

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

J. BOUSSINESQ

Propagation des ondes le long d'une colonne liquide compressible se composant de filets à vitesses inégales et contenue dans un tuyau élastique horizontal, sans tension longitudinale

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 22 (1905), p. 349-368

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1905_3_22__349_0>

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1905, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

PROPAGATION DES ONDES

LE LONG D'UNE COLONNE LIQUIDE COMPRESSIBLE,

SE COMPOSANT DE FILETS A VITESSES INÉGALES
ET CONTENUE DANS UN TUYAU ÉLASTIQUE HORIZONTAL,
SANS TENSION LONGITUDINALE,

PAR M. J. BOUSSINESQ.



I. Resal me paraît avoir, le premier ou un des premiers, dans une courte Note du 27 mars 1876 (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, t. LXXXII, p. 698), soumis au calcul les mouvements que propage le long d'une colonne liquide l'élasticité du tuyau qui la contient, comme sont, par exemple, les battements du *pouls* dans les artères, les ondes longitudinales de l'eau remplissant le tube en caoutchouc de certains appareils de Marey pour l'enregistrement ou l'imitation de phénomènes physiologiques, enfin, les *coups de bélier* provoqués, dans les tuyaux de conduite, par toute brusque variation de la vitesse d'écoulement et, par suite, de la pression. Comme Resal avait spécialement en vue la colonne liquide, sans écoulement, contenue dans un mince tube en caoutchouc généralement un peu plus long que la distance de ses deux extrémités, ou dépourvu de tension longitudinale, et, d'ailleurs, incomparablement plus dilatable dans les sens latéraux, par les accroissements de la pression intérieure, que n'est compressible le liquide inclus, il a pu,

tout à la fois, négliger les actions mutuelles des anneaux juxtaposés composant le tube, ou supposer, du moins avec une assez grande approximation, ces actions insensibles devant la tension des fibres circulaires des anneaux, et, de plus, admettre, d'une part, l'incompressibilité du liquide, ou la conservation des volumes fluides, d'autre part, le *parallélisme des tranches*, c'est-à-dire l'égalité des vitesses prises suivant l'axe par tout un tronçon élémentaire de la colonne, sous l'impulsion commune exercée à une extrémité, les frottements, qui tendraient à inégaliser ces vitesses, restant, comme on sait, négligeables, dans les mouvements d'un fluide ou brefs, ou périodiques, d'amplitude modérée. Resal obtient ainsi, pour le carré de la vitesse de propagation des ondes, le quotient, par la densité ρ du liquide, de l'élasticité E de traction du tube, multipliée par le petit rapport de l'épaisseur ε de la paroi au diamètre intérieur $2R$.

Dans un Mémoire intitulé *Théorie générale du mouvement varié de l'eau dans les tuyaux de conduite* (*Revue de Mécanique*, janvier et mars 1904), Mémoire précédé d'une Note où M. Rateau en signale aux savants français l'importance pratique, et qui a fait l'objet, le 13 mars 1904, d'une conférence de l'auteur à notre *Société d'encouragement* pour l'industrie nationale, M. l'ingénieur italien Alliévi a généralisé très heureusement, presque sans la compliquer, la formule de Resal (qui lui était d'ailleurs inconnue), en tenant compte de la compressibilité du liquide, comme il le fallait bien eu égard à la grande rigidité des tuyaux de conduite, mais en faisant encore l'hypothèse du parallélisme des tranches, peu admissible dans ces tuyaux où les filets fluides ont des vitesses assez notablement différentes, et en continuant enfin à admettre l'indépendance relative des anneaux circulaires contigus du tuyau.

Cette dernière supposition, quoique moins admissible pour un tel tuyau que pour un tube lâche et mince en caoutchouc, et qui ne serait pleinement justifiée que dans le cas d'une paroi à fibres *annulaires* résistantes mais très extensible et très compressible *suivant sa longueur*, paraît inévitable dès qu'on veut pouvoir traiter la question ; car, s'il fallait tenir compte des actions mutuelles des anneaux, et, en conséquence, de celles qu'exerceraient à distance les uns sur les autres, par leur intermédiaire, les tronçons sous-jacents de la colonne

liquide, les équations du mouvement de celle-ci ne seraient, sans doute, généralement plus réductibles à une seule aux dérivées partielles; et le problème deviendrait, ce semble, inabordable (1).

Mais il y a lieu de ne pas négliger les inégalités de vitesse des filets fluides; c'est ce que je me propose de faire ici, en développant d'ailleurs la théorie complète.

II. Commençons par supposer en repos, et même sans pesanteur ni pression, la colonne liquide, à sections circulaires et d'un rayon constant R autour de l'axe horizontal des x . Puis, restituons-lui son poids, avec une pression constante le long de l'axe, mais complétée, partout ailleurs, par une petite partie, qui sera, ici, censée insignifiante, variable hydrostatiquement du haut au bas des sections; et admettons que la colonne, en revenant alors au repos, ait éprouvé, à partir de la section $x = 0$ restée dans son plan primitif, les petites contractions soit cubique, soit surtout en longueur, nécessaires à l'existence de cette pression, vu les légères dilatations latérales simultanées qui tendront les fibres annulaires du tuyau, d'une manière sensiblement uniforme sur toute la circonférence, pour leur permettre d'équilibrer cette même pression intérieure. Produisons enfin sur la pression dont il s'agit, à partir d'un moment donné, une variation commune à toute la section $x = 0$, en déplaçant, par exemple, légèrement celle-ci, normalement à son plan.

Il en résultera plus ou moins vite, dans toute la colonne, des déplacements presque parallèles à l'axe, ou presque réductibles à leur composante suivant les x ; et, par suite, la pression ne cessera pas, sur toute l'étendue de chaque section, de varier hydrostatiquement, d'une manière, par conséquent, insignifiante: elle sera ainsi réductible à sa valeur p sur l'axe, fonction seulement de l'abscisse et du temps. Chaque tronçon de la colonne, primitivement compris entre deux sections voisines d'abscisses x_0 et $x_0 + dx_0$, acquerra suivant les x , par l'effet des chutes de pression qui s'y observeront, des vitesses

(1) Du reste, cette hypothèse de la quasi-indépendance des anneaux successifs sera, aux n^{os} III et VI, directement établie dans le cas d'un tube lâche et reconnue approchée même pour un tuyau de conduite.

longitudinales u communes, assez lentement variables avec x_0 en raison de leur rapide propagation; et les tronçons se conserveront ainsi presque cylindriques (avec leurs bases à peu près normales à l'axe) durant des temps notables, à cause de la petitesse qu'ont les frottements dans les fluides.

Si, à l'époque t , l'on appelle, d'une part, ξ le déplacement total, suivant les x , de la première base du tronçon, feuillet fluide qui avait eu d'abord l'abscisse x_0 mais dont l'abscisse actuelle est $x = x_0 + \xi$, et, d'autre part, ϑ le *petit* écartement relatif $\frac{d\xi}{dx_0}$ des deux bases du tronçon, ϑ' la dilatation analogue, comparable à ϑ , des rayons R de celles-ci, l'accroissement $R\vartheta'$ des rayons sera petit à côté du déplacement ξ ; et, par suite, les vitesses et accélérations tant du tronçon fluide que de la paroi du tuyau, suivant les rayons, seront peu de chose à côté de celles du mouvement longitudinal du fluide. C'est dire que les inerties en jeu dans le tuyau, transversales ou même, par suite, longitudinales, et aussi celles du fluide suivant les sens normaux à l'axe, seront négligeables comparativement aux inerties du fluide suivant l'axe.

Or celles-ci sont dues évidemment à la différence des deux pressions, presque égales, exercées sur les deux bases du tronçon fluide, et qui seraient encore peu différentes, quand bien même on donnerait au tronçon une longueur comparable au diamètre $2R$.

Les inerties longitudinales du fluide se trouvent, par suite, très faibles, à côté de la pression sur une seule base, ou encore, sur une section méridienne du tronçon menée suivant l'axe, et, aussi, à côté de la tension de l'anneau de paroi, de même longueur suivant les x , qui contient le tronçon fluide et s'oppose à la pression supportée par la section méridienne. Donc, à bien plus forte raison, les inerties, normalement à l'axe, de cet anneau de paroi et du tronçon fluide, sont négligeables par rapport à la pression dont il s'agit ou à la tension de l'anneau.

En résumé, *les anneaux composant le tuyau pourront être, à tout instant, supposés en équilibre, dans chacun de leurs éléments de volume, sous la pression actuelle du fluide et l'action des anneaux contigus ou des appuis extérieurs de leur surface convexe.*

Enfin, la pression p du fluide variera assez lentement avec x pour que, sous son action (toutes choses égales d'ailleurs quant aux appuis du dehors), les sections normales du tuyau soient des plans de symétrie pour ces déformations d'équilibre, tout pouvant être censé pareil de part et d'autre jusqu'à une petite distance.

Elles resteront donc planes, normales à l'axe sensiblement rectiligne du tuyau et parallèles entre elles. Par suite, les fibres longitudinales du tuyau, qui leur sont perpendiculaires, éprouveront, toutes, les mêmes dilatations ou contractions, fonctions seulement, comme p , de l'abscisse et du temps.

III. Cela posé, bornons-nous d'abord au cas d'un tuyau lâche, c'est-à-dire assez long et assez flexible pour que, au degré d'approximation où ses inerties sont négligeables, la tension *totale* ou la pression *totale* exercée entre deux anneaux contigus reste nulle; et, R , R_1 désignant les deux rayons intérieur et extérieur (à l'état naturel) de ce tuyau supposé de contexture homogène et isotrope, ou $R - R_1$ son épaisseur ϵ , cherchons quelle relation y existera entre l'accroissement R' du rayon intérieur et la pression p du fluide.

Appelons, à la distance primitive r de l'axe, ∂_1 , ∂_2 , ∂_3 les trois dilatations linéaires *principales* de la matière du tuyau, rectangulaires entre elles et de directions ici évidentes pour des raisons de symétrie, savoir : ∂_1 la dilatation de la fibre, dr , prise suivant le prolongement du rayon r émané perpendiculairement de l'axe jusqu'au point matériel considéré du tuyau; ∂_2 celle de la fibre annulaire $2\pi r$ passant par ce point; enfin, ∂_3 la dilatation, indépendante de r , de la fibre longitudinale (c'est-à-dire parallèle aux x) émanée du même point. Si α , fonction de r , désigne le petit *déplacement* de celui-ci dans sa section droite, allongement élastique éprouvé par le rayon r , ∂_1 en sera la dérivée par rapport à r , et ∂_2 , allongement relatif de la fibre circulaire $2\pi r$ devenue $2\pi(r + \alpha)$, vaudra le quotient de α par r . L'on aura donc, en appelant, de plus, θ la dilatation superficielle $\partial_1 + \partial_2$ de la section normale au point considéré,

$$(1) \quad \partial_1 = \frac{d\alpha}{dr}, \quad \partial_2 = \frac{\alpha}{r}, \quad \theta = \frac{1}{r} \frac{d.r\alpha}{dr}, \quad \partial_3 = \text{const.};$$

et les formules usuelles des pressions élastiques (à deux coefficients λ , μ), dans les solides isotropes, donneront, pour les trois *pressions* (ou plutôt *tractions*) *principales* P_1 , P_2 , P_3 exercées sur les éléments plans normaux aux sens des dilatations ∂_1 , ∂_2 , ∂_3 :

$$(2) \quad P_1 = \lambda(\theta + \partial_3) + 2\mu\partial_1, \quad P_2 = \lambda(\theta + \partial_3) + 2\mu\partial_2, \quad P_3 = \lambda\theta + (\lambda + 2\mu)\partial_3.$$

Il en résulte, notamment,

$$(3) \quad \frac{dP_1}{dr} = \lambda \frac{d\theta}{dr} + 2\mu \frac{d^2\alpha}{dr^2}, \quad P_1 - P_2 = 2\mu(\partial_1 - \partial_2) = 2\mu r \frac{d}{dr} \left(\frac{\alpha}{r} \right).$$

Or écrivons la condition d'équilibre, suivant le rayon r , d'un volume élémentaire (auquel nous attribuerons la longueur 1 dans le sens des x) compris entre les deux cylindres de rayons respectifs r , $r + dr$ et deux plans menés suivant l'axe inclinés respectivement de $\pm \frac{\gamma}{2}$ par rapport au rayon r . Sur ses deux faces courbes γr , $\gamma(r + dr)$, les tractions exercées seront, suivant le rayon r , $-\gamma r P_1$, $\gamma(r P_1 + d.r P_1)$; et leur résultante algébrique $\gamma d(r P_1)$, ou $\gamma r dP_1 + \gamma P_1 dr$, se trouvera équilibrée par la projection, sous l'angle $\frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2}$, des deux tractions normales $P_2 dr$ exercées sur les deux faces planes latérales dr . L'on aura donc

$$\gamma r dP_1 + \gamma P_1 dr = \gamma P_2 dr,$$

c'est-à-dire, en simplifiant et utilisant finalement les formules (3), (1) ci-dessus,

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dP_1}{dr} + \frac{P_1 - P_2}{r} = 0, \quad \text{ou} \quad \lambda \frac{d\theta}{dr} + 2\mu \frac{d}{dr} \left(\frac{d\alpha}{dr} + \frac{\alpha}{r} \right) = 0, \\ \text{ou enfin} \\ (\lambda + 2\mu) \frac{d\theta}{dr} = 0. \end{array} \right.$$

La dilatation superficielle θ des sections normales du tuyau est donc constante, tout comme la dilatation linéaire ∂_3 des fibres longitudinales; et la formule (2) de P_3 montre que l'action mutuelle de

deux anneaux contigus est répartie uniformément sur leur base commune. Son annulation oblige donc à poser $P_3 = 0$ ou

$$(5) \quad \partial_3 = -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \theta;$$

ce qui réduit les formules de P_1 et de P_2 , en tenant compte de (1), à

$$(6) \quad P_1 = 2\mu \left(\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \theta + \frac{d\alpha}{dr} \right), \quad P_2 = 2\mu \left(\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \theta + \frac{\alpha}{r} \right).$$

D'autre part, θ étant constant, son expression (1) conduit par une intégration immédiate, en appelant A une constante arbitraire, à la formule

$$(7) \quad \alpha = \frac{\theta}{2} r + \frac{A}{r}; \quad \text{d'où} \quad P_1 = \mu \left(\frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu} \theta - \frac{2A}{r^2} \right).$$

La constante A se détermine par la condition que la force P_1 s'annule sur la face externe, *supposée libre*, $r = R_1$, du tuyau; ce qui donne $A = \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu} \frac{R_1^2}{2} \theta$, et, vu que le coefficient *usuel* E de l'élasticité de traction d'une fibre a la valeur $\frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \mu$, il vient enfin, en fonction de θ , tant pour la pression $p = -P_1$, exercée sur la face concave $r = R$, que pour la dilatation linéaire $\partial' = \frac{\alpha}{r} = \frac{\alpha}{R}$ éprouvée par le rayon intérieur $r = R$:

$$(8) \quad p = \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} E \frac{R_1^2 - R^2}{R^2} \theta, \quad \partial' = 2 \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \left(1 + \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \frac{R_1^2 - R^2}{4R^2} \right) \theta.$$

Si nous introduisons, au lieu du rayon extérieur R_1 , la somme $R + \varepsilon$ du rayon intérieur R et de l'épaisseur ε , le rapport *constant* de la pression p du fluide à la dilatation ∂' du rayon de sa section normale, sera donc, toutes réductions faites,

$$(9) \quad \frac{p}{\partial'} = E' \frac{\varepsilon}{R}, \quad \text{où} \quad E' = E \frac{1 + \frac{\varepsilon}{2R}}{1 + \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \left(1 + \frac{\varepsilon}{2R} \right) \frac{\varepsilon}{2R}}.$$

Ce rapport est visiblement inférieur à la limite $\frac{E\varepsilon}{R}$ vers laquelle il tend dans les tuyaux *très minces*, quand l'épaisseur ε devient une fraction insignifiante du diamètre intérieur $2R$.

Resal et M. Alliévi, s'étant bornés à ce cas, ont confondu le coefficient E' , qui dépend du rayon R , avec celui, E , d'élasticité; il est donc, en réalité, un peu moindre, dès que l'épaisseur du tuyau cesse d'être insensible par rapport au rayon (1).

(1) Comme l'indépendance mutuelle des anneaux successifs n'est, toujours, complètement sauvegardée que dans un tuyau infiniment extensible et compressible suivant les x , il ne sera pas inutile de voir ici ce que devient la formule (9) quand la contexture cesse d'être pleinement isotrope, pour le rester seulement autour de l'axe des x et rendre ainsi possible, dans un cas limite, l'annulation *identique* des pressions sur les sections normales. Ce cas limite aurait lieu pour un tuyau se composant, par exemple, d'anneaux séparément homogènes, sans largeur ni épaisseur sensibles, juxtaposés et superposés en nombre immense, ou, encore, des enroulements d'un long fil élastique à spires infiniment rapprochées, analogue aux *trachées* des végétaux, anneaux ou enroulements que reliait entre eux une sorte de parenchyme lâche, ou une toile affectée d'une double infinité de petits plis longitudinaux et transversaux.

Le tuyau, toujours homogène, étant ainsi supposé *isotrope autour de l'axe des x* , son potentiel d'élasticité Φ , qui exprime les six forces élastiques usuelles $N_x, N_y, N_z, T_x, T_y, T_z$ par ses six dérivées partielles premières relatives aux six déformations élémentaires bien connues $\partial_x, \partial_y, \partial_z, g_x, g_y, g_z$, comporte cinq coefficients d'élasticité, $\lambda, \mu, \nu, \lambda', \mu'$; il est, d'après la formule (60), démontrée à titre d'exercice, de la septième de mes *Leçons d'Analyse infinitésimale pour la Mécanique et la Physique* (t. I, Compléments, p. 119*),

$$(a) \quad \Phi = \frac{\lambda}{2} (\partial_y + \partial_z)^2 + \lambda' \partial_x (\partial_y + \partial_z) + \frac{\nu}{2} \partial_x^2 + \mu (\partial_y^2 + \partial_z^2 + \frac{1}{2} g_x^2) + \frac{\mu'}{2} (g_y^2 + g_z^2).$$

Il en résulte pour les six forces N, T , en appelant encore θ la dilatation superficielle $\partial_y + \partial_z$ de la section normale, les expressions

$$(a') \quad \begin{cases} N_x = \lambda' \theta + \nu \partial_x, & (N_y, N_z) = \lambda \theta + \lambda' \partial_x + 2\mu (\partial_y, \partial_z), \\ T_x = \mu g_x, & (T_y, T_z) = \mu' (g_y, g_z). \end{cases}$$

On voit que les anneaux seront mutuellement indépendants, ou que la pression sur la section normale aura ses trois composantes N_x, T_x, T_y essentiellement nulles, à la triple condition, nécessaire et suffisante, que $\lambda' = 0, \mu' = 0, \nu = 0$; ce qui revient à réduire le potentiel Φ , ou les six forces N, T , à leurs expressions ordinaires, en λ et μ , du cas d'isotropie, mais spécifiées pour des déformations *planes*, parallèles aux yz et indépendantes de x , où l'on aurait $\partial_x = 0, g_x = 0, g_y = 0$. Quant à l'isotropie complète, on l'obtient en posant $\lambda' = \lambda, \mu' = \mu, \nu = \lambda + 2\mu$.

IV. Au reste, la formule (9) devient comme évidente dans ce cas limite d'un tuyau très mince. En effet, considérant alors une tranche fluide de longueur dx et l'anneau de paroi qui la recouvre, décomposons ce système en deux moitiés symétriques, par un plan mené suivant l'axe et qui interceptera, d'une part, dans le liquide, le rectangle $2R dx$, siège de la pression totale $2Rp dx$, d'autre part, dans la paroi, deux rectangles εdx , sièges analogues d'une traction, normale par raison de symétrie, dont la valeur est en tout $2T\varepsilon dx$, si T désigne

Mais ne nous bornons pas à ces deux cas, et admettons seulement, comme dans le texte, la symétrie des déformations tant par rapport aux sections normales, que tout autour de l'axe des x . En dirigeant alors, pour l'étude d'un élément de volume déterminé, l'axe des y suivant son rayon r , ou suivant la dilatation principale ∂_1 , l'axe des z suivant la dilatation principale ∂_2 , qui est celle de la fibre annulaire $2\pi r$, et appelant enfin ∂_3 la dilatation principale suivant les x , les pressions principales correspondantes P_1, P_2, P_3 se déduiront de (a') par les hypothèses $\partial_y = \partial_1, \partial_z = \partial_2, \partial_x = \partial_3, g_x = 0, g_y = 0, g_z = 0$; et l'on aura

$$(b) \quad P_1 = \lambda\theta + \lambda' \partial_3 + 2\mu \partial_1, \quad P_2 = \lambda\theta + \lambda' \partial_3 + 2\mu \partial_2, \quad P_3 = \lambda'\theta + \nu \partial_3.$$

Les formules (1) subsistant évidemment, rien ne sera changé ni aux expressions (3), ni, par suite, aux équations (4) et à la formule (7) du petit déplacement radial α . Mais l'annulation de la valeur moyenne de P_3 donnera, au lieu de (5),

$$(b') \quad \partial_3 = -\frac{\lambda'}{\nu} \theta.$$

Il en résultera

$$(b'') \quad P_1 = \frac{(\lambda + \mu)\nu - \lambda'^2}{\nu} \theta - \frac{2\mu A}{r^2};$$

d'où, vu l'annulation de P_1 à la face externe $r = R_1$ du tuyau,

$$(c) \quad A = \frac{(\lambda + \mu)\nu - \lambda'^2}{\mu\nu} \frac{R_1^2}{2} \theta.$$

Enfin, la valeur, p , de $-P_1$, pour $r = R$, et celle de $\frac{\alpha}{R} = \theta'$ à la même limite $r = R$, seront

$$(c') \quad \left\{ \begin{array}{l} p = \frac{(\lambda + \mu)\nu - \lambda'^2}{\nu} \frac{R_1^2 - R^2}{R^2} \theta, \\ \theta' = \frac{(\lambda + 2\mu)\nu - \lambda'^2}{2\mu\nu} \left[1 + \frac{(\lambda + \mu)\nu - \lambda'^2}{(\lambda + 2\mu)\nu - \lambda'^2} \frac{R_1^2 - R^2}{R^2} \right] \theta. \end{array} \right.$$

Si l'on observe que le coefficient E d'élasticité des fibres annulaires, rapport de P_2 à ∂_2

sa valeur moyenne par unité d'aire. Or, ces deux forces $2Rp dx$, $2T\varepsilon dx$ s'équilibrent sur une quelconque des deux moitiés, puisque, d'une part, les inerties, surtout transversales, sont négligeables et que, d'autre part, l'action des deux anneaux de paroi contigus, également négligeable, par hypothèse, dans sa valeur résultante ou totale à travers tout secteur de leur surface séparative, n'a, à bien plus forte raison, que des composantes transversales insensibles. Il vient donc

$$Rp = \varepsilon T.$$

Dès lors, la petitesse supposée de ε , par rapport à R , entraîne celle de p à côté de T ; et chaque fibre annulaire se trouve tirée sensiblement comme si sa surface latérale n'éprouvait aucune pression. C'est dire que sa tension T , par unité d'aire, est le produit du coefficient usuel E d'élasticité de traction de la paroi, par la dilatation ν' de

quand P_1 et P_3 sont nuls, a la valeur $4 \frac{(\lambda + \mu)\nu - \lambda'^2}{(\lambda + 2\mu)\nu - \lambda'^2} \mu$, ces deux relations (c') conduiront, pour le quotient de p par ν' , à la première formule (9), où le coefficient constant E' aura maintenant l'expression

$$(c'') \quad E' = E \frac{1 + \frac{\varepsilon}{2R}}{1 + 4 \frac{(\lambda + \mu)\nu - \lambda'^2}{(\lambda + 2\mu)\nu - \lambda'^2} \left(1 + \frac{\varepsilon}{2R}\right) \frac{\varepsilon}{2R}}.$$

Elle se réduit bien à (9) quand $\lambda' = \lambda$ et $\nu = \lambda + 2\mu$, c'est-à-dire dans le cas, en quelque sorte moyen, d'une texture isotrope. Dans le cas extrême d'un tuyau très extensible et compressible suivant les x , où ν (coefficient essentiellement positif dans N_x) et λ' seront infiniment petits du même ordre, la fraction proprement dite $\frac{(\lambda + \mu)\nu - \lambda'^2}{(\lambda + 2\mu)\nu - \lambda'^2}$, écrite

$\frac{\lambda + \mu - \frac{\lambda'^2}{\nu}}{\lambda + 2\mu - \frac{\lambda'^2}{\nu}}$, se rapprochera autant que possible de l'unité, ou grandira plus que

dans tout autre cas, par la suppression, *haut et bas*, du terme négatif commun $-\frac{\lambda'^2}{\nu}$; en sorte que le rapport de E' à E , qui était déjà inférieur à 1 pour une texture isotrope,

recevra sa moindre valeur $\frac{1 + \frac{\varepsilon}{2R}}{1 + 4 \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \left(1 + \frac{\varepsilon}{2R}\right) \frac{\varepsilon}{2R}}$.

la fibre. Ainsi, l'on a bien

$$Rp = E\varepsilon d',$$

conformément à la formule (9) spécifiée pour un tube mince.

V. Mais revenons au cas général d'une épaisseur ε quelconque du tuyau.

La première formule (8), où l'on a $p > 0$, montre que la dilatation superficielle θ des sections est positive; après quoi, d'une part, la formule (5), d'autre part, la première (7) différenciée en r , dans laquelle on substituera à $\frac{A}{r^2}$ sa valeur résultant de celle de A et essentiellement supérieure à $\frac{\theta}{2}$, font voir que les deux dilatations principales ∂_3, ∂_4 sont négatives. Enfin, la première formule (7), divisée

Si nous appelons M l'inverse de ce rapport minimum, inverse constituant, par conséquent, la valeur la plus forte qui soit pratiquement admissible pour l'expression $\frac{E}{E'}$ quand on fait varier la contexture, son excédent sur toute autre valeur de $\frac{E}{E'}$ sera simplement, d'après (c''),

$$(c''') \quad M - \frac{E}{E'} = 4 \left(\frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} - \frac{(\lambda + \mu)\nu - \lambda'^2}{(\lambda + 2\mu)\nu - \lambda'^2} \right) \frac{\varepsilon}{2R}.$$

Dans le cas d'isotropie, où $\lambda' = \lambda$ et $\nu = \lambda + 2\mu$, cet excédent se réduit à

$$\frac{\lambda}{\lambda + \mu} \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \frac{\varepsilon}{2R}.$$

Il est clair que, en raison de leur forme même et des procédés usuels employés pour l'obtenir, les tuyaux doivent, le plus souvent, avoir leur matière constituée autrement suivant leur longueur que dans les sens transversaux.

Ainsi l'hypothèse d'hétérotropie que nous venons de faire à propos de leur contexture n'est pas purement théorique, et ce sont les formules de cette Note qu'il faudra employer, préférablement à celles du texte. Heureusement que les unes et les autres conduisent à une relation de même forme entre p et d' , savoir, à la première (9), où la constante E' , caractéristique de chaque tuyau, se confondra même, quelle que soit la contexture, avec le coefficient usuel E d'élasticité des fibres annulaires, toutes les fois que l'épaisseur ε du tuyau sera une assez petite fraction du diamètre $2R$.

par r , donne, comme *unique* dilatation principale *positive*, paraissant seule susceptible de devenir *dangereuse* ou d'amener la rupture du tuyau, la dilatation ∂_2 *des fibres annulaires*, savoir

$$\partial_2 = \frac{\theta}{2} \left(1 + \frac{2A}{\theta r^2} \right) = \frac{\theta}{2} \left(1 + \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu} \frac{R_1^2}{r^2} \right).$$

Or on voit qu'elle varie en sens inverse de r et atteint sa plus grande valeur à la face interne $r = R$, où elle devient justement ∂' . Si donc on désigne par Δ la *limite d'élasticité* de la matière, valeur qu'il convient de ne laisser dépasser nulle part à la dilatation positive la plus grande, pour éviter les altérations de contexture, la *condition de résistance* à s'imposer sera $\partial' < \Delta$, ou, vu la première formule (9),

$$(9 \text{ bis}) \quad p < E' \frac{\varepsilon}{R} \Delta \quad (1).$$

VI. Les raisonnements précédents ne s'appliquent plus quand le tuyau est rigide et maintenu extérieurement, comme est une conduite d'eau, surtout enfoncée dans un terrain qui s'opposera à ses mouvements un peu étendus.

Néanmoins, admettons que les ondes s'y propageant n'aient qu'une longueur restreinte, ou, si elles sont longues, que l'excès de pression dû à leur passage soit de signes variés, et nul en moyenne sur des longueurs modérées. Comme, dans chaque section, cet excès donne, sur toute la paroi concave d'un anneau, des efforts ayant, suivant tout axe coordonné, composante totale et moment total nuls, l'effet de ces efforts pour déformer et entraîner le tuyau ne peut être que très local, c'est-à-dire devenir insignifiant à toute distance comprenant un nombre suffisant de fois le rayon R ; car il suffirait, en les transportant sur l'axe (supposé alors relié à la paroi), de les déplacer d'une

(1) Cette condition (9 bis) de résistance, qui fixe à $E' \frac{\varepsilon}{R} \Delta$ la limite inférieure des *pressions dangereuses* du fluide, s'étendra évidemment, comme l'a fait la première formule (9), aux contextures hétérotropes étudiées dans la Note précédente, sauf les valeurs tout autres qu'y recevront E' et Δ à déterminer d'ailleurs par l'observation directe.

quantité égale à R , négligeable, par conséquent, à côté de la distance dont il s'agit, pour les faire annihiler les uns par les autres (1).

Donc les déformations du tuyau ne seront appréciables, si l'onde est courte, que dans son voisinage; elles ne tendront alors, nulle part, à produire *par leur accumulation* des déplacements sensibles.

Et si, au contraire, l'onde est indéfinie, mais composée de parties, de longueur restreinte, donnant lieu à des excès de pression moyennement nuls, on conçoit que les déformations d'un tronçon du tuyau, dues à la totalité des parties de l'onde éloignées, seront encore négligeables, en raison de la neutralisation mutuelle, qui s'y produira, des effets d'efforts positifs et d'efforts négatifs exercés assez près les uns des autres.

Le tuyau ne tendant ainsi à éprouver que des déformations ou *très localisées*, ou de signes contraires sur des tronçons assez voisins, *il n'en résultera nulle part*, comme on voit, *des déplacements notables*, susceptibles, par suite, d'être *très gênés* par la résistance du terrain, ou même par celle des extrémités (si l'on en est assez loin); et l'hypothèse de l'indépendance mutuelle d'anneaux contigus à *surface extérieure libre* devra donner encore, par les formules (9) (2) qu'elle entraîne, une approximation acceptable.

VII. Maintenant que la théorie de l'élasticité nous a permis de relier à la pression p du fluide la dilatation linéaire ∂' du rayon primitif R de sa section normale (3), il est facile d'exprimer cette pression en fonction de l'allongement relatif ∂ ou $\frac{d\xi}{dx_0}$ de la tranche fluide qui

(1) On peut imaginer, par exemple, pour fixer les idées, le tuyau immobilisé à ses deux extrémités, puis soumis à un seul des efforts dont il s'agit, et considérer les petits déplacements d'équilibre en résultant, enfin, superposer tous les déplacements analogues d'un même point matériel quelconque du tuyau. Ceux-ci s'entredétruiront d'autant plus complètement, que le point sera pris plus loin de la circonférence $2\pi R$ d'application de tous les efforts considérés.

(2) Ou (c'') de la page 358, dans le cas d'une contexture hétérotrope.

(3) Cette intervention inévitable de la Théorie de l'élasticité des solides distingue le problème étudié ici des autres questions d'Hydrodynamique abordées par les géomètres, et dans lesquelles les diverses parois qui limitent les fluides sont censées être ou fixes, ou, du moins, astreintes à effectuer de simples mouvements d'ensemble, ne mettant en œuvre que les équations de la Mécanique (dite *rationnelle*) des corps *rigides*.

la suite et, par suite, de former l'équation du mouvement longitudinal de toute la colonne.

La pression p est, en effet, le produit du coefficient k d'élasticité du liquide (inverse de la *compressibilité*) par la contraction cubique effective, somme, changée de signe, de la dilatation longitudinale ∂ et des dilatations, $2\partial'$ en tout, éprouvées par le fluide suivant deux sens latéraux rectangulaires entre eux. L'on a donc aussi

$$p = -k(\partial + 2\partial'),$$

ou bien, par l'élimination de ∂' au moyen de la première relation (9),

$$(10) \quad p = \frac{-k}{1 + \frac{2kR}{E'\varepsilon}} \partial = \frac{-k}{1 + \frac{2kR}{E'\varepsilon}} \frac{d\xi}{dx_0}.$$

Mais la première équation de l'Hydrodynamique, ou d'Euler, donne

$$* \quad u' = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx},$$

c'est-à-dire, très sensiblement, en remplaçant par x_0 la variable indépendante x , et vu la petitesse de la dérivée de ξ en x_0 dans l'équation de transformation $x = x_0 + \xi$,

$$u' = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx_0} \quad \text{ou} \quad \frac{d^2\xi}{dt^2} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx_0}:$$

ρ y désigne la densité actuelle du liquide, que l'on peut, sauf erreur négligeable au second membre, supposer réduite à la densité constante ρ_0 d'état naturel. L'équation du mouvement en ξ devient donc, grâce à (10),

$$(11) \quad \frac{d^2\xi}{dt^2} = \omega^2 \frac{d^2\xi}{dx_0^2}, \quad \text{si l'on pose} \quad \frac{1}{\omega^2} = \frac{\rho_0}{k} + \frac{\rho_0}{E'} \frac{2R}{\varepsilon};$$

et l'on voit, en différentiant (11) soit en t , soit en x_0 , que la vitesse u , la dilatation longitudinale ∂ et aussi, par suite, en vertu de (10), la pression p , vérifieront la même équation des cordes vibrantes.

On aurait donc, par exemple, en appelant U la vitesse moyenne (ici égale à u) à travers la section d'abscisse actuelle x , la double équation

$$(12) \quad \frac{d^2(\rho, U)}{dt^2} = \omega^2 \frac{d^2(\rho, U)}{dx_0^2}.$$

D'ailleurs, à raison de leur propagation rapide, les valeurs de ξ , U , ρ sont, à très peu près, communes non seulement à toute une tranche, mais aussi à ses voisines; de sorte que les dérivées par rapport à t , prises, dans (11) et (12), en suivant une même particule, reviennent sensiblement à des dérivées prises sur place ou sans faire varier x , comme il y aurait justement lieu de le supposer pour avoir de vraies dérivées partielles en t , si x redevenait variable indépendante au lieu de x_0 . Or, alors, la petitesse des dérivées de ξ en x_0 permettrait de remplacer simplement dx_0 par dx , dans les dérivées partielles prises sans faire varier t . Et les équations (12) s'écriraient

$$(13) \quad \frac{d^2(\rho, U)}{dt^2} = \omega^2 \frac{d^2(\rho, U)}{dx^2},$$

ou garderaient la forme de celle des cordes vibrantes, toujours avec ω pour *célérité*, c'est-à-dire pour vitesse constante de propagation des ondes.

La seconde formule (11), qui donne cette vitesse, est justement, aux notations près et à part le remplacement du coefficient d'élasticité E par E' , l'équation (5) du Mémoire de M. Alliévi. Elle montre que *l'inverse du carré de la vitesse ω de propagation égale l'inverse du carré, $\frac{k}{\rho_0}$, de la vitesse du son dans le liquide, plus l'inverse du carré de la vitesse des ondes obtenue par Resal, ou due à l'élasticité des fibres annulaires du tuyau et que l'on aurait pour un liquide incompressible.*

VIII. Il reste à montrer que les mêmes équations (13) subsisteront, si la colonne liquide est déjà, au moment où d'assez rapides changements de la pression l'atteignent près d'une section donnée $x = 0$, en train de couler par filets rectilignes et parallèles inégalement ra-

pides, animés de vitesses, u_0 , comparables à celles que vont produire ces changements et, par conséquent, toujours très petites à côté de la célérité ω . C'est ce qui arrive, par exemple, quand la longueur du tuyau est suffisante pour que les petits frottements des filets et de la paroi, quoique négligeables sur des parcours x comme ceux que nous considérons ici, aient établi, concurremment avec une petite *pente motrice* neutralisée par eux, un régime uniforme dans la région des x positifs.

Alors la première équation d'Euler, appliquée au mouvement ondulatoire *survenu ainsi assez vite* dans cette région, est encore $u' = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx}$; car les frottements, et la petite composante de la pesanteur suivant les x (ou le petit décroissement analogue de la pression), y sont relativement insensibles. Or, les vitesses engendrées $u - u_0$ étant encore censées principalement longitudinales, la pression continuera à varier hydrostatiquement, c'est-à-dire dans une proportion négligeable, du haut au bas des sections normales σ , et se réduira encore à sa valeur p sur l'axe, fonction seulement de x et de t . Il en sera, par suite, de même de la densité ρ , égale à $\rho_0 \left(1 + \frac{p}{k}\right)$ d'après la formule de compressibilité du liquide. Donc l'accélération u' se trouve encore commune à tout le fluide d'une section σ ; et elle le reste même à tout celui que contenait la section σ lors de l'arrivée de cette onde, en raison de l'extrême rapidité de la propagation, comparativement aux différences des vitesses effectives des filets et, par suite, aux différences modérées des parcours correspondants du liquide.

Les accroissements $u - u_0$ de vitesse dus aux accélérations u' seront donc, sans cesse, communs à tous les filets fluides d'une tranche ayant sa longueur de l'ordre des parcours en question, filets dont les coordonnées transversales et la section auront, d'ailleurs, relativement peu varié; et ces accroissements $u - u_0$ égaleront, dès lors, leur moyenne actuelle, $U - U_0$ très sensiblement, à travers toute une section σ de la tranche, U désignant la moyenne des vitesses longitudinales effectives des filets sur cette section à l'époque t , et U_0 sa valeur initiale constante. L'accélération u' sera donc la dérivée, $\frac{dU}{dt}$, de $U - U_0$ par

rapport au temps, prise, si l'on veut, sur place; et l'on aura

$$(14) \quad \frac{dU}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = (\text{à très peu près}) - \frac{1}{\rho_0} \frac{dp}{dx}.$$

IX. Or, d'autre part, le principe de la conservation des masses exige que la masse fluide $\rho\sigma dx$ comprise, à l'époque t , entre les deux sections d'abscisses constantes x et $x + dx$, ait sa dérivée en t , ou son accroissement par unité de temps, égal à l'excédent du débit, $\rho\sigma U$, de la section d'abscisse x sur le débit analogue de la section d'abscisse $x + dx$; ce qui revient à écrire

$$(15) \quad \frac{d.\rho\sigma}{dt} + \frac{d.\rho\sigma U}{dx} = 0.$$

Portons-y la valeur $\rho_0 \left(1 + \frac{p}{k}\right)$ de ρ et celle de σ résultant de ce que la dilatation superficielle, $\frac{\sigma - \sigma_0}{\sigma_0}$, éprouvée par la section du tuyau à partir de sa valeur $\sigma_0 = \pi R^2$ d'état naturel, est le double de la dilatation linéaire des fibres annulaires intérieures, régie par (9); ce qui donne

$$(15 \text{ bis}) \quad \sigma = \sigma_0 \left(1 + \frac{2R}{E'\epsilon} p\right).$$

Il vient alors à très peu près, pour le produit $\rho\sigma$, vu d'ailleurs la seconde formule (11) qui définit ω^2 ,

$$(16) \quad \rho\sigma = \rho_0\sigma_0 \left(1 + \frac{p}{\rho_0\omega^2}\right);$$

et l'équation (15), où $\rho\sigma U$ ne diffère pas sensiblement de $\rho_0\sigma_0 U$, devient, en la divisant par $\rho_0\sigma_0$,

$$(17) \quad \frac{dU}{dx} = -\frac{1}{\rho_0\omega^2} \frac{dp}{dt}.$$

Or les deux équations cherchées (13) résultent immédiatement de l'élimination soit de U , soit de p , entre les relations (14) et (17), par

l'égalisation des deux valeurs que ces relations, différenciées une fois, donnent ou pour $\frac{d^2 U}{dx dt}$, ou pour $\frac{d^2 p}{dx dt}$.

X. On remarquera que la démonstration tomberait en défaut si les changements de pression ou de vitesse, produits près de la section $x = 0$, l'étaient assez lentement pour laisser, dans la propagation, un rôle notable aux frottements ou à la *pente motrice* neutralisée jusque-là par ceux-ci : cas où le phénomène serait une simple altération du régime uniforme, ou ce que j'ai appelé ailleurs un régime non permanent *graduellement varié*. Car, alors, l'équation (14) ne pourrait plus être posée; et, avec les frottements, interviendraient, bien que dans une mesure modérée, les inégalités de vitesse des filets fluides.

C'est ce que montre bien le phénomène analogue des ondes propagées le long des cours d'eau découverts. Tant que la pente de ceux-ci est assez faible pour ne pas faire dépasser aux vitesses de régime uniforme l'ordre de grandeur de leurs changements dus au passage des ondes, l'inégale rapidité des filets est sans influence sur ces dernières, du moins pendant des temps modérés, et même à cette deuxième approximation où l'on ne néglige plus la hauteur des ondes à côté de la profondeur primitive, ni les vitesses effectives par rapport à celles de propagation ⁽¹⁾. Mais quand les vitesses de régime uniforme deviennent comparables à la *célérité* ou vitesse de propagation, savoir, dans les cours d'eau *torrentueux* ou approchant de l'être, et, même sans cela, dès qu'elles sont suffisantes pour que le passage

(1) Voir mon Mémoire sur ce sujet au *Journal de Mathématiques pures et appliquées* (3^e série, t. IX, août et septembre 1883, p. 273 à 300). La deuxième approximation, applicable, sans doute, également ici malgré les petites variations de la densité, montre qu'alors la célérité ω est, *par rapport à un observateur animé de la vitesse moyenne primitive* U_0 , la même que pour l'onde pareille, propagée au sein de la colonne liquide censée occuper le tuyau sans écoulement ou vitesse initiale. Les ondes sont donc entraînées par le courant avec la vitesse moyenne primitive, tout en s'y propageant comme dans une colonne en repos. Mais l'inégale rapidité des filets fluides a pour effet de dissiper ces ondes beaucoup plus vite que ne le feraient les frottements dans la colonne en repos. J'ai établi, dans un autre Mémoire du *Journal de Mathématiques* (t. IV, 1878, p. 365), la théorie permettant de calculer cette graduelle extinction par les frottements, actifs surtout dans une mince couche liquide, contiguë à la paroi.

de l'onde considérée leur imprime seulement un léger trouble, l'inégale rapidité des filets fluides intervient, dès la première approximation, pour y altérer la vitesse de propagation. Et l'altération peut même devenir très sensible dans certains cours d'eau torrentueux⁽¹⁾. A cet égard, l'étude du régime non permanent graduellement varié dans un tuyau élastique, problème dépendant des mêmes méthodes, pourrait offrir quelque intérêt.

XI. Je ne me suis pas occupé du cas d'un tuyau soit vertical, soit, plus généralement, oblique à l'horizon, cas dans lequel la pression p et, par suite, la dilatation proportionnelle $2\delta'$ de la section normale fluide σ , acquièrent, aux divers points de l'axe du tuyau pris pour axe des x , une partie variable *permanente*, due au poids du liquide. Pourvu que ce nouveau terme de p , *fonction de x seul*, ne soit pas d'un ordre de grandeur plus élevé que celui qu'y ajoutent ensuite les ondes, il s'éliminera, de lui-même, 1^o de l'équation de mouvement (14), d'où il fera disparaître le terme de pesanteur introduit par la pente de l'axe et qu'il est destiné à neutraliser, 2^o de la condition (17) de continuité, où p ne figure que par sa dérivée en t , justement nulle pour le terme en question. Donc, si l'on réduit, dans les équations (13) définitives, la pression p à sa partie *non permanente*, ces équations s'appliquent *quelle que soit l'inclinaison de l'axe* et conduisent aux lois de propagation du mouvement ondulatoire obtenues pour un tuyau horizontal.

Je ne me suis pas occupé non plus des petits allongements $\int \delta_3 dx$ du tube lâche : ils sont proportionnels à $-\int p dx$, en vertu des formules (5) et (8) de la page 355, ou (b') et (c') de la page 357⁽²⁾.

(1) Voir mon Étude, éditée par M. Gauthier-Villars, sur la *Théorie de l'écoulement tourbillonnant et tumultueux des liquides dans les lits rectilignes à grande section* : second Mémoire, consacré aux *Régimes graduellement variés* (1897). La théorie des ondes dont il s'agit ici y est l'objet des paragraphes IX, X et XI.

(2) Dans le cas d'un tuyau droit et raide, sans pesanteur, maintenu *seulement par ses deux extrémités*, et que l'on supposerait (d'après la fin du n^o II) *en entier à l'état d'équilibre intérieur*, la pression totale entre anneaux contigus, dès lors constante d'un bout à l'autre (*) et égale à la *poussée sur les appuis*, pourra être censée *proportionnelle aux*

(*) Cette constance n'est pas compromise, dans le cas d'une épaisseur ϵ seulement comparable aux petites variations du rayon intérieur, par la composante, suivant l'axe, des pressions p exercées sur la face concave, alors négligeables devant la tension T des anneaux (p. 358).

petits déplacements de ceux-ci et, par conséquent, à leur somme, c'est-à-dire à *l'allongement même de l'axe*, $\int \partial_3 dx$, que nous appellerons Δ . Or la tension P_3 par unité d'aire, vu sa formule (2) ou (b) linéaire en ∂_3 et θ , sera indépendante de r comme ∂_3 et θ , indépendante aussi, par suite, de x comme sa valeur moyenne, puis, finalement, en raison directe de Δ ; et de là résultera une mise en compte bien simple de cette action mutuelle des anneaux.

En effet, les expressions (5) ou (b') de ∂_3 , puis (8) ou (c') de p et de ∂' , ne s'accroîtront, chacune, que d'un terme encore proportionnel à P_3 ou à Δ ; et l'élimination de θ entre les deux relations (8) ou (c') ainsi complétées n'ajoutera, de même, à l'expression linéaire de ∂' en p , qu'un terme proportionnel à Δ . Par suite, la formule (15 bis), ou $\sigma_0(1 + 2\partial')$, de σ acquérant un terme analogue, le produit $\rho\sigma$ pourra s'écrire, au lieu de (16), $\rho_0\sigma_0\left(1 + \frac{p + a\Delta}{\rho_0\omega^2}\right)$, si a désigne un coefficient constant connu. Il suffira donc de poser $p + a\Delta = p'$, pour obtenir en p' et u les équations (14), (17) et, par suite, (13), avec p simplement accentué. D'ailleurs, l'expression de ∂_3 fournie par la substitution à θ , dans (5) ou (b') complétées, de sa valeur linéaire en p et Δ , réduit finalement la formule $\Delta = \int \partial_3 dx$ à deux termes, l'un, en Δ , l'autre, en $\int p dx$, et, donnant Δ proportionnel à $\int p dx$, ramène, à toute époque t (notamment à l'instant initial $t = 0$), le calcul de p' à celui de p , ou *vice versa*. Donc, sauf cette substitution de p' à p , les lois du mouvement seront les mêmes que dans un tube lâche, et, en particulier, la vitesse de propagation ω ne dépendra pas du *degré de flexité* des deux sections extrêmes.

Ainsi, grâce à l'hypothèse d'inerties négligeables du tuyau, l'influence que l'action mutuelle des anneaux contigus de la paroi rend possible, sur chaque tronçon de la colonne fluide, aux tronçons éloignés (comme il est dit au bas de la p. 350), se trouve exprimée par le terme *intégral* unique $a\Delta$, proportionnel à $\int p dx$, et dont l'adjonction à la pression p permet à cello-ci, devenue *fictivement* p' , de jouer le même rôle que si le tuyau était sans tension longitudinale.

Le présent Mémoire a été résumé dans trois Notes présentées à l'Académie des Sciences de Paris les 3, 10 et 24 juillet 1905 (*Comptes rendus*, t. CXXI, p. 3, 81 et 234).

Je viens d'apprendre que l'expression binôme de M. Alliévi, pour l'inverse du carré de la célérité ω , avait été donnée dès 1878, même sous sa forme (11) ou avec E' distinct de E , par M. Korteweg, dans les *Annalen der Physik und Chemie* (t. V, p. 525 à 542).