aura pour toutes les valeurs de x satisfaisant aux inégalités $a < x \leqq x_1$,

$$y(x) > 0, \qquad y'(x) > 0, \qquad y''(x) > 0, \qquad \frac{d(\theta y'')}{dx} > 0.$$

D'ailleurs, l'équation différentielle montre que, pour $x = x_1$, $\frac{d^2(\theta y'')}{dx^2}$ est positive. Donc, $\frac{d(\theta y'')}{dx}$, qui est positive pour $x = x_1$, va en croissant et, par suite, ne s'annule jamais. La même conclusion subsiste pour les fonctions

$$y''(x), \qquad y'(x) \qquad \text{et} \qquad y(x).$$

Remarque I. — On peut supposer $y''(a) > 0$ dans le théorème précédent.

Remarque II. — Un théorème analogue s'obtient avec les conditions

$$y(a) = y'(a) = 0, \qquad y''(a) \leqq 0,$$
$$\left[\frac{d(\theta y'')}{dx}\right]_{x=a} \leqq 0.$$

3. Si l'intégrale $y(x)$ de l'équation (1) est telle que

$$y(a) = y'(a) = 0,$$
$$y(b) = y'(b) = 0,$$

elle ne s'annule plus à partir de son second point de contact avec Ox.

Supposons pour simplifier l'écriture que l'on ait affaire à une intégrale doublement tangente s'annulant une seule fois entre $x = a$ et $x = b$.

La dérivée $\frac{dy}{dx}$ s'annule exactement quatre fois dans l'intervalle ab. Si, en effet, elle s'annulait six fois, il y aurait trois zéros au moins de l'expression $\theta(x)\frac{d^2 y}{dx^2}$ d'un même côté de Ox.

$\dfrac{d\left(\theta\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)}{dx}$ et $\dfrac{d^2\left(\theta\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)}{dx^2}$ s'annuleraient donc au moins respectivement deux fois et une fois de ce même côté de Ox, ce qui est impossible, la dernière quantité n'étant autre chose que $k\varphi(x)y$. Pareillement, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, $\dfrac{d\left(\theta\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)}{dx}$ s'annulent respectivement trois et deux fois dans l'intervalle ab.

Cela étant, si $\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=a} \geqq 0$, on aura certainement (n° 2)

$$\left[\frac{d(\theta y'')}{dx}\right]_{x=a} < 0.$$

Ces expressions seront donc respectivement négative et positive pour $x = b$. En ce dernier point, on aura donc

$$y(b) = y'(b) = 0,$$
$$y''(b) < 0,$$
$$\left[\frac{d(\theta y'')}{dx}\right]_{x=b} < 0.$$

Une telle intégrale ne s'annule plus à partir du point $x = b$ (n° 2).

4. Considérons l'intégrale $y(x)$ de l'équation (1) déterminée par les conditions initiales suivantes :

$$y(a) = y(a) = 0,$$
$$y''(a) = 1,$$
$$\left[\frac{d(\theta y'')}{dx}\right]_{x=a} = \omega < 0.$$

Si $x = \alpha$ est un premier zéro de cette intégrale et si, dans l'intervalle $a\alpha$, l'intégrale $y(x)$ est inférieure à une quantité μ, on a les inégalités

$$0 < -\omega < \frac{6kN_1}{n_1}\left[\frac{\theta(a)}{\alpha - a} + M_1\mu(\alpha - a)\right].$$

En effet, intégrons l'équation (1) en tenant compte des conditions initiales. Nous pourrons écrire les équations successives

$$\frac{d(\theta y'')}{dx} = k\int_a^x \varphi y\,dx + \omega,$$

$$y'' = \frac{k}{\theta(x)}\int_a^x dx\int_a^x \varphi y\,dx + \frac{\omega(x-a)}{\theta(x)} + \frac{\theta(a)}{\theta(x)},$$

$$y' = k\int_a^x \frac{dx}{\theta(x)}\int_a^x dx\int_a^x \varphi(x)\,y\,dx + \omega\int_a^x \frac{x-a}{\theta(x)}\,dx + \int_a^x \frac{\theta(a)}{\theta(x)}\,dx,$$

$$y = k\int_a^x dx\int_a^x \frac{dx}{\theta(x)}\int_a^x dx\int_a^x \varphi(x)\,y\,dx$$
$$+\,\omega\int_a^x dx\int_a^x \frac{x-a}{\theta(x)}\,dx + \int_a^x dx\int_a^x \frac{\theta(a)}{\theta(x)}\,dx.$$

Écrivons l'équation

$$y(\alpha) = 0;$$

il viendra

$$-\omega\int_a^\alpha dx\int_a^x \frac{x-a}{\theta(x)}\,dx$$
$$= k\int_a^\alpha dx\int_a^x \frac{dx}{\theta(x)}\int_a^x dx\int_a^x \varphi y\,dx + \int_a^\alpha dx\int_a^x \frac{\theta(a)}{\theta(x)}\,dx,$$

d'où

$$0 < -\omega\int_a^\alpha dx\int_a^x \frac{x-a}{\theta(x)}\,dx$$
$$< k\int_a^\alpha dx\int_a^\alpha \frac{dx}{\theta(x)}\int_a^\alpha dx\int_a^\alpha \varphi y\,dx + \int_a^\alpha dx\int_a^\alpha \frac{\theta(a)}{\theta(x)}\,dx,$$

ou encore

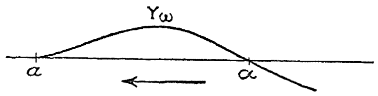
$$0 < -\omega\int_a^\alpha dx\int_a^x \frac{x-a}{N_1}\,dx$$
$$< k\left[M_1\mu\frac{1}{n_1}\int_a^\alpha dx\int_a^\alpha dx\int_a^\alpha dx\int_a^\alpha dx + \frac{\theta(a)}{n_1}\int_a^\alpha dx\int_a^\alpha dx\right],$$

$$0 < -\omega\frac{1}{N_1}\frac{(\alpha-a)^3}{6} < k\left[M_1\mu\frac{1}{n_1}(\alpha-a)^4 + \frac{\theta(a)}{n_1}(\alpha-a)^2\right],$$

$$0 < -\omega < \frac{6kN_1}{n_1}\left[\frac{\theta(a)}{\alpha-a} + M_1\mu(\alpha-a)\right].$$

5. Reprenons la même intégrale du numéro précédent. Faisons décroître ω à partir de sa valeur considérée. Dans ces conditions, on peut, sans jamais être arrêté, suivre le zéro $x = \alpha$ dans sa marche vers le point $x = a$. Il reste toujours l'unique zéro de l'intégrale con-

Fig. 1.



sidérée dans l'intervalle initial et tend vers a quand ω tend vers $-\infty$.

Désignons l'intégrale du numéro précédent par y_ω et par $y_{\omega'}$ l'intégrale analogue correspondant à la valeur $\omega' < \omega$. Envisageons la différence

$$y_\omega - y_{\omega'} = z.$$

On aura

$$\frac{d^2(\theta z'')}{dx^2} = k\varphi(x)z$$

avec les conditions

$$z(a) = z'(a) = z''(a) = 0,$$
$$\frac{d^2[\theta(a)z''(a)]}{dx^2} > 0.$$

D'après le théorème du n° 1, on pourra donc écrire constamment

$$z(x) > 0 \qquad (a < x < 0),$$

ou encore

$$y_\omega > y'_{\omega'}.$$

Ceci suffit pour montrer que le zéro considéré se déplace vers $x = a$.

A aucun moment l'intégrale $y_{\omega'}$ ne peut présenter dans l'intervalle initial plus d'un zéro (en dehors de $x = a$). En effet, dans ce cas, comme pour $\omega' = \omega$, il n'y en a qu'un, il existera certainement une valeur de ω', soit Ω, telle que, pour $\Omega + \varepsilon$, l'intégrale n'ait qu'un zéro (en dehors de $x = a$), tandis que, pour $\Omega - \varepsilon$, l'intégrale correspondante en ait plus. L'intégrale variant d'une manière continue avec ω', cela ne sera possible que si l'intégrale correspondant à la valeur Ω a d'autres points de contact avec Ox qu'en $x = a$. Or, d'après le n° 3, c'est seul le dernier zéro qui peut être un point de contact avec Ox. Soit $x = \beta$ ce dernier point. Le nombre des zéros intermédiaires se conservant évidemment pour les variations suffisamment petites de ω' de part et d'autre de $\omega' = \Omega$, l'intégrale considérée ne peut avoir plus d'un zéro dans l'intervalle $a\beta$.

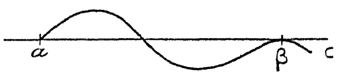
Si elle en avait deux, elle continuerait à en avoir deux pour $\Omega + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ étant suffisamment petit, ce qui est contre l'hypothèse.

Supposons donc qu'entre les deux points de contact $x = a$ et $x = \beta$, l'intégrale considérée n'ait qu'un zéro. Au point $x = \beta$, on a certainement

$$\frac{d^2 y}{dx^2} < 0,$$

et la courbe intégrale tourne la concavité vers les y négatifs.

Fig. 2.



Considérons la différence $y_{\Omega+\varepsilon} - y_\Omega$ qui vérifie l'équation

$$\frac{d^2[\theta(y_{\Omega+\varepsilon} - y_\Omega)'']}{dx^2} = k\varphi(x)(y_{\Omega+\varepsilon} - y_\Omega),$$

les conditions initiales étant

$$y_{\Omega+\varepsilon}(a) - y_\Omega(a) = y'_{\Omega+\varepsilon}(a) - y'_\Omega(a) = y''_{\Omega+\varepsilon}(a) - y_\Omega(a) = 0,$$
$$\left\{\frac{d[\theta(y_{\Omega+\varepsilon} - y_\Omega)]}{dx}\right\}_{x=a} = \Omega + \varepsilon - \Omega = \varepsilon > 0$$

sera toujours positive (n° 2). Il s'ensuit que, pour ε suffisamment petit, on aura remplacé le point de contact $x = \beta$ par deux zéros aussi rapprochés de $x = \beta$ qu'on voudra. L'intégrale $y_{\Omega+\varepsilon}$ a donc trois zéros dans l'intervalle $a\alpha$, ce qui est contre l'hypothèse.

Si, dans l'intervalle $a\alpha$, l'intégrale y_Ω n'a pas de zéro, le même raisonnement prouve que l'intégrale $y_{\Omega+\varepsilon}$ n'en a plus aucun. Ceci est encore impossible.

Il est donc prouvé que le zéro $x = \alpha$ de l'intégrale initiale se déplace dans la direction $\overline{\alpha a}$, quand ω décroît, et reste toujours l'unique zéro de l'intégrale correspondante dans l'intervalle initial. De plus, l'intégrale *coupe* l'axe Ox en ce point.

Faisons tendre ω vers $-\infty$, le point $x=\alpha$ ne peut tendre vers un point a' différent de a. En effet, les intégrales consécutives s'enveloppent les unes les autres et l'on peut trouver une quantité μ telle qu'on ait

$$0 < y_\omega < \mu$$

pour les points où l'intégrale est positive, μ étant le même quelle que soit ω. Comme d'autre part, par hypothèse,

$$\alpha - a \geqq a' - a,$$

il viendra (n° 4)

$$0 < -\omega < \frac{6kN_1}{n_1}\left[\frac{\theta(a)}{a'-a} + M_1\mu(\alpha - a)\right],$$

ce qui montre que ω est limitée.

Conclusion. — Quand ω décroît, $x=\alpha$ parcourt l'entier segment initial jusqu'en $x=a$.

6. Dans ce qui va suivre, nous allons envisager un intervalle déterminé ab $(b>a)$. Cela étant, nous allons démontrer le théorème suivant :

Pour les petites valeurs de k il existe une intégrale de l'équation

$$\frac{d^2(\theta y'')}{dx^2} = k\varphi(x)y,$$

positive pour $a<x<b$ et telle que

$$\begin{gathered} y(a)=y'(a)=0,\\ y''(a)=1,\\ y(b)=0, \qquad y'(b)<0. \end{gathered}$$

Démontrons d'abord les deux lemmes suivants :

LEMME I. — *Si*

$$u(a) = u(b) = 0,$$
$$u'(a) = u(b) = 0,$$

l'intégrale correspondante de l'équation

$$\frac{d^2(\theta u'')}{dx^2} = \psi(x) \qquad [\psi(x) > 0]$$

est positive dans l'intervalle ab.

Supposons que l'intégrale $U(x)$ s'annule un certain nombre de fois entre les points de contact. Dans ce cas, la dérivée $\frac{d^2 u}{dx^2}$ s'annulerait au moins trois fois dans l'intervalle considéré; soient

$$x = \alpha_1, \qquad x = \alpha_2, \qquad x = \alpha_3$$

ses trois zéros $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$. On peut écrire

$$\theta(x)\frac{d^2 u}{dx^2} = \int_{\alpha_1}^{x} dx \int_{\alpha_1}^{x} \psi(x)\, dx + c_1 x + c_2,$$

avec les conditions :

$$c_1\alpha_1 + c_2 = 0,$$
$$c_1\alpha_2 + c_2 = -\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} dx \int_{\alpha_1}^{x} \psi\, dx,$$
$$c_1\alpha_3 + c_2 = -\int_{\alpha_1}^{\alpha_3} dx \int_{\alpha_1}^{x} \psi\, dx.$$

Multiplions les équations précédentes respectivement par $\alpha_2 - \alpha_3$, $\alpha_3 - \alpha_1$, $\alpha_1 - \alpha_2$ et ajoutons les résultats, il viendra

$$\text{(A)} \qquad (\alpha_2 - \alpha_1)\int_{\alpha_1}^{\alpha_3} dx \int_{\alpha_1}^{x} \psi\, dx = (\alpha_3 - \alpha_1)\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} dx \int_{\alpha_1}^{x} \psi\, dx.$$

Or, de la relation

$$\frac{F(\alpha_3) - F(\alpha_1)}{F(\alpha_2) - F(\alpha_1)} = \frac{\alpha_3 - \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1}\,\frac{F'[\alpha_1 + \theta(\alpha_3 - \alpha_1)]}{F'[\alpha_1 + \theta(\alpha_2 - \alpha_1)]},$$

on tire, en y faisant

$$F = \int_{\alpha_1}^{x} dx \int_{\alpha_1}^{x} \psi\, dx,$$

$$\frac{\displaystyle\int_{\alpha_1}^{\alpha_3} dx \int_{\alpha_1}^{x} \psi\, dx}{\displaystyle\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} dx \int_{\alpha_1}^{x} \psi\, dx} = \frac{\alpha_3 - \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1} \frac{\displaystyle\int_{\alpha_1}^{\alpha_1 + \theta(\alpha_3 - \alpha_1)} \psi\, dx}{\displaystyle\int_{\alpha_1}^{\alpha_1 + \theta(\alpha_2 - \alpha_1)} \psi\, dx} > \frac{\alpha_3 - \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1}$$

ou encore

$$(\alpha_2 - \alpha_1) \int_{\alpha_1}^{\alpha_3} dx \int_{\alpha_1}^{x} \psi\, dx > (\alpha_3 - \alpha_1) \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} dx \int_{\alpha_1}^{x} \psi\, dx,$$

ce qui contredit la relation (1). Le lemme est donc démontré.

Lemme II. — *On a, dans ce même intervalle,*

$$u(x) < \frac{4(b-a)^3}{m_1} \int_a^b \psi\, dx.$$

En effet, on peut écrire

$$u = \int_a^x dx \int_a^x \frac{d\theta}{\theta} \int_{a'}^x dx \int_{a''}^x \psi\, dx,$$

d'où l'on tire

$$u < \int_a^x dx \int_a^x \frac{dx}{\theta} \left| \int_{a'}^x dx \int_{a''}^x \psi\, dx \right|.$$

Or

$$\left| \int_{a'}^x dx \int_{a''}^x \psi\, dx \right| = \left| \int_a^x dx \int_{a''}^x \psi\, dx - \int_a^{a'} dx \int_{a''}^x \psi\, dx \right|$$
$$< \left| \int_a^x dx \int_{a''}^x \psi\, dx \right| + \left| \int_a^{a'} dx \int_{a''}^x \psi\, dx \right|$$
$$< \int_a^x dx \left| \int_{a''}^x \psi\, dx \right| + \int_a^{a'} dx \left| \int_{a''}^x \psi\, dx \right|.$$

D'ailleurs

$$\left| \int_{a''}^x \psi\, dx \right| = \left| \int_a^x \psi\, dx - \int_a^{a''} \psi\, dx \right| < 2 \int_a^b \psi\, dx.$$

Finalement

$$\left|\int_a^x dx \int_{a''}^x \psi\, dx\right| < 4(b-a)\int_a^b \psi\, dx.$$

7. Cela étant, dirigeons les approximations successives de la manière suivante :

$$\frac{d^2(\theta y''_0)}{dx^2} = 0,$$

$$\frac{d^2(\theta y''_1)}{dx^2} = k\varphi(x)y_0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{d^2(\theta y''_n)}{dx^2} = k\varphi(x)y_{n-1},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Nous prendrons $y_0(x) = \theta(a)\dfrac{F(x)\Phi(b) - F(b)\Phi(x)}{\Phi(b) - a F(b)}$ (n° 1), $y_0(x)$ est positive dans l'intervalle ab et l'on a

$$y_0(a) = y'_0(a) = 0,$$
$$y_0(b) = 0, \qquad y'_0(b) < 0.$$

Les autres équations s'intègrent avec les mêmes conditions initiales et finales que y_0 (point et tangente en $x = a$, point et tangente en $x = b$).

Posant

$$u_0 = y_0,$$
$$u_1 = y_1 - y_0,$$
$$\ldots\ldots\ldots,$$
$$u_n = y_n - y_{n-1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

il viendra

$$\frac{d^2(\theta u''_0)}{dx^2} = 0,$$

$$\frac{d^2(\theta u''_1)}{dx^2} = k\varphi(x)u_0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

avec les conditions :

$$u_i(a) = u'_i(a) = 0,$$
$$u_i(b) = u'_i(b) = 0 \qquad (i > 0).$$

On aura constamment

$$u_i(x) > 0, \qquad [a < x < b].$$

Considérons la série

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots.$$

On a

$$\begin{aligned}
&0 < u_0 < c_0,\\
&0 < u_1 < c_0 \frac{4(b-a)^3}{m_1} k \int_a^b \varphi\, dx,\\
&0 < u_2 < c_0 \left[\frac{4(b-a)^3}{m_1} k \int_a^b \varphi\, dx\right]^2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&0 < u_n < c_0 \left[\frac{4(b-a)^3}{m_1} k \int_a^b \varphi\, dx\right]^n.
\end{aligned}$$

Si donc

$$k < \frac{m_1}{4(b-a)^3 \int_a^b \varphi\, dx},$$

la série précédente est uniformément convergente dans l'intervalle ab. On sait que, dans ces conditions, elle vérifie l'équation donnée et elle satisfait aux conditions aux limites suivantes :

$$\begin{gathered}
y(a) = y'(a) = 0,\\
y(b) = 0, \qquad y'(b) = y'_0(b) < 0,\\
y(x) > 0 \qquad (a < x < b).
\end{gathered}$$

D'ailleurs

$$y''(a) > 0.$$

Si, en effet, on avait $y''(a) < 0$, y' et, par suite, y serait < 0 dans le voisinage du point a $(x > a)$.

Dans le cas $y''(a) = 0$, comme $\left[\frac{d(\theta y'')}{dx}\right]_{x=a} < 0$ $\Big\{$si l'on avait $\left[\frac{d(\theta y'')}{dx}\right]_{x=0} > 0$, on n'aurait plus $y(b) = 0$ (n° 1)$\Big\}$, y'', y' et, par suite, y, commenceraient par être négatifs.

On peut donc, après multiplication par une constante finie, s'il est nécessaire, satisfaire aux conditions

$$y(a) = y'(a) = 0, \qquad y''(a) = 1,$$
$$y(b) = 0, \qquad y'(b) < 0.$$

Remarque. — Il est évident que les approximations successives dirigées comme précédemment et relatives à un segment ab' intérieur à ab convergeront si les premières convergent.

8. L'intégrale précédente est unique de son espèce, tangente à OX en $x = a$, s'annulant pour $x = b$ et de plus positive pour $a < x < b$. Ceci résulte de ce que, si une telle intégrale existe, elle peut être obtenue par les approximations successives dirigées comme nous l'avons fait précédemment. Quelques difficultés se présentent de ce qu'on a $y(a) = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=a} = 0$.

Considérons donc l'intégrale $y(x)$:

$$y(a) = y'(a) = 0,$$
$$y''(a) = 1,$$
$$y(b) = 0, \qquad y'(b) < 0,$$

et formons les équations successives

$$\frac{d^2(\theta y''_0)}{dx^2} = 0,$$
$$\frac{d^2(\theta y'_1)}{dx^2} = k\varphi(x) y_0,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

les conditions initiales et finales pour les y_i étant les mêmes que pour $y(x)$.

Posons, comme précédemment,

$$u_0 = y_0,$$
$$u_1 = y_1 - y_0,$$
$$\dots\dots\dots\dots,$$
$$u_n = y_n - y_{n-1},$$

On a évidemment (n° 6)

$$\left.\begin{array}{l} u_i(a) = u_i(b) = 0 \\ u'_i(a) = u'_i(b) = 0 \end{array}\right\} \quad i > 0,$$

$$u_i(x) > 0, \qquad a < x < b, \qquad i \geqq 0.$$

Or, de l'équation

$$\frac{d^2[\theta(y-y_0)'']}{dx^2} = k\varphi(x)y$$

on déduit (n° 6)

$$y > y_0$$

et, de proche en proche,

$$y > y_i, \qquad a < x < b.$$

Posons $\rho(x) = \frac{y - y_0}{y_1}$. Pour $x \neq a$ et b et compris dans l'intervalle ab,

$$\rho(x) < 1.$$

D'ailleurs

$$\rho(a) = 0,$$
$$\rho(b) = 0.$$

On peut donc trouver, le rapport précédent variant d'une manière continue, un nombre $g < 1$ tel que l'on ait

$$y - y_0 < gy.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \frac{d^2\{\theta[g(y-y_0)-(y-y_1)]''\}}{dx^2} &= kg\varphi(x)y - k\varphi(x)y + k\varphi(x)y_0 \\ &= k\varphi(x)[yg - (y - y_0)]. \end{aligned}$$

L'expression $g(y - y_0) - (y - y_1)$ s'annulant, ainsi que sa dérivée première, en $x = a$ et $x = b$, on aura (n° 6)

$$y - y_1 < g(y - y_0).$$

D'une manière générale

$$y - y_i \leqq g(y - y_{i-1}),$$

et, par multiplication,

$$y - y_n = g^{n-1} y,$$

d'où, finalement,

$$\lim y_n = y.$$

Corollaire. — *Dans un intervalle ab, dans lequel il existe une telle intégrale y_1, il n'existe pas d'intégrale doublement tangente à* OX (*voir* ma Thèse, p. 9).

9. Les valeurs de k pour lesquelles il existe une intégrale $y(x)$, définie précédemment, forment une suite continue. En effet, *s'il en existe une pour la valeur actuelle de k, il en existera une analogue pour toute valeur $k' < k$.*

Si, dans les approximations successives précédentes qui définissent $y(x)$, on remplace k par k', elles continueront évidemment à converger et définiront une intégrale $z(x)$ de l'équation

$$\frac{d^2(\theta z'')}{dx^2} = k' \varphi(x) z,$$

telle que

$$z(a) = z(b) = 0,$$
$$z'(a) = 0,$$
$$z'(b) = y'(b) < 0.$$

En la multipliant, s'il est nécessaire, par une constante convenable, qui est certainement finie (n° 7), on peut faire en sorte que $z''(a) = 1$.

10. Soit k_1 la limite supérieure des valeurs croissantes de k pour lesquelles il existe une intégrale $y(x)$, *k_1 est finie.* Nous allons, en effet, démontrer que, *pour les grandes valeurs de k, il n'existe plus d'intégrale $f(x)$.*

Soit $\varepsilon > 0$ une quantité aussi petite que l'on veut et $0 < \eta < \varepsilon$. Prenons k tellement grand pour que l'on ait, pour les valeurs de x, dans l'intervalle ab,

$$0 < \frac{\theta}{k} < \eta.$$

Cela étant, envisageons les deux équations différentielles

$$\frac{d^2\left(\frac{\theta}{k}y''\right)}{dx^2} = \varphi(x)y,$$

$$\frac{d^2(\eta z'')}{dx^2} = \varphi(x)z,$$

et soient y et z deux intégrales de ces deux équations déterminées par les mêmes conditions initiales. Elles différeront d'aussi peu que l'on voudra si l'on a soin de prendre ε suffisamment petit.

En supposant donc que le théorème énoncé ne soit pas vrai, il existerait, quelque petit que soit η, une intégrale de l'équation

$$\frac{d^4 z}{dx^4} = \frac{1}{\eta}\varphi(x)z,$$

tangente à Ox en $x = a$, positive de a à b et s'annulant pour $x = b'$, ce dernier point étant d'ailleurs aussi rapproché que l'on veut de b.

Écrivons les approximations successives qui déterminent cette dernière et, en même temps, les équations analogues (mêmes conditions aux limites) pour l'équation

$$\frac{d^4 u}{dx^4} = A^4 u,$$

A étant une constante, telle que

$$A^4 < \frac{\varphi(x)}{\eta}.$$

Les dernières approximations convergent si les premières convergent, ce qui est le cas actuellement.

On doit donc admettre que l'équation

$$\frac{d^4 u}{dx^4} = A^4 u$$

admet, quelque grande que soit la constante A, une intégrale tangente à Ox en $x = a$, positive de a à b et s'annulant pour $x = b'$. Or ceci est impossible.

En effet, une telle intégrale est, à un facteur constant près,

$$\begin{aligned} u = {} & \sin A(x-a)\,[e^{A(b'-a)} + e^{-A(b'-a)} - 2\cos A(b'-a)] \\ & + \cos A(x-a)\,[e^{-A(b'-a)} - e^{A(b'-a)} + 2\sin A(b'-a)] \\ & + e^{A(x-a)}[\cos A(b'-a) - \sin A(b'-a) - e^{-A(b'-a)}] \\ & + e^{-A(x-a)}[e^{A(b'-a)} - \cos A(b'-a) - \sin A(b'-a)], \end{aligned}$$

et l'on vérifie immédiatement (*voir* ma *Thèse*, p. 46) que, pour les racines consécutives de l'équation en A

$$\cos A(b'-a)\,\frac{e^{A(b'-a)} + e^{-A(b'-a)}}{2} = 1,$$

l'intégrale s'annule respectivement zéro, une, deux, ... fois, entre les points a et b'.

Il résulte de ce qui précède que, pour les grandes valeurs de k, il n'existe pas d'intégrale $y(x)$ définie précédemment. En d'autres termes, la quantité k_1, limite supérieure des valeurs de k pour lesquelles l'intégrale $y(x)$ existe, est finie.

11. Désignons l'intégrale $y(x)$ par l'intégrale $k(0, 0, 1, \omega)$, en mettant en évidence la valeur du paramètre de l'équation (1) et les conditions au point $x = a$. On sait que cette intégrale s'annule pour $x = b$ et est positive entre a et b. Si $y'(x)$ ou $k(0, 0, 1, \omega)$ $(k' > k)$ est une autre de ces intégrales, on ne pourra pas avoir $\omega' > \omega$.

Si, en effet, on avait $\omega' > \omega$, la différence $z = y'(x) - y(x)$ vérifierait l'équation

$$\frac{d^2(\theta z)}{dx^2} = \varphi(x)\,(k'y' - ky),$$

ou encore, en posant $k' = k + \varepsilon$,

$$\frac{d^2(\theta z'')}{dx^2} = \varphi(kz - \varepsilon y').$$

Ayant $z(a) = z'(a) = z''(a) = 0$, $z'''(a) > 0$, la fonction $z(x)$ commence par croître; elle sera donc positive pour x voisin de a; l'équation différentielle montre alors qu'on aura constamment

$$z(x) > 0$$

ou encore

$$y'(x) > y(x),$$

ce qui est impossible, ces deux intégrales s'annulant simultanément pour $x = b$. Si donc nous considérons la suite d'intégrales $y(x)$ ou $k(0, 0, 1, \omega)$ lorsque k tend vers k_1 en croissant, les quantités ω formeront une suite non croissante. Elles ne décroissent d'ailleurs pas indéfiniment.

En effet, considérons en même temps les deux équations

$$\frac{d^2(\theta y'')}{dx^2} = k\varphi y$$

et

$$\frac{d^2(\theta z'')}{dx^2} = 0,$$

les conditions initiales et finales pour $z(x)$ étant

$$\begin{aligned} z(a) = z'(a) &= 0, \\ z''(a) &= 1, \\ z(b) &= 0. \end{aligned}$$

Supposons qu'à partir d'une valeur de k on ait l'inégalité

$$\omega = \left[\frac{d(\theta y'')}{dx}\right]_{x=a} < \left[\frac{d(\theta z'')}{dx}\right]_{x=a}.$$

Nous allons, dans ces conditions, démontrer le lemme suivant :

12. Lemme. — *La différence $v(x) = y(x) - z(x)$ qui vérifie l'équation*

$$\frac{d^2(\theta v'')}{dx^2} = k\varphi y$$

et qui satisfait aux conditions suivantes :

$$v(a) = v'(a) = v''(a) = 0,$$
$$\left[\frac{d(\theta v'')}{dx}\right]_{x=a} < 0,$$

est négative dans l'intervalle ab.

En effet, cette fonction s'annule pour $x=b$. Je dis qu'elle est négative entre $x=a$ et $x=b$. En effet, si $x=\alpha$ $(a<\alpha<b)$ était un premier zéro de $v(x)$, cette fonction serait négative dans l'intervalle $a\alpha$. La dérivée $\frac{dv}{dx}$ s'y annule exactement deux fois, car, dans le cas contraire, on aurait au moins deux zéros pour

$$\frac{d\left(\theta\frac{d^2v}{dx^2}\right)}{dx}.$$

Entre ces deux zéros, la dérivée $\frac{d^2\left(\theta\frac{d^2v}{dx^2}\right)}{dx^2}$ ou $k\varphi y$ s'annulerait, ce qui est impossible. On voit de même que $\frac{d^2v}{dx^2}$ s'annule exactement deux fois.

$d\left(\theta\frac{d^2v}{dx^2}\right)$, négative pour $x=a$, a dû s'annuler au moins une fois pour permettre à $\frac{d^2v}{dx^2}$, qui est nulle pour $x=a$, de redevenir zéro.

Cette même quantité n'a pas pu s'annuler plus d'une fois pour la même raison que plus haut. Donc on aura, en $x=\alpha$,

$$v(\alpha)=0, \qquad v'(\alpha)>0, \qquad v''(\alpha)>0,$$
$$\left[\frac{d(\theta v'')}{dx}\right]_{x=\alpha}>0$$

et l'équation différentielle montre que, dans l'intervalle αb, $v(x)$ ira en croissant. Or ceci est impossible vu que, au point $x=b$, on a

$$v(b)=0.$$

Le lemme est donc démontré. Il en résulte que, si

$$z(x)<m \qquad (a\leqq x\leqq b),$$

on aura aussi

$$y(x)<m \qquad (a\leqq x\leqq b).$$

13. Faisons croître k vers sa limite k_1 et soit m le maximum de $z(x)$

dans ab. On aura à chaque instant (nº 4)

$$\omega > -\frac{6k_1 N_1}{n_1}\left[\frac{\theta(a)}{b-a} + M_1 m(b-a)\right],$$

ce qui montre que ω ne décroît pas indéfiniment.

Soit ω_1 sa limite inférieure.

14. L'intégrale $y_1(x)$ ou $k_1(0, 0, 1, \omega_1)$ est positive de a à b, et l'on a

$$y_1(a) = y'_1(a) = 0,$$
$$y_1(b) = y'_1(b) = 0.$$

Nous allons démontrer d'abord que $y_1(b) = 0$.

En effet, d'après la définition des nombres k_1 et ω_1, ε étant une quantité positive donnée arbitraire, aussi petite que l'on voudra, on peut envisager l'intégrale $y(x)$ ou $k(0, 0, 1, \omega)$ précédemment définie telle que

$$0 < k_1 - k < \varepsilon; \qquad 0 < \omega - \omega_1 < \varepsilon.$$

Elle différera de celle que nous considérons actuellement d'aussi peu qu'on le veut. Comme celle-là coupe Ox, la dernière coupera aussi cet axe en un point $x = b_1$. Je dis que $b = b_1$. Supposons le contraire : l'intégrale $y(x)$ coupe Ox en $x = b_1 < b$. Nous pouvons prendre ε assez petit pour que, relativement aux deux intégrales $y_1(x)$ et $y(x)$, la différence $|x_1 - x|$ correspondant à une même ordonnée soit moindre que b; or ceci est impossible, l'intégrale passant par $x = b$ quelque petit que soit ε.

15. Démontrons maintenant qu'on a aussi $y'(b) = 0$.

Supposons le contraire $\left(\frac{dy_1}{dx}\right)_{x=b} \neq 0$.

Considérons les valeurs k' et ω' et telles que

$$k' > k_1, \qquad \omega' > \omega_1.$$

L'intégrale $y(x)$ de l'équation

$$\frac{d^2(\theta y'')}{dx^2} = k'\varphi(x)y,$$

définie par les conditions initiales suivantes :

$$y(a) = y'(a) = 0,$$
$$y''(a) = 1,$$
$$\left[\frac{d(\theta y'')}{dx}\right]_{x=a} = \omega',$$

est positive de a à b et l'on a dans cet intervalle $y(x) > y_1(x)$.

En effet, la différence $z = y - y_1$ telle que

$$z(a) = z'(a) = z''(a) = 0,$$
$$\left[\frac{d(\theta z'')}{dx}\right]_{x=a} = \omega' - \omega_1 > 0,$$
$$\frac{d^2(\theta z'')}{dx^2} = \varphi(x)(k_1 z + \eta y) \qquad k' = k_1 + \eta,$$

est positive de a à b (n° 11). Si donc k' et ω' sont suffisamment voisins respectivement de k_1 et ω_1 l'intégrale $y(x)$ coupera Ox en un point $x = \alpha > b$ et sera positive de a à b.

Faisons décroître ω' à partir de sa valeur actuelle et laissons à k la même valeur. Le zéro $x = \alpha$ se déplacera vers α et passera à un moment donné au point $x = b$ (n° 5). A ce moment nous obtenons pour la valeur $k' > k_1$ une intégrale qui est tangente à Ox en a, coupe ce même axe en $x = b$ et est positive dans ab. Or, ceci est impossible d'après la définition même de k. Il faut donc que l'on ait $\frac{dy_1}{dx} = 0$ au point $x = b$.

16. De l'existence d'une intégrale $y_1(x)$ positive et doublement tangente à Ox en a et b correspondant à la valeur k_1 de k, nous déduirons, par un procédé analogue à celui employé dans ma Thèse, l'existence d'une suite infinie d'intégrales doublement tangentes à Ox (s'annulant respectivement une fois, deux fois entre les points de contact a et b), et d'une suite infinie de valeurs correspondantes remarquables du paramètre k. Le même résultat s'obtient en se servant de la méthode précédente, dirigée de la même manière :

1° Pour les petites valeurs de $k - k_1$ $(k > k_1)$ il existe une intégrale $y(x)$ de l'équation différentielle telle que

$$\begin{aligned} y(a) &= y'(a) = 0, \\ y''(a) &= 1, \\ y(b) &= 0, \end{aligned}$$

et s'annulant une fois entre $x = a$ et $x = b''$.

La démonstration se fait à l'aide de l'intégrale $y_1(x)$ de l'équation

$$\frac{d^2(\theta y_1'')}{dx^2} = k\varphi(x)y_1 \qquad (k > k_1)$$

doublement tangente à Ox en a et b $(b' < b)$ et positive de a à b, en prenant k voisin de k_1, et faisant décroître la quantité $\omega = \left[\frac{d(\theta y_1'')}{dx}\right]_{x=a}$.

2° Pour les grandes valeurs de k il n'existe plus de telles intégrales.

On le démontre comme précédemment par la *comparaison* de l'équation donnée avec une équation analogue à coefficients constants.

3° Les valeurs de k du 1° forment une suite continue.

Il suffit de démontrer que, s'il existe une intégrale $z(x)$ (1°) pour la valeur k' de k, il en existera une pour la valeur $k_1 < k'' < k'$, k'' étant suffisamment rapproché de k'. L'intégrale $u(x)$ déterminée par les mêmes conditions initiales que $z(x)$ et correspondant à la valeur k'' du paramètre sera plus grande que $z(x)$ de a à b, et elle en différera peu si k'' est voisin de k. Elle coupe Ox en $x = \alpha (a < \alpha < b)$ et $x = \beta (\beta > b)$.

Si nous faisons croître $\left[\frac{d(\theta u'')}{dx}\right]_{x=a}$ les points α et β iront d'abord vers $x = b$. Le zéro $x = \beta$ ne peut disparaître avant son passage par $x = b$, car dans ce cas c'est $x = \alpha$ qui a passé d'abord. Or, ceci est impossible. En effet, dans ce cas on aurait pour une valeur de k, $k = k'' > k_1$, une intégrale tangente en a à Ox, s'annulant pour $x = b$ et positive de a à b.

4° Si $k = k_2$ représente la limite supérieure des valeurs du 1° de k_1, il existe une intégrale de l'équation

$$\frac{d^2(\theta y'')}{dx} = k_2\varphi(x)y$$

doublement tangente à Ox en $x=a$ et $x=b$ et s'annulant une fois entre ces deux points.

La démonstration est analogue à celle relative à la valeur k_2 du paramètre b.

17. Une méthode identique peut être essayée pour démontrer l'existence des solutions périodiques des équations différentielles de l'espèce précédente.

Ainsi, pour l'équation du second ordre

$$\frac{d^2y}{dx^2}+k\varphi(x)y=0 \qquad [\varphi(x)>0],$$

on aurait à résoudre les quatre questions suivantes :

1° Pour les petites valeurs du paramètre k il existe une intégrale définie par les conditions suivantes :

$$\begin{gathered} y(a)=1, \\ y'(a)=y(b) \quad \text{ou} \quad y(a)=y(b)=1, \end{gathered}$$

et s'annulant au plus deux fois entre a et b;

2° Pour les grandes valeurs de k il n'existe plus de telles intégrales;

3° Les valeurs de k considérées forment une suite continue;

4° Si k' est la limite supérieure des valeurs de k envisagées au 1°, il existe pour cette valeur de k une intégrale telle que ses valeurs et celles de sa première dérivée soient les mêmes en $x=a$ et $x=b$.

Les deux premiers numéros se démontrent facilement. Le premier par les approximations successives qui convergent si k est petit et le second par la comparaison de l'équation donnée avec une équation à coefficients constants comme nous l'avons fait pour l'équation du quatrième ordre. Il resterait donc les deux derniers points qui demandent à être démontrés.

II.

Si l'on voulait traiter la question précédente au moyen des constantes de Schwartz-Picard, on devrait avoir établi les résultats suivants :

1° Soit $y(x)$ une fonction de x telle que

$$\frac{d^2(\theta y'')}{dx^2} = \Psi(x), \qquad \Psi(x) > 0 \qquad (a \leqq x \leqq b),$$
$$y(a) = y'(a) = 0,$$
$$y(b) = y'(b) = 0.$$

On a

$$y(x) > 0, \qquad a < x < b \qquad (\text{n}^\circ\ 6,\ \text{Lemme I}).$$

2° On a

$$0 < y < g \int_a^b \Psi(x)\, dx \qquad (\text{n}^\circ\ 6,\ \text{Lemme II}).$$

3° Si

$$\Psi(x) \geqq \Psi_1(x) \qquad (a \leqq x \leqq b),$$

et

$$a \leqq a_1 < b_1 \leqq b,$$

soit $z(x)$ l'intégrale de l'équation

$$\frac{d^2(\theta z'')}{dx^2} = \Psi_1(x),$$

telle que

$$z(a_1) = z'(a_1) = 0,$$
$$z(b_1) = z'(b_1) = 0,$$

on aura

$$y(x) > z(x) \qquad (a_1 \leqq x \leqq b_1) \quad [1].$$

Prenons d'abord $a = a_1$, $b = b_1$ et envisageons l'intégrale $z_1(x)$ analogue à $z_1(x)$ correspondant à l'intervalle ab.

L'équation

$$\frac{d^2[\theta(y - z_1)'']}{dx^2} = \Psi(x) - \Psi_1(x)$$

montre (1°) que

$$y > z_1 \qquad (a < x < b).$$

Soit $z_2(x)$ l'intégrale analogue à $z(x)$ correspondant à l'intervalle ab_1 $(a < b_1 < b)$.

---

[1] *Thèse*, p. 16.

Prenons b_1 voisin de b; on pourra écrire $z_1(b) > 0$ et $z'_1(b) < 0$. Cela étant, posons

$$\rho(x) = z_1 - z_2.$$

Il viendra

$$\frac{d^2(\theta\rho'')}{dx^2} = 0,$$

$$\theta\rho'' = c + c'x,$$

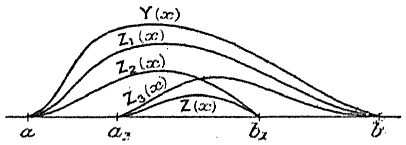
$\varphi(x)$ *ne peut devenir négative*. En effet, dans ce cas, comme on a

$$\rho(a) = \rho'(a) = 0,$$
$$\rho(b_1) > 0, \qquad \rho'(b_1) < 0,$$

$\rho'(x)$ aurait au moins trois zéros dans l'intervalle ab; $\rho''(x)$ en aurait par suite au moins deux, ce qui est impossible.

En prenant un point b_2 tel que $x = b_2 < b_1$ et suffisamment voisin

Fig. 3.



de b_1 on verrait que l'intégrale correspondant à cet intervalle est intérieure à $z_2(x)$ et par suite à $z_1(x)$.

Cela veut dire qu'on a

$$z_2(x) < z_1(x),$$

quel que soit b_1 à l'intérieur de ab.

Même raisonnement en faisant jouer à l'extrémité $x = b$ le rôle de l'extrémité $x = a$. On verra que l'intégrale $z_3(x)$ correspondant à l'intervalle a, b $(a < a_1 < b)$ est intérieure à $z_1(x)$.

Par suite, l'intégrale $z(x)$ correspondant à $a_1 b_1$ est intérieure à $z_2(x)$ et $z_1(x)$ $(a_1 \leqq x \leqq b_1)$. Donc elle est intérieure à $z_1(x)$ et par suite à $y(x)$.

4° On a

$$y\frac{d(\theta Y'')}{dx} - Y\frac{d(\theta y'')}{dx} = \text{const.} + \theta\left(\frac{dy}{dx}\frac{d^2 Y}{dx^2} - \frac{dY}{dx}\frac{d^2 y}{dx^2}\right),$$

y et Y étant deux intégrales de l'équation de lord Rayleigh.

En effet, l'identité

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}\left[y\frac{d(\theta \mathrm{Y}'')}{dx} - \mathrm{Y}\frac{d(\theta y'')}{dx}\right] \\
&\quad = y\, k\varphi \mathrm{Y} - \mathrm{Y}\, k\varphi y + \frac{dy}{dx}\frac{d(\theta \mathrm{Y}'')}{dx} - \frac{d\mathrm{Y}}{dx}\frac{d(\theta y'')}{dx} \\
&\quad = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\theta\frac{d^2\mathrm{Y}}{dx^2} - \frac{d\mathrm{Y}}{dx}\theta\frac{d^2 y}{dx^2}\right)
\end{aligned}$$

donnera, par intégration, la relation annoncée.

Ces résultats établis, on voit immédiatement qu'il n'y a plus aucune difficulté à traiter l'équation de lord Rayleigh, par la méthode employée dans le cas $\theta = \text{const.}$

Je terminerai en remarquant que cette équation s'offre d'elle-même comme application à la méthode des équations *intégrales* de M. Hilbert.

FIN DU TOME VINGT-DEUXIÈME.