ÉLIE CARTAN

Sur la structure des groupes infinis de transformation (suite)

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 22 (1905), p. 219-308

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1905_3_22__219_0>

SUR LA STRUCTURE

DES

GROUPES INFINIS DE TRANSFORMATIONS,

PAR M. E. CARTAN.

(SUITE) ([1]).

CHAPITRE III.

LE GROUPE LINÉAIRE ADJOINT. — PROLONGEMENTS ET ISOMORPHISME.

32. Un des problèmes les plus importants qui se posent maintenant est la détermination de tous les groupes isomorphes d'un groupe donné et il est lié à un autre problème important, la recherche du critérium d'isomorphisme de deux groupes donnés.

La considération du groupe linéaire adjoint, après nous avoir fourni une nouvelle définition d'un groupe infini au moyen de r expressions de Pfaff, nous conduira tout naturellement à une classe de prolongements holoédriques d'un groupe donné. Nous serons alors en mesure, premièrement de déterminer tous les groupes admettant un groupe donné pour prolongement holoédrique; secondement tous les groupes prolongés holoédriques d'un groupe donné, et enfin tous les groupes isomorphes d'un groupe donné. Nous ne sommes pas en mesure de donner une solution aussi complète du second problème fondamental, la recherche du critérium d'isomorphisme de deux groupes donnés.

([1]) *Annales de l'École Normale*, 3e série, t. XXI, 1904, p. 153-206.

Nous désignerons par C_1 la première Partie du Mémoire, lorsque nous aurons à y renvoyer le lecteur.

Le groupe linéaire adjoint.

33. Considérons un groupe G défini par r expressions de Pfaff invariantes

(1) $$\omega_1, \quad \omega_2, \quad \ldots, \quad \omega_r,$$

et h invariants

(2) $$\mathrm{U}_1, \quad \mathrm{U}_2, \quad \ldots, \quad \mathrm{U}_h,$$

avec les formules

(3) $$\omega'_k = \sum_{(ij)} c_{ijk}\omega_i\omega_j + \sum_{i,\rho} a_{i\rho k}\omega_i\varpi_\rho \qquad (k = 1, 2, \ldots, r),$$

les coefficients étant des fonctions des invariants U, les ϖ_ρ désignant p nouvelles expressions de Pfaff indépendantes entre elles et indépendantes des ω. Nous désignerons par

(4) $$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_r$$

les variables transformées par le groupe, c'est-à-dire les intégrales du système complet

$$\omega_1 = \omega_2 = \ldots = \omega_r = 0;$$

les expressions ω sont des combinaisons linéaires des dx_i aux coefficients fonctions des x et de p nouvelles variables

(5) $$y_1, \quad y_2, \quad \ldots, \quad y_p;$$

les ϖ sont enfin des combinaisons linéaires des dx et des dy avec coefficients fonctions des x et des y.

La considération géométrique des éléments linéaires issus d'un point $(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ va nous conduire au groupe linéaire adjoint. Tout élément linéaire peut, en effet, être défini par les rapports mutuels des différentielles dx_i, ou encore par les rapports mutuels de

r expressions de Pfaff linéairement indépendantes en $dx_1, \ldots, dx_r$ aux coefficients fonctions des x. Nous prendrons les expressions auxquelles se réduisent les ω quand on y donne aux y_i des valeurs particulières, d'ailleurs quelconques, y_i^0, soient

$$\overline{\omega_1}, \quad \overline{\omega_2}, \quad \ldots, \quad \overline{\omega_r}. \tag{6}$$

Il est clair que l'on a des formules de la forme

$$\omega_k = m_{k1}(x, y)\,\overline{\omega_1} + m_{k2}(x, y)\,\overline{\omega_2} + \ldots + m_{kr}(x, y)\,\overline{\omega_r} \qquad (k = 1, 2, \ldots, r), \tag{7}$$

les m_{ki} étant des fonctions des x et des y.

Considérons une transformation quelconque du groupe faisant correspondre au point $(x_1, \ldots, x_r)$ le point $(X_1, \ldots, X_r)$. On a, en désignant par Ω_k ce que devient ω_k quand on y remplace les x et les y par les X et les Y,

$$\Omega_k = \omega_k,$$

et les valeurs des y correspondant à un système de valeurs données des Y (et des X) sont *arbitraires;* donnons, par exemple, aux Y_i les valeurs particulières y_i^0; alors il vient

$$\overline{\Omega_k} = m_{k1}(x, y)\,\overline{\omega_1} + m_{k2}(x, y)\,\overline{\omega_2} + \ldots + m_{kr}(x, y)\,\overline{\omega_r} \qquad (k = 1, 2, \ldots, r). \tag{8}$$

Cette formule exprime la correspondance la plus générale établie entre les éléments linéaires du point (x) et ceux du point (X) par celles des transformations du groupe qui transforment le premier point dans le second.

D'autre part, il est évident que cette correspondance est donnée également par les formules

$$\overline{\omega_k} = m_{k1}(X, Y)\,\overline{\Omega_1} + m_{k2}(X, Y)\,\overline{\Omega_2} + \ldots + m_{kr}(X, Y)\,\overline{\Omega_r} \qquad (k = 1, 2, \ldots, r). \tag{9}$$

Cela signifie qu'il existe entre les $m_{ki}(X, Y)$ les mêmes relations qu'entre les coefficients des équations (8) résolues par rapport aux $\overline{\omega}$. Tous ces derniers coefficients peuvent manifestement s'exprimer au moyen de p d'entre eux et des x. Donc les $m_{ki}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ peuvent s'exprimer au moyen de p d'entre eux, soient $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p$, et des x

$$m_{ki}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = \varphi_{ki}(\mu_1, \ldots, \mu_p; x_1, \ldots, x_r).$$

Mais comme évidemment

$$m_{ki}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = \psi_{ki}(\mu_1, \ldots, \mu_p; \mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_r),$$

et que les seules relations nécessaires entre les x et les X sont celles qui expriment l'invariance des h fonctions U, il faut que les fonctions φ_{ki} ne dépendent que des μ et des U.

On peut donc trouver p fonctions

$$t_1, \quad t_2, \quad \ldots, \quad t_p,$$

des x et des y, indépendantes par rapport aux y et telles que l'on ait

$$(10) \quad \omega_k = \alpha_{k1}(t, \mathrm{U})\,\overline{\omega_1} + \alpha_{k2}(t, \mathrm{U})\,\overline{\omega_2} + \ldots + \alpha_{kr}(t, \mathrm{U})\,\overline{\omega_r} \qquad (k = 1, 2, \ldots, r).$$

La correspondance entre les éléments linéaires des points (x) et (X) prend elle-même la forme

$$(11) \quad \overline{\Omega_k} = \alpha_{k1}(t, \mathrm{U})\,\overline{\omega_1} + \alpha_{k2}(t, \mathrm{U})\,\overline{\omega_2} + \ldots + \alpha_{kr}(t, \mathrm{U})\,\overline{\omega_r} \qquad (k = 1, 2, \ldots, r).$$

Il y a plus : *les formules* (11) *définissent un groupe de substitutions linéaires, à p paramètres* $t_1, t_2, \ldots, t_p$, *effectuées sur les expressions* $\overline{\omega_1}, \overline{\omega_2}, \ldots, \overline{\omega_r}$, *les* U *étant regardés comme des constantes*. Cela résulte du fait même que les équations (11) définissent une correspondance établie entre les éléments linéaires de deux points par les transformations d'un *groupe*.

34. La considération de ce groupe linéaire (11), que nous appellerons Γ, va nous permettre de donner une nouvelle définition du groupe

infini G. Les équations de définition

$$\Omega_k - \omega_k = 0$$

de ce groupe peuvent en effet s'écrire, d'après (10),

$$\sum_i \alpha_{ki}(\mathrm{T}, \mathrm{U})\overline{\Omega_i} = \sum_i \alpha_{ki}(t, \mathrm{U})\overline{\omega_i} \qquad (k = 1, 2, \ldots, r),$$

c'est-à-dire, en résolvant par rapport aux $\overline{\Omega_k}$ et tenant compte de la propriété des α_{ki},

$$\overline{\Omega_k} = \alpha_{k1}(\theta, \mathrm{U})\,\overline{\omega_1} + \alpha_{k2}(\theta, \mathrm{U})\,\overline{\omega_2} + \ldots + \alpha_{kr}(\theta, \mathrm{U})\,\overline{\omega_r} \tag{12}$$
$$(k = 1, 2, \ldots, r),$$

les θ étant des fonctions des t, des T et des U. Autrement dit *le groupe* G *est formé des transformations les plus générales qui laissent invariantes les fonctions* U *et qui effectuent sur les r expressions de Pfaff* $\overline{\omega}$ *une substitution linéaire appartenant au groupe* Γ. Pour toute transformation de G, les X et les θ sont des fonctions des x.

Il ne reste donc plus, dans la définition du groupe, que r expressions de Pfaff construites avec les variables x et leurs différentielles, et un groupe linéaire Γ.

35. Le calcul des invariants bilinéaires des ω_k d'après les formules (10) va nous montrer que ce groupe linéaire Γ n'est autre que le groupe linéaire adjoint déjà rencontré dans le Chapitre II [C_1, n° 21, form. (18)] et désigné sous le même nom de Γ.

Soit, en effet,

$$\Theta_\rho f = \sum b_{i\rho k} u_i \frac{\partial f}{\partial u_k} \qquad (\rho = 1, 2, \ldots, p), \tag{13}$$

un système de p transformations infinitésimales indépendantes du groupe (11), où les variables $\overline{\omega}$ ont été remplacées par les lettres u; les $b_{i\rho k}$ sont des fonctions des U. On a des formules de la nature suivante :

$$\frac{\partial \overline{\Omega}_k}{\partial t_i} = \sum_{j,\rho} \lambda_{i\rho} b_{j\rho k} \overline{\Omega}_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, p; \; k = 1, 2, \ldots, r),$$

ou encore, en considérant les formules (10),

$$\frac{\partial \omega_k}{\partial t_i} = \frac{\partial \alpha_{k1}}{\partial t_i} \overline{\omega}_1 + \frac{\partial \alpha_{k2}}{\partial t_i} \overline{\omega}_2 + \ldots + \frac{\partial \alpha_{kr}}{\partial t_i} \overline{\omega}_r = \sum_{j,\rho} \lambda_{i\rho} b_{j\rho k} \omega_j$$

$$(i = 1, 2, \ldots, p; \; k = 1, 2, \ldots, r).$$

Calculons alors le covariant bilinéaire de ω_k

$$\omega'_k = \sum_{i=1}^{i=r} \alpha_{ki} \overline{\omega}'_i + \sum_{s,j} \frac{\partial \alpha_{ki}}{\partial \mathrm{U}_j} d\mathrm{U}_j \overline{\omega}_i + \sum_i dt_i \sum_{j,\rho} \lambda_{i\rho} b_{j\rho k} \omega_j.$$

Mais $\overline{\omega}_i$ et $d\mathrm{U}_j$ peuvent s'exprimer en fonctions linéaires des ω, et, de même, comme $\overline{\omega}_i$ ne dépend que des variables x, $\overline{\omega}'_i$ peut s'exprimer bilinéairement au moyen des ω. On aura donc des formules

$$(14) \qquad \omega'_k = \sum d_{ijk} \omega_i \omega_j - \sum_{j,\rho} b_{j\rho k} \omega_j \sum_i \lambda_{i\rho} dt_i,$$

les d_{ijk} étant des fonctions des x et des t.

La comparaison des formules (14) avec les formules (3) montre que, à des combinaisons linéaires près des ω, on a les relations

$$\sum_\rho a_{i\rho k} \varpi_\rho = - \sum_\rho b_{i\rho k} \sum_j \lambda_{j\rho} dt_j.$$

Si nous posons

$$\overline{\varpi}_\rho = - \sum_j \lambda_{j\rho} dt_j \qquad (\rho = 1, 2, \ldots, p),$$

nous voyons que les ϖ_ρ résultent des $\overline{\varpi}_\rho$ par une substitution linéaire à coefficients fonctions des U et que de plus cette même substitution effectuée sur les lettres e_ρ et $\overline{e_\rho}$ transforme la transformation infinitésimale

$$\sum_\rho e_\rho U_\rho f = \sum_{\rho, i, k} e_\rho a_{i\rho k} u_i \frac{\partial f}{\partial u_k},$$

dans la transformation infinitésimale

$$\sum_\rho \overline{e_\rho} \Theta_\rho f = \sum_{\rho, i, k} \overline{e_\rho} b_{i\rho k} u_i \frac{\partial f}{\partial u_k}.$$

Il y a donc bien identité entre le groupe linéaire Γ défini par les formules (11) et le groupe linéaire Γ défini par les transformations infinitésimales (18) (C_1, p. 189).

Mais les considérations développées plus haut montrent que, *si l'on connaît les r expressions de Pfaff* $\omega_1, \ldots, \omega_r$, *on connaît par cela même les équations finies du groupe* Γ.

36. Les résultats du Chapitre II, relatifs aux conditions auxquelles doivent satisfaire les coefficients $a_{i\rho k}$ et c_{ijk} des formules (3) montrent que, une fois le groupe linéaire Γ donné, on ne peut pas choisir arbitrairement les r expressions de Pfaff $\overline{\omega_1}, \overline{\omega_2}, \ldots, \overline{\omega_r}$. D'ailleurs on peut retrouver ici une partie de ces conditions en remarquant que *les formules* (3) *ne changent pas si l'on y effectue sur les* ω *une substitution quelconque du groupe* Γ *à condition d'effectuer sur les* ϖ *une substitution convenable*. En effet une substitution, de paramètre τ, effectuée sur les expressions ω_k

$$\omega_k = \alpha_{k1}(t, U)\overline{\omega_1} + \alpha_{k2}(t, U)\overline{\omega_2} + \ldots + \alpha_{kr}(t, U)\overline{\omega_r},$$

donne de nouvelles expressions

$$\omega_k^{(1)} = \sum_i \alpha_{ki}(\tau, U)\omega_i = \sum_i \alpha_{ki}(\theta, U)\overline{\omega_i},$$

où les θ sont des fonctions déterminées des t, des τ et des U. Les $\omega_k^{(1)}$ sont donc *semblables* aux ω_k au moyen d'une transformation effectuée sur les t. Par suite les formules (3) subsisteront, sauf à y remplacer les ϖ par d'autres expressions.

Le calcul confirme ces prévisions. La transformation infinitésimale la plus générale du groupe Γ peut se mettre sous la forme

$$\frac{\partial \omega_k}{\partial t} = \sum_{i,\rho} a_{i\rho k} v_\rho \omega_i, \tag{15}$$

où les v_ρ sont des quantités quelconques; on a alors [1]

$$\frac{\partial \omega'_k}{\partial t} = \sum_{i,\rho} a_{i\rho k} dv_\rho \omega_i + \sum_{i,\rho} a_{i\rho k} v_\rho \omega'_i. \tag{16}$$

Or les formules (3) donnent

$$\frac{\partial \omega'_k}{\partial t} = \sum c_{ijk}\left(\frac{\partial \omega_i}{\partial t}\omega_j + \omega_i \frac{\partial \omega_j}{\partial t}\right) + \sum a_{i\rho k}\left(\frac{\partial \omega_i}{\partial t}\varpi_\rho + \omega_i \frac{\partial \varpi_\rho}{\partial t}\right). \tag{17}$$

En tenant compte de (15) et comparant avec (16) on arrive aux formules suivantes :

$$\begin{aligned} 0 = &-\sum_{\lambda,\rho} a_{\lambda\rho k}\omega_\lambda\left(\frac{\partial \varpi_\rho}{\partial t} + dv_\rho\right) \\ &+ \sum_{\lambda,\rho,\sigma}\sum_i (a_{i\rho k}a_{\lambda\sigma i} - a_{i\sigma k}a_{\lambda\rho i}) v_\rho \omega_\lambda \varpi_\sigma \\ &+ \sum_{(\lambda\mu),\rho} (c_{\lambda\mu i}a_{i\rho k} + c_{i\lambda k}a_{\mu\rho i} - c_{i\mu k}a_{\lambda\rho i}) v_\rho \omega_\lambda \omega_\mu, \end{aligned}$$

ou encore, en introduisant les constantes $\gamma_{\rho\sigma\tau}$ de la structure du groupe Γ,

$$\begin{aligned} 0 = &-\sum_{\lambda,\tau} a_{\lambda\tau k}\omega_\lambda\left(\frac{\partial \varpi_\tau}{\partial t} + dv_\tau + \sum_{\rho,\sigma}\gamma_{\rho\sigma\tau} v_\rho \varpi_\sigma\right) \\ &+ \sum_{(\lambda\mu),\rho} (c_{\lambda\mu i}a_{i\rho k} + c_{i\lambda k}a_{\mu\rho i} - c_{i\mu k}a_{\lambda\rho i}) v_\rho \omega_\lambda \omega_\mu = 0. \end{aligned}$$

---

[1] Si le groupe est intransitif il faudrait ajouter au second membre de (16) le terme $\sum v_\rho \, da_{i\rho k}\, \omega_i$, ce qui introduirait dans le second membre de la formule (19) le terme complémentaire (19') dont il est question C₁, page 190.

Il faut donc que l'on ait des formules

$$(18) \qquad \frac{\partial \varpi_\tau}{\partial t} = -dv_\tau - \sum_{\rho, \sigma} \gamma_{\rho\sigma\tau} v_\rho \varpi_\sigma - \sum_{\rho, \mu} z_{\mu\rho\tau} v_\rho \omega_\mu,$$

les $z_{\mu\rho\tau}$ désignant de nouvelles arbitraires assujetties à satisfaire aux relations

$$(19) \qquad \sum_{\tau}^{1,\ldots,p} (a_{\lambda\tau k} z_{\mu\rho\tau} - a_{\mu\tau k} z_{\lambda\rho\tau}) = \sum_{i}^{1,\ldots,r} (c_{\lambda\mu i} a_{i\rho k} + c_{i\lambda k} a_{\mu\rho i} - c_{i\mu k} a_{\lambda\rho i})$$
$$(\lambda, \mu, k = 1, 2, \ldots, r;\ \rho = 1, 2, \ldots, p).$$

Ces relations ne sont pas autre chose que les relations (19) du Chapitre II (C_1, p. 189). *La condition que les formules* (3) *de la structure du groupe* G *admettent le groupe linéaire* Γ *fournit donc l'ensemble des relations du premier degré auxquelles doivent satisfaire les coefficients* c_{ijk}.

37. En revenant aux expressions $\overline{\omega_k}$ construites avec les seules variables x et leurs différentielles, les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'elles définissent un groupe infini G, une fois le groupe linéaire Γ donné, sont donc :

1° Que leurs covariants puissent se mettre sous la forme (3), les c_{ijk} étant des fonctions des seuls invariants U, les ϖ_ρ étant des expressions de Pfaff convenablement choisies;

2° Que les systèmes (19) et (20) du Chapitre II soient compatibles.

Ces conditions se trouvent en particulier réalisées si l'on prend

$$\overline{\omega_k} = dx_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, r),$$

dans ce cas les coefficients c_{ijk} sont tous nuls.

38. Une partie des résultats précédents subsistent si l'on suppose que les s expressions de Pfaff,

$$\omega_1, \quad \omega_2, \quad \ldots, \quad \omega_s \qquad (s < r),$$

ont des covariants s'annulant avec ces expressions elles-mêmes, c'est-à-dire que l'on a

$$\begin{matrix} c_{s+i,s+j,k} = 0 \\ a_{s+i,\rho,k} = 0 \end{matrix} \qquad \begin{pmatrix} i,j = 1, 2, \ldots, r-s;\ k = 1, 2, \ldots, s \\ \rho = 1, 2, \ldots, p \end{pmatrix}.$$

Dans ces conditions le système

$$\omega_1 = \omega_2 = \ldots = \omega_s = 0$$

est complètement intégrable et nous pouvons supposer que

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_s$$

sont ses intégrales; nous supposerons, en outre, que les invariants U du groupe G ne dépendent que de ces s variables.

Si l'on désigne par

$$\overline{\omega}_1, \quad \overline{\omega}_2, \quad \ldots, \quad \overline{\omega}_s$$

ce que deviennent les expressions considérées lorsqu'on y donne aux variables $x_{s+1}, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_p$ des valeurs fixes quelconques, les mêmes raisonnements que ceux exposés au début de ce Chapitre montrent que les ω_i résultent des $\overline{\omega}_i$ par une substitution linéaire appartenant à un certain groupe γ dont les paramètres t sont des fonctions des x et des y; les coefficients des équations finies du groupe γ pouvant contenir, outre les paramètres t, les invariants U :

$$\omega_k = \sum_i^{1,\ldots,s} \beta_{ki}(t, \mathrm{U})\overline{\omega}_i \qquad (k = 1, 2, \ldots, s).$$

Les transformations infinitésimales de γ sont les $r - s + p$ suivantes :

$$\sum_{i,k}^{1,\ldots,s} c_{i,s+j,k} u_i \frac{\partial f}{\partial u_k} \qquad (j = 1, 2, \ldots, r-s),$$

$$\sum_{i,k}^{1,\ldots,s} a_{i\rho k} u_i \frac{\partial f}{\partial u_k} \qquad (\rho = 1, 2, \ldots, p),$$

qui ne sont pas nécessairement toutes linéairement indépendantes; l'ordre du groupe γ est égal au nombre de celles des équations

$$\sum_{j}^{1,\ldots,r-s} c_{i,s+j,k}\,\omega_{s+j} + \sum_{\rho}^{1,\ldots,p} a_{i\rho k}\,\varpi_\rho = 0 \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, s),$$

qui sont linéairement indépendantes.

Le prolongement normal.

39. Le prolongement holoédrique normal du groupe G s'obtient en associant aux variables primitives x les p variables y qui entrent dans les ω et les ϖ, ou encore les paramètres t des équations finies du groupe linéaire adjoint Γ. Les équations finies du groupe prolongé G′ se déduisent immédiatement de celles du groupe G; il suffit d'égaler, dans les deux membres des équations

$$(20) \qquad \Omega_k = \omega_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, r),$$

les coefficients des différentielles dx_i, une fois les X exprimées au moyen des x. Avec les paramètres du groupe Γ, ces équations sont

$$\sum_i \alpha_{ki}(\mathrm{T}, \mathrm{U})\overline{\Omega_i} = \sum_i \alpha_{ki}(t, \mathrm{U})\,\overline{\omega_i} \qquad (k = 1, 2, \ldots, r).$$

Les équations de structure du groupe G′ sont aussi faciles à obtenir. En égalant les covariants bilinéaires des deux membres des équations (20) et tenant compte de ces équations elles-mêmes, on a, d'après (3),

$$(21) \qquad \Omega'_k - \omega'_k = \sum_{i,j} a_{i\rho k}\,\omega_i(\Pi_\rho - \varpi_\rho) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, r),$$

les Π_ρ désignant ce que deviennent les ϖ_ρ avec les variables transformées. La propriété des coefficients $a_{i\rho k}$ de former un système involutif (n° 7) de caractères

$$\sigma_1, \quad \sigma_2, \quad \ldots, \quad \sigma_r \qquad (p = \sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_r)$$

montre que la solution la plus générale des équations (21) dépend de

$$p' = \sigma_1 + 2\sigma_2 + \ldots + r\sigma_r,$$

paramètres arbitraires $z_1, z_2, \ldots, z_p$, soit

$$\Pi_\rho = \varpi_\rho + \sum_{i,\lambda} b_{i\lambda\rho} z_\lambda \omega_i \qquad (\rho = 1, 2, \ldots, p).$$

Par suite, *le groupe* G' *est le groupe le plus général qui laisse invariants les* U *et effectue sur les* $r+p$ *expressions de Pfaff* ω *et* ϖ *une substitution de la forme*

$$(22) \qquad \begin{cases} \Omega_k = \omega_k & (k = 1, 2, \ldots, r), \\ \Pi_\rho = \varpi_\rho + \sum_{i,\lambda} b_{i\lambda\rho} z_\lambda \omega_i & (\rho = 1, 2, \ldots, p). \end{cases}$$

La substitution (22) forme évidemment un groupe linéaire Γ' à p' paramètres; c'est le groupe linéaire adjoint à G'.

Posons

$$\omega_{r+\rho} = \varpi_\rho + \sum_{i,\lambda} b_{i\lambda\rho} z_\lambda \omega_i \qquad (\rho = 1, 2, \ldots, p).$$

Les expressions de Pfaff $\omega_1, \ldots, \omega_{r+p}$ forment un système de $r+p$ expressions dépendant de $r+p+p'$ variables x, y, z. Leurs covariants bilinéaires sont donnés, pour les r premières, par les formules

$$\omega'_k = \sum_{(ij)} c_{ijk} \omega_i \omega_j + \sum_{i,\rho} a_{i\rho k} \omega_i \omega_{r+\rho} \qquad (k = 1, 2, \ldots, r).$$

Quant aux p dernières, les développements des n^{os} 21 et 22 montrent qu'en égalant à zéro les covariants trilinéaires des ω'_k, on obtient les expressions

$$\sum_{i,\rho} a_{i\rho k} \omega_i \omega'_{r+\rho} \qquad (k = 1, 2, \ldots, r),$$

et, de plus, qu'on peut trouver pour les $\omega'_{r+\rho}$ des expressions bilinéaires en $\omega_1, \ldots, \omega_{r+p}$, les coefficients étant des fonctions des U [C_1, form. (16), p. 188]; la forme la plus générale des $\omega'_{r+\rho}$ s'obtient alors en ajoutant les expressions bilinéaires les plus générales Θ_ρ qui annulent les r expressions trilinéaires

$$\sum a_{i\rho k}\omega_i\Theta_\rho \qquad (k=1, 2, \ldots, r).$$

D'après le n° 8, on sait que ces Θ_ρ sont de la forme

$$\Theta_\rho = \sum_{i,\lambda} b_{i\lambda\rho}\omega_i\chi_\lambda \qquad (\rho = 1, 2, \ldots, p),$$

les χ_λ étant p' expressions de Pfaff quelconques, les $b_{i\lambda\rho}$ étant les coefficients des formules (22). Donc finalement on a

$$(23)\quad \begin{cases} \omega'_k = \displaystyle\sum_{(ij)}^{1,\ldots,r} c_{ijk}\omega_i\omega_j + \sum_i^{1,\ldots,r}\sum_\rho^{1,\ldots,p} a_{i\rho k}\omega_i\omega_{r+\rho} & (k=1, 2, \ldots, r), \\ \omega'_{r+\rho} = \displaystyle\sum_{(ij)}^{1,\ldots,r+p} c_{ij.r+\rho}\omega_i\omega_j + \sum_i^{1,\ldots,r}\sum_\lambda^{1,\ldots,p'} b_{i\lambda\rho}\omega_i\chi_\lambda & (\rho = 1, 2, \ldots, p). \end{cases}$$

Telles sont les équations de structure du groupe G'.

40. Faisons ici une remarque qui aura son importance plus loin pour la théorie des groupes intransitifs. *Les deux systèmes d'équations linéaires en* $\omega_1, \ldots, \omega_r$

$$\sum a_{i\rho k}\omega_i = 0 \quad (k=1, \ldots, r;\ \rho = 1, \ldots, p),$$

$$\sum b_{i\lambda\rho}\omega_i = 0 \quad (\rho = 1, \ldots, p;\ \lambda = 1, \ldots, p')$$

sont équivalents. Supposons, en effet, pour fixer les idées, que le premier de ces systèmes soit mis sous la forme

$$\omega_1 = \omega_2 = \ldots = \omega_s = 0 \qquad (s \leq r),$$

c'est-à-dire que l'on ait

$$a_{s+i,\rho,k}=0 \qquad (i=1,\ldots,r-s;\ k=1,\ldots,r;\ \rho=1,\ldots,p).$$

Les $b_{i\lambda\rho}$ satisfont aux relations

$$\sum_\rho (a_{i\rho k}b_{j\lambda\rho}-a_{j\rho k}b_{i\lambda\rho})=0 \qquad (i,j,k=1,\ldots,r;\ \lambda=1,\ldots,p').$$

En faisant $j>s$, on voit d'abord que $b_{j\lambda\rho}$ est nul, ce qui montre que le second système ne contient pas d'équations indépendantes du premier. Si maintenant le second système se réduisait, par exemple, à

$$\omega_2=\omega_3=\ldots=\omega_s=0,$$

en faisant $j=1$, il viendrait

$$\sum_\rho a_{1\rho k}b_{i\lambda\rho}=0 \qquad (i,k=1,\ldots,r;\ \lambda=1,\ldots,p'),$$

de sorte que, quel que soit k, $\sum a_{1\rho k}\varpi_\rho$ resterait invariant par la substitution (22). Comme tous les $a_{1\rho k}$ ne sont pas nuls, cela est impossible (1).

Il résulte de là que le prolongement normal G′ du groupe G a les mêmes invariants essentiels que G.

41. Comme exemples de prolongement normal, considérons le groupe général à une variable G défini par

$$\omega'_1=\omega_1\varpi_1;$$

(1) En conservant les notations du n° 7, il existerait, en effet, entre les $l_{\rho ij}$ une relation

$$\sum_\rho^{1,\ldots,\sigma_i}\sum_i^{1,\ldots,p} A_{\rho i}l_{\rho ij}=0 \qquad (j=1,2,\ldots,p).$$

En faisant $j=1$, toutes les quantités $l_{\rho i1}$ seraient principales et, par suite, arbitraires, donc tous les $A_{\rho i}$ sont nuls.

le groupe prolongé normal G′ est défini par

$$\omega_1' = \omega_1\omega_2,$$
$$\omega_2' = \omega_1\chi_1;$$

le second groupe prolongé G″ par

$$\omega_1' = \omega_1\omega_2,$$
$$\omega_2' = \omega_1\omega_3,$$
$$\omega_3' = \omega_2\omega_3 + \omega_1\psi_1,$$

et ainsi de suite. Si l'on part maintenant de

$$\omega_1 = y\,dx,$$

on trouve, sans intégration,

$$\omega_2 = -\frac{dy}{y} + z\,dx,$$
$$\omega_3 = -\frac{dz}{y} + u\,dx.$$

Les équations finies de ces trois groupes successifs sont condensées dans les formules

$$X = f(x),$$
$$Y = \frac{y}{f'(x)},$$
$$Z = \frac{z}{f'(x)} - \frac{f''(x)}{f'^2(x)}.$$

De même les équations de structure du groupe général à deux variables étant

$$\omega_1' = \omega_1\varpi_1 + \omega_2\varpi_2,$$
$$\omega_2' = \omega_1\varpi_3 + \omega_2\varpi_4;$$

celles du groupe prolongé normal sont

$$\begin{aligned}
\omega_1' &= \omega_1\omega_3 + \omega_2\omega_4,\\
\omega_2' &= \omega_1\omega_5 + \omega_2\omega_6,\\
\omega_3' &= -\omega_4\omega_5 + \omega_1\chi_1 + \omega_2\chi_2,\\
\omega_4' &= -\omega_3\omega_4 - \omega_4\omega_6 + \omega_1\chi_2 + \omega_2\chi_3,\\
\omega_5' &= \omega_3\omega_5 + \omega_5\omega_6 + \omega_1\chi_4 + \omega_2\chi_5,\\
\omega_6' &= \omega_4\omega_5 + \omega_1\chi_5 + \omega_2\chi_6.
\end{aligned}$$

On peut prendre manifestement

$$\omega_1 = y_1\,dx_1 + y_2\,dx_2,$$
$$\omega_2 = y_3\,dx_1 + y_4\,dx_2,$$

et l'on trouve alors sans difficulté

$$\omega_3 = \frac{-y_4\,dy_1 + y_3\,dy_2}{y_1 y_4 - y_2 y_3} + z_1(y_1\,dx_1 + y_2\,dx_2) + z_2(y_3\,dx_1 + y_4\,dx_2),$$
$$\omega_4 = \frac{y_2\,dy_1 - y_1\,dy_2}{y_1 y_4 - y_2 y_3} + z_2(y_1\,dx_1 + y_2\,dx_2) + z_3(y_3\,dx_1 + y_4\,dx_2),$$
$$\omega_5 = \frac{-y_4\,dy_3 + y_3\,dy_4}{y_1 y_4 - y_2 y_3} + z_4(y_1\,dx_1 + y_2\,dx_2) + z_5(y_3\,dx_1 + y_4\,dx_2),$$
$$\omega_6 = \frac{y_2\,dy_3 - y_1\,dy_4}{y_1 y_4 - y_2 y_3} + z_5(y_1\,dx_1 + y_2\,dx_2) + z_6(y_3\,dx_1 + y_4\,dx_2).$$

Enfin les équations finies du groupe G étant

$$X_1 = f(x_1, x_2),$$
$$X_2 = \varphi(x_1, x_2),$$

celles du groupe G′ s'obtiennent en ajoutant

$$Y_1 = \frac{y_1 \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_2} - y_2 \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_2} - \dfrac{\partial f}{\partial x_2}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1}},$$
$$Y_2 = \frac{-y_1 \dfrac{\partial f}{\partial x_2} + y_2 \dfrac{\partial f}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_2} - \dfrac{\partial f}{\partial x_2}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1}},$$
$$Y_3 = \frac{y_3 \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_2} - y_4 \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_2} - \dfrac{\partial f}{\partial x_2}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1}},$$
$$Y_4 = \frac{-y_3 \dfrac{\partial f}{\partial x_2} + y_4 \dfrac{\partial f}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_2} - \dfrac{\partial f}{\partial x_2}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1}}.$$

Détermination des groupes dont G est le prolongement holoédrique.

42. Conservons toujours les mêmes notations, et soit G_1 un groupe dont G soit le prolongement holoédrique. Soit s le nombre des variables transformées par G_1; ce sont nécessairement certaines fonctions des variables x transformées par G, et nous pouvons toujours supposer que ces fonctions sont

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_s. \tag{24}$$

Le groupe G *étant le prolongement holoédrique de* G_1 *transforme entre elles les variables* $x_1, \ldots, x_s$, *et, de plus, toute transformation de* G *qui laisse invariante chacune de ces variables laisse également invariantes toutes les autres variables* x.

D'après cela, les s variables (24) sont les intégrales d'un système d'équations de Pfaff qui peut toujours se mettre sous la forme

$$\left\{\begin{array}{l} \omega_1 - h_{11}\omega_{s+1} - \ldots - h_{1,r-s}\omega_r = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \omega_s - h_{s1}\omega_{s+1} - \ldots - h_{s,r-s}\omega_r = 0. \end{array}\right. \tag{25}$$

Les premiers membres de ces équations étant des combinaisons linéaires des différentielles $dx_1, \ldots, dx_s$ éprouvent une substitution linéaire par une transformation quelconque du groupe G; comme, d'autre part, chaque expression ω_i est invariante par le groupe G, il en résulte que les premiers membres de (25) sont également invariants, et que, par suite, *les coefficients* h_{ik} *ne dépendent que des seuls invariants* U.

Nous supposerons, ce qui est toujours permis, que ces coefficients sont tous nuls; il suffit, pour cela, d'effectuer sur les ω une substitution linéaire à coefficients fonctions des U.

Cela étant le système

$$\omega_1 = \omega_2 = \ldots = \omega_s = 0 \tag{26}$$

doit être complètement intégrable, c'est-à-dire que dans les formules de structure

$$\omega'_k = \sum_{(ij)} c_{ijk}\omega_i\omega_j + \sum_{i,\rho} a_{i\rho k}\omega_i\varpi_\rho \qquad (k = 1, 2, \ldots, s),$$

tous les coefficients

$$\begin{array}{ll} c_{s+i,\, s+j,\, k} & (i, j = 1, 2, \ldots, r-s;\; k = 1, 2, \ldots, s), \\ a_{s+i,\, \rho,\, k} & (i = 1, 2, \ldots, r-s;\; \rho = 1, 2, \ldots, p;\; k = 1, 2, \ldots, s) \end{array}$$

sont nuls. On voit, en particulier, d'après cela, que *le groupe linéaire* Γ *laisse invariante la multiplicité linéaire définie par les équations* (26). Cette condition n'est pas suffisante.

43. Supposons maintenant que le système (26) soit complètement intégrable. Il est clair alors que G transforme entre elles ses intégrales, puisqu'il laisse invariante chacune des expressions $\omega_1, \ldots, \omega_s$ et que, par suite, il permet d'exprimer $dX_1, \ldots, dX_s$ en fonctions linéaires de $dx_1, \ldots, dx_s$.

Désignons par G_1 le groupe qui indique comment G transforme entre elles les variables $x_1, \ldots, x_s$. Il est clair que G résulte du prolongement de G_1. Il faut voir dans quel cas ce prolongement est holoédrique. Nous supposerons provisoirement que G_1 admet tous les invariants de G, ce qui revient à dire que les invariants de G dépendent tous de $x_1, x_2, \ldots, x_s$ seulement.

Posons

$$(27) \qquad \begin{cases} \omega_1 = \beta_{11}\, dx_1 + \ldots + \beta_{1s}\, dx_s, \\ \omega_2 = \beta_{21}\, dx_1 + \ldots + \beta_{2s}\, dx_s, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \omega_s = \beta_{s1}\, dx_1 + \ldots + \beta_{ss}\, dx_s. \end{cases}$$

Les coefficients β_{ik} dépendent de $x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_p$. Supposons qu'il y en ait parmi eux exactement q indépendants entre eux et indépendants de $x_1, \ldots, x_s$. Alors on peut les exprimer tous au moyen de $x_1, \ldots, x_s$ et de q variables auxiliaires $v_1, \ldots, v_q$. Cela étant, on voit manifestement que *toute transformation qui laisse invariantes chacune des expressions* $\omega_1, \ldots, \omega_s$ *et chacune des variables* $x_1, \ldots, x_s$ *laisse aussi* *invariants les coefficients* β_{ik} *et, par suite, les variables* v. Autrement dit, à la transformation identique de G_1 ne peuvent correspondre dans G que des transformations laissant invariantes toutes les quantités v.

Si maintenant l'on forme les covariants $\omega'_1, \ldots, \omega'_s$, ils peuvent évidemment être construits avec

$$\omega_1, \quad \ldots, \quad \omega_s; \quad dv_1, \quad \ldots, \quad dv_q;$$

de plus, les quantités

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_s; \quad v_1, \quad v_2, \quad \ldots, \quad v_q$$

sont les intégrales du système complètement intégrable

$$(28) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\omega_k = 0, \\ &\frac{\partial \omega'_k}{\partial \omega_i} = 0 \end{aligned} \right. \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, s).$$

Or ce dernier système peut être formé sans connaître les coefficients β_{ik} des formules (27); il s'écrit, en effet :

$$\left. \begin{aligned} &\omega_k = 0, \\ &\sum_j^{1,\ldots,r} c_{ijk}\omega_j + \sum_\rho^{1,\ldots,p} a_{i\rho k}\varpi_\rho = 0 \end{aligned} \right\} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, s).$$

Nous le supposerons, ce qui est toujours permis, de la forme

$$(29) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\omega_1 = \omega_2 = \ldots = \omega_{s'} = 0 \qquad (s \leqq s' \leqq r), \\ &\varpi_1 = \varpi_2 = \ldots = \varpi_l = 0 \qquad (l \leqq p). \end{aligned} \right.$$

Avec ces hypothèses *toute transformation de* G *qui laisse invariantes les variables* $x_1, \ldots, x_s$ *laisse invariantes toutes les intégrales du système* (29).

Nous allons d'abord montrer qu'on peut se supposer ramené à l'un des deux cas

$$s = s', \qquad s = r.$$

Si, en effet, s' n'est égal ni à s, ni à r, on voit facilement que le système

$$\omega_1 = \omega_2 = \ldots = \omega_{s'} = 0 \tag{30}$$

est par lui-même complètement intégrable. Les covariants bilinéaires de $\omega_{s+1}, \ldots, \omega_{s'}$ s'annulent, en effet, avec $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r$ d'une part, avec $\omega_1, \ldots, \omega_{s'}, \varpi_1, \ldots, \varpi_l$ d'autre part; si le système (30) n'était pas complètement intégrable, il y aurait dans l'un au moins des covariants $\omega'_{s+1}, \ldots, \omega'_{s'}$ un terme en $\omega_r\varpi_1$ par exemple. Désignons par

$$A_{s+1}, \quad \ldots, \quad A_{s'}; \quad B_1, \quad \ldots, \quad B_l$$

les coefficients de $\omega_r\varpi_1$ dans

$$\omega'_{s+1}, \quad \ldots, \quad \omega'_{s'}; \quad \varpi'_1, \quad \ldots, \quad \varpi'_l;$$

en prenant dans le covariant trilinéaire de $\omega'_k (k \leqq s)$ le coefficient de $\omega_i\omega_r\varpi_1$, on obtient

$$\sum_j^{1,\ldots,r-s} c_{i,s+j,k} A_{s+j} + \sum_\rho^{1,\ldots,l} a_{i\rho k} B_\rho = 0 \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, s).$$

D'après les hypothèses faites, ces équations entraînent

$$A_{s+j} = B_\rho = 0,$$

contrairement à ce que nous avons supposé.

D'après cela, on raisonnera sur le système complètement intégrable (30) comme on a raisonné sur le système primitif (26). On aura ainsi une suite de systèmes et l'on s'arrêtera lorsque l'entier s correspondant à l'un des systèmes sera égal à r, ou bien lorsque cet entier ne croîtra plus.

44. Nous sommes donc ramenés aux deux cas $s' = s$ et $s' = r$:

1° *Si s' est égal à r*, on voit que toute transformation de G qui laisse invariantes les variables $x_1, \ldots, x_s$ laisse invariantes toutes les autres variables $x_{s+1}, \ldots, x_r$. Dans ce cas, *le groupe* G *est le prolongement holoédrique de* G_1.

2° *Si* s' *est égal à* s, la discussion est un peu moins simple. Nous supposerons d'abord, ce qui est toujours permis, que les variables y_1, $y_2, \ldots, y_l$ sont intégrales du système (29). Si l'on désigne par

$$\overline{\varpi}_1, \quad \overline{\varpi}_2, \quad \ldots, \quad \overline{\varpi}_l$$

les expressions les plus générales telles que l'on ait

$$\omega'_k = \sum_{(i,j)} c_{ijk}\omega_i\omega_j + \sum_{i,\rho} a_{i\rho k}\omega_i\overline{\varpi}_\rho \qquad (k = 1, 2, \ldots, s); \tag{31}$$

on a des relations de la forme

$$\overline{\varpi}_\rho = \varpi_\rho + \sum_i^{1,\ldots,s} A_{\rho i}\omega_i \qquad (\rho = 1, 2, \ldots, l), \tag{32}$$

où les $A_{\rho i}$ satisfont aux équations

$$\sum_\rho^{1,\ldots,l} (a_{i\rho k}A_{\rho j} - a_{j\rho k}A_{\rho i}) = 0 \qquad (i, j, k = 1, 2, \ldots, s).$$

Or les ω_k étant construits avec les variables $x_1, \ldots, x_s, y_1, \ldots, y_l$, intégrales du système complet (29), il est évident que l'on peut satisfaire à (31) en prenant pour les $\overline{\varpi}_\rho$ des expressions également construites avec $x_1, \ldots, x_s, y_1, \ldots, y_l$ [1]. Toute transformation du groupe G qui laisse invariantes les variables $x_1, \ldots, x_s$ laisse donc invariantes les expressions $\overline{\varpi}_\rho$ ainsi choisies. On aura alors

$$\begin{aligned}\omega'_{s+k} = \sum_{(i,j)} c_{i,j,s+k}\omega_i\omega_j &+ \sum_i^{1,\ldots,r} \sum_\rho^{1,\ldots,l} a_{i,\rho,s+k}\omega_i\left(\overline{\varpi}_\rho - \sum_j^{1,\ldots,s} A_{\rho j}\omega_j\right) \\ &+ \sum_i^{1,\ldots,r} \sum_\sigma^{l+1,\ldots,p} a_{i,\sigma,s+k}\omega_i\varpi_\sigma.\end{aligned}$$

---

(1) Il suffit par exemple de donner, dans $\varpi_1, \ldots, \varpi_l$, aux variables $y_{l+1}, \ldots, y_p$, des valeurs fixes quelconques.

Supposons, ce qui n'arrivera pas toujours, qu'*à toute substitution linéaire de la forme* (32) *effectuée sur* $\varpi_1, \ldots, \varpi_l$ *et laissant invariants les covariants* (31), *corresponde une substitution linéaire effectuée sur* $\varpi_{l+1}, \ldots, \varpi_p$ *et laissant invariants tous les autres covariants* $\omega'_{s+1}, \ldots, \omega'_r$.

Alors on peut supposer trouvées $p-l$ expressions $\overline{\varpi}_{l+1}, \ldots, \overline{\varpi}_p$, telles que l'on ait

$$\omega'_{s+k} = \sum_{(i,j)}^{1,\ldots,r} c_{i,j,s+k}\,\omega_i\,\omega_j + \sum_i^{1,\ldots,r} \sum_\rho^{1,\ldots,p} a_{i,\rho,s+k}\,\omega_i\,\overline{\varpi}_\rho.$$

Les transformations de G qui laissent invariantes les variables $x_1, \ldots, x_s$ sont alors données par les équations

$$\Omega_{s+k} - \omega_{s+k} = 0, \tag{33}$$

et les covariants bilinéaires de leurs premiers membres deviennent, en tenant compte de (33),

$$\Omega'_{s+k} - \omega'_{s+k} = \sum_i^{1,\ldots,r} \sum_\sigma^{l+1,\ldots,p} a_{i,\sigma,s+k}\,\omega_i\,(\Pi_\sigma - \overline{\varpi}_\sigma).$$

Si alors le système des coefficients

$$a_{i,\sigma,s+k} \qquad (i=1,\ldots,r;\ k=1,\ldots,r-s;\ \sigma=l+1,\ldots,p)$$

est involutif, le système de Pfaff (33) est en involution et le groupe G admet des transformations qui laissent invariantes $x_1, \ldots, x_s$ sans laisser invariantes $x_{s+1}, \ldots, x_r$. *Le groupe* G *est le prolongement mériédrique de* G_1.

45. Pour arriver à cette conclusion, nous avons dû faire deux hypothèses aussi peu nécessaires l'une que l'autre. Si la première n'est pas réalisée, on considérera les covariants de $\varpi_1, \ldots, \varpi_l$. Prenons le groupe dérivé G′ de G obtenu en adjoignant à $\omega_1, \ldots, \omega_r$ les expressions $\omega_{r+1}, \ldots, \omega_{r+p}$ qui se déduisent respectivement de $\varpi_1, \ldots, \varpi_p$

par addition de certaines combinaisons linéaires des ω primitives, à coefficients fonctions de p' variables auxiliaires nouvelles z (n° 39). Alors, au groupe G_1 correspond un groupe G'_1 transformant entre elles les variables $x_1, \ldots, x_s, y_1, \ldots, y_l$, intégrales du système

$$(34) \qquad \omega_1 = \ldots = \omega_s = 0, \qquad \omega_{r+1} = \ldots = \omega_{r+l} = 0.$$

Si nous raisonnons sur ce système comme sur le système (26) primitif, il nous conduira soit à un nouveau système qui contiendra toutes les équations

$$\omega_1 = \omega_2 = \ldots = \omega_r = 0,$$

auquel cas le groupe G sera le prolongement holoédrique de G_1, soit à un système qui ne soit plus susceptible d'extension.

Supposons que ce soit

$$(35) \qquad \omega_1 = \ldots = \omega_{s'} = 0, \qquad \omega_{r+1} = \ldots = \omega_{r+l'} = 0 \qquad (s' < r).$$

Cela signifie que les covariants bilinéaires des expressions $\omega_1, \ldots, \omega_s, \omega_{r+1}, \ldots, \omega_{r+l'}$ s'annulent tous en tenant compte de (35) et, de plus, que les dérivées partielles de ces covariants par rapport à ces mêmes expressions ne peuvent, en s'annulant, introduire entre $\omega_1, \ldots, \omega_r, \omega_{r+1}, \ldots, \omega_{r+p}$ de relation indépendante de (35). On a, par exemple,

$$(36) \quad \left\{ \begin{aligned} \omega'_k &= \sum_{(i,j)}^{1,\ldots,s'} c_{ijk}\,\omega_i\omega_j + \sum_{i}^{1,\ldots,s'}\sum_{\rho}^{1,\ldots,l'} a_{i\rho k}\,\omega_i\omega_{r+\rho} \qquad (k = 1, \ldots, s'), \\ \omega'_{r+\tau} &= \sum_{(i,j)}^{1,\ldots,s'} \mathrm{A}_{ij\tau}\,\omega_i\omega_j + \sum_{i}^{1,\ldots,s'}\sum_{\rho}^{1,\ldots,l'} \mathrm{B}_{i\rho\tau}\,\omega_i\omega_{r+\rho} + \sum_{(\rho,\sigma)}^{1,\ldots,l'} \mathrm{C}_{\rho\sigma\tau}\,\omega_{r+\rho}\omega_{r+\sigma} \\ &\quad + \sum_{i}^{1,\ldots,s'}\sum_{\lambda}^{1,\ldots,p'} b_{i\lambda\tau}\,\omega_i\chi_\lambda \qquad (\tau = 1, \ldots, l'). \end{aligned} \right.$$

Ces équations montrent d'abord que le système

$$\omega_1 = \omega_2 = \ldots = \omega_{s'} = 0$$

est complètement intégrable; nous supposerons que ses intégrales sont

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_{s'},$$

et que celles du système (35) sont

$$(37) \qquad x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_{s'}; \qquad y_1, \quad y_2, \quad \ldots, \quad y_{l'}.$$

Rappelons en outre que les covariants $\omega'_1, \ldots, \omega'_r$ sont conservés lorsqu'on effectue sur $\omega_{r+1}, \ldots, \omega_{r+p}$ la substitution

$$\overline{\omega}_{r+\rho} = \omega_{r+\rho} + \sum_{i,\lambda} b_{i\lambda\rho} z_\lambda \omega_i \qquad (\rho = 1, 2, \ldots, p).$$

D'après cela, si nous désignons par $\overline{\omega}_{r+\rho}$ ($\rho \leqq l'$) ce que devient $\omega_{r+\rho}$ quand on donne aux variables autres que (37) des valeurs fixes particulières, il résulte du n° 38, appliqué au système (35), que l'on a précisément des formules [1]

$$\omega_{r+\rho} = \overline{\omega}_{r+\rho} + \sum b_{i\lambda\rho} u_\lambda \omega_i.$$

Revenons en particulier aux expressions ϖ_ρ primitives qui se déduisent de $\omega_{r+\rho}$ en prenant pour les z certaines fonctions parfaitement déterminées des x et des y, on voit que

$$(38) \qquad \varpi_\rho = \overline{\omega}_{r+\rho} + \sum_i^{1,\ldots,s'} \sum_\lambda^{1,\ldots,p'} b_{i\lambda\rho} u_\lambda \omega_i \qquad (\rho = 1, 2, \ldots, l').$$

Toute transformation de G qui laisse invariantes les variables (37) laisse, par cela même, invariantes les expressions $\overline{\omega}_{r+\rho}$.

Si nous déterminons alors les expressions $\overline{\omega}_{r+l'+1}, \ldots, \overline{\omega}_{r+p}$ par les

---

(1) Le groupe linéaire γ associé au système (35) a, en effet, pour transformations infinitésimales

$$\sum_{i,\tau} b_{i\lambda\tau} \omega_i \frac{\partial f}{\partial \omega_{r+\tau}} \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, p').$$

formules

$$(39)\qquad \varpi_{l'+\tau} = \bar{\omega}_{r+l'+\tau} + \sum_i^{1,\ldots,r} \sum_\lambda^{1,\ldots,p'} b_{i,\lambda,l'+\tau} u_\lambda \omega_i \qquad (\tau = 1, \ldots, p - l'),$$

où les u_λ ont les mêmes valeurs que dans les formules (38), on voit que, comme tout à l'heure,

$$\omega'_{s'+k} = \sum_{(i,j)}^{1,\ldots,r} c_{i,j,s'+k}\,\omega_i\,\omega_j + \sum_i^{1,\ldots,r} \sum_\rho^{1,\ldots,p} a_{i,\rho,s'+k}\,\omega_i\,\bar{\omega}_{s+\rho}.$$

Les transformations de G qui laissent invariantes les variables (37) sont alors données, comme précédemment, par un système différentiel en involution, *à condition que le système de coefficients*

$$(40)\qquad a_{i,\rho,s'+k} \qquad (i = 1, \ldots, r;\ k = 1, \ldots, r - s';\ \rho = l' + 1, \ldots, p)$$

soit involutif.

Nous sommes donc ainsi arrivés à nous débarrasser de la première hypothèse faite au n° 44.

Si le système (40) n'est pas involutif, on substituera au groupe G son prolongement normal G'. D'après le théorème fondamental des n^{os} 10 et 11, on finira par arriver à un système en involution.

46. De cette discussion un peu longue résulte le théorème suivant :

La seule connaissance des coefficients de structure d'un groupe infini donné G *permet, par des opérations purement algébriques, de discerner s'il résulte du prolongement hémiédrique ou holoédrique du groupe* G_1 *qui indique comment* G *transforme entre elles les intégrales du système* (25). *Dans le cas où le prolongement n'est pas holoédrique, on peut déterminer également les équations de structure du groupe formé par celles des transformations de* G *qui correspondent à la transformation identique de* G_1.

47. *Exemples.* — I. Considérons le groupe transitif G dont les équations de structure sont

$$\begin{aligned}
\omega'_1 &= 0,\\
\omega'_2 &= \omega_1\omega_2,\\
\omega'_3 &= \omega_1\varpi_2 + \omega_2\varpi_3,\\
\omega'_4 &= \omega_1\varpi_1,\\
\omega'_5 &= \omega_2(\varpi_1 + \varpi_2),
\end{aligned}$$

et considérons le groupe G_1 qui indique comment G transforme entre elles les intégrales du système complètement intégrable

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0.$$

Les covariants ω'_1, ω'_2, ω'_3 conduisent à adjoindre à ce système les équations

$$\varpi_2 = \varpi_3 = 0,$$

qui forment avec les premières un nouveau système complètement intégrable. Ici nous sommes dans le cas $s' = s$, les substitutions linéaires qui laissent invariants les covariants ω'_1, ω'_2, ω'_3 sont [form. (32)]

$$\begin{aligned}
\varpi_2 &= \overline{\varpi}_2 + \alpha\omega_1 + \beta\omega_2,\\
\varpi_3 &= \overline{\varpi}_3 + \beta\omega_1 + \gamma\omega_2;
\end{aligned}$$

à chacune d'elles correspond pour ϖ_1 la substitution

$$\varpi_1 = \overline{\varpi}_1 - \alpha\omega_1,$$

laissant également invariants ω'_4 et ω'_5 : la première hypothèse du n° 44 est donc vérifiée. Mais la seconde ne l'est pas; si on laisse les ω invariants ainsi que ϖ_2 et ϖ_3, le système

$$\Omega_4 - \omega_4 = \Omega_5 - \omega_5 = 0$$

n'est pas en involution, car

$$\begin{aligned}
\Omega'_4 - \omega'_4 &= \omega_1(\Pi_1 - \varpi_1),\\
\Omega'_5 - \omega'_5 &= \omega_2(\Pi_1 - \varpi_1).
\end{aligned}$$

Prenons donc le groupe G', prolongement normal de G, en introduisant ω_6, ω_7, ω_8 à la place de ϖ_1, ϖ_2, ϖ_3. On a

$$\begin{aligned}
\omega'_6 &= -\omega_1(\omega_6+\omega_7)+\omega_1\chi_1,\\
\omega'_7 &= -\omega_1\chi_1+\omega_2\chi_2,\\
\omega'_8 &= -\omega_1\omega_8+\omega_1\chi_2+\omega_2\chi_3.
\end{aligned}$$

Le système

$$\omega_1=\omega_2=\omega_3=\omega_7=\omega_8=0$$

conduit à adjoindre

$$\chi_1=\chi_2=\chi_3=0.$$

Mais, cette fois, toute substitution linéaire sur les χ laissant invariants ω'_7 et ω'_8, soit

$$\begin{aligned}
\chi_1 &= \overline{\chi_1}-\lambda\omega_1+\mu\omega_2,\\
\chi_2 &= \overline{\chi_2}-\mu\omega_1+\nu\omega_2,\\
\chi_3 &= \overline{\chi_3}+\nu\omega_1+\rho\omega_2
\end{aligned}$$

ne laisse pas invariant ω'_6. Donc il faut considérer le groupe G'', prolongement normal de G', qui donne, en posant ω_9, ω_{10}, ω_{11} à la place de χ_1, χ_2, χ_3,

$$\begin{aligned}
\omega'_9 &= -\omega_2\omega_{10}+\omega_1\psi_1,\\
\omega'_{10} &= -2\omega_1\omega_{10}+\omega_2\psi_2,\\
\omega'_{11} &= -2\omega_1\omega_{11}+\omega_1\psi_2+\omega_2\psi_3,
\end{aligned}$$

et le système

$$\omega_1=\omega_2=\omega_3=\omega_7=\omega_8=\omega_9=\omega_{10}=\omega_{11}=0$$

ne conduit ici à aucune relation nouvelle entre les ω. Donc les transformations de G qui correspondent à la transformation identique de G_1 sont données par

$$\Omega_4-\omega_4=\Omega_5-\omega_5=\Omega_6-\omega_6=0,$$

et les covariants des premiers nombres sont maintenant tous nuls en tenant compte de ces équations. A la transformation identique de G_1 correspond donc un sous-groupe de G dépendant de trois paramètres arbitraires.

En posant

$$\omega_1 = -\frac{dx_1}{x_1},$$
$$\omega_2 = \frac{dx_2}{x_1},$$
$$\omega_3 = dx_3 - y_2\frac{dx_1}{x_1} + y_3\frac{dx_2}{x_1},$$
$$\omega_4 = dx_4 - y_1\frac{dx_1}{x_1},$$
$$\omega_5 = dx_5 + (y_1 + y_2)\frac{dx_2}{x_1},$$

les équations finies de G sont

$$\begin{aligned} X_1 &= ax_1, \\ X_2 &= ax_2 + b, \\ X_3 &= x_3 - f(x_1) - x_1\varphi'(x_2) + \psi(x_2), \\ X_4 &= x_4 + f(x_1), \\ X_5 &= x_5 + \varphi(x_2). \end{aligned}$$

Celles de G_1 sont par suite

$$\begin{aligned} X_1 &= ax_1, \\ X_2 &= ax_2 + b, \\ X_3 &= x_3 - f(x_1) - x_1\varphi'(x_2) + \psi(x_2). \end{aligned}$$

La transformation identique de G_1 s'obtient en prenant

$$\begin{aligned} a &= 1, \qquad b = 0, \\ f(x_1) &= Ax_1 + B, \\ \varphi(x_2) &= -Ax_2 + C, \\ \psi(x_2) &= B. \end{aligned}$$

Il reste bien trois constantes arbitraires A, B, C.

II. Soit le groupe transitif

$$\begin{aligned} \omega'_1 &= 0, \\ \omega'_2 &= \omega_1\varpi_1, \\ \omega'_3 &= \omega_1\varpi_2 + \omega_3\varpi_1. \end{aligned}$$

Ici les systèmes invariants par rapport au groupe Γ sont

$$\omega_1 = 0,$$
$$\omega_1 = \omega_2 = 0,$$
$$\omega_1 = \omega_3 = 0.$$

Le premier donne un groupe G_1 isomorphe mériédrique à G; à sa transformation identique correspond dans G un sous-groupe g_1 défini par

$$\Omega_2 - \omega_2 = 0,$$
$$\Omega_3 - \omega_3 = 0,$$

avec

$$\Omega'_2 - \omega'_2 = \omega_1(\Pi_1 - \varpi_1),$$
$$\Omega'_3 - \omega'_3 = \omega_1(\Pi_2 - \varpi_2) + \omega_3(\Pi_1 - \varpi_1);$$

g_1 dépend donc de deux fonctions arbitraires d'un argument.

Le second système

$$\omega_1 = \omega_2 = 0$$

fournit un groupe isomorphe mériédrique G_2 à la transformation identique duquel correspond un sous-groupe g_2 de G dépendant d'une fonction arbitraire d'un argument.

Enfin, considérons le troisième système

$$\omega_1 = \omega_3 = 0;$$

il faut lui adjoindre les équations

$$\varpi_2 = \varpi_1 = 0;$$

mais ici la substitution la plus générale effectuée sur ϖ_1 et ϖ_2 et laissant ω'_3 invariant est

$$\varpi_1 = \overline{\varpi}_1 + \alpha\omega_3 + \beta\omega_1,$$
$$\varpi_2 = \overline{\varpi}_2 + \beta\omega_3 + \gamma\omega_1,$$

et ne laisse pas invariant ω'_2. Donc il faut considérer le prolongement normal G' de G. En écrivant ω_4 et ω_5 à la place de ϖ_1 et ϖ_2, on a

$$\omega'_4 = \omega_1\chi_1,$$
$$\omega'_5 = -\omega_4\omega_5 + \omega_3\chi_1 + \omega_1\chi_2,$$

et l'on voit qu'il ne s'introduit aucune relation nouvelle entre ω_1, ω_2, ω_3, ω_4, ω_5. Donc, si G_3 indique comment G transforme les intégrales du système considéré, à la transformation identique de G_3 correspond dans G un sous-groupe g_3 défini par

$$\Omega_2 - \omega_2 = 0$$

avec

$$\Omega'_2 - \omega'_2 = 0;$$

il dépend donc d'un paramètre arbitraire.

Si nous prenons

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \quad dx_1, \\ \omega_2 &= \quad dx_2 + y_1\,dx_1, \\ \omega_3 &= e^{y_1}\,dx_3 + y_2\,dx_1, \end{aligned}$$

les équations finies du groupe G sont

$$\begin{aligned} X_1 &= x_1 + a, \\ X_2 &= x_2 + f(x_1), \\ X_3 &= x_3 e^{f'(x_1)} + \varphi(x_1). \end{aligned}$$

Les groupes G_1 et g_1, G_2 et g_2, G_3 et g_3 sont alors successivement

$$G_1 \quad X_1 = x_1 + a, \qquad\qquad g_1 \left\{ \begin{aligned} X_1 &= x_1, \\ X_2 &= x_2 + f(x_1), \\ X_3 &= x_3 e^{f'(x_1)} + \varphi(x_1), \end{aligned} \right.$$

$$G_2 \left\{ \begin{aligned} X_1 &= x_1 + a, \\ X_2 &= x_2 + f(x_1), \end{aligned} \right. \qquad\qquad g_2 \left\{ \begin{aligned} X_1 &= x_1, \\ X_2 &= x_2, \\ X_3 &= x_3 + \varphi(x_1), \end{aligned} \right.$$

$$G_3 \left\{ \begin{aligned} X_1 &= x_1 + a, \\ X_3 &= x_3 e^{f'(x_1)} + \varphi(x_1), \end{aligned} \right. \qquad\qquad g_3 \left\{ \begin{aligned} X_1 &= x_1, \\ X_2 &= x_2 + b, \\ X_3 &= x_3. \end{aligned} \right.$$

Donc, dans cet exemple, il n'y a aucun groupe dont G soit le prolongement holoédrique.

III. Enfin, considérons le groupe G :

$$\begin{aligned}
\omega_1' &= 0,\\
\omega_2' &= \omega_1\omega_2,\\
\omega_3' &= \omega_1\varpi_1 + \omega_2\varpi_2,\\
\omega_4' &= \omega_2\omega_4 + \omega_1\varpi_1,
\end{aligned}$$

et désignons par G_1 le groupe qui indique comment G transforme entre elles les intégrales du système

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0.$$

Il faut adjoindre à ce système les équations

$$\varpi_1 = \varpi_2 = 0.$$

Mais la substitution la plus générale effectuée sur ϖ_1 et ϖ_2 et laissant invariants ω_1', ω_2', ω_3' ne laisse pas invariant ω_4'.

Prenons donc le prolongement normal G′ de G. En écrivant ω_5 et ω_6 à la place de ϖ_1 et ϖ_2, on a

$$\begin{aligned}
\omega_5' &= \omega_2\omega_4 + \omega_2\omega_5 + \omega_1\chi_1,\\
\omega_6' &= \omega_1\omega_4 + \omega_1\omega_5 - \omega_1\omega_6 + \omega_2\chi_2.
\end{aligned}$$

En égalant à zéro les dérivées partielles de ω_5' et ω_6' par rapport à ω_1, ω_2, ω_3, ω_5, ω_6, on obtient

$$\chi_1 = \chi_2 = \omega_4 = 0.$$

On arrive donc à la conclusion que la transformation identique de G_1 laisse invariantes toutes les variables transformées par G. Le groupe G est donc le prolongement holoédrique de G_1.

Si l'on prend

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= -\frac{dx_1}{x_1},\\
\omega_2 &= \frac{dx_2}{x_1},\\
\omega_3 &= dx_3 + y_1\,dx_1 + y_2\,dx_2,\\
\omega_4 &= dx_4 - x_4\frac{dx_2}{x_1} + y_1\,dx_1,
\end{aligned}$$

les équations finies de G sont

$$
\begin{aligned}
X_1 &= a x_1, \\
X_2 &= a x_2 + b, \\
X_3 &= x_3 + e^{\frac{x_2}{x_1}} f(x_1) + \varphi(x_2), \\
X_4 &= x_4 + e^{\frac{x_2}{x_1}} f(x_1),
\end{aligned}
$$

et les trois premières de ces équations définissent G_1.

48. Examinons maintenant la nature des opérations à effectuer pour déterminer tous les systèmes complètement intégrables de la forme (25). Si le groupe G est transitif, les coefficients h sont des constantes données manifestement par des *équations algébriques*. Si le groupe G est intransitif et si nous supposons, comme nous l'avons fait jusqu'à présent, que les différentielles de tous les invariants de G s'annulent en tenant compte de (25), on peut, pour calculer les covariants des premiers membres de (25), *négliger les différentielles* des coefficients h; ils sont alors donnés encore par des *équations algébriques*.

Si l'on cherchait un groupe G_1 admettant G pour prolongement holoédrique sans exiger que tous les invariants de G soient des fonctions des variables qu'il transforme, on n'aurait qu'à considérer le groupe $\overline{G}_1$ obtenu en ajoutant aux équations finies de G_1 les équations de la transformation identique effectuée sur les invariants de G. Un tel groupe $\overline{G}_1$ étant trouvé, la question se posera de savoir quels sont ceux de ses invariants qui ne sont pas *essentiels*. C'est un problème dont nous nous occuperons plus loin.

Si l'on connaît les équations finies de G, pour avoir celles de G_1, il suffit d'intégrer le système (25). Si l'on connaît les transformations infinitésimales de G, celles de G_1 peuvent être écrites sans intégration, en utilisant les intégrales principales du système (25), d'après une remarque faite par M. Engel.

49. Cherchons *dans quel cas le groupe* G_1 *aura ses équations de définition du premier ordre*. Supposons que le système

$$\omega_1 = \omega_2 = \ldots = \omega_s =$$

soit complètement intégrable, que $x_1, \ldots, x_s$ soient ses intégrales et que les invariants du groupe G soient tous fonctions de ces variables. Pour que le groupe G_1 qui indique comment G échange entre elles les variables $x_1, \ldots, x_s$ ait ses équations de définition du premier ordre, il faut qu'on puisse mettre les covariants $\omega'_1, \ldots, \omega'_s$ sous la forme

$$(41) \qquad \omega'_k = \sum_{(ij)}^{1,\ldots,s} c_{ijk}\omega_i\omega_j + \sum_i^{1,\ldots,s}\sum_\rho^{1,\ldots,q} \alpha_{i\rho k}\omega_i\theta_\rho \qquad (k=1,\ldots,s),$$

où les coefficients c_{ijk} et $\alpha_{i\rho k}$ ne dépendent que des h invariants de G, les $\alpha_{i\rho k}$ formant un système *involutif* et les θ_ρ désignant q combinaisons linéaires de $\omega_1, \ldots, \omega_r, \varpi_1, \ldots, \varpi_p$ indépendantes par rapport à $\omega_{s+1}, \ldots, \omega_r, \varpi_1, \ldots, \varpi_p$.

Aux s expressions $\omega_1, \ldots, \omega_s$ sont attachés deux groupes :

1° Le groupe G_1, qui indique comment le groupe G échange entre elles les variables $x_1, \ldots, x_s$;

2° Le groupe $\overline{G}_1$, formé de l'ensemble des transformations qui laissent invariantes les s expressions de Pfaff considérées.

Ce dernier groupe a ses équations de définition du premier ordre; il contient certainement le groupe G_1 et nous avons en somme à chercher dans quel cas il lui est identique : c'est en effet la condition pour que les équations de définition de G_1 soient du premier ordre.

Nous pouvons supposer, en considérant au besoin le prolongement normal G′ de G au lieu du groupe G lui-même, que les θ_ρ ne dépendent que de $\omega_1, \ldots, \omega_r$; et même que l'on a

$$\theta_\rho = \omega_{s+\rho} \qquad (\rho = 1, 2, \ldots, q).$$

Le système

$$\omega_1 = \ldots = \omega_s = \omega_{s+1} = \ldots = \omega_{s+q} = 0$$

est complètement intégrable; soient

$$x_1, \quad \ldots, \quad x_s, \quad x_{s+1}, \quad \ldots, \quad x_{s+q}$$

ses intégrales. Si l'on donne aux autres variables des valeurs fixes dans les $s+q$ expressions de Pfaff considérées, et si l'on désigne par $\overline{\omega}_k$ ce que devient ω_k, on passe des $\overline{\omega}_k$ aux ω_k par une substitution linéaire formant un groupe γ dont les transformations infinitésimales sont données par les expressions des $s+q$ covariants $\omega'_1, \ldots, \omega'_{s+q}$ (n° 38).

Ce groupe indique la substitution la plus générale effectuée sur $\omega_1, \ldots, \omega_{s+q}$ par le groupe G_1. D'autre part la substitution la plus générale effectuée sur ces expressions par le groupe $\overline{G}_1$ forme également un groupe $\overline{\gamma}$ déterminé par les coefficients des équations (41); c'est le groupe linéaire adjoint au prolongement normal $\overline{G}'_1$ de $\overline{G}_1$. Ce groupe contient γ; il doit lui être identique pour que $\overline{G}_1$ soit identique à G_1.

Donc nous avons *une première condition nécessaire à l'identité de* $\overline{G}_1$ *et de* G_1, c'est que *les ordres des groupes linéaires* γ *et* $\overline{\gamma}$ *soient égaux.*

S'il en est ainsi, $\omega_{s+1}, \ldots, \omega_{s+q}$ se déduisent de $\overline{\omega}_{s+1}, \ldots, \overline{\omega}_{s+q}$ par des substitutions linéaires qui sont identiques à celles qui font passer du groupe $\overline{G}_1$ à son prolongement normal $\overline{G}'_1$. Par suite *le plus grand groupe qui laisse invariantes les* $s+q$ *expressions de Pfaff* $\omega_1, \ldots, \omega_{s+q}$ *peut être regardé comme le prolongement normal* $\overline{G}'_1$ *de* $\overline{G}_1$. Si alors G'_1 est le groupe qui indique comment G transforme entre elles les variables $x_1, \ldots, x_{s+q}$, nous sommes ramenés à constater l'identité de $\overline{G}'_1$ et de G'_1. A chacun de ces nouveaux groupes correspondra de nouveau un groupe linéaire $\overline{\gamma}'$ et γ'. Il faudra que l'ordre de $\overline{\gamma}'$ ne dépasse pas l'ordre de γ'. S'il en est effectivement ainsi, on sera ramené à deux nouveaux groupes G''_1 et $\overline{G}''_1$, le premier étant le prolongement normal de $\overline{G}'_1$; tous deux laissent invariantes un certain nombre d'expressions de Pfaff, combinaisons linéaires de celles qui définissent G ou l'un de ses prolongement normaux successifs.

On continuera ainsi de proche en proche. Il arrivera nécessairement un moment, si l'on n'est pas arrêté par la non-identité des groupes linéaires $\gamma^{(\alpha)}$ et $\overline{\gamma}^{(\alpha)}$ successifs, où deux prolongements normaux $\overline{G}_1^{(\alpha)}$ et $\overline{G}_1^{(\alpha+1)}$ de $\overline{G}_1$ jouiront de la propriété suivante : il sera impossible de déduire un plus grand nombre d'expressions de Pfaff invariantes par G′ (prolongement normal de G) des $s+q+\ldots+q^{(\alpha)}$ expressions invariantes par $\overline{G}_1^{(\alpha+1)}$ que des $s+q+\ldots+q^{(\alpha-1)}$ expressions invariantes par $\overline{G}_1^{(\alpha)}$. Supposons qu'il y en ait exactement σ indépendantes pouvant se déduire linéairement de $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r$; soient

$$\omega_1, \quad \omega_2, \quad \ldots, \quad \omega_\sigma \qquad (\sigma \leqq r).$$

Il est alors évident que $\omega'_1, \omega'_2, \ldots, \omega'_\sigma$ ne dépendent que de ω_1, $\omega_2, \ldots, \omega_\sigma$ et de celles des expressions $\omega_{r+1}, \ldots, \omega_{r+p}$ que laisse invariantes $\overline{G}_1^{(\alpha)}$.

Si d'abord σ *est égal à* r, on voit sans peine que $\overline{G}_1$ est identique à G_1; en effet, prenons une transformation quelconque de $\overline{G}_1$; il lui correspond une transformation parfaitement déterminée de son prolongement normal $\overline{G}_1^{(\alpha)}$; cette transformation laisse invariantes $\omega_1, \ldots$, ω_r; par suite, en tant qu'elle transforme $x_1, x_2, \ldots, x_r$, appartient à G; donc $\overline{G}_1$ indique comment G transforme les intégrales du système

$$\omega_1 = \omega_2 = \ldots = \omega_s = 0;$$

donc $\overline{G}_1$ *est identique à* G_1.

Si maintenant σ est inférieur à r, les raisonnements faits plus haut (n° 45) joints à l'hypothèse faite sur $\overline{G}_1^{(\alpha)}$ et $\overline{G}_1^{(\alpha+1)}$ montrent sans difficulté que G n'est pas le prolongement holoédrique de G_1, si du moins un certain système de coefficients entrant dans $\omega'_{\sigma+1}, \ldots, \omega'_r$ est involutif. Dans le cas contraire, on raisonnera sur G′, G″, etc. au lieu de raisonner sur G jusqu'à ce qu'on arrive à décider si G est le prolongement holoédrique de G_1.

Dans tous les cas il résulte de la discussion précédente le théorème suivant :

Si un groupe infini G *ayant ses équations de définition du premier ordre résulte du prolongement holoédrique d'un groupe* G_1 *ayant également ses équations de définition du premier ordre et admettant tous les invariants de* G, *l'un des prolongements normaux de* G_1 *résulte réciproquement du prolongement holoédrique de* G.

Détermination de tous les groupes isomorphes holoédriques d'un groupe donné.

50. Soit G un groupe infini donné ayant ses équations de définition du premier ordre, et soit $\mathcal{G}$ un groupe quelconque isomorphe holoédrique de G. Nous pouvons, par définition (C_1, n° 19), prolonger holoédriquement G et $\mathcal{G}$ de manière à obtenir deux groupes semblables entre eux. Autrement dit, à l'aide d'un changement de variables convenable, G et $\mathcal{G}$ admettent un même prolongement holoédrique G_1 dont on peut supposer les équations de définition du premier ordre (en le prolongeant au besoin).

Si G admet tous les invariants de G_1, il résulte du théorème démontré en dernier lieu que l'un des prolongements normaux de G résulte du prolongement holoédrique de G_1 et par suite de $\mathcal{G}$. Mais il se peut que certains invariants de G_1 n'appartiennent pas à G, n'étant pas fonctions des variables transformées par G. Dans ce cas il suffira de considérer, au lieu de G, le groupe $\overline{G}$ obtenu en ajoutant aux équations finies de G les équations de la transformation identique effectuée sur les invariants de G_1. On voit alors, comme tout à l'heure, que $\mathcal{G}$ admet pour prolongement holoédrique l'un des prolongements normaux de $\overline{G}$.

Autrement dit, *pour obtenir tous les groupes $\mathcal{G}$ isomorphes holoédriques de* G, *on considérera les différents prolongements normaux* $G^{(\alpha)}$ *de* G. *A chacun d'eux on adjoindra de nouvelles variables quelconques transformées identiquement, ce qui donnera un groupe* $\overline{G}^{(\alpha)}$. *On déterminera enfin tous les groupes $\mathcal{G}$ admettant* $\overline{G}^{(\alpha)}$ *pour prolongement holoédrique.*

51. Supposons, pour ne pas compliquer les notations, que $G^{(\alpha)}$ soit le groupe G lui-même. Soient

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_r$$

les variables qu'il transforme; supposons que ses invariants soient précisément $x_{r-h+1}, \ldots, x_r$; désignons enfin par

$$\xi_1, \quad \xi_2, \quad \ldots, \quad \xi_l$$

les nouvelles variables transformées identiquement par $\overline{G}$. Nous chercherons d'abord les groupes $\mathcal{G}$ qui admettent tous les invariants de $\overline{G}$. C'est un problème que nous avons déjà résolu. Les variables transformées par $\mathcal{G}$ sont les ξ, les invariants de G et un certain nombre de fonctions des x et des ξ, données par un système de la forme

$$(42)\qquad \left\{\begin{array}{l} \overline{\omega}_1 \equiv \omega_1 - \alpha_{11}\omega_{s+1} - \ldots - \alpha_{1,r-s-h}\omega_{r-h} = 0, \\ \overline{\omega}_2 \equiv \omega_2 - \alpha_{21}\omega_{s+1} - \ldots - \alpha_{2,r-s-h}\omega_{r-h} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \overline{\omega}_s \equiv \omega_s - \alpha_{s1}\omega_{s+1} - \ldots - \alpha_{s,r-s-h}\omega_{r-h} = 0, \end{array}\right.$$

système complètement intégrable si l'on y regarde $x_{r-h+1}, \ldots, x_r$ et les ξ comme des paramètres; les coefficients α_{ki} sont des fonctions de ces invariants. Nous avons supposé, pour simplifier, que $\omega_{r-h+1}, \ldots, \omega_r$ sont les différentielles de $x_{r-h+1}, \ldots, x_r$.

La condition que le système (42) soit complètement intégrable se traduit, comme nous l'avons déjà vu, par des relations *algébriques* entre les α_{ki} et les coefficients de structure du groupe G. Ces relations algébriques permettent d'exprimer les coefficients α_{ki} en fonction des invariants $x_{r-h+1}, \ldots, x_r$ du groupe G et d'un certain nombre q d'arbitraires u. On pourra prendre pour ces arbitraires des fonctions quelconques des invariants de G et des ξ. Ou encore plus simplement on pourra regarder les u comme de nouvelles variables invariantes par $\mathcal{G}$, et l'on pourra même les supposer non indépendantes, c'est-à-dire les supposer liées entre elles et avec $x_{r-h+1}, \ldots, x_r$, par des relations indépendantes quelconques. Si $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_s$ sont les intégrales de (42), les équations du groupe $\mathcal{G}$ seront de la forme

$$(43)\qquad \left\{\begin{array}{ll} \overline{X}_1 & = f_1(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_s, x_{r-h+1}, \ldots, x_r, u_1, \ldots, u_q), \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \overline{X}_s & = f_s(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_s, x_{r-h+1}, \ldots, x_r, u_1, \ldots, u_q), \\ X_{1-h+1} & = x_{r-h+1}, \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots, \\ X_r & = x_r, \\ U_1 & = u_1, \\ \ldots\ldots & \ldots, \\ U_q & = u_q, \end{array}\right.$$

auxquelles on ajoutera au besoin les équations de la transformation identique sur de nouvelles variables indépendantes des précédentes.

52. Supposons maintenant que le groupe $\mathcal{G}$ admette $\overline{G}$ pour prolongement holoédrique sans admettre tous les invariants de $\overline{G}$. Alors, en ajoutant à ses équations celles de la transformation identique effectuée sur les invariants de $\overline{G}$, on obtient un groupe $\overline{\mathcal{G}}$ de la nature de ceux que nous venons de déterminer. Le problème à résoudre est donc le suivant. Est-il possible de trouver $s+h'$ fonctions indépendantes de $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_s, x_{r-h+1}, \ldots, x_r$, et des ξ, parmi lesquelles s indépenpendantes par rapport à $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_s$, telles qu'elles soient transformées entre elles par le groupe $\overline{\mathcal{G}}$. Ces $s+h'$ fonctions dont h' sont fonctions des invariants de $\overline{\mathcal{G}}$ seront données par un système de la forme

$$(44)\quad \left\{\begin{array}{l}
\overline{\omega}_1+\beta_{11}\,\omega_{r-h+1}+\ldots+\beta_{1h}\,\omega_r+\gamma_{11}\,d\xi_1+\ldots+\gamma_{1l}\,d\xi_l=0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\overline{\omega}_s+\beta_{s1}\,\omega_{r-h+1}+\ldots+\beta_{sh}\,\omega_r+\gamma_{s1}\,d\xi_1+\ldots+\gamma_{sl}\,d\xi_l=0,\\
\qquad\beta_{s+1,1}\,\omega_{r-h+1}+\ldots+\beta_{s+1,h}\,\omega_r+\gamma_{s+1,1}\,d\xi_1+\ldots+\gamma_{s+1,l}\,d\xi_l=0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\qquad\beta_{s+h',1}\,\omega_{r-h+1}+\ldots+\beta_{s+h',h}\,\omega_r+\gamma_{s+h',1}\,d\xi_1+\ldots+\gamma_{s+h',l}\,d\xi_l=0,
\end{array}\right.$$

où les coefficients β et γ sont des fonctions des invariants de $\overline{\mathcal{G}}$. Or les covariants $\overline{\omega}'_k$ sont de la forme

$$(45)\quad \overline{\omega}'_k=\sum_{\rho}\left(\sum_i^{1,\ldots,s} A_{i\rho k}\,\overline{\omega}_i+\sum_j^{1,\ldots,h} B_{j\rho k}\,\omega_{r-h+j}+\sum_\lambda^{1,\ldots,q} C_{\lambda\rho k}\,du_\lambda\right)\theta_\rho+\ldots,$$

les termes non écrits étant des expressions bilinéaires en $\overline{\omega}_1, \ldots, \overline{\omega}_s$, $\omega_{r-h+1}, \ldots, \omega_r, du_1, \ldots, du_q$; les θ_ρ désignant des expressions, combinaisons linéaires des ϖ et des $r-s-h$ expressions $\omega_{s+1}, \ldots, \omega_{r-h}$; les coefficients A, B, C ne dépendent que des u et des invariants de G. Les covariants des premiers membres des s premières équations (44) doivent être nuls en tenant compte de (44); il en résulte, *en particu-*

lier, si l'on remplace les $\overline{\omega'_k}$ par leurs valeurs (45), que les équations

$$(46)\qquad \sum_i^{1,\dots,s} \mathrm{A}_{i\rho k}\overline{\omega_i} + \sum_j^{1,\dots,h} \mathrm{B}_{j\rho k}\omega_{r-h+j} + \sum_\lambda^{1,\dots,q} \mathrm{C}_{\lambda\rho k}\, du_\lambda = 0$$

doivent être vérifiées si l'on tient compte de (44).

Autrement dit, *le système* (44) *doit contenir les équations* (46).

Ce système (46) est, par lui-même, *complètement intégrable;* on le démontre de la même manière qu'au n° 27 pour le système (30) qui n'en est qu'un cas particulier. Les fonctions de $x_{r+h+1}, \dots, x_r, \xi_1, \dots, \xi_l$, c'est-à-dire de $x_{r-h+1}, \dots, x_r, u_1, \dots, u_q$, qui sont des intégrales de (46), sont donc nécessairement parmi les $s+h'$ fonctions transformées par le groupe cherché $\mathcal{G}$. *Ce sont des invariants essentiels de* $\overline{\mathcal{G}}$. Ils sont donnés par les équations qu'on obtient en éliminant $\overline{\omega_1}, \dots, \overline{\omega_s}$ dans le système (46).

Ce sont d'ailleurs les seuls invariants essentiels de $\overline{\mathcal{G}}$; on le démontrera de la même manière qu'au n° 28. On démontrera aussi que l'on obtient un groupe *semblable* à $\overline{\mathcal{G}}$ en donnant aux invariants non essentiels (ou à ceux qu'on ne veut pas conserver dans le groupe $\mathcal{G}$) des valeurs constantes d'ailleurs quelconques.

53. Pratiquement voici comment l'on pourra procéder. Une fois le système (46) formé, on pourra toujours le mettre sous la forme canonique suivante : d'abord des équations résolues par rapport à un certain nombre des expressions $\omega_{r-h+1}, \dots, \omega_r$, par exemple par rapport à $\omega_{r-h+1}, \dots, \omega_{r-h+m}$, et contenant dans leurs seconds membres $\omega_{r-h+m+1}, \dots, \omega_r$; en second lieu, des équations résolues par rapport à n des différentielles du, soit $du_1, du_2, \dots, du_n$ et contenant dans leurs seconds membres $du_{n+1}, \dots, du_q, \omega_{r-h+m+1}, \dots, \omega_r$; enfin des équations résolues par rapport à σ des expressions $\overline{\omega}$, soit $\overline{\omega_1}, \dots, \overline{\omega_\sigma}$ et contenant dans leurs seconds membres $\overline{\omega_{\sigma+1}}, \dots, \overline{\omega_s}, du_{n+1}, \dots, du_q, \omega_{r-h+m+1}, \dots, \omega_r$.

Cela étant, on donnera à $x_{r-h+m+1}, \dots, x_r, u_{n+1}, \dots, u_q$ des valeurs numériques constantes. Il restera alors les invariants essentiels

$x_{r-h+1}, \ldots, x_{r-h+m}$; quant à $u_1, u_2, \ldots, u_n$ on pourra les regarder également comme des invariants essentiels, mais on pourra aussi exprimer un certain nombre d'entre eux en fonctions *arbitraires* des autres et de $x_{r-h+1}, \ldots, x_{r-h+m}$. On pourra avoir ainsi une infinité de groupes $\mathcal{G}$ à invariants tous essentiels, dont le nombre variera entre m et $m+n$.

Pour certaines relations entre les u et les invariants de G, les entiers m, n peuvent se réduire. Dans chaque cas on exprimera les u au moyen d'un nombre moindre d'arbitraires v et l'on raisonnera sur les v comme on vient de raisonner sur les u.

54. Appliquons cette méthode à un groupe fini, le groupe simple transitif G à trois variables défini par

$$\begin{aligned} \omega_1' &= \omega_1\omega_2, \\ \omega_2' &= \omega_1\omega_3, \\ \omega_3' &= \omega_2\omega_3. \end{aligned}$$

Cherchons d'abord les groupes $\mathcal{G}$ pour lesquels $s=1$. Le système (42) est de la forme

$$\overline{\omega_1} = \omega_1 + A\omega_2 + B\omega_3 = 0.$$

En calculant le covariant $\overline{\omega_1'}$, on trouve

$$\overline{\omega_1'} = \overline{\omega_1}(\omega_2 + A\omega_3) + (2B - A^2)\omega_2\omega_3 + dA\,\omega_2 + dB\,\omega_3.$$

Pour que le système soit complètement intégrable, il faut donc

$$2B = A^2;$$

nous prendrons

$$A = u, \qquad B = \frac{1}{2}u^2;$$

le système (46) est alors ici

$$\overline{\omega_1} + du = u(\overline{\omega_1} + du) = 0,$$

et il n'introduit aucune équation en du seul. Donc l'invariant u n'est pas essentiel et l'on peut lui donner la valeur o. On a donc un seul groupe $\mathcal{G}$, transitif à une variable, défini par

$$\omega_1 = 0.$$

Si s est égal à 2 le système (42) est de la forme

$$\overline{\omega_1} = \omega_1 + A\omega_3 = 0,$$
$$\overline{\omega_2} = \omega_2 + B\omega_3 = 0,$$

et il est toujours complètement intégrable. Or on a

$$\overline{\omega_1'} = \overline{\omega_1}\,\overline{\omega_2} + (dA - B\overline{\omega_1} + 2A\overline{\omega_2})\omega_3,$$
$$\overline{\omega_2'} = \qquad (dB + \overline{\omega_1} + B\,\overline{\omega_2})\omega_3.$$

Ici il y a deux cas à distinguer, en ce qui concerne le système (46).

a. $B^2 + 2A \neq 0$. — Alors le système (46) est formé de deux équations qui n'entraînent aucune relation entre dA et dB. On peut donc prendre par exemple $A = 0$, $B = 1$ et l'on obtient le système

$$\omega_1 = \omega_2 + \omega_3 = 0,$$

correspondant à un groupe $\mathcal{G}_2$.

b. $B^2 + 2A = 0$. — Alors le système (46) se réduit, comme on le voit facilement, à une seule équation et il n'y a pas non plus d'invariant essentiel. On peut prendre $A = 0$, $B = 0$, ce qui donne le système

$$\omega_1 = \omega_2 = 0,$$

correspondant à un groupe $\mathcal{G}_2'$.

Donc tout groupe simple à trois paramètres, réduit à ses invariants essentiels, est transitif et semblable à l'un des quatre groupes : $\mathcal{G}$ à une variable, $\mathcal{G}_2$ et $\mathcal{G}_2'$ à deux variables, G à trois variables.

On peut prendre

$$\omega_1 = x_2\,dx_1,$$
$$\omega_2 = -\frac{dx_2}{x_2} + x_3\,dx_1,$$
$$\omega_3 = -\frac{dx_3}{x_2} + \frac{1}{2}\frac{x_3^2}{x_2}\,dx_1;$$

les équations du groupe G sont alors

$$X_1 = \frac{ax_1+b}{cx_1+d},$$
$$X_2 = x_2\frac{(cx_1+d)^2}{ad-bc},$$
$$X_3 = x_3\frac{(cx_1+d)^2}{ad-bc} + 2c\frac{cx_1+d}{ad-bc}.$$

Le groupe $\mathcal{G}_1$ est défini par la première de ces équations, le groupe $\mathcal{G}_2$ par la première et la troisième, le groupe $\mathcal{G}'_2$ par la première et la seconde.

55. Prenons le groupe infini intransitif G défini par

$$\begin{aligned}
\omega'_1 &= \omega_1\omega_2,\\
\omega'_2 &= \omega_1\varpi_1,\\
\omega'_3 &= \omega_1\omega_4 + \omega_2\omega_3,\\
\omega'_4 &= \omega_2\omega_4 - \omega_3\varpi_1 + \omega_1\varpi_2,\\
\omega'_5 &= 0,
\end{aligned}$$

ω_5 étant la différentielle de l'invariant x. Le groupe a ses équations de définition du premier ordre et x est pour G un invariant essentiel. Parmi les groupes $\mathcal{G}$ correspondant à $s=2$, cherchons celui pour lequel le système (42) est de la forme

$$\begin{aligned}
\overline{\omega}_1 &\equiv \omega_1 = 0,\\
\overline{\omega}_2 &\equiv \omega_3 + A\omega_2 = 0.
\end{aligned}$$

On obtient

$$\begin{aligned}
\overline{\omega'_1} &= \overline{\omega}_1\omega_2,\\
\overline{\omega'_2} &= \overline{\omega}_1(\omega_4 + A\varpi_1) + \omega_2(\omega_5 - dA).
\end{aligned}$$

Ici A peut être pris quelconque : $A = u$. Le système (46) est alors

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= 0,\\
du - \omega_5 &= 0.
\end{aligned}$$

On peut donc donner à l'invariant x de G une valeur constante, soit $x = 0$ et alors on peut prendre pour u soit une *variable* nouvelle, ce qui donnera un groupe $\mathcal{G}$ intransitif à trois variables, soit une *constante* arbitraire, ce qui donnera un groupe $\mathcal{G}$ transitif à deux variables.

Si nous prenons

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= x_2\, dx_1,\\
\omega_2 &= -\frac{dx_2}{x_2} + x_2 y_1\, dx_1,\\
\omega_3 &= dx_3 - \log x_2\, dx + x_4\, dx_1,\\
\omega_4 &= -\frac{dx_4}{x_2} - y_1\, dx + y_2\, dx_1,
\end{aligned}$$

les équations de G sont

$$\begin{aligned}
X_1 &= f(x_1),\\
X_2 &= \frac{x_2}{f'(x_1)},\\
X_3 &= x_3 - x \log f'(x_1) + \varphi(x_1),\\
X_4 &= \frac{x_4 - \varphi'(x_1)}{f'(x_1)} + x\frac{f''(x_1)}{f'^2(x_1)}.
\end{aligned}$$

Les intégrales du système complètement intégrable (42) sont $z_1 = x_1$ et $z_2 = x_3 - (u + x)\log x_2$. Pour le premier groupe $\mathcal{G}$, on fait $x = 0$ et u est une variable invariante ; les équations de $\mathcal{G}$ sont donc

$$(47)\qquad \left\{\begin{aligned}
Z_1 &= f(z_1),\\
Z_2 &= z_2 + \varphi(z_1) + u \log f'(z_1).
\end{aligned}\right.$$

Pour le second groupe, il faut regarder u comme une constante dans les équations précédentes. A la vérité, si l'on donnait à cette constante deux valeurs différentes, on obtiendrait deux groupes $\mathcal{G}$ semblables, mais *au moyen d'une transformation effectuée sur les éléments arbitraires*.

L'exemple qui précède montre qu'un groupe ayant ses équations de définition du premier ordre peut avoir des invariants essentiels et cependant être isomorphe holoédrique d'un groupe transitif.

56. En définitive, la méthode exposée détermine par des opérations *algébriques* tous les *types* de groupes $\mathcal{G}$, isomorphes holoédriques de G, et réduits à leurs invariants essentiels; deux groupes $\mathcal{G}$ appartiennent au même type lorsqu'on passe de l'un à l'autre par un changement de variables, sans changer les éléments arbitraires du groupe [1]. Si l'on connaît les équations finies de G, la connaissance des équations finies de $\mathcal{G}$ exige l'intégration du système (42). Si l'on connaît les transformations infinitésimales de G, une remarque appliquée par M. Engel aux groupes finis permet d'écrire *sans intégration* les transformations infinitésimales de $\mathcal{G}$.

57. Nous allons appliquer les méthodes précédentes à quelques groupes infinis.

Groupe général à une variable. — Si G est le groupe général à une variable, ses équations de structure et celles de ses prolongements normaux successifs sont fournies sans difficulté par les formules suivantes :

$$(48)\quad \begin{cases} \omega_1' = \omega_1\omega_2, \\ \omega_2' = \omega_1\omega_3, \\ \omega_3' = \omega_1\omega_4 + \quad \omega_2\omega_3, \\ \omega_4' = \omega_1\omega_5 + 2\omega_2\omega_4, \\ \omega_5' = \omega_1\omega_6 + 3\omega_2\omega_5 + 2\omega_3\omega_4, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \omega_n' = \omega_1\omega_{n+1} + (n-2)\omega_2\omega_n + \dfrac{(n-1)(n-4)}{1.2}\omega_3\omega_{n-1} \\ \qquad + \dfrac{(n-1)(n-2)(n-6)}{1.2.3}\omega_4\omega_{n-2} + \dots \\ \qquad + \dfrac{(n-1)(n-2)\dots(n-p+1)(n-2p)}{1.2\dots(p-1).p}\omega_{p+1}\omega_{n-p+1} + \dots, \end{cases}$$

l'entier p prenant dans la dernière formule toutes les valeurs inférieures à $\frac{n}{2}$.

---

(1) En réalité ce changement de variables fait correspondre non seulement l'ensemble des transformations d'un groupe à l'ensemble des transformations de l'autre, mais encore individuellement chaque transformation de l'un des groupes à la même transformation de l'autre.

Si $\mathcal{G}$ admet $G^{(n)}$ pour prolongement holoédrique, mais non $G^{(n-1)}$, le système complètement intégrable qui définit les variables transformées par $\mathcal{G}$ contient une équation résoluble par rapport à ω_n; ce système admet d'autre part le groupe linéaire adjoint à $G^{(n)}$ qui est ici

$$\overline{\omega}_n = \omega_n + \alpha\omega_1;$$

par suite le groupe $\mathcal{G}$ laisse invariant ω_1 et il est toujours isomorphe holoédrique à G.

$\mathcal{G}$ sera donc défini par un système complètement intégrable dont on pourra mettre les équations sous la forme canonique suivante

$$(49)\qquad \left\{\begin{aligned} &\omega_1 = 0, \\ &\omega_{\alpha_1} = \sum_i^{2,\ldots,\alpha_1-1} A_{1,i}\ \omega_i, \\ &\omega_{\alpha_2} = \sum_i^{2,\ldots,\alpha_2-1} A_{2,i}\ \omega_i \qquad (1 < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_{s-1}), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &\omega_{\alpha_{s-1}} = \sum_i^{2,\ldots,\alpha_{s-1}-1} A_{s-1,i}\omega_i. \end{aligned}\right.$$

Or les covariants ω'_p, lorsqu'on y fait $\omega_1 = 0$, ne dépendent que de $\omega_2, \ldots, \omega_p$; il en résulte que les deux premières équations (49) forment un système complètement intégrable, de même que les trois premières et ainsi de suite. Par conséquent, pour déterminer tous les systèmes complètement intégrables de la forme (49), il suffit de déterminer tous ceux de $s-1$ équations et de leur adjoindre une équation nouvelle convenablement choisie.

Les entiers $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{s-1}$ peuvent être déterminés d'après les considérations suivantes. Convenons de dire que l'expression ω_i est de poids $i-2$; alors la somme des poids des deux expressions qui forment un terme quelconque de ω'_i est encore $i-2$. Cela étant, considérons dans ω'_{α_h} les termes qui ne contiennent aucune des expressions $\omega_1, \omega_{\alpha_1}, \ldots, \omega_{\alpha_h}$. Comme on doit avoir

$$\omega'_{\alpha_h} = \sum A_{h,i}\,\omega'_i,$$

en tenant compte des équations (49), ces termes sont, dans cette dernière relation, ceux de poids le plus élevé lorsqu'on remplace ω_1, ω_{α_1}, ..., ω_{α_h} par leurs valeurs. Il ne doit donc pas y en avoir. Autrement dit ω'_{α_h} *doit s'annuler identiquement avec* ω_1, ω_{α_1}, ..., ω_{α_h}, et cela quel que soit h. En particulier, le nombre des termes qui entrent dans ω'_{α_h} doit être au plus égal à $h+1$; or, ce nombre est $\frac{1}{2}\alpha_h$ ou $\frac{1}{2}(\alpha_h+1)$ suivant que α_h est pair ou impair; donc

$$\alpha_h \leqq 2(h+1).$$

Donc, *tout groupe transitif à s variables, ou intransitif à $s+l$ variables dont l invariants essentiels, qui est isomorphe au groupe* G *admet pour prolongement holoédrique le* $(2s-1)^{\text{ième}}$ *prolongement normal de* G.

Une fois les entiers α_1, α_2, ..., α_{s-1} déterminés, il faut choisir les coefficients A_{ki} de manière que le système (49) soit complètement intégrable, en les réduisant au besoin à des valeurs particulières d'après la méthode du n° 52.

Nous allons déterminer tous les systèmes d'entiers α pour $s=2$, 3 et 4.

Pour $s=2$, on a manifestement trois cas possibles :

$$\alpha_1 = 2,\ 3,\ 4. \tag{50}$$

Pour $s=3$, on partira de $\alpha_1=2$, 3 et 4 et l'on déterminera α_2 en conséquence ($\alpha_2 \leqq 6$). On trouve ainsi les six cas suivants :

(51)

α_1	2	2	3	3	3	4
α_2	3	4	4	5	6	5

Pour $s=4$, on trouve le Tableau

(52)

α_1	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	4
α_2	3	3	3	4	4	4	4	4	5	5	6	5
α_3	4	5	6	5	5	6	7	8	6	7	8	6

Dans les trois cas de $s = 2$, le système (49) prend successivement la forme

$$\begin{aligned}
&\omega_1 = \omega_2 = 0,\\
&\omega_1 = \omega_3 + A\omega_2 = 0,\\
&\omega_1 = \omega_4 + B\omega_2 = 0,
\end{aligned}$$

et l'on trouve sans difficulté qu'on peut supposer $A = B = 0$, ce qui donne trois groupes transitifs à deux variables.

Dans le cas de $s = 3$, on obtient de même les systèmes

$$\begin{array}{llll}
\omega_1 = \omega_2 = & \omega_3 & = 0, & \\
\omega_1 = \omega_2 = & \omega_4 + A\omega_3 & = 0 & (A = 0 \text{ ou } 1),\\
\omega_1 = \omega_3 = & \omega_4 & = 0, & \\
\omega_1 = \omega_3 = & \omega_5 & = 0, & \\
\omega_1 = \omega_3 = & \omega_6 & = 0, & \\
\omega_1 = \omega_4 = & \omega_5 & = 0; &
\end{array}$$

ce qui donne sept groupes transitifs à trois variables.

Enfin, dans le cas de $s = 4$, on obtient les systèmes

$$\begin{array}{llllll}
\omega_1 = \omega_2 = & \omega_3 & = & \omega_4 & = 0, & \\
\omega_1 = \omega_2 = & \omega_3 & = & \omega_5 & = 0, & \\
\omega_1 = \omega_2 = & \omega_3 & = & \omega_6 + A\omega_5 & = 0 & (A = 0 \text{ ou } 1),\\
\omega_1 = \omega_2 = & \omega_4 + A\omega_3 & = & \omega_5 & = 0 & (A = 0 \text{ ou } 1),\\
\omega_1 = \omega_3 = & \omega_4 & = & \omega_5 & = 0, & \\
\omega_1 = \omega_3 = & \omega_4 & = & \omega_6 & = 0, & \\
\omega_1 = \omega_3 = & \omega_4 & = & \omega_7 & = 0, & \\
\omega_1 = \omega_3 = & \omega_4 & = & \omega_8 & = 0, & \\
\omega_1 = \omega_3 = & \omega_5 & = & \omega_6 & = 0, & \\
\omega_1 = \omega_3 = & \omega_5 & = & \omega_7 & = 0, & \\
\omega_1 = \omega_3 = & \omega_6 & = & \omega_8 & = 0, & \\
\omega_1 = \omega_4 = & \omega_5 & = & \omega_6 & = 0; &
\end{array}$$

ce qui donne quatorze groupes transitifs à quatre variables.

Bornons-nous à écrire les équations finies des sept groupes transitifs à trois variables. On peut prendre

$$\omega_1 = x_2\, dx_1,$$

$$\omega_2 = -\frac{dx_2}{x_2} + x_3\, dx_1,$$

$$\omega_3 = -\frac{dx_3}{x_2} + x_4\, dx_1,$$

$$\omega_4 = -\frac{dx_4}{x_2} + \frac{x_3}{x_2^2}\, dx_3 - \frac{x_4}{x_2^2}\, dx_2 + x_5\, dx_1,$$

$$\omega_5 = -\frac{dx_5}{x_2} + \frac{2x_3}{x_2^2}\, dx_4 - \frac{2x_3^2}{x_2^3}\, dx_3 + 2\,\frac{x_3 x_4 - x_2 x_5}{x_2^3}\, dx_2 + x_6\, dx_1,$$

$$\omega_6 = -\frac{dx_6}{x_2} + \frac{3x_3}{x_2^2}\, dx_5 + 2\,\frac{x_2 x_4 - 3x_3^2}{x_2^3}\, dx_4 + 2\,\frac{3x_3^3 - x_2 x_3 x_4 - x_2^2 x_5}{x_2^4}\, dx_3$$
$$+ \frac{6x_2 x_3 x_5 - 6x_3^2 x_4 - 3x_2^2 x_6 + 2x_2 x_4^2}{x_2^4}\, dx_2 + x_7\, dx_1.$$

Les quantités transformées par ces sept groupes sont alors successivement

1°	$x = x_1,$	$y = x_2,$	$z = x_3;$
2° et 3°	$x = x_1,$	$y = x_2,$	$z = 2x_2(x_4 + \mathrm{A}x_3) - x_3^2 \quad (\mathrm{A} = 0 \text{ ou } 1);$
4°	$x = x_1,$	$y = x_3,$	$z = x_2 x_4;$
5°	$x = x_1,$	$y = x_3,$	$z = x_2(x_3 x_4 - \frac{1}{2} x_2 x_5);$
6°	$x = x_1,$	$y = x_3,$	$z = x_2^3 x_6 - x_2^2(x_4^2 + 3x_3 x_5) + 6x_2 x_3^2 x_4;$
7°	$x = x_1,$	$y = 2x_2 x_4 - x_3^2,$	$z = x_2^2 x_5.$

En prenant

$$\mathrm{X}_1 = f(x_1),$$

les équations finies de ces groupes sont alors

(1°)
$$\mathrm{X} = f(x),$$
$$\mathrm{Y} = \frac{y}{f'(x)},$$
$$\mathrm{Z} = \frac{z}{f'(x)} - \frac{f''(x)}{f'^2(x)};$$

(2° et 3°)
$$\begin{aligned} X &= f(x),\\ Y &= \frac{y}{f'(x)},\\ Z &= \frac{z}{f'^2(x)} - 2Ay\frac{f''(x)}{f'^3(x)} + 3\frac{f''^2(x)}{f'^4(x)} - 2\frac{f'''(x)}{f'^3(x)} \qquad (A = 0 \text{ ou } 1); \end{aligned}$$

(4°)
$$\begin{aligned} X &= f(x),\\ Y &= \frac{y}{f'(x)} - \frac{f''(x)}{f'^2(x)},\\ Z &= \frac{z}{f'^2(x)} - y\frac{f''(x)}{f'^3(x)} + 2\frac{f''^2(x)}{f'^4(x)} - \frac{f'''(x)}{f'^3(x)}; \end{aligned}$$

(5°)
$$\begin{aligned} X &= f(x),\\ Y &= \frac{y}{f'(x)} - \frac{f''(x)}{f'^2(x)},\\ Z &= \frac{z}{f'^3(x)} - \frac{3}{2}y^2\frac{f''(x)}{f'^4(x)} + y\left[3\frac{f''^2(x)}{f'^5(x)} - \frac{f'''(x)}{f'^4(x)}\right]\\ &\quad + \frac{f''^3(x)}{f'^6(x)} - 2\frac{f''(x)f'''(x)}{f'^5(x)} + \frac{1}{2}\frac{f^{\text{IV}}(x)}{f'^4(x)}; \end{aligned}$$

(6°)
$$\begin{aligned} X &= f(x),\\ Y &= \frac{y}{f'(x)} - \frac{f''(x)}{f'^2(x)},\\ Z &= \frac{z}{f'^4(x)} - 9y^3\frac{f''(x)}{f'^5(x)} + y^2\left[24\frac{f''^2(x)}{f'^6(x)} - 5\frac{f'''(x)}{f'^5(x)}\right]\\ &\quad + y\left[-8\frac{f''^3(x)}{f'^7(x)} - 8\frac{f''(x)f'''(x)}{f'^6(x)} + 3\frac{f^{\text{IV}}(x)}{f'^5(x)}\right]\\ &\quad + 14\frac{f''^4(x)}{f'^8(x)} - 20\frac{f''^2(x)f'''(x)}{f'^7(x)}\\ &\quad + 5\frac{f'''^2(x) + f''(x)f^{\text{IV}}(x)}{f'^6(x)} - \frac{f^{\text{V}}(x)}{f'^5(x)}; \end{aligned}$$

(7°)
$$\begin{aligned} X &= f(x),\\ Y &= \frac{y}{f'^2(x)} + 3\frac{f''^2(x)}{f'^4(x)} - 2\frac{f'''(x)}{f'^3(x)},\\ Z &= \frac{z}{f'^3(x)} - y\frac{f''(x)}{f'^4(x)} - 6\frac{f''^3(x)}{f'^6(x)} + 6\frac{f''(x)f'''(x)}{f'^5(x)} - \frac{f^{\text{IV}}(x)}{f'^4(x)}. \end{aligned}$$

Les trois groupes à deux variables sont donnés par exemple par les deux premières équations des groupes (1°), (4°) et (7°).

Nous n'avons trouvé jusqu'à présent que des groupes sans invariant essentiel; il n'en sera pas ainsi pour toutes les valeurs de s; par exemple pour $s = 5$, le système

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega_6 + \omega_5 = \omega_8 + \frac{14}{5}\omega_7 + u\omega_5 = 0$$

donne un groupe à 6 variables avec un invariant essentiel u.

On pourrait encore réduire les systèmes (49) à des systèmes types en remarquant que les formules (48) ne changent pas si l'on effectue sur les ω la substitution suivante

$$(53)\quad \left\{\begin{aligned} \bar{\omega}_1 &= a_1\omega_1, \\ \bar{\omega}_2 &= \omega_2 + a_2\omega_1 - \frac{da_1}{a_1}, \\ \bar{\omega}_3 &= \frac{1}{a_1}\omega_3 + \frac{a_2}{a_1}\omega_2 + a_3\omega_1 + \frac{da_2}{a_1}, \\ \bar{\omega}_4 &= \frac{1}{a_1^2}\omega_4 + \frac{2a_1a_3 - a_2^2}{a_1^2}\omega_2 + a_4\omega_1 - \frac{da_3}{a_1} + \frac{a_2}{a_1^2}da_2 - \frac{a_3}{a_1^2}da_1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}\right.$$

où les a sont des quantités arbitraires. S'il s'agit de groupes transitifs, on regardera les a comme des constantes arbitraires.

On démontre sans peine que tout groupe $\mathcal{G}$ isomorphe à G et ayant ses équations de définition du premier ordre est l'un des prolongements normaux de G; car, pour ce groupe $\mathcal{G}$, σ_1 est forcément égal à 1, les autres σ étant nuls.

58. *Groupes isomorphes au groupe*

$$(54)\quad \left\{\begin{aligned} X &= x, \\ Y &= y + f(x). \end{aligned}\right.$$

Ici on arrive à des résultats bien différents des précédents. Écrivons d'abord les équations de structure du groupe G et de ses prolongements normaux successifs. En posant $\omega_1 = dx$, on a

$$(55)\qquad \left\{\begin{aligned} &\omega'_1 = 0, \\ &\omega'_2 = \omega_1\omega_3, \\ &\omega'_3 = \omega_1\omega_4, \\ &\ldots\ldots\ldots, \\ &\omega'_n = \omega_1\omega_{n+1}. \end{aligned}\right.$$

Le groupe $G^{(\alpha)}$ est défini par les $\alpha + 2$ premières équations.

On trouve, comme dans le cas précédent, que tout système complètement intégrable définissant un groupe $\mathcal{G}$ isomorphe holoédrique de G contient l'équation $\omega_1 = 0$.

Si nous prenons $s = 2$, le système est de la forme

$$(56)\qquad \left\{\begin{aligned} &\overline{\omega}_1 \equiv \omega_1 = 0, \\ &\overline{\omega}_2 \equiv \omega_n + A_1\omega_{n-1} + A_2\omega_{n-2} + \ldots + A_{n-2}\omega_2 = 0, \end{aligned}\right.$$

et l'on a

$$\begin{aligned} &\overline{\omega}'_1 = 0, \\ &\overline{\omega}'_2 = \overline{\omega}_1(\omega_{n+1} + A_1\omega_n + \ldots + A_{n-2}\omega_3) + dA_1\omega_{n-1} + \ldots + dA_{n-2}\omega_2; \end{aligned}$$

donc $A_1, A_2, \ldots, A_{n-2}$ sont des invariants essentiels. Si ces coefficients sont tous des constantes (ou plutôt des fonctions de x), le groupe $\mathcal{G}$ n'est isomorphe holoédrique de G que si n est égal à 2; c'est le groupe G lui-même. Si les coefficients $A_1, \ldots, A_{n-2}$ dépendent d'une variable autre que x (invariant de $\mathcal{G}$), on adjoindra au système (56) l'équation

$$A'_1\omega_{n-1} + \ldots + A'_{n-2}\omega_2 = 0,$$

puis de même l'équation

$$A''_1\omega_{n-1} + \ldots + A''_{n-2}\omega_2 = 0$$

et ainsi de suite, et l'on devra finir par obtenir l'équation $\omega_2 = 0$. *Les fonctions* $A_1, \ldots, A_{n-2}$ *sont donc assujetties à ne pas vérifier certaines équations différentielles.*

Par exemple pour $n = 3$, on prendra $A_1 = u$; pour $n = 4$, si A_1

n'est pas fonction de x seul, on peut le prendre égal à u, et alors il faut que A''_2 ne soit pas nul; si, au contraire, A_1 est une fonction de x seul, on pourra prendre $A_2 = u$, et ainsi de suite.

On voit, d'après cela, qu'il y a une infinité de groupes à trois variables (avec deux invariants essentiels) isomorphes au groupe G, et que l'on ne peut trouver aucun prolongement normal $G^{(\alpha)}$ que tous ces groupes admettent comme prolongement holoédrique.

Des considérations analogues peuvent être développées dans le cas de $s = 3$, 4, etc.

On obtient ainsi, comme cas particuliers de groupes $\mathcal{G}$ à trois variables sans invariants non essentiels, les groupes suivants :

$$\begin{cases} X = x, \\ Y = y + f(x), \\ Z = z + f^{(p)}(x) + m_1 f^{(p-1)}(x) + \ldots + m_{p-1} f'(x); \end{cases}$$

$$\begin{cases} X = x, \\ Y = y + f'(x) + z f(x), \\ Z = z; \end{cases}$$

$$\begin{cases} X = x, \\ Y = y + f''(x) + z f'(x) + A(z) f(x) \qquad [A''(z) \neq 0], \\ Z = z; \end{cases}$$

$$\begin{cases} X = x, \\ Y = y + f''(x) + m f'(x) + z f(x), \\ Z = z; \end{cases}$$

. . . .

les m désignant des constantes ou des fonctions de x, $A(z)$ une fonction déterminée de x et de z.

59. *Groupes isomorphes au groupe*

$$(57) \qquad \begin{cases} X = f(x), \\ Y = \varphi(y). \end{cases}$$

Ce groupe G a ses équations de définition du premier ordre. Les équations de structure et celles de ses prolongements normaux successifs sont données par les formules

$$\begin{aligned}
\omega'_1 &= \omega_1\omega_2,\\
\varpi'_1 &= \varpi_1\varpi_2,\\
\omega'_2 &= \omega_1\omega_3,\\
\varpi'_2 &= \varpi_1\varpi_3,\\
\omega'_3 &= \omega_1\omega_4 + \omega_2\omega_3,\\
\varpi'_3 &= \varpi_1\varpi_4 + \varpi_2\varpi_3,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Au groupe $G^{(\alpha)}$ correspondent les $2p+2$ premières équations. Le groupe linéaire adjoint à $G^{(p)}$ est ici

$$\begin{aligned}
\bar{\omega}_{p+1} &= \omega_{p+1} + \alpha\omega_1,\\
\bar{\varpi}_{p+1} &= \varpi_{p+1} + \beta\varpi_1.
\end{aligned}$$

Si un groupe $\mathcal{G}$ est défini par des équations ne contenant que les ω, il ne peut être isomorphe holoédrique à G. Par suite, elles doivent contenir à la fois les ω et les ϖ; on en déduit facilement qu'elles doivent contenir les deux équations

$$\omega_1 = \varpi_1 = 0.$$

On montre, comme dans le cas du groupe général à une variable, que les systèmes complètement intégrables de s équations n'introduisent que $\omega_1, \ldots, \omega_{2s-2}; \varpi_1, \ldots, \varpi_{2s-2}$.

Cherchons d'abord tous les systèmes correspondant à $s=3$; on trouve sans difficulté les systèmes

$$\begin{aligned}
&\omega_1 = \omega_2 = \varpi_1 = 0,\\
&\omega_1 = \omega_3 = \varpi_1 = 0,\\
&\omega_1 = \omega_4 = \varpi_1 = 0,\\
&\omega_1 = \varpi_1 = \varpi_2 + A\omega_2 = 0,
\end{aligned}$$

où A désigne soit une constante arbitraire, soit une variable nouvelle invariante par $\mathcal{G}$; il y aurait à ajouter les systèmes obtenus en échangeant les ω et les ϖ; mais ils sont évidemment semblables aux précédents.

Pour $s=4$, on a, outre les systèmes formés de p équations entre les ω seuls et de $s-p$ équations entre les ϖ seuls, les systèmes suivants :

$$\omega_1=\varpi_1=\varpi_2+\mathrm{A}\,\omega_2=\varpi_3=0,$$
$$\omega_1=\varpi_1=\varpi_2+\mathrm{A}\,\omega_2=\varpi_4=0,$$
$$\omega_1=\varpi_1=\varpi_2=\varpi_3+\omega_2=0,$$
$$\omega_1=\varpi_1=\varpi_2-\omega_2=\varpi_3+\omega_3=0,$$
$$\omega_1=\varpi_1=\varpi_2=\varpi_4+\omega_2=0,$$
$$\omega_1=\varpi_1=\varpi_2-\tfrac{1}{2}\omega_2=\varpi_4+\omega_3=0,$$
$$\omega_1=\varpi_1=\varpi_2-\omega_2=\varpi_4+\omega_4=0,$$
$$\omega_1=\varpi_1=\varpi_2=\varpi_4+\varpi_3+\mathrm{A}\,\omega_2=0,$$

où A désigne soit une constante arbitraire, soit une variable nouvelle invariante par $\mathcal{G}$.

Il est inutile d'écrire les équations finies de tous ces groupes.

Contentons-nous d'écrire celles du groupe correspondant au système

$$\omega_1=\varpi_1=\varpi_2+\mathrm{A}\,\omega_2=0,$$

qui sont

$$\mathrm{X}=f(x),$$
$$\mathrm{Y}=\varphi(y),$$
$$\mathrm{Z}=\frac{z}{f'(x)\,[\varphi'(y)]^{\mathrm{A}}},$$

et celles du groupe correspondant au système

$$\omega_1=\varpi_1=\varpi_2-\omega_2=\varpi_3+\omega_3=0,$$

qui sont

$$\mathrm{X}=f(x),$$
$$\mathrm{Y}=\varphi(y),$$
$$\mathrm{Z}=z\frac{f'(x)}{\varphi'(y)},$$
$$\mathrm{T}=\frac{t}{\sqrt{f'(x)\,\varphi'(y)}}-\sqrt{z}\,\frac{f''(x)}{f'(x)\sqrt{f'(x)\,\varphi'(y)}}-\frac{1}{\sqrt{z}}\,\frac{\varphi''(y)}{\varphi'(y)\sqrt{f'(x)\,\varphi'(y)}}.$$

Les groupes $\mathcal{G}$ qui ont leurs équations de définition du premier ordre sont ceux qui laissent invariantes les expressions de Pfaff

$$\omega_1, \quad \omega_2, \quad \ldots, \quad \omega_p; \quad \varpi_1, \quad \varpi_2, \quad \ldots, \quad \varpi_q,$$

où p et q désignent deux entiers quelconques.

60. *Groupes isomorphes au groupe*

$$(58) \qquad \begin{cases} X = f(x), \\ Y = y[f'(x)]^m + \varphi(x). \end{cases}$$

Comme dans le cas précédent, les équations de structure du groupe G et de ses prolongements normaux peuvent se partager en deux classes dont la première est formée des équations de structure du groupe général à une variable

$$(59) \qquad \begin{cases} \omega'_1 = \omega_1 \omega_2, \\ \omega'_2 = \omega_1 \omega_3, \\ \omega'_3 = \omega_1 \omega_4 + \omega_2 \omega_3, \\ \omega'_4 = \omega_1 \omega_5 + 2\omega_2 \omega_4, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

et la seconde introduit des expressions nouvelles ϖ :

$$(60) \qquad \begin{cases} \varpi'_1 = \omega_1 \varpi_2 - m\,\omega_2 \varpi_1, \\ \varpi'_2 = \omega_1 \varpi_3 + \omega_2 \varpi_2 - m(\omega_2 \varpi_2 + \omega_3 \varpi_1), \\ \varpi'_3 = \omega_1 \varpi_4 + 2\omega_2 \varpi_3 + \omega_3 \varpi_2 - m(\omega_2 \varpi_3 + 2\omega_3 \varpi_2 + \omega_4 \varpi_1), \\ \varpi'_4 = \omega_1 \varpi_5 + 3\omega_2 \varpi_4 + 3\omega_3 \varpi_3 + \omega_4 \varpi_2 - m(\omega_2 \varpi_4 + 3\omega_3 \varpi_3 + 3\omega_4 \varpi_2 + \omega_5 \varpi_1), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

La première équation (59) et la première équation (60) correspondent au groupe G, et d'une manière générale les $p+1$ premières équations (59) et les $p+1$ premières équations (60) au groupe $G^{(p)}$.

Ici le système complètement intégrable qui définit un groupe $\mathcal{G}$ isomorphe holoédrique de G contient nécessairement l'équation $\omega_1 = 0$. Mais il ne doit pas contenir que des équations entre les ω, sinon $\mathcal{G}$ serait isomorphe mériédrique de G. Si l'on considère toutes les équations entre les ω seuls qu'on en peut déduire, elles forment évidemment un système complètement intégrable; les autres seront résolubles par rapport à un certain nombre des ϖ, et l'on peut supposer qu'elles expriment chacune de ces expressions ϖ au moyen des ϖ d'indice inférieur et des ω. Si l'on considère toutes celles qui sont résolues par rapport à des ϖ d'indice inférieur à un nombre donné, elles forment évidemment, jointes aux équations qui ne dépendent que des ω, un système complètement intégrable. On a ainsi le moyen de déterminer de proche en proche tous les groupes $\mathcal{G}$.

Si l'on ne prend entre les ω que la seule relation

$$\omega_1 = 0,$$

et si l'on cherche à lui adjoindre une autre relation dépendant des ϖ, on trouve

$$\varpi_1 = 0;$$

sauf dans les cas $m = 0$, -1 ou -2, où l'on trouve

$$\begin{aligned} &(m = 0), && \varpi_1 + A\omega_2 = 0; \\ &(m = -1), && \varpi_1 + A\omega_3 = 0; \\ &(m = -2), && \varpi_1 + A\omega_4 = 0. \end{aligned}$$

Le cas général donne le groupe G lui-même. Quant aux trois cas particuliers, ils donnent

$$m = 0, \quad \begin{cases} X = f(x), \\ Y = y + \varphi(x) + A \log f'(x); \end{cases}$$

$$m = -1, \quad \begin{cases} X = f(x), \\ Y = \dfrac{y}{f'(x)} + \varphi(x) + A\dfrac{f''(x)}{f'^2(x)}; \end{cases}$$

$$m = -2, \quad \begin{cases} X = f(x), \\ Y = \dfrac{y}{f'^2(x)} + \varphi(x) + A\left[\dfrac{f'''(x)}{f'^3(x)} - \dfrac{3}{2}\dfrac{f''^2(x)}{f'^4(x)}\right]. \end{cases}$$

Si A est une variable nouvelle invariante par $\mathcal{G}$, on obtient trois groupes intransitifs isomorphes à G. Si A est une constante, on obtient trois groupes transitifs; mais on voit évidemment qu'ils sont identiques à G, *par une transformation convenable effectuée sur les éléments arbitraires du groupe;* il suffit de conserver la fonction arbitraire $f(x)$, mais de changer la fonction arbitraire $\varphi(x)$.

Si l'on ne cherche que des groupes $\mathcal{G}$ transitifs, on peut, pour les réduire à des groupes types, se servir de la substitution la plus générale à coefficients constants qui conserve les relations (59) et (60). D'abord les ω sont conservés, en ce sens qu'on peut effectuer sur eux la substitution linéaire (53), si $a_1, a_2, a_3, \ldots$ sont des constantes. Remarquons maintenant que, si l'on fait $\omega_1 = \omega_2 = 0$, les seules combinaisons linéaires des ω et des ϖ dont les covariants s'annulent se déduisent toutes de $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \varpi_1$ (1). Par suite, on a une formule de la forme

$$\overline{\varpi}_1 = h\varpi_1 + b_1\omega_1 + b_2\omega_2 + b_3\omega_3 + b_4\omega_4;$$

en exprimant que cette substitution, jointe aux substitutions (53), laisse invariant ϖ'_1, on trouve que b_3 et b_4 doivent être nuls, sauf dans deux cas :

$$1^\circ\ m = -1, \qquad \overline{\varpi}_1 = h\varpi_1 + b_1\omega_1 + b_2\omega_2 + b_3\omega_3;$$
$$2^\circ\ m = -2, \qquad \overline{\varpi}_1 = h\varpi_1 + b_1\omega_1 + b_2\omega_2 + b_4\omega_4.$$

Il résulte donc de là que, si m est différent de -1 et de -2, les expressions $\omega_1, \omega_2, \varpi_1$ sont échangées entre elles par toute substitution qui laisse invariantes les formules (59) et (60). Si m est égal à -1, le résultat est vrai de $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \varpi_1$, et, si m est égal à -2, de $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \varpi_1$. Dans chacun de ces cas les formules de substitution fournissent les formules ultérieures s'appliquant aux autres ω et ϖ.

On trouve, par exemple, *si m est quelconque,* huit types de groupes transitifs à trois variables isomorphes holoédriques de G, définis par les systèmes

$$\omega_1 = \varpi_1 = \varpi_2 = 0,$$
$$\omega_1 = \omega_2 = \varpi_1 = 0,$$
$$\omega_1 = \omega_2 = \varpi_1 + \omega_3 = 0,$$
$$\omega_1 = \omega_2 = \varpi_1 + \omega_4 = 0,$$
$$\omega_1 = \omega_2 = \varpi_1 + \omega_3 + \omega_4 = 0,$$
$$\omega_1 = \omega_3 = \varpi_1 = 0,$$
$$\omega_1 = \omega_3 = \varpi_2 = 0,$$
$$\omega_1 = \omega_4 = \varpi_1 = 0.$$

(1) Pour $m = 0$, il faudrait ajouter ϖ_2; mais dans ce cas on considérerait ce qu'on obtient en faisant $\omega_1 = 0$; le résultat serait le même.

Les plus intéressants de ces groupes sont le 1[er], le 3[e], le 4[e], le 5[e] et le 7[e]. En prenant

$$
\begin{aligned}
\omega_1 &= x_2\,dx_1,\\
\omega_2 &= -\frac{dx_2}{x_2} + x_3\,dx_1,\\
\omega_3 &= -\frac{dx_3}{x_2} + x_4\,dx_1,\\
\omega_4 &= -\frac{dx_4}{x_2} + \frac{x_3}{x_2^2}\,dx_3 - \frac{x_4}{x_2^2}\,dx_2 + x_5\,dx_1,\\
\varpi_1 &= x_2^m\,dy_1 + y_2\,dx_1,\\
\varpi_2 &= -\frac{dy_2}{x_2} + m\frac{y_2}{x_2^2}\,dx_2 + m x_2^{m-1} x_3\,dy_1 + y_3\,dx_1,
\end{aligned}
$$

les intégrales des systèmes correspondants sont respectivement

$$
\begin{array}{ll}
(1) & x_1,\quad y_1,\quad \dfrac{y_2}{x_2^m},\\
(3) & x_1,\quad x_2,\quad x_2^{m+1}y_1 - x_3,\\
(4) & x_1,\quad x_2,\quad x_2^{m+2}y_1 - x_2x_4 + \tfrac{1}{2}x_3^2,\\
(5) & x_1,\quad x_2,\quad x_2^{m+2}y_1 - x_2(x_3 + x_4) + \tfrac{1}{2}x_3^2,\\
(7) & x_1,\quad x_3,\quad m x_3 y_1 - \dfrac{y_2}{x_2^m},
\end{array}
$$

et les équations finies des groupes sont, en désignant dans chaque cas les trois intégrales par x, y, z,

$$
(1)\quad \left\{
\begin{aligned}
X &= f(x),\\
Y &= y f'^m(x) + \varphi(x),\\
Z &= z f'^{m-1}(x) - m y f'^{m-2}(x) f''(x) - \frac{\varphi'(x)}{f'(x)};
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(3)\quad \left\{
\begin{aligned}
X &= f(x),\\
Y &= \frac{y}{f'(x)},\\
Z &= \frac{z}{f'(x)} + y^{m+1}\frac{\varphi(x)}{f'^{m+1}(x)} + \frac{f''(x)}{f'^2(x)};
\end{aligned}
\right.
$$

$$(4)\quad \begin{cases} X = f(x), \\ Y = \dfrac{y}{f'(x)}, \\ Z = \dfrac{z}{f'^2(x)} + y^{m+2}\dfrac{\varphi(x)}{f'^{m+2}(x)} + \dfrac{f'''(x)}{f'^3(x)} - \dfrac{3}{2}\dfrac{f''^2(x)}{f'^4(x)}; \end{cases}$$

$$(5)\quad \begin{cases} X = f(x), \\ Y = \dfrac{y}{f'(x)}, \\ Z = \dfrac{z}{f'^2(x)} + y^{m+2}\dfrac{\varphi(x)}{f'^{m+2}(x)} + y\dfrac{f''(x)}{f'^3(x)} + \dfrac{f'''(x)}{f'^3(x)} - \dfrac{3}{2}\dfrac{f''^2(x)}{f'^4(x)}; \end{cases}$$

$$(7)\quad \begin{cases} X = f(x), \\ Y = \dfrac{y}{f'(x)} - \dfrac{f''(x)}{f'^2(x)}, \\ Z = z f'^{m-1}(x) + my\dfrac{\varphi(x)}{f'(x)} + \dfrac{\varphi'(x)}{f'(x)} - m\dfrac{\varphi(x)f''(x)}{f'^2(x)}. \end{cases}$$

De ces huit groupes transitifs à trois variables, le deuxième et le troisième ont leurs équations de définition du premier ordre. D'ailleurs, si un groupe $\mathcal{G}$ a ses équations de définition du premier ordre, le système complètement intégrable dont il transforme les intégrales est de la forme

$$\omega_1 = \omega_2 = \ldots = \omega_p = 0,$$
$$\varpi_1 + \ldots = \varpi_2 + \ldots = \ldots = \varpi_q + \ldots = 0,$$

les termes non écrits à la suite de $\varpi_1, \varpi_2, \ldots, \varpi_q$ ne dépendant que des ω. Cette condition n'est pas suffisante.

61. *Groupes isomorphes au groupe général de n variables.* — Les équations de structure du groupe G et de ses prolongements normaux successifs sont de la forme

$$(61)\quad \begin{cases} \omega'_i = \displaystyle\sum_{\rho}^{1,\ldots,n} \omega_\rho \omega_{i\rho} & (i = 1, 2, \ldots, n), \\ \omega'_{ij} = \displaystyle\sum_{\rho}^{1,\ldots,n} (\omega_\rho \omega_{ij\rho} + \omega_{\rho j}\omega_{i\rho}) & (i, j = 1, 2, \ldots, n), \\ \omega'_{ijk} = \displaystyle\sum^{1,\ldots,n} (\omega_\rho \omega_{ijk\rho} + \omega_{\rho k}\omega_{ij\rho} - \omega_{i\rho}\omega_{\rho jk} + \omega_{\rho j}\omega_{i\rho k}) & (i, j, k = 1, 2, \ldots, n), \end{cases}$$

Les équations de la première ligne définissent G, celles des deux premières lignes G′, celles des trois premières lignes G″, etc. Dans les expressions à plusieurs indices, les indices qui suivent le premier peuvent s'échanger entre eux et leur ordre n'est pas à considérer.

Le système complètement intégrable (42) qui définit un groupe $\mathcal{G}$ isomorphe de G doit contenir toutes les équations

$$\omega_1 = \omega_2 = \ldots = \omega_n = 0. \tag{62}$$

Supposons en effet, pour fixer les idées, que $\mathcal{G}$ admette pour prolongement holoédrique G″, mais non G′. Alors le système (42) contient au moins une équation de la forme

$$\sum A_{ijk}\,\omega_{ijk} + \sum A_{ij}\,\omega_{ij} + \sum A_i\,\omega_i = 0.$$

Comme ce système admet le groupe linéaire adjoint à G″, dont les transformations infinitésimales sont

$$\omega_\alpha \frac{\partial f}{\partial \omega_{i\alpha\alpha}}, \quad \omega_\beta \frac{\partial f}{\partial \omega_{i\alpha\alpha}} + \omega_\alpha \frac{\partial f}{\partial \omega_{i\alpha\beta}}, \quad \omega_\alpha \frac{\partial f}{\partial \omega_{i\beta\gamma}} + \omega_\beta \frac{\partial f}{\partial \omega_{i\gamma\alpha}} + \omega_\gamma \frac{\partial f}{\partial \omega_{i\alpha\beta}}$$
$$(i, \alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \ldots, n);$$

le système (42) doit contenir aussi les équations

$$\begin{array}{r} A_{i\alpha\alpha}\,\omega_\alpha = 0 \\ A_{i\alpha\alpha}\,\omega_\beta + A_{i\alpha\beta}\,\omega_\alpha = 0 \\ A_{i\beta\gamma}\,\omega_\alpha + A_{i\gamma\alpha}\,\omega_\beta + A_{i\alpha\beta}\,\omega_\gamma = 0 \end{array} \qquad (i, \alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \ldots, n).$$

Si l'un des $A_{i\alpha\alpha}$ est différent de zéro, on voit qu'on obtient toutes les équations (62). Il en est de même s'ils sont tous nuls, car alors l'un des $A_{i\alpha\beta}$ $(\alpha \neq \beta)$ est certainement différent de zéro.

On voit donc que *tout groupe $\mathcal{G}$ isomorphe holoédrique de* G *peut être regardé comme le prolongement holoédrique de* G; de plus il n'existe pas de groupe isomorphe mériédrique de G.

On voit, d'après cela, que si les équations (42) sont mises sous forme *canonique*, c'est-à-dire si elles sont résolues par rapport à un certain nombre d'expressions ω, les expressions qui entrent dans les seconds membres ayant un nombre d'indices inférieur ou égal à celui des indices de l'expression qui est au premier membre, l'ensemble des équations résolues par rapport aux ω_i et aux ω_{ij} forme un système complètement intégrable, de même l'ensemble des équations résolues par rapport aux ω_i, aux ω_{ij} et aux ω_{ijk}, et ainsi de suite.

Pour déterminer tous les groupes $\mathcal{G}$ admettant $G^{(p)}$ pour prolongement holoédrique sans admettre $G^{(p-1)}$, il suffira donc de déterminer tous les groupes admettant $G^{(p-1)}$ pour prolongement holoédrique et, aux systèmes complètement intégrables dont ils transforment les intégrales, ajouter une ou plusieurs équations dépendant des ω à $p+1$ indices (et aussi au besoin des ω à $1, 2, \ldots, p$ indices).

Prenons d'abord le cas de $p = 1$. Quelles relations linéaires à coefficients constants peut-on établir entre les ω_{ij} pour que, en y ajoutant les équations (62), on obtienne un système complètement intégrable? D'une manière générale, si l'on considère un groupe G défini par

$$\omega'_k = \sum c_{ijk}\omega_i\omega_j + \sum a_{i\rho k}\omega_i\varpi_\rho \qquad (k = 1, 2, \ldots, r),$$

le prolongement normal s'obtient en ajoutant à ces équations les suivantes :

$$\varpi'_\tau = \sum_{(\rho,\sigma)} \gamma_{\rho\sigma\tau}\varpi_\rho\varpi_\sigma + \sum \xi_{\lambda\rho\tau}\omega_\lambda\varpi_\rho + \sum y_{\lambda\mu\tau}\omega_\lambda\omega_\mu + \sum b_{i\lambda\tau}\omega_i\chi_\lambda,$$

où les $\gamma_{\rho\sigma\tau}$ sont les coefficients de structure du groupe linéaire adjoint à G et ayant pour transformations infinitésimales

$$U_\rho f = \sum_{i,k} a_{i\rho k}\, u_i \frac{\partial f}{\partial u_k} \qquad (\rho = 1, 2, \ldots, p).$$

Cherchons la condition pour que le système

$$\omega_1 = \omega_2 = \ldots = \omega_r = \varpi_1 = \ldots = \varpi_q = 0$$

soit complètement intégrable. On trouve immédiatement

$$\gamma_{q+i,q+j,\tau} = 0 \qquad (\tau = 1, \ldots, q;\ i, j = 1, \ldots, p-q).$$

Autrement dit, *il faut et il suffit que les transformations infinitésimales* $U_{q+1}f, \ldots, U_p f$ *forment un sous-groupe du groupe linéaire adjoint à* G.

Si l'on connaît un sous-groupe de ce groupe linéaire et que ce sous-groupe soit défini par un certain nombre d'équations linéaires en $e_1, \ldots, e_p$ $\Big($la transformation infinitésimale la plus générale du groupe étant mise sous la forme $\sum e_\rho U_\rho f\Big)$, les mêmes équations linéaires en $\varpi_1, \ldots \varpi_p$ déterminent, avec $\omega_1 = \ldots = \omega_r = 0$, un système complètement intégrable.

Ici le groupe linéaire adjoint à G est le groupe linéaire homogène à n variables. Nous sommes donc ramenés à déterminer ses sous-groupes. Comme d'ailleurs les équations (61) ne changent pas quand on effectue sur $\omega_1, \ldots, \omega_n$ une substitution linéaire à coefficients quelconques (fonctions des invariants de $\mathcal{G}$), on pourra réduire sans crainte ces sous-groupes à des sous-groupes types (non homologues entre eux par une substitution linéaire).

Dans les cas de $n = 2$ et $n = 3$, ces sous-groupes ont été déterminés par S. Lie. Pour $n = 2$, en posant p_1 et p_2 à la place de $\frac{\partial f}{\partial u_1}$ et $\frac{\partial f}{\partial u_2}$, ce sont les groupes

$$\begin{gathered}
u_1 p_1 + u_2 p_2, \\
(m+1) u_1 p_1 + (m-1) u_2 p_2, \\
u_1 p_2 + m(u_1 p_1 + u_2 p_2), \\
u_1 p_1, \quad u_2 p_2, \\
u_1 p_2, \quad u_1 p_1 + u_2 p_2, \\
(m+1) u_1 p_1 + (m-1) u_2 p_2, \quad u_1 p_2, \\
u_1 p_1, \quad u_2 p_2, \quad u_1 p_2, \\
u_1 p_1 - u_2 p_2, \quad u_1 p_2, \quad u_2 p_1, \\
u_1 p_1, \quad u_2 p_2, \quad u_1 p_2, \quad u_2 p_1.
\end{gathered}$$

Il leur correspond les systèmes complètement intégrables

$$\begin{aligned}
&\omega_1 = \omega_2 = \omega_{11} - \omega_{22} = \omega_{12} = \omega_{21} = 0, \\
&\omega_1 = \omega_2 = (m-1)\omega_{11} - (m+1)\omega_{22} = \omega_{12} = \omega_{21} = 0, \\
&\omega_1 = \omega_2 = \omega_{12} = \omega_{11} - \omega_{22} = \omega_{11} - m\omega_{21} = 0, \\
&\omega_1 = \omega_2 = \omega_{12} = \omega_{21} = 0, \\
&\omega_1 = \omega_2 = \omega_{12} = \omega_{11} - \omega_{22} = 0, \\
&\omega_1 = \omega_2 = \omega_{12} = (m-1)\omega_{11} - (m+1)\omega_{22} = 0, \\
&\omega_1 = \omega_2 = \omega_{12} = 0, \\
&\omega_1 = \omega_2 = \omega_{11} + \omega_{22} = 0, \\
&\omega_1 = \omega_2 = 0.
\end{aligned}$$

Si l'on cherche en particulier les groupes $\mathcal{G}$ à trois ou quatre variables en utilisant au besoin les prolongements normaux G'', G''', ... du groupe G, on trouve qu'ils sont fournis, ceux à trois variables, par les systèmes

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_{12} = 0,$$
$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_{11} + \omega_{22} = 0;$$

ceux à quatre variables par les systèmes

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_{12} = \omega_{21} = 0,$$
$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_{12} = \omega_{11} - m\,\omega_{22} = 0,$$
$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_{12} = \omega_{122} = 0.$$

En utilisant les formules données n° 41, on obtient les équations suivantes, pour les groupes à trois variables :

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} X &= f(x, y) \\ Y &= \varphi(x, y) \\ Z &= \frac{z\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y}}{z\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}} \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} x &= x_1 \\ y &= x_2 \\ z &= -\frac{y_2}{y_1} \end{aligned}\right\},$$

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} X &= f(x, y) \\ Y &= \varphi(x, y) \\ Z &= \frac{z}{\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} - \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}} \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} x &= x_1 \\ y &= x_2 \\ z &= y_1 y_4 - y_2 y_3 \end{aligned}\right\}.$$

Les groupes à quatre variables sont donnés par les équations

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} X &= f(x, y) \\ Y &= \varphi(x, y) \\ Z &= \frac{z\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y}}{z\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}} \\ T &= \frac{t\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y}}{t\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}} \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} x &= x_1 \\ y &= x_2 \\ z &= -\frac{y_2}{y_1} \\ t &= -\frac{y_4}{y_3} \end{aligned}\right\},$$

$$
\left\{
\begin{aligned}
X &= f(x, y)\\
Y &= \varphi(x, y)\\
Z &= \frac{z\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y}}{z\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}}\\
T &= t\,\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} - \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}}{\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} + z\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^{m+1}}
\end{aligned}
\right.
\qquad
\left(
\begin{aligned}
x &= x_1\\
y &= x_2\\
z &= -\frac{y_2}{y_1}\\
t &= \frac{(y_1 y_4 - y_2 y_3)^m}{y_1^{m+1}}, \quad m \neq 0\\
t &= \frac{1}{y_1} \qquad\qquad\qquad m = 0
\end{aligned}
\right),
$$

$$
\left\{
\begin{aligned}
X &= f(x, y)\\
Y &= \varphi(x, y)\\
Z &= \frac{z\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y}}{z\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}}\\
T &= \frac{\left\{
\begin{aligned}
&\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} - \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}\right)t\\
&\quad + \left(z\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\left(z^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2z\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)\\
&\quad - \left(z\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\right)\left(z^2\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + 2z\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x\,\partial y} + \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right)
\end{aligned}
\right\}}{\left(z\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^3}
\end{aligned}
\right.
\qquad
\left(
\begin{aligned}
x &= x_1\\
y &= x_2\\
z &= -\frac{y_2}{y_1}\\
t &= z_3\,\frac{(y_1 y_4 - y_2 y_3)^2}{y_1^3}
\end{aligned}
\right)
$$

Les groupes $\mathcal{G}$ qui correspondent aux systèmes

$$
\begin{gathered}
\omega_1 = \omega_2 = \omega_{11} = \omega_{12} = \omega_{21} = 0,\\
\omega_1 = \omega_2 = \omega_{11} = \omega_{12} = \omega_{22} = 0,\\
\omega_1 = \omega_2 = \omega_{12} = \omega_{21} = 0,\\
\omega_1 = \omega_2 = \omega_{12} = \omega_{11} - m\,\omega_{22} = 0,\\
\omega_1 = \omega_2 = \omega_{12} = 0,\\
\omega_1 = \omega_2 = \omega_{11} + \omega_{22} = 0
\end{gathered}
$$

ont leurs équations de définition du premier ordre.

Groupes simples et groupes composés.

62. Étant donné un groupe G, nous dirons qu'un groupe $\mathcal{G}$ est isomorphe mériédrique de G s'il est possible de trouver un groupe G_1, prolongement holoédrique de G, et un groupe $\mathcal{G}_1$, prolongement mériédrique de $\mathcal{G}$, transformant le même nombre de variables et semblables entre eux. Si l'on suppose que G a ses équations de définition du premier ordre et qu'il est réduit à ses invariants essentiels, on démontrera, comme plus haut, que le groupe $\mathcal{G}$ admet, par un changement convenable de variables, pour prolongement mériédrique l'un des prolongements normaux $G^{(\alpha)}$ de G, ou plutôt le groupe formé de $G^{(\alpha)}$ et d'un groupe transformant identiquement un certain nombre d'autres variables. La recherche des groupes isomorphes mériédriques de G se fait donc de la même manière que celle des groupes isomorphes holoédriques.

Mais, en ce qui concerne les groupes infinis, il se présente une particularité importante qui n'existe pas dans la théorie des groupes finis. Lorsqu'un groupe fini $\mathcal{G}$ est isomorphe mériédrique d'un groupe fini G, il a nécessairement moins de paramètres que G et, au contraire, s'il lui est isomorphe holoédrique, il a le même nombre de paramètres. Par conséquent, deux groupes finis isomorphes sont, soit isomorphe holoédrique, soit isomorphe mériédrique.

Au contraire, étant donné un groupe infini G, il peut se faire qu'un même groupe $\mathcal{G}$ puisse être regardé soit comme isomorphe mériédrique, soit comme isomorphe holoédrique de G. Par exemple, considérons le groupe G :

$$X = x + a,$$
$$Y = y + f(x),$$
$$Z = z + f'(x),$$

où f est une fonction arbitraire de x, f' sa dérivée. Si G_1 indique comment G transforme x et y, $\mathcal{G}$ comment G transforme x et z, on voit que G est à la fois le prolongement holoédrique de G_1 et mériédrique de $\mathcal{G}$; $\mathcal{G}$ est donc isomorphe mériédrique de G_1. Mais, d'autre part, $\mathcal{G}$ et G_1 sont *semblables* par l'échange des variables y et z; leurs équations finies ne se présentent pas sous la même forme, mais ils ont les mêmes équations de définition

$$\frac{\partial X}{\partial x} = 1, \qquad \frac{\partial X}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial Y}{\partial y} = 1.$$

Nous voyons bien, par cet exemple simple, qu'un groupe infini peut être isomorphe mériédrique à lui-même.

D'après cela, nous distinguerons l'isomorphisme mériédrique proprement dit ou *propre*, et l'isomorphisme mériédrique *impropre*. $\mathcal{G}$ sera isomorphe mériédrique *propre* de G si l'on ne peut en aucune façon le regarder comme isomorphe holoédrique de G.

63. Un groupe fini est dit *simple* lorsqu'il n'admet aucun groupe qui lui soit isomorphe mériédrique. Pour les groupes infinis, nous distinguerons les *groupes simples propres* et les *groupes simples impropres*. Les premiers sont ceux qui n'admettent aucun groupe isomorphe mériédrique propre ou impropre. Les autres sont ceux qui peuvent admettre des isomorphes mériédriques impropres, mais non des isomorphes mériédriques propres.

Par exemple, le groupe intransitif

$$X = x,$$
$$Y = y + f(x)$$

est un groupe simple impropre, car il admet des isomorphes mériédriques, mais qui peuvent aussi être regardés comme lui étant isomorphes holoédriques.

Au contraire, le groupe transitif

$$X = x + a,$$
$$Y = y + f(x)$$

n'est pas simple, car le groupe

$$X = x + a,$$

qui lui est isomorphe, ne peut en aucune façon être regardé comme lui étant isomorphe holoédrique.

Un groupe qui n'est pas simple est dit *composé*.

Dans les exemples étudiés plus haut, le groupe général à une variable, à n variables sont des groupes simples propres.

Le groupe

$$X = x,$$
$$Y = y + f(x)$$

est un groupe simple impropre; enfin les groupes

$$X = f(x), \qquad Y = \varphi(y),$$
$$X = f(x), \qquad Y = yf'^m(x) + \varphi(x)$$

sont des groupes composés.

Il est bien clair que les coefficients de structure d'un groupe permettent toujours de décider si un groupe est simple ou composé.

Le problème de la décomposition d'un groupe infini donné en une série normale de sous-groupes semble devoir présenter, d'après les particularités précédentes, de nombreuses difficultés; on peut même se demander s'il est toujours possible de trouver une décomposition en une série *finie* de sous-groupes simples, même impropres. Ce problème est, comme l'on sait, fondamental dans les applications qu'on peut faire des groupes infinis à l'intégration des systèmes d'équations aux dérivées partielles ([1]).

64. S. Lie a déterminé quatre grandes classes de groupes simples transitifs. Ce sont :

1° Le groupe général à n variables défini par les équations de structure

$$\omega'_k = \sum_i^{1,\ldots,n} \omega_i \varpi_{ki} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

2° Le groupe des transformations à n variables telles que le déterminant fonctionnel des variables transformées par rapport aux an-

([1]) E. Vessiot, *Sur l'intégration des systèmes différentiels qui admettent des groupes continus de transformations* (*Acta Math.*, t. XXVIII, 1904, p. 307-349).

ciennes soit égal à 1; il est défini par les équations de structure

$$\omega'_k = \sum_i^{1,\ldots,n} \omega_i \varpi_{ki} \qquad (k=1, 2, \ldots, n)$$

avec

$$\varpi_{11} + \varpi_{22} + \ldots + \varpi_{nn} = 0.$$

3° Le groupe à $2n$ variables défini par les équations de structure

$$\left.\begin{aligned} \omega'_{2k} &= \sum_i^{1,\ldots,2n} \omega_i \varpi_{2k-1,i} \\ \omega'_{2k-1} &= -\sum_i^{1,\ldots,2n} \omega_i \varpi_{2k,i} \end{aligned}\right\} \qquad (k=1, 2, \ldots, n)$$

avec

$$\varpi_{ij} = \varpi_{ji};$$

dans le cas de $n=1$, ce groupe se confond avec le groupe $n=2$ de la classe précédente.

4° Le groupe général des transformations de contact dans un espace à $2n+1$ dimensions, défini par les équations de structure

$$\begin{aligned} \omega'_{2k} &= \sum_i^{1,\ldots,2n+1} \omega_i \varpi_{2k-1,i} + \omega_{2k}\varpi \\ \omega'_{2k-1} &= -\sum_i^{1,\ldots,2n+1} \omega_i \varpi_{2k,i} + \omega_{2k-1}\varpi \qquad\qquad (k=1, 2, \ldots, n) \\ \omega'_{2n+1} &= \omega_1\omega_2 + \omega_3\omega_4 + \ldots + \omega_{2n-1}\omega_{2n} + 2\omega_{2n+1}\varpi \end{aligned}$$

avec

$$\varpi_{ij} = \varpi_{ji} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, 2n).$$

Les valeurs des entiers caractéristiques σ sont, pour le premier groupe,

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \ldots = \sigma_n = n;$$

pour le deuxième groupe,

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \ldots = \sigma_{n-1} = n, \qquad \sigma_n = n-1;$$

pour le troisième groupe,

$$\sigma_1 = 2n, \qquad \sigma_2 = 2n-1, \qquad \ldots, \qquad \sigma_{2n-1} = 2, \qquad \sigma_{2n} = 1;$$

enfin, pour le quatrième groupe,

$$\sigma_1 = 2n+1, \qquad \sigma_2 = 2n, \qquad \ldots, \qquad \sigma_{2n-1} = 3, \qquad \sigma_{2n} = 2, \qquad \sigma_{2n+1} = 1.$$

Le groupe linéaire adjoint au groupe G est :

Pour la première classe, le groupe linéaire et homogène général à n variables;

Pour la deuxième classe, le groupe linéaire et homogène spécial à n variables;

Pour la troisième classe, le groupe linéaire et homogène le plus général laissant invariante l'expression de Pfaff

$$u_1\,du_2 - u_2\,du_1 + u_3\,du_4 - u_4\,du_3 + \ldots + u_{2n-1}\,du_{2n} - u_{2n}\,du_{2n-1}.$$

On montre sans difficulté que, pour chacune des quatre classes, le système complètement intégrable qui définit un groupe quelconque isomorphe à G doit entraîner

$$\omega_1 = \omega_2 = \ldots = \omega_n = 0$$

pour la première et la deuxième classes,

$$\omega_1 = \omega_2 = \ldots = \omega_{2n} = 0$$

pour la troisième, et

$$\omega_1 = \omega_2 = \ldots = \omega_{2n+1} = 0$$

pour la quatrième. *Il en résulte que, non seulement tous ces groupes* G *sont simples, mais encore que tout groupe* Γ *qui leur est isomorphe résulte de leur prolongement.*

On ne connaît pas de groupe infini transitif simple qui ne rentre pas dans l'une de ces quatre grandes classes.

CHAPITRE IV.

LES GROUPES INFINIS DÉPENDANT DE FONCTIONS ARBITRAIRES D'UN ARGUMENT.

65. Nous nous proposons dans ce Chapitre d'indiquer la forme générale des covariants ω'_k pour un groupe dépendant de fonctions arbitraires d'un argument. Nous démontrerons ensuite que chacun de ces groupes, dans le cas où il est transitif, admet un groupe isomorphe à une variable. Il en résultera que les seuls groupes infinis transitifs simples dépendant de fonctions arbitraires d'un argument seront isomorphes holoédriques au groupe général à une variable.

66. Pour les groupes qui nous occupent, transitifs ou non, les entiers caractéristiques $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ sont tous nuls, sauf le premier. Par suite, si l'on désigne par $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_r$ certaines combinaisons linéaires de $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r$, on aura des formules de la forme

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned}
\Omega'_1 &= \omega_1\varpi_1 + \sum_i^{2,\ldots,r}\sum_k^{1,\ldots,\sigma} a_{1ik}\omega_i\varpi_k + \ldots,\\
\Omega'_2 &= \omega_1\varpi_2 + \sum_i^{2,\ldots,r}\sum_k^{1,\ldots,\sigma} a_{2ik}\omega_i\varpi_k + \ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\Omega'_\sigma &= \omega_1\varpi_\sigma + \sum_i^{2,\ldots,r}\sum_k^{1,\ldots,\sigma} a_{\sigma ik}\omega_i\varpi_k + \ldots,
\end{aligned}\right.$$

les termes non écrits étant bilinéaires par rapport aux ω, et les covariants $\Omega'_{\sigma+1}, \ldots, \Omega'_r$ ne dépendant pas des ϖ.

Si le système est en involution, il faut que les coefficients t_{ik} des expressions ϖ les plus générales de la forme

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{l} \varpi_1 = t_{11}\,\omega_1 + \ldots + t_{1r}\,\omega_r, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \varpi_\sigma = t_{\sigma 1}\,\omega_1 + \ldots + t_{\sigma r}\,\omega_r, \end{array}\right.$$

qui annulent les parties écrites dans les seconds membres de (1), dépendent exactement de σ arbitraires. Or ces coefficients satisfont aux équations

$$(3)\qquad \left\{\begin{array}{l} t_{1i} = \sum\limits_k^{1,\ldots,\sigma} a_{1ik}\,t_{k1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ t_{\sigma i} = \sum\limits_k^{1,\ldots,\sigma} a_{\sigma ik}\,t_{k1} \end{array}\right. \qquad (i = 2, \ldots, r),$$

et aux équations

$$(4)\qquad \sum_k (a_{\rho ik}\,t_{kj} - a_{\rho jk}\,t_{ki}) = 0 \qquad (\rho = 1, 2, \ldots, \sigma;\ i, j = 2, \ldots, r).$$

Il faut donc que les équations (4) soient identiquement vérifiées, quels que soient $t_{11}, t_{21}, \ldots, t_{\sigma 1}$ lorsqu'on y remplace les $t_{\rho i}$ par leurs valeurs tirées des équations (3). On arrive ainsi aux relations

$$(5)\qquad \sum_\lambda^{1,\ldots,\sigma} (a_{\rho i\lambda}\,a_{\lambda jk} - a_{\rho j\lambda}\,a_{\lambda ik}) = 0 \qquad (\rho, k = 1, 2, \ldots, \sigma;\ i, j = 2, \ldots, r).$$

67. Ces relations nécessaires et suffisantes vont nous permettre de mettre les équations (1) sous une forme canonique simple. Cherchons à déterminer des quantités $e_1, e_2, \ldots, e_\sigma$ telles que l'on ait, quels que soient les ϖ,

$$e_i \sum a_{12k}\varpi_k + \ldots + e_\sigma \sum a_{\sigma 2k}\varpi_k = h\,(e_1\varpi_1 + \ldots + e_\sigma\varpi_\sigma);$$

on voit que h est donné par une *équation caractéristique*

$$(6) \qquad \begin{vmatrix} a_{121}-h & a_{221} & \dots & a_{\sigma 21} \\ a_{122} & a_{222}-h & \dots & a_{\sigma 22} \\ \dots & \dots\dots & \dots & \dots \\ a_{12\sigma} & a_{22\sigma} & \dots & a_{\sigma 2\sigma}-h \end{vmatrix} = 0.$$

A une racine h_1 de cette équation caractéristique correspond au moins un système de valeurs non toutes nulles des e répondant à la question et l'on peut, par une substitution linéaire effectuée sur les Ω et les ϖ, supposer que cette solution est

$$e_1 = 1, \qquad e_2 = 0, \qquad \dots, \qquad e_\sigma = 0.$$

Le cas des racines multiples se traite sans difficulté comme dans toutes les questions analogues et l'on arrive au résultat suivant :

Si l'équation (6) admet p racines

$$h_1, \quad h_2, \quad \dots, \quad h_p$$

multiples d'ordre

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \dots, \quad \alpha_p \qquad (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_p = \sigma),$$

les équations (1) peuvent se mettre sous la forme

$$(7) \quad \begin{cases} \Omega'_1 = (\omega_1 + h_1\omega_2)\varpi_1 + \dots, \\ \Omega'_2 = (\omega_1 + h_1\omega_2)\varpi_2 + a_{221}\omega_2\varpi_1 + \dots, \\ \Omega'_3 = (\omega_1 + h_1\omega_2)\varpi_3 + a_{322}\omega_2\varpi_2 + a_{321}\omega_2\varpi_1 + \dots, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \Omega'_{\alpha_1} = (\omega_1 + h_1\omega_2)\varpi_{\alpha_1} + a_{\alpha_1,2,\alpha_1-1}\omega_2\varpi_{\alpha_1-1} + \dots + a_{\alpha_1 21}\omega_2\varpi_1 + \dots, \\ \Omega'_{\alpha_1+1} = (\omega_1 + h_2\omega_2)\varpi_{\alpha_1+1}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \end{cases}$$

où l'on n'a pas écrit les termes en $\omega_3, \dots, \omega_r$; à chaque racine multiple d'ordre α on fait ainsi correspondre α expressions ϖ et α expressions Ω.

Les formules (5) où l'on fait $\rho = 1$ et successivement $k = \alpha_1 + \alpha_2$, $\alpha_1 + \alpha_2 - 1, \dots, \alpha_1 + 1$ montrent de proche en proche que les coefficients

$$a_{1,3,\alpha_1+\alpha_2}, \quad a_{1,3,\alpha_1+\alpha_2-1}, \quad \dots, \quad a_{1,3,\alpha_1+1},$$

sont nuls; si l'on fait ensuite $\rho = 2$ en donnant à k la même succession de valeurs, on trouve que les coefficients

$$a_{2,3,\alpha_1+\alpha_2}, \quad a_{2,3,\alpha_1+\alpha_2-1}, \quad \ldots, \quad a_{2,3,\alpha_1+1}$$

sont tous nuls; et ainsi de suite. En d'autres termes, *les covariants* Ω'_1, $\Omega'_2, \ldots, \Omega'_{\alpha_1}$ *ne contiennent que* $\varpi_1, \varpi_2, \ldots, \varpi_{\alpha_1}$.

On déduit de là, sans peine, que l'équation caractéristique généralisée

$$(8) \qquad \begin{vmatrix} \sum\limits_i a_{1i1} u_i - h & \sum\limits_i a_{2i1} u_i & \ldots & \sum\limits_i a_{\sigma i1} u_i \\ \sum\limits_i a_{1i2} u_i & \sum\limits_i a_{2i2} u_i - h & \ldots & \sum\limits_i a_{\sigma i2} u_i \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \sum\limits_i a_{1i\sigma} u_i & \sum\limits_i a_{2i\sigma} u_i & \ldots & \sum\limits_i a_{\sigma i\sigma} u_i - h \end{vmatrix} = 0$$

est décomposable en p facteurs de degré $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ à coefficients entiers en $u_2, \ldots, u_r$, si elle admet pour $u_2 = 1$, $u_3 = \ldots = u_r = 0$ p racines d'ordre $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$. Autrement dit, *l'équation caractéristique* (8) *est décomposable en un produit de facteurs linéaires en* h, $u_1, \ldots, u_p$.

Supposons encore que, pour $u_2, u_3, \ldots, u_r$ arbitraires, il y ait p facteurs linéaires élevés respectivement aux puissances $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$. Alors les formules (1) peuvent se mettre sous la forme

$$(9) \qquad \begin{cases} \Omega'_1 = (\omega_1 + h_{12}\omega_2 + \ldots + h_{1r}\omega_r)\varpi_1 + \ldots, \\ \Omega'_2 = (\omega_1 + h_{12}\omega_2 + \ldots + h_{1r}\omega_r)\varpi_2 + \sum\limits_i^{2,\ldots,r} a_{2i1}\omega_i\varpi_1 + \ldots, \\ \Omega'_3 = (\omega_1 + h_{12}\omega_2 + \ldots + h_{1r}\omega_r)\varpi_3 + \sum\limits_i^{2,\ldots,r} \sum\limits_k^{1,2} a_{3ik}\omega_i\varpi_k + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \Omega'_{\alpha_1} = (\omega_1 + h_{12}\omega_2 + \ldots + h_{1r}\omega_r)\varpi_{\alpha_1} + \sum\limits_i^{2,\ldots,r} \sum\limits_k^{1,\ldots,\alpha_1-1} a_{\alpha_1 ik}\omega_i\varpi_k + \ldots, \end{cases}$$

en n'écrivant que ce qui concerne la première racine

$$h_{12}u_2 + \ldots + h_{1r}u_r$$

de l'équation caractéristique (8). A chacune des autres racines correspondra un groupe d'équations de même nature, mais faisant intervenir d'autres expressions ϖ.

68. Pour que le système donné soit en involution, il ne reste plus qu'à exprimer que chacun des p systèmes partiels tels que (9) est en involution. Si l'on suppose, ce qui est toujours permis, que $h_{12}, \ldots, h_{1r}$ sont nuls, il ne reste qu'à vérifier les équations (5)

$$(5) \qquad \sum_{\lambda}^{1,\ldots,\alpha_1} (a_{\rho i\lambda}a_{\lambda jk} - a_{\rho j\lambda}a_{\lambda ik}) = 0 \qquad (\rho, k = 1, 2, \ldots, \alpha_1;\ i, j = 2, \ldots, r),$$

mais, dans ces équations, on a

$$a_{\rho ik} = 0 \qquad \text{pour} \qquad \rho \leqq k;$$

elles sont donc vérifiées d'elles-mêmes pour $\rho \leqq k+1$; il n'y a qu'à écrire celles pour lesquelles ρ est supérieur à $k+1$; cela suppose que α_1 est au moins égal à 3.

Par exemple, si α_1 est égal à 3, tous les systèmes possibles sont donnés par

$$\begin{array}{l|l|l|l}
\Omega'_1 = \omega_1\varpi_1 & \omega_1\varpi_1 & \omega_1\varpi_1 & \omega_1\varpi_1, \\
\Omega'_2 = \omega_1\varpi_2 & \omega_1\varpi_2 & \omega_1\varpi_2 & \omega_1\varpi_2 + \omega_2\varpi_1, \\
\Omega'_3 = \omega_1\varpi_3 & \omega_1\varpi_3 + \omega_2\varpi_1 & \omega_1\varpi_3 + \omega_2\varpi_2 + \omega_3\varpi_1 & \omega_1\varpi_3 + \omega_3\varpi_1;
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|l}
\Omega'_1 = \omega_1\varpi_1 & \omega_1\varpi_1, \\
\Omega'_2 = \omega_1\varpi_2 + \omega_2\varpi_1 & \omega_1\varpi_2 + \omega_2\varpi_1, \\
\Omega'_3 = \omega_1\varpi_3 + \omega_2\varpi_2 & \omega_1\varpi_3 + \omega_2\varpi_2 + \omega_3\varpi_1.
\end{array}$$

69. La forme générale des formules (1) étant établie, il faudra déterminer $\Omega_1, \ldots, \Omega_\sigma, \ldots, \Omega_r$ comme combinaisons linéaires

de $\omega_1, \ldots, \omega_r$ de manière que les transformations infinitésimales à σ paramètres u

$$(10)\qquad \begin{cases} \partial\Omega_1 = u_1\omega_1 + \sum a_{1ik}u_k\omega_i, \\ \partial\Omega_2 = u_2\omega_1 + \sum a_{2ik}u_k\omega_i, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \partial\Omega_\sigma = u_\sigma\omega_1 + \sum a_{\sigma ik}u_k\omega_i, \\ \partial\Omega_{\sigma+1} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots, \\ \partial\Omega_r = 0, \end{cases}$$

engendrent un groupe. Si l'on pose

$$(11)\qquad \begin{cases} \omega_1 = m_{11}\Omega_1 + m_{12}\Omega_2 + \ldots + m_{1r}\Omega_r, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \omega_r = m_{r1}\Omega_1 + m_{\sigma 2}\Omega_2 + \ldots + m_{\sigma r}\Omega_r, \end{cases}$$

les σ transformations infinitésimales de ce groupe sont, en posant

$$\begin{aligned} p_1 &= m_{11}\frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + m_{r1}\frac{\partial f}{\partial x_r}, \\ p_2 &= m_{12}\frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + m_{r2}\frac{\partial f}{\partial x_r}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ p_\sigma &= m_{1\sigma}\frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + m_{r\sigma}\frac{\partial f}{\partial x_r}, \end{aligned}$$

les suivantes

$$\begin{aligned} X_1 f &= x_1 p_1 + \sum_\rho^{1,\ldots,\sigma} \sum_i^{2,\ldots,r} a_{\rho i 1} x_i p_\rho, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ X_\sigma f &= x_1 p_\sigma + \sum_\rho^{1,\ldots,\sigma} \sum_i^{2,\ldots,r} a_{\rho i \sigma} x_i p_\rho. \end{aligned}$$

Remarquons que, si les formules (1) ont été mises sous la forme canonique (9), les transformations infinitésimales $X_1 f, \ldots, X_{\alpha_1} f$ forment par elles-mêmes un groupe, car elles ne contiennent que p_1, $p_2, \ldots, p_{\alpha_1}$ et leurs crochets doivent jouir de la même propriété. Ces conditions ne sont d'ailleurs pas suffisantes.

Prenons par exemple $\alpha_1 = 3$; on ne trouve aucune condition pour les m_{ik} dans le premier système; mais pour les autres on obtient

2^e système		:	$m_{12} = m_{13} = 0,$
3^e	»	:	$m_{13} = m_{11} + m_{33} = m_{12} + m_{23} = 0,$
4^e	»	:	$m_{12} = m_{13} = 0,$
5^e	»	:	$m_{12} = m_{13} = m_{23} = m_{11} - 2m_{22} = 0,$
6^e	»	:	$m_{12} = m_{13} = m_{23} = m_{32} = m_{33} = m_{11} - 2m_{22} = 0.$

70. Supposons que dans les formules (9) les quantités $h_{12}, \ldots, h_{1r}$ soient nulles, et écrivons α au lieu de α_1. Nous allons d'abord montrer que ω_1 ne dépend que de $\Omega_1, \ldots, \Omega_\alpha$ et de $\Omega_{\sigma+1}, \ldots, \Omega_r$, mais non des Ω qui se rapportent aux racines de l'équation caractéristique autres que la racine considérée. Soit, en effet, une autre racine d'ordre de multiplicité β à laquelle correspondent $\Omega_{\alpha+1}, \ldots, \Omega_{\alpha+\beta}$. Considérons les deux transformations infinitésimales $X_1 f$, $X_{\alpha+\beta} f$ du groupe linéaire Γ

$$X_1 f = x_1 p_1 + \sum_{\rho}^{2,\ldots,\alpha} \sum_{i}^{2,\ldots,r} a_{\rho i 1} x_i p_\rho,$$

$$X_{\alpha+\beta} f = (x_1 + h_2 x_2 + \ldots + h_r x_r)\, p_{\alpha+\beta}.$$

Comme, dans le groupe Γ, p_1 n'entre que dans $X_1 f$, et cela avec le coefficient x_1, le crochet $(X_1 X_{\alpha+\beta})$ donne

$$m_{1,\alpha+\beta} = 0;$$

le crochet $(X_1 X_{\alpha+\beta-1})$ donnera alors

$$m_{1,\alpha+\beta-1} = 0,$$

et ainsi de suite jusqu'à

$$m_{1,\alpha+1} = 0.$$

Cela prouve que ω_1 est de la forme

$$\omega_1 = m_{11}\Omega_1 + m_{12}\Omega_2 + \ldots + m_{1\alpha}\Omega_\alpha + m_{1\sigma+1}\Omega_{\sigma+1} + \ldots + m_{1r}\Omega_r.$$

En particulier, si toutes les racines sont simples, on a

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= m_{11}\,\Omega_1 + m_{1,\sigma+1}\,\Omega_{\sigma+1} + \ldots + m_{1r}\,\Omega_r,\\
\omega_2 &= m_{22}\,\Omega_2 + m_{2,\sigma+1}\,\Omega_{\sigma+1} + \ldots + m_{2r}\,\Omega_r,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\omega_\sigma &= m_{\sigma\sigma}\Omega_\sigma + m_{\sigma,\sigma+1}\Omega_{\sigma+1} + \ldots + m_{\sigma r}\Omega_r,
\end{aligned}$$

en supposant que, par une substitution linéaire, les expressions

$$\omega_1 + h_{i2}\,\omega_2 + h_{i3}\,\omega_3 + \ldots + h_{ir}\,\omega_r \qquad (i = 1, 2, \ldots, \sigma)$$

aient été transformées en

$$\omega_1, \quad \omega_2, \quad \ldots, \quad \omega_\sigma.$$

71. Nous allons maintenant montrer qu'en conservant les mêmes notations, ω'_1 *s'annule avec* ω_1.

Désignons par le symbole δ_ρ l'accroissement infiniment petit relatif à la transformation infinitésimale $X_\rho f$, ρ prenant l'une des valeurs $1, 2, \ldots, \alpha$. On a

$$(12)\qquad \delta_\rho\omega_i = m_{i\rho}\omega_1 + \sum_{\lambda}^{1,\ldots,\alpha-\rho}\ \sum_{j}^{2,\ldots,r} m_{i,\rho+\lambda}\,a_{\rho+\lambda,j,\rho}\,\omega_j \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, r \\ \rho = 1, 2, \ldots, \alpha \end{pmatrix}.$$

Exprimons que la transformation infinitésimale $X_\rho f$ laisse invariantes les équations de structure du groupe, en particulier l'équation qui donne $\Omega'_\tau(\tau < \rho)$; comme Ω_τ est invariant par $X_\rho f$, on a

$$\begin{aligned}
0 = \omega_1\,\delta_\rho\varpi_\tau + \delta_\rho\omega_1\,\varpi_\tau &+ \sum_{i}^{2,\ldots,r}\ \sum_{k}^{1,\ldots,\tau-1} a_{\tau ik}(\delta_\rho\omega_i\,\varpi_k + \omega_i\,\delta_\rho\varpi_k)\\
&+ \sum_{(ij)}^{1,\ldots,r} c_{ij\tau}(\delta_\rho\omega_i\,\omega_j + \omega_i\,\delta_\rho\omega_j),
\end{aligned}$$

$$(\tau < \rho;\ \rho = 1, 2, \ldots, \alpha),$$

les $c_{ij\tau}$ désignant les coefficients de structure non écrits dans les formules (9).

Remplaçons dans cette formule les $\delta_\rho \omega_i$ par leurs valeurs; si nous donnons successivement à τ les valeurs $1, 2, \ldots, \rho - 1$ et que nous ne considérions que les termes qui contiennent ω_1, termes dont l'ensemble doit être nul, nous obtenons

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned}
&\delta_\rho \varpi_1 + m_{1\rho}\varpi_1 + \sum_{(ij)}^{2,\ldots,r} c_{ij1}(m_{i\rho}\omega_j - m_{j\rho}\omega_i) = \mathrm{A}_{\rho 1}\omega_1,\\
&\delta_\rho \varpi_2 + m_{1\rho}\varpi_2 + \sum_{i}^{2,\ldots,r} m_{i\rho} a_{2i1}\varpi_1\\
&\qquad + \sum_{(ij)}^{2,\ldots,r} c_{ij2}(m_{i\rho}\omega_j - m_{j\rho}\omega_i) = \mathrm{A}_{\rho 1}\sum_{i}^{2,\ldots,r} a_{2i1}\omega_i + \mathrm{A}_{\rho 2}\omega_1,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\delta_\rho \varpi_\tau + m_{1\rho}\varpi_\tau + \sum_{i}^{2,\ldots,r} m_{i\rho}\sum_{\lambda}^{1,\ldots,\tau-1} a_{\tau i\lambda}\varpi_\lambda\\
&\qquad + \sum_{(ij)}^{2,\ldots,r} c_{ij\tau}(m_{i\rho}\omega_j - m_{j\rho}\omega_i) = \sum_{\lambda}^{1,\ldots,\tau-1}\mathrm{A}_{\rho\lambda}\sum_{i}^{2,\ldots,r} a_{\tau i\lambda}\omega_i + \mathrm{A}_{\rho\tau}\omega_1\\
&\qquad\qquad (\tau = 1, 2, \ldots, \rho - 1).
\end{aligned}\right.$$

Les $\mathrm{A}_{\rho\tau}$ désignent des quantités nouvelles (constantes ou fonctions des invariants de G).

Appliquons maintenant la transformation infinitésimale $\mathrm{X}_\rho f$ à l'équation qui donne Ω'_ρ. Comme $\delta_\rho \Omega_\rho$ est égal à ω_1, on obtient, *en négligeant dans le second membre les termes qui contiennent* ω_1,

$$\begin{aligned}
\omega'_1 = \delta_\rho\omega_1\,\varpi_\rho &+ \sum_{i}^{2,\ldots,r}\sum_{k}^{1,\ldots,\rho-1} a_{\rho i k}(\delta_\rho\omega_i\,\varpi_k + \omega_i\,\delta_\rho\varpi_k)\\
&+ \sum_{(ij)}^{1,\ldots,r} c_{ij\rho}(\delta_\rho\omega_i\,\omega_j + \omega_i\,\delta_\rho\omega_j),
\end{aligned}$$

ou, en remplaçant les $\delta_\rho\omega_i$ par leurs valeurs tirées de (12) et les $\delta_\rho\varpi_k$

par leurs valeurs tirées de (13),

$$
\begin{aligned}
(14)\qquad \omega'_1 = & \sum_{\lambda}^{1,\ldots,\alpha-\rho} \sum_{i}^{2,\ldots,r} m_{1,\rho+\lambda} a_{\rho+\lambda,i,\rho}\, \omega_i \varpi_\rho \\
& + \sum_{i}^{2,\ldots,r} \sum_{\lambda}^{1,\ldots,\alpha-\rho} \sum_{k}^{1,\ldots,\rho-1} \sum_{j}^{2,\ldots,r} m_{i,\rho+\lambda} a_{\rho ik} a_{\rho+\lambda,j\rho}\, \omega_j \varpi_k \\
& - \sum_{k}^{1,\ldots,\rho-1} \sum_{i}^{2,\ldots,r} m_{1k} a_{\rho ik}\, \omega_i \varpi_k \\
& - \sum_{j}^{2,\ldots,r} \sum_{k}^{1,\ldots,\rho-1} \sum_{i}^{2,\ldots,r} \sum_{\lambda}^{1,\ldots,k-1} m_{j\rho} a_{ki\lambda} a_{\rho ik}\, \omega_i \varpi_\lambda \\
& + \sum_{(ij)}^{2,\ldots,r} \sum_{h}^{2,\ldots,r} \sum_{k}^{1,\ldots,\rho-1} m_{h\rho} (a_{\rho jk} c_{hik} - a_{\rho ik} c_{hjk})\, \omega_i \omega_j \\
& + \sum_{(ij)}^{2,\ldots,r} \sum_{k}^{1,\ldots,\rho-1} \sum_{\lambda}^{1,\ldots,k-1} \Lambda_{\rho\lambda} (a_{\rho ik} a_{kj\lambda} - a_{\rho jk} a_{ki\lambda})\, \omega_i \omega_j \\
& + \sum_{(ij)}^{2,\ldots,r} \sum_{h}^{2,\ldots,r} \sum_{\lambda}^{1,\ldots,\alpha-\rho} m_{h,\rho+\lambda} (a_{\rho+\lambda,i,\rho} c_{hj\rho} - a_{\rho+\lambda,j,\rho} c_{hi\rho})\, \omega_i \omega_j .
\end{aligned}
$$

Cette formule est valable pour $\rho = 1, 2, \ldots, \alpha$. Ajoutons membre à membre les α équations (14) ainsi obtenues et tenons compte de la formule (5). On voit alors que les termes se détruisent deux à deux et il reste la relation cherchée

$$(15) \qquad \omega'_1 = 0,$$

qui est vraie, en tenant compte de $\omega_1 = 0$.

72. Il résulte de là que *si l'intégrale de l'équation*

$$\omega_1 = 0$$

n'est pas un invariant du groupe G, *il existe un groupe à une variable* *isomorphe holoédrique ou mériédrique du groupe* G. En particulier, si le groupe G est transitif simple, il est isomorphe d'un groupe à une variable. Or, le seul groupe infini à une variable est le groupe général

$$X = f(x).$$

Nous arrivons donc au théorème suivant :

Si un groupe infini transitif simple ne dépend que de fonctions arbitraires d'un argument, il est isomorphe au groupe général à une variable.

73. On tire de la formule (15) d'autres conclusions importantes. En particulier, le terme en $\omega_i \varpi_\rho$ doit être nul dans le second membre de (14); donc on a la relation

$$\sum_{\lambda}^{1,\ldots,\alpha-\rho} m_{1,\rho+\lambda} a_{\rho+\lambda,i,\rho} = 0 \qquad (\rho = 1, 2, \ldots, \alpha;\ i = 2, 3, \ldots, r).$$

Imaginons que toutes les combinaisons linéaires de $\Omega_1, \ldots, \Omega_\alpha$ dont les covariants ne dépendent que de ω_1 (du moins dans les termes qui contiennent les ϖ) se déduisent tous de $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_{\alpha'}$. Alors ω_1 ne dépend aussi que de $\Omega_1, \ldots, \Omega_{\alpha'}, \Omega_{\sigma+1}, \ldots, \Omega_r$. Les formules (13) montrent de plus que, pour $\tau \leqq \alpha'$, $\rho > \tau$, $\partial_\rho \varpi_\tau$ ne dépend que de ω_1, $\omega_2, \ldots, \omega_r$ et nullement des ϖ. On en déduit facilement que ϖ'_1, $\varpi'_2, \ldots, \varpi'_{\alpha'}$ ne contiennent pas $\varpi_{\alpha'+1}, \ldots, \varpi_\sigma$. Par suite, si l'on considère le groupe G', prolongement normal de G, et si l'on désigne par $\omega_{r+1}, \ldots, \omega_{r+\alpha'}$ les expressions invariantes qui correspondent à $\varpi_1, \ldots,$ $\varpi_{\alpha'}$, le système

$$\omega_1 = \ldots = \omega_r = \omega_{r+1} = \ldots = \omega_{r+\alpha'} = 0$$

est complètement intégrable; il définit un groupe G_1 qui admet G' pour prolongement holoédrique et l'on vérifie sans peine que ce groupe G_1 *a ses équations de définition du premier ordre*. Pour ce groupe G_1 l'équation caractéristique conserve ses racines avec leur degré de multiplicité. A la racine considérée tout à l'heure correspondent α expressions dont les covariants sont

$$\begin{aligned}
\omega'_{r+1} &= \omega_1\chi_1 + \ldots,\\
\omega'_{r+2} &= \omega_1\chi_2 + \ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\omega'_{r+\alpha'} &= \omega_1\chi_{\alpha'} + \ldots,\\
\Omega'_{\alpha'+1} &= \omega_1\varpi_{\alpha'+1} + \ldots,\\
\Omega'_{\alpha'+2} &= \omega_1\varpi_{\alpha'+2} + \sum a_{\alpha'+2,i,\alpha'+1}\,\omega_i\varpi_{\alpha'+1} + \ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

On voit donc que pour le nouveau groupe G_1 l'entier α' a augmenté d'au moins une unité. On le prolongera encore jusqu'à ce qu'il devienne égal à α.

Finalement nous arrivons à la conclusion suivante :

Tout groupe infini ne dépendant que de fonctions arbitraires d'un argument peut être prolongé holoédriquement de manière à obtenir un groupe G *ayant ses équations de définition du premier ordre et tel que l'on ait*

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned}
\Omega'_1 &= (h_{11}\omega_1 + h_{12}\omega_2 + \ldots + h_{1r}\omega_r)\varpi_1 + \ldots,\\
\Omega'_2 &= (h_{21}\omega_1 + h_{22}\omega_2 + \ldots + h_{2r}\omega_r)\varpi_2 + \ldots,\\
\Omega'_\sigma &= (h_{\sigma1}\omega_1 + h_{\sigma2}\omega_2 + \ldots + h_{\sigma r}\omega_r)\varpi_\sigma + \ldots,\\
\Omega'_{\sigma+1} &= \ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots,\\
\Omega'_{r} &= \ldots;
\end{aligned}\right.$$

les termes non écrits ne dépendant que des ω.

74. Prenons, comme cas particulier, celui où $r=\sigma$. Soit ω_1 l'expression associée à l'une des racines de l'équation caractéristique, multiple d'ordre α. Comme ici r est égal à σ, l'un des coefficients m_{11}, m_{12}, ..., $m_{1\alpha}$ est différent de *zéro* et nous pouvons, par suite, supposer

$$\omega'_1 = \omega_1\varpi_1;$$

ω'_1 devant s'annuler avec ω_1, on peut en effet choisir ϖ_1 de manière qu'il n'y ait pas d'autre terme que $\omega_1\varpi_1$ dans le second membre.

Comme Ω_1 ne peut être une combinaison linéaire des expressions associées aux autres racines de l'équation caractéristique, nous supposerons $\Omega_2, \ldots, \Omega_\alpha$ respectivement égales à $\omega_2, \ldots, \omega_\alpha$:

$$\begin{aligned} \omega'_2 &= \omega_1 \varpi_2 + \ldots, \\ \omega'_3 &= \omega_1 \varpi_3 + \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \omega'_\alpha &= \omega_1 \varpi_\alpha + \ldots. \end{aligned}$$

L'expression associée à la deuxième racine de l'équation caractéristique ne peut alors être une combinaison linéaire de $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\alpha$ (n° 70); supposons donc que ce soit $\omega_{\alpha+1}$. Alors on trouve de même

$$\begin{aligned} \omega'_{\alpha+1} &= \omega_{\alpha+1} \varpi_{\alpha+1}, \\ \omega'_{\alpha+2} &= \omega_{\alpha+1} \varpi_{\alpha+2} + \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \omega'_{\alpha+\beta} &= \omega_{\alpha+1} \varpi_{\alpha+\beta} + \ldots. \end{aligned}$$

De même l'expression associée à la troisième racine ne peut être une combinaison linéaire de $\omega_1, \ldots, \omega_{\alpha+\beta}$; supposons donc que ce soit $\omega_{\alpha+\beta+1}$. On voit qu'on peut continuer ainsi de proche en proche, à chaque racine multiple d'ordre p de l'équation caractéristique correspondant p expressions de Pfaff.

Reprenons maintenant le scovariants $\omega'_2, \ldots, \omega'_\alpha$ relatifs à la première racine et soit

$$\omega'_2 = \omega_1 \varpi_2 + \sum_{(ij)}^{2, \ldots, r} c_{ij2} \omega_i \omega_j;$$

si l'on applique à cette formule la transformation infinitésimale $X_{\alpha+1} f = \omega_{\alpha+1} \dfrac{\partial f}{\partial \omega_{\alpha+1}}$, on obtient

$$o = \omega_1 \delta_{\alpha+1} \varpi_2 + \sum_{j}^{2, \ldots, r} c_{\alpha+1, j, 2} \omega_{\alpha+1} \omega_j,$$

ce qui montre que $c_{\alpha+1,j,2}$ est nul, ou que ω'_2 ne dépend pas de $\omega_{\alpha+1}$; appliquant ensuite la transformation infinitésimale $X_{\alpha+2} f$, on voit de même que ω'_2 ne dépend pas de $\omega_{\alpha+2}$ et ainsi de suite. Autrement dit $\omega'_2, \ldots, \omega'_\alpha$ ne dépendent, à part les termes en $\omega_1 \varpi_1$, que de $\omega_2, \ldots, \omega_\alpha$.

On voit alors que le groupe G se *décompose* en un certain nombre de groupes dont chacun correspond à une racine de l'équation caractéristique; les équations de structure de l'un d'entre eux sont

$$\begin{aligned}
\omega'_1 &= \omega_1 \varpi_1,\\
\omega'_2 &= \omega_1 \varpi_2 + \sum_{(ij)}^{2,\ldots,\alpha} c_{ij2}\,\omega_i\omega_j,\\
\omega'_3 &= \omega_1 \varpi_3 + \sum_{(ij)}^{2,\ldots,\alpha} c_{ij3}\,\omega_i\omega_j,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\omega'_\alpha &= \omega_1 \varpi_\alpha + \sum_{(ij)}^{2,\ldots,\alpha} c_{ij\alpha}\,\omega_i\omega_j.
\end{aligned}$$

Si maintenant l'on applique l'identité fondamentale, on trouve la condition nécessaire et suffisante suivante : *les* $(\alpha - 1)^3$ *coefficients* c_{ijk} *doivent être les coefficients de structure d'un groupe fini d'ordre* $\alpha - 1$.

On voit sans peine de plus que *les équations finies d'un tel groupe s'obtiennent en prenant les équations finies d'un groupe fini simplement transitif à* $\alpha - 1$ *paramètres*,

$$\begin{aligned}
X_1 &= f_1\;\;(x_1, \ldots, x_{\alpha-1};\, a_1, \ldots, a_{\alpha-1}),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
X_{\alpha-1} &= f_{\alpha-1}(x_1, \ldots, x_{\alpha-1};\, a_1, \ldots, a_{\alpha-1}),
\end{aligned}$$

en leur ajoutant l'équation

$$X = f(x)$$

où f *désigne une fonction* ARBITRAIRE *de* x, *et en remplaçant enfin les paramètres* a *par* $\alpha - 1$ *fonctions* ARBITRAIRES *de* x.

75. Les conclusions ne sont pas les mêmes lorsque r est supérieur à σ. Voici néanmoins des remarques importantes sur ce cas général.

I. Soit ω_1 l'expression de Pfaff associée à une racine de l'équation caractéristique. Le groupe G effectue une transformation sur l'intégrale de l'équation complètement intégrable $\omega_1 = 0$; cette transformation peut engendrer un groupe fini ou infini. On aura par suite les cas suivants :

1°
$$\omega_1' = 0;$$

2°
$$\begin{cases} \omega_1' = \omega_1\omega_2, \\ \omega_2' = 0; \end{cases}$$

3°
$$\begin{cases} \omega_1' = \omega_1\omega_2, \\ \omega_2' = \omega_1\omega_3, \\ \omega_3' = \omega_1\omega_3; \end{cases}$$

4°
$$\omega_1' = \omega_1\varpi_1;$$

5°
$$\begin{cases} \omega_1' = \omega_1\omega_2, \\ \omega_2' = \omega_1\varpi_1; \end{cases}$$

6°
$$\begin{cases} \omega_1' = \omega_1\omega_2, \\ \omega_2' = \omega_1\omega_3, \\ \omega_3' = \omega_1\varpi_1 + \omega_2\omega_3; \end{cases}$$

7°
$$\begin{cases} \omega_1' = \omega_1\omega_2, \\ \omega_2' = \omega_1\omega_3, \\ \omega_3' = \omega_1\omega_4 + \omega_2\omega_3, \\ \omega_4' = \omega_1\varpi_1 + 2\omega_2\omega_4, \end{cases}$$

et ainsi de suite. Dans les trois premiers cas G transforme l'intégrale de $\omega_1 = 0$ suivant un groupe fini, dans les autres cas suivant un groupe infini, qui est le groupe général à une variable : seulement les expressions ϖ peuvent se présenter plus ou moins loin dans le prolongement de ce groupe.

II. Considérons les h expressions de Pfaff associées aux h racines, simples ou multiples, de l'équation caractéristique. Désignons-les par $\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2, \ldots, \overline{\omega}_h$. Il se peut qu'elle soient linéairement indépendantes (c'est le cas, comme nous l'avons vu, pour $r = \sigma$). Mais il se peut aussi qu'elles soient liées par des relations linéaires. Parmi toutes ces relations considérons celles de la forme

$$A_{p_1}\overline{\omega}_{p_1} + A_{p_2}\overline{\omega}_{p_2} + \ldots + A_{p_m}\overline{\omega}_{p_m} = 0,$$

où les m coefficients A sont différents de zéro et pour lesquelles $\overline{\omega}_{p_1}$, $\overline{\omega}_{p_2}, \ldots, \overline{\omega}_{p_m}$ *ne sont liées par aucune autre relation* à coefficients non tous nuls. Cela étant, supposons que dans l'une des relations considérées entrent $\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2, \ldots, \overline{\omega}_m$; prenons alors toutes les relations dans lesquelles entrent une ou plusieurs de ces expressions et prenons toutes les autres expressions qui y figurent et ainsi de suite. Nous arriverons ainsi à un certain nombre d'expressions $\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2, \ldots, \overline{\omega}_n$; toute relation qui contient l'une de ces expressions ne contient alors aucune des expressions $\overline{\omega}_{n+1}, \ldots, \overline{\omega}_h$. Les covariants $\overline{\omega}'_1, \overline{\omega}'_2, \ldots, \overline{\omega}'_n$ ne dépendent alors d'aucune des expressions ϖ; $\overline{\omega}_m$ par exemple ne peut dépendre, en outre de $\Omega_{\sigma+1}, \ldots, \Omega_r$, que des expressions Ω correspondant à la racine $\overline{\omega}_m$; or ni $\overline{\omega}_1$, ni $\overline{\omega}_2$, ni $\overline{\omega}_{m-1}$ ne dépendent de ces dernières; donc $\overline{\omega}_m$ ne dépend que de $\Omega_{\sigma+1}, \ldots, \Omega_r$. Il en est de même de toutes les autres expressions de l'ensemble considéré $(\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2, \ldots, \overline{\omega}_n)$. L'intégrale de l'une quelconque des équations $\overline{\omega}_1 = 0, \ldots, \overline{\omega}_n = 0$ est donc transformée par un groupe fini.

76. Les considérations précédentes permettent sans peine de déterminer les groupes G correspondant à $r = 3$ ayant leurs équations de structure de la forme (16). Voici le Tableau de ces groupes, où nous n'écrirons que les groupes qui ne sont les prolongements d'aucun groupe de même nature correspondant à $r = 2$ ou 1, non plus que les groupes *décomposables*, c'est-à-dire résultant de la juxtaposition de deux groupes de même nature correspondant l'un à $r = 1$, l'autre à $r = 2$.

I. Groupes transitifs.

1° *Groupes dépendant de trois fonctions arbitraires d'un argument.*

	Équations de structure.	Équations finies.
(1)	$\begin{cases} \omega'_1 = \omega_1 \varpi_1, \\ \omega'_2 = \omega_1 \varpi_2, \\ \omega'_3 = \omega_1 \varpi_3 + \omega_2 \omega_3; \end{cases}$	$\begin{aligned} X &= f(x), \\ Y &= y\,\varphi(x), \\ Z &= z\,\varphi(x) + \psi(x); \end{aligned}$
(2)	$\begin{cases} \omega'_1 = \omega_1 \varpi_1, \\ \omega'_2 = \omega_1 \varpi_2, \\ \omega'_3 = \omega_1 \varpi_3; \end{cases}$	$\begin{aligned} X &= f(x), \\ Y &= y + \varphi(x), \\ Z &= z + \psi(x). \end{aligned}$

2° *Groupes dépendant de deux fonctions arbitraires d'un argument.*

	Équations de structure.	Équations finies.
(3)	$\begin{cases} \omega'_1 = \omega_1 \varpi_1, \\ \omega'_2 = \omega_1 \varpi_2 + \omega_2 \omega_3, \\ \omega'_3 = 0; \end{cases}$	$\begin{aligned} X &= f(x), \\ Y &= ay, \\ Z &= az + \varphi(x); \end{aligned}$
(4)	$\begin{cases} \omega'_1 = \omega_1 \omega_2, \\ \omega'_2 = \omega_1 \varpi_1, \\ \omega'_3 = \omega_1 \varpi_2 + m \omega_2 \omega_3; \end{cases}$	$\begin{aligned} X &= f(x), \\ Y &= y f'(x), \\ Z &= z + y^m \varphi(x); \end{aligned}$
(5)	$\begin{cases} \omega'_1 = 0, \\ \omega'_2 = \omega_1 \varpi_1, \\ \omega'_3 = \omega_1 \varpi_2 + \omega_2 \omega_3; \end{cases}$	$\begin{aligned} X &= x + a, \\ Y &= y f(x), \\ Z &= z f(x) + \varphi(x); \end{aligned}$
(6)	$\begin{cases} \omega'_1 = 0, \\ \omega'_2 = \omega_1 \varpi_1, \\ \omega'_3 = \omega_1 \varpi_2; \end{cases}$	$\begin{aligned} X &= x + a, \\ Y &= y + f(x), \\ Z &= z + \varphi(x). \end{aligned}$

3° *Groupes dépendant d'une fonction arbitraire d'un argument.*

(7)	$\begin{cases} \omega'_1 = 0, \\ \omega'_2 = \omega_1 \varpi + \omega_2 \omega_3, \\ \omega'_3 = \omega_1 \omega_3; \end{cases}$	$\begin{aligned} X &= ax, \\ Y &= y + f(x) e^{-\frac{z}{x}}, \\ Z &= az + b; \end{aligned}$
(8)	$\begin{cases} \omega'_1 = 0, \\ \omega'_2 = \omega_1 \varpi, \\ \omega'_3 = \omega_1 \omega_3; \end{cases}$	$\begin{aligned} X &= ax, \\ Y &= y + f(x), \\ Z &= az + b; \end{aligned}$
(9)	$\begin{cases} \omega'_1 = 0, \\ \omega'_2 = \omega_1 \varpi + \omega_2 \omega_3, \\ \omega'_3 = 0; \end{cases}$	$\begin{aligned} X &= ax, \\ Y &= by + f(x), \\ Z &= bz; \end{aligned}$
(10)	$\begin{cases} \omega'_1 = \omega_1 \omega_2, \\ \omega'_2 = 0, \\ \omega'_3 = \omega_1 \varpi - m \omega_2 \omega_3; \end{cases}$	$\begin{aligned} X &= ax + b, \\ Y &= ay, \\ Z &= a^m z + f(x). \end{aligned}$

II. Groupes intransitifs.

1° *Groupes dépendant de deux fonctions arbitraires d'un argument.*

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \omega'_1 &= 0, \\ \omega'_2 &= \omega_1\varpi_1, \\ \omega'_3 &= \omega_1\varpi_2 + \omega_2\omega_3; \end{aligned}\right. \qquad \begin{aligned} X &= x, \\ Y &= y f(x), \\ Z &= z f(x) + \varphi(x); \end{aligned}$$

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} \omega'_1 &= 0, \\ \omega'_2 &= \omega_1\varpi_1, \\ \omega'_3 &= \omega_1\varpi_2; \end{aligned}\right. \qquad \begin{aligned} X &= x, \\ Y &= y + f(x), \\ Z &= z + \varphi(x). \end{aligned}$$

2° *Groupes dépendant d'une fonction arbitraire d'un argument.*

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} \omega'_1 &= 0, \\ \omega'_2 &= \omega_1\varpi + \omega_2\omega_3, \\ \omega'_3 &= 0; \end{aligned}\right. \qquad \begin{aligned} X &= x, \\ Y &= ay + f(x), \\ Z &= az; \end{aligned}$$

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} \omega'_1 &= 0, \\ \omega'_2 &= \omega_1\varpi + x\omega_2\omega_3, \\ \omega'_3 &= 0; \end{aligned}\right. \qquad \begin{aligned} X &= x, \\ Y &= ay, \\ Z &= a^x z + f(x). \end{aligned}$$

77. La détermination des groupes qui correspondent à $r = 4$ n'offre pas de plus grandes difficultés. Comme il serait trop long de les écrire tous, nous nous contenterons d'indiquer ceux qui dépendent de quatre ou de trois fonctions arbitraires d'un argument.

Si le groupe G dépend de quatre fonctions arbitraires d'un argument et est *indécomposable,* l'équation caractéristique a une racine quadruple. On obtiendra tous ces groupes, comme il a été dit plus haut, en prenant tous les groupes simplement transitifs à trois variables y, z, t, ajoutant l'équation

$$X = f(x),$$

et remplaçant les trois paramètres par des fonctions arbitraires de x.

Si le groupe dépend de trois fonctions arbitraires d'un argument, il y a un cas particulier où l'on se ramène également à la détermination de groupes finis, c'est celui où l'équation caractéristique a une racine triple et où l'on a $\omega'_1 = 0$, ω_1 désignant l'expression associée à cette racine. Alors il suffit de prendre un groupe fini g simplement transitif à trois variables y, z, t, d'y ajouter l'équation

$$X = x + a,$$

et de remplacer les trois paramètres par des fonctions arbitraires de x. Si le groupe G est intransitif, x est son invariant; si la structure du groupe g dépend de paramètres essentiels, on pourra prendre pour ces paramètres des fonctions données, quelconques d'ailleurs, de x.

Voici quels sont, en dehors de ces deux cas, les groupes cherchés :

	Équations de structure.	Équations finies.
(1)	$\begin{cases} \omega'_1 = \omega_1 \varpi_1, \\ \omega'_2 = \omega_1 \varpi_2 + \omega_2 \omega_4, \\ \omega'_3 = \omega_1 \varpi_3 + m\, \omega_3 \omega_4, \\ \omega'_4 = 0; \end{cases}$	$\begin{aligned} X &= f(x), \\ Y &= ay + \varphi(x), \\ Z &= a^m z + \psi(x), \\ T &= at; \end{aligned}$
(2)	$\begin{cases} \omega'_1 = \omega_1 \varpi_1, \\ \omega'_2 = \omega_1 \varpi_2 + \omega_2 \omega_4, \\ \omega'_3 = \omega_1 \varpi_3 + (\omega_3 + \omega_2)\, \omega_4, \\ \omega'_4 = 0; \end{cases}$	$\begin{aligned} X &= f(x), \\ Y &= ay + \varphi(x), \\ Z &= az + \varphi(x) \log t + \psi(x), \\ T &= at; \end{aligned}$
(3)	$\begin{cases} \omega'_1 = \omega_1 \varpi_1, \\ \omega'_2 = \omega_1 \varpi_2, \\ \omega'_3 = \omega_1 \varpi_3 + \omega_2 \omega_4, \\ \omega'_4 = 0; \end{cases}$	$\begin{aligned} X &= f(x), \\ Y &= y + \varphi(x), \\ Z &= z + t\, \varphi(x) + \psi(x), \\ T &= t + a; \end{aligned}$
(4)	$\begin{cases} \omega'_1 = \omega_1 \omega_2, \\ \omega'_2 = \omega_1 \varpi_1, \\ \omega'_3 = \omega_1 \varpi_2 + m\, \omega_2 \omega_3, \\ \omega'_4 = \omega_1 \varpi_3 + n\, \omega_2 \omega_4; \end{cases}$	$\begin{aligned} X &= f(x), \\ Y &= \frac{y}{f'(x)}, \\ Z &= \frac{z}{f'^m(x)} + \varphi(x), \\ T &= \frac{t}{f'^n(x)} + \psi(x); \end{aligned}$

	Équations de structure.	Équations finies.
(5)	$\omega'_1 = \omega_1 \omega_2,$	$X = f(x),$
	$\omega'_2 = \omega_1 \varpi_1,$	$Y = \dfrac{y}{f'(x)},$
	$\omega'_3 = \omega_1 \varpi_2 + m \omega_2 \omega_3,$	$Z = \dfrac{z}{f'^m(x)} + \varphi(x),$
	$\omega'_4 = \omega_1 \varpi_3 + m \omega_2 \omega_4 + \omega_2 \omega_3;$	$T = \dfrac{t - z \log f'(x)}{f'^m(x)} + \psi(x);$
(6)	$\omega'_1 = \omega_1 \varpi_1,$	$X = f(x),$
	$\omega'_2 = \omega_1 \varpi_2 + \omega_2 \omega_3 + \omega_3 \omega_4,$	$Y = ay + \varphi(x) + \psi(z),$
	$\omega'_3 = 0,$	$Z = az,$
	$\omega'_4 = \omega_3 \varpi_3;$	$T = at + \psi'(z);$
(7)	$\omega'_1 = \omega_1 \varpi_1,$	$X = f(x),$
	$\omega'_2 = \omega_1 \varpi_2 + \omega_2 \omega_3,$	$Y = ay + \varphi(x),$
	$\omega'_3 = 0,$	$Z = az,$
	$\omega'_4 = \omega_3 \varpi_3;$	$T = t + \psi(z);$
(8)	$\omega'_1 = \omega_1 \varpi_1,$	$X = f(x),$
	$\omega'_2 = \omega_1 \varpi_2 + \omega_3 \omega_4,$	$Y = y + \varphi(x) + \psi(z),$
	$\omega'_3 = 0,$	$Z = z + a,$
	$\omega'_4 = \omega_3 \varpi_3;$	$T = t + \psi'(z).$

Enfin il y a un groupe intransitif représenté par les mêmes formules de structure que le dernier des groupes écrits, z étant l'invariant.

78. La forme (16) des formules de structure est très commode pour la recherche des groupes isomorphes au groupe donné G. On démontre en effet sans difficulté que pour tout groupe $\mathcal{G}$ admettant l'un des prolongements normaux de G pour prolongement holoédrique et isomorphe holoédrique à G, les intégrales des équations

$$h_{i1}\omega_1 + h_{i2}\omega_2 + \ldots + h_{i\sigma}\omega_\sigma = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, \sigma)$$

sont toutes transformées par $\mathcal{G}$. Par suite, si l'on prend dans les équations du système complet qui définit les variables transformées par $\mathcal{G}$

toutes celles dont les premiers membres se déduisent des expressions invariantes par G ou l'un de ses prolongements normaux, elles forment un système complet.

On peut démontrer aussi que les σ expressions associées aux σ racines de l'équation caractéristique sont *invariantes*, c'est-à-dire sont les mêmes pour tout groupe isomorphe à G et ayant ses équations de structure de la forme (16).