R. ALEZAIS

Sur la réduction d'un système de substitutions linéaires d'ordre *k*

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 21 (1904), p. 269-295
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1904_3_21__269_0>

SUR LA RÉDUCTION

D'UN

SYSTÈME DE SUBSTITUTIONS LINÉAIRES D'ORDRE k,

PAR M. R. ALEZAIS.

1. Dans un article précédent de ce journal, paru en 1902, j'ai résumé les parties de ma thèse où je me suis occupé d'une classe de fonctions hyperfuchsiennes et de leur groupe de substitutions. Ces substitutions, que je suppose prises sous forme homogène, ont pour coefficients des entiers complexes de la forme $a + b\lambda \left(\lambda = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)$; u, v, w étant les variables et u_1, v_1, w_1 leurs conjuguées, elles transforment en elle-même la forme quadratique

$$F = uu_1 + vw_1 + v_1 w. \tag{1}$$

Je vais considérer maintenant les substitutions à coefficients de même espèce, qui reproduisent cette forme multipliée par un entier réel k.

2. On dit que deux substitutions U et V d'ordre k sont équivalentes, s'il existe une substitution T d'ordre 1 telle que l'on ait

$$TU = V. \tag{2}$$

Cette définition a été introduite par M. Hermite dans ses travaux célèbres sur la transformation des fonctions abéliennes (*Comptes rendus*, 1855) et il a montré l'importance que présente, au point de vue de la théorie des fonctions, le nombre des substitutions non équivalentes. M. Picard a appliqué ces mêmes recherches à la théorie des fonctions hyperfuchsiennes qu'il venait de découvrir (*Comptes rendus*, 1882), et, par analogie, il est facile de prévoir qu'elles sont appelées à jouer un rôle également important dans cette nouvelle étude.

Soient en particulier $J_1(u, v, w)$, $J_2(u, v, w)$ deux fonctions hyperfuchsiennes admettant pour groupe de substitutions celui des substitutions semblables de F, et soit

$$J_3(u, v, w) = J_1\{U(u, v, w)\},$$

ce que l'on obtient en effectuant sur u, v, w dans J_1 la substitution U d'ordre k; il existe, d'après un théorème de M. Picard, une relation algébrique entre les trois fonctions J_1, J_2, J_3, soit

$$\Phi[J_1(u, v, w), J_2(u, v, w), J_3(u, v, w)] = 0. \tag{3}$$

Effectuons sur u, v, w une substitution quelconque T d'ordre 1; J_1 et J_2 ne changeront pas; le degré de l'équation (3) en J_3 sera égal au nombre des valeurs différentes que prendra J_3; or J_3 est devenu

$$J_3\{T(u, v, w)\} = J_1\{UT(u, v, w)\} = J_1\{U'(u, v, w)\}$$

où U' est une substitution d'ordre k.

Donnons à T deux déterminations différentes T_1 et T_2, et soient

$$J'_3 = J_3\{T_1(u, v, w)\} = J_1\{UT_1(u, v, w)\} = J_1\{U'_1(u, v, w)\} = J_1(U', V', W'),$$
$$J''_3 = J_3\{T_2(u, v, w)\} = J_1\{UT_2(u, v, w)\} = J_1\{U'_2(u, v, w)\} = J_1(U'', V'', W'').$$

Pour que l'on puisse avoir $J'_3 = J''_3$, il faut que les arguments U', V', W' et U'', V'', W'' se déduisent l'un de l'autre par une substitution du groupe de J_1, c'est-à-dire que l'on ait

$$T'U'_1 = U'_2,$$

T' étant une substitution d'ordre 1; cette condition est d'ailleurs suffisante, car, si elle est réalisée, on a

$$J''_3 = J_1\{T'U'_1(u, v, w)\} = J_1\{U'_1(u, v, w)\} = J'_3.$$

Si donc T parcourt toutes les substitutions d'ordre 1, J_3 prendra au plus autant de valeurs qu'il y a d'unités dans un système complet de substitutions non équivalentes d'ordre k. Le nombre N des substitutions d'un tel système fournit donc une limite supérieure du degré en J_3 de l'équation (3). Mais, de plus, on peut montrer que N est ce degré lui-même; il suffit pour cela d'établir que toute substitution k est équivalente à une substitution de la forme UT ou, en d'autres termes, que toute substitution d'ordre k est de la forme T'UT, U étant une substitution particulière d'ordre k, et T et T' étant des substitutions d'ordre 1; or, nous vérifierons plus loin qu'il en est bien ainsi pour toutes les valeurs considérées de k [1].

3. Je suppose les substitutions sous forme homogène et je les écris

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} u' &= A_3 w + B_3 v + C_3 u,\\ v' &= A_2 w + B_2 v + C_2 u,\\ w' &= A_1 w + B_1 v + C_1 u,\end{aligned}\right.$$

ou encore

$$U = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1\\ A_2 & B_2 & C_2\\ A_3 & B_3 & C_3 \end{bmatrix}.$$

En représentant les quantités conjuguées des A, B, C par les lettres grecques correspondantes, la substitution inverse de (4) est

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} u &= \frac{1}{k}(\gamma_2 w' + \gamma_1 v' + \gamma_3 u'),\\ v &= \frac{1}{k}(\alpha_2 w' + \alpha_1 v' + \alpha_3 u'),\\ w &= \frac{1}{k}(\beta_2 w' + \beta_1 v' + \beta_3 u').\end{aligned}\right.$$

---

[1] On pourrait raisonner de la manière suivante : Reprenons les fonctions θ construites par M. Picard et étudiées dans les autres parties de ma thèse; à toute substitution d'ordre k effectuée sur u, v, w correspond pour ces fonctions une transformation d'ordre k; on sait que, si U est une transformation particulière d'ordre k et U' une transformation quelconque du même ordre, on peut toujours trouver deux transformations du premier ordre T et T' telles que l'on ait

$$U' = T'UT;$$

il en est donc de même des substitutions. Le raisonnement ne vaudrait pas, parce que, à toute transformation du premier ordre, ne correspond pas nécessairement une substitution transformant F en elle-même.

En exprimant que (4) multiplie la forme F par k et que (5) la multiplie par $\frac{1}{k}$, on est conduit aux deux systèmes suivants de conditions dont il est facile de vérifier l'équivalence

$$(6)\quad \begin{cases} A_1\beta_2 + A_2\beta_1 + A_3\beta_3 = k, \\ C_1\gamma_2 + C_2\gamma_1 + C_3\gamma_3 = k, \\ A_1\alpha_2 + A_2\alpha_1 + A_3\alpha_3 = 0, \\ B_1\beta_2 + B_2\beta_1 + B_3\beta_3 = 0, \\ C_1\alpha_2 + C_2\alpha_1 + C_3\alpha_3 = 0, \\ C_1\beta_2 + C_2\beta_1 + C_3\beta_3 = 0. \end{cases}$$

$$(6')\quad \begin{cases} A_1\beta_2 + B_1\alpha_2 + C_1\gamma_2 = k, \\ A_3\beta_3 + B_3\alpha_3 + C_3\gamma_3 = k, \\ A_1\beta_1 + B_1\alpha_1 + C_1\gamma_1 = 0, \\ A_2\beta_2 + B_2\alpha_2 + C_2\gamma_2 = 0, \\ A_1\beta_3 + B_1\alpha_3 + C_1\gamma_3 = 0, \\ A_2\beta_3 + B_2\alpha_3 + C_2\gamma_3 = 0. \end{cases}$$

Il résulte de ces équations

$$(7)\quad \frac{C_1}{\alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1} = \frac{C_2}{\alpha_3\beta_2 - \alpha_2\beta_3} = \frac{C_3}{\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2} = s,$$

s étant la valeur commune des trois rapports. Et de plus, σ désignant la quantité conjuguée de s, on trouve

$$(8)\quad s\sigma = \frac{1}{k},$$

d'où il suit que k est un entier susceptible d'être mis sous la forme

$$k = (a + b\lambda)(a + b\lambda^2) = a^2 - ab + b^2,$$

c'est-à-dire un entier de la forme $3m + 1$ ou $3(3m + 1)$.

Il résulte des équations (6) et (7)

$$(9)\quad \begin{cases} A_1B_3 - A_3B_1 = ks\gamma_1, & A_3B_2 - A_2B_3 = ks\gamma_2, & A_2B_1 - A_1B_2 = ks\gamma_3, \\ B_1C_3 - B_3C_1 = ks\beta_1, & B_3C_2 - B_2C_3 = ks\beta_2, & B_2C_1 - B_1C_2 = ks\beta_3, \\ A_3C_1 - A_1C_3 = ks\alpha_1, & A_2C_3 - A_3C_2 = ks\alpha_2, & A_1C_2 - A_2C_1 = ks\alpha_3. \end{cases}$$

et

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = -k^2 s. \tag{10}$$

Une des valeurs de s vérifiant l'équation (8) est évidemment

$$s = \frac{1}{a + b\rho^2},$$

ρ désignant λ ou λ^2; la valeur la plus générale de s peut s'écrire

$$s = \frac{Q}{a + b\rho^2}$$

où la quantité Q et sa conjuguée Q_1 doivent vérifier la condition

$$QQ_1 = 1.$$

Il en résulte

$$Q = \varepsilon\rho_1 \frac{L}{L_1}$$

où $\varepsilon = \pm 1$, ρ_1 est une racine cubique quelconque de l'unité, L est un entier complexe et L_1 son conjugué. Mais Δ devant être entier, L ne peut contenir d'autre facteur que $a + b\rho$ à la première ou à la seconde puissance; on a donc en définitive

$$s = \varepsilon\rho_1 \frac{(a + b\rho)^n}{(a + b\rho^2)^{n+1}} \tag{11}$$

avec $n = 0$ ou $n = 1$ [1].

---

[1] Il peut être utile de condenser les formules (9) en une seule. Supposons $n = 0$ (c'est, ainsi que nous le verrons bientôt, le seul cas important), posons

$$\begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix},$$

et soit Δ_{ij} la quantité conjuguée de D_{ij}; les formules (9) seront contenues dans formule

$$D_{\alpha\beta} D_{\gamma\delta} - D_{\gamma\beta} D_{\alpha\delta} = (-1)^{\alpha+\beta+\gamma+\delta+1} (\lambda - \lambda^2) \Delta_{\alpha+\gamma, \beta+\delta};$$

α, β, γ, δ représentent les nombres 1, 2, 3 dans un ordre quelconque; toutefois, on doit supposer $\beta < \delta$, $\alpha < \gamma$ et réduire (mod 3) les indices $\alpha + \gamma$, $\beta + \delta$ de manière à ne leur laisser qu'une des valeurs 1, 2 ou 3.

4. On voit facilement que

$$T_1^\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-\lambda)^\alpha \end{bmatrix}, \qquad \Theta^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

sont des substitutions d'ordre 1. Or on a

$$T_1^\alpha U = U',$$

si U' se déduit de U en multipliant par $(-\lambda)^\alpha$ les éléments de la troisième ligne, et l'on a

$$\Theta^3 U = U',$$

si U' se déduit de U par l'échange des deux premières lignes.

Il en résulte que, dans la recherche des substitutions non équivalentes, on peut réduire à l'unité le facteur $\varepsilon\rho_1$ de l'expression (11) et échanger les deux premières lignes.

5. Considérons maintenant les conditions générales d'équivalence. De l'équation $TU = U'$, on tire $T = U'U^{-1}$, c'est-à-dire en désignant les éléments de T par M_i, P_i, $R_i (i = 1, 2, 3)$ et ceux de U' par A'_i, B'_i, $C'_i (i = 1, 2, 3)$,

$$\begin{bmatrix} M_1 & P_1 & R_1 \\ M_2 & P_2 & R_2 \\ M_3 & P_3 & R_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A'_1 & B'_1 & C'_1 \\ A'_2 & B'_2 & C'_2 \\ A'_3 & B'_3 & C'_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\beta_2}{k} & \frac{\beta_1}{k} & \frac{\beta_3}{k} \\ \frac{\alpha_2}{k} & \frac{\alpha_1}{k} & \frac{\alpha_3}{k} \\ \frac{\gamma_2}{k} & \frac{\gamma_1}{k} & \frac{\gamma_3}{k} \end{bmatrix}$$

ou

$$(12) \left\{ \begin{array}{lll} M_1 = \frac{1}{k}(A'_1\beta_2 + B'_1\alpha_2 + C'_1\gamma_2), & P_1 = \frac{1}{k}(A'_1\beta_1 + B'_1\alpha_1 + C'_1\gamma_1), & R_1 = \frac{1}{k}(A'_1\beta_3 + B'_1\alpha_3 + C'_1\gamma_3), \\ M_2 = \frac{1}{k}(A'_2\beta_2 + B'_2\alpha_2 + C'_2\gamma_2), & P_2 = \frac{1}{k}(A'_2\beta_1 + B'_2\alpha_1 + C'_2\gamma_1), & R_2 = \frac{1}{k}(A'_2\beta_3 + B'_2\alpha_3 + C'_2\gamma_3), \\ M_3 = \frac{1}{k}(A'_3\beta_2 + B'_3\alpha_2 + C'_3\gamma_2), & P_3 = \frac{1}{k}(A'_3\beta_1 + B'_3\alpha_1 + C'_3\gamma_1), & B_3 = \frac{1}{k}(A'_3\beta_3 + B'_3\alpha_3 + C'_3\gamma_3), \end{array} \right.$$

Pour que les substitutions U et U' soient équivalentes, il faut et suffit que ces quantités soient des entiers.

6. Si, dans l'expression (11) de s, on suppose $n = 1$, il résulte des équations (9) que tous les éléments de la substitution sont multiples de $a + b\rho$. Or, considérons la substitution

$$(\zeta) \qquad \begin{bmatrix} a+b\rho & 0 & 0 \\ 0 & a+b\rho & 0 \\ 0 & 0 & a+b\rho \end{bmatrix},$$

c'est une substitution d'ordre k pour laquelle $n = 1$. Mettons-la à la place de U′ dans la relation TU = U′, les équations (12) deviendront

$$\begin{aligned}
M_1 &= \frac{\beta_2}{a+b\rho^2}, & P_1 &= \frac{\beta_1}{a+b\rho^2}, & R_1 &= \frac{\beta_3}{a+b\rho^2}, \\
M_2 &= \frac{\alpha_2}{a+b\rho^2}, & P_2 &= \frac{\alpha_1}{a+b\rho^2}, & R_2 &= \frac{\alpha_3}{a+b\rho^2}, \\
M_3 &= \frac{\gamma_2}{a+b\rho^2}, & P_3 &= \frac{\gamma_1}{a+b\rho^2}, & R_3 &= \frac{\gamma_3}{a+b\rho^2}.
\end{aligned}$$

On voit que pour qu'une substitution d'ordre k soit équivalente à (ζ), il faut et suffit que tous ses éléments soient multiples de $a + b\rho$. Ainsi toute substitution d'ordre k, pour laquelle $n = 1$, est équivalente à (ζ); cette dernière substitution perd d'ailleurs tout intérêt si l'on considère seulement les rapports $\frac{u}{w}$, $\frac{v}{w}$. Nous pouvons donc supposer désormais $n = 0$.

7. M. Picard a effectué la réduction de ces substitutions en supposant k nombre premier de la forme $3m + 1$, et il en a publié les résultats dans une Note des *Comptes rendus* (1882). Toutes les substitutions y sont ramenées à cinq Tableaux contenant, outre la quantité ρ qui peut prendre les valeurs λ et λ^2, une indéterminée assujettie à vérifier certaines congruences. En comptant le nombre des solutions de ces congruences, on arrive à trouver le nombre des substitutions non équivalentes.

8. J'ai repris dans ma thèse cette réduction; j'y ai justifié les résul-

tats de M. Picard, et j'ai montré qu'on peut aussi les présenter de la manière suivante :

Considérons le Tableau

$$(\mathrm{A})\quad \begin{bmatrix} 1+4\eta\theta+4\eta\eta_1\theta\theta_1 & -2\theta\theta_1 & -2\theta(1+2\eta_1\theta_1) \\ -2k\eta\eta_1 & k & 2k\eta_1 \\ -2(a+b\rho)\eta(1+2\eta_1\theta_1) & 2(a+b\rho)\theta_1 & (a+b\rho)(1+4\eta_1\theta_1) \end{bmatrix},$$

où η_1 et θ_1 sont les quantités conjuguées de η et θ. En premier lieu, il est facile de voir qu'il représente une substitution d'ordre k, quels que soient les entiers complexes η et θ. En second lieu, j'ai montré dans ma thèse que deux substitutions de ce Tableau, relatives à une même valeur de η et à la même détermination de ρ, sont équivalentes, non seulement si les valeurs correspondantes de θ sont congrues entre elles selon le module k, mais aussi si elles sont toutes deux multiples de $a+b\rho$; il en résulte que le nombre des substitutions non équivalentes relatives à une même valeur de η est, non pas $2k^2$, mais seulement $2(k^2-k+1)$ [1].

Ceci posé, voici les résultats auxquels je suis parvenu ; on obtient un système complet de substitutions non équivalentes d'ordre k :

---

[1] Il est facile de voir que parmi les k^2 entiers complexes formant un système complet de nombres incongrus selon le mod k, il en est k qui sont multiples de $a+b\rho$. En effet, soit un entier quelconque $\xi+\eta\rho$, pour qu'il soit multiple de $a+b\rho$, il faut et suffit qu'il existe des entiers réels x et y tels que l'on ait (mod k),

$$\xi+\eta\rho\equiv(a+b\rho)(x+y\rho)$$

ou

$$\begin{aligned} ax-by &\equiv \xi, \\ bx+(a-b)y &\equiv \eta, \end{aligned}$$

ce système entraîne le suivant :

$$\begin{aligned} a\eta-b\xi &\equiv 0 \\ b\eta+(a-b)\xi &\equiv 0 \end{aligned}\qquad (\text{mod}\, k).$$

Ce système homogène ayant son discriminant congru à 0 (mod k) équivaut à une seule congruence, par exemple $\eta\equiv\frac{b}{a}\xi$, d'où $\xi+\eta\rho=\frac{\xi}{a}(a+b\rho)$. Cette expression ne contenant qu'une indéterminée à k valeurs (mod k).

1° En faisant $\eta = 0$ dans le Tableau précédent, puis en prenant toutes les substitutions non équivalentes du Tableau (α) ainsi obtenu. D'après ce que je viens de dire, on les obtient en faisant parcourir à $\theta = m + n\lambda$ (m et n entiers réels) un système de valeurs incongrues selon le module k, mais en ne retenant qu'une seule des k valeurs qui sont multiples de $a + b\rho$, enfin en faisant successivement ρ égal à λ et à λ^2. On a ainsi $2(k^2 - k + 1)$ substitutions.

2° En intervertissant les deux premières colonnes dans le Tableau (α), puis, dans le Tableau (β) ainsi obtenu, en faisant parcourir à θ un système de valeurs multiples de $a + b\rho^2$ et incongrues selon le module $a + b\rho$ et en donnant à ρ ses deux valeurs. On a ainsi $2k$ substitutions.

3° En faisant $\eta = 1$ dans le Tableau primitif, puis dans le Tableau (γ) ainsi obtenu, en prenant θ premier avec k et tel que $1 + 2\theta$ soit multiple de $a + b\rho^2$ sans l'être de $a + b\rho$; puis en prenant θ multiple de $a + b\rho^2$ et tel que $1 + 4\theta$ le soit de $a + b\rho$; enfin en donnant toujours à ρ ses deux valeurs. On a ainsi $2(k-2) + 2 = 2k - 2$ substitutions.

4° En intervertissant les deux premières colonnes (γ), puis dans le Tableau (γ') ainsi obtenu, en prenant θ tel que $1 + 2\theta$, et que $2 + 3\theta$ soient multiples de $a + b\rho$; et en donnant à ρ ses deux valeurs. On obtient ainsi deux substitutions.

En définitive, le nombre total des substitutions d'ordre k, k étant premier et de la forme $3m + 1$, est

$$2(k^2 - k + 1 + k + k - 1 + 1) = 2(k^2 + k + 1).$$

9. Je vais développer les calculs en supposant $k = 3$; ce cas particulier présente quelque intérêt comme devant fournir pour le degré en J_3 de l'équation (3) la valeur la plus basse. La marche à suivre pour le traiter présente de grandes analogies avec celle du cas précédent. Le calcul, toutefois, diffère d'une manière assez notable en raison de la circonstance suivante : on a ici $a + b\rho = 1 + 2\lambda$, et, par suite, $a + b\rho^2 = 1 + 2\lambda^2 = -(1 + 2\lambda)$; pour établir qu'une quantité est divisible par k, il ne suffit donc plus de montrer qu'elle est divisible par $a + b\rho$ et par $a + b\rho^2$. Une autre conséquence immédiate de ce fait, est que deux substitutions qui ne diffèrent que par la détermina-

tion de ρ sont équivalentes entre elles, nous pourrons donc désormais remplacer ρ par λ.

10. Considérons les deux Tableaux suivants, qui se déduisent l'un de l'autre en échangeant les deux premières colonnes :

$$U = \begin{bmatrix} 1 + 4\eta\theta + 4\eta\eta_1\theta\theta_1 & -2\theta\theta_1 & -2\theta(1 + 2\eta_1\theta_1) \\ -6\eta\eta_1 & 3 & 6\eta_1 \\ -2(1+2\lambda)\eta(1+2\eta_1\theta_1) & 2(1+2\lambda)\theta_1 & (1+2\lambda)(1+4\eta_1\theta_1) \end{bmatrix},$$

$$V = \begin{bmatrix} -2\theta\theta_1 & 1 + 4\eta\theta + 4\eta\eta_1\theta\theta_1 & -2\theta(1 + 2\eta_1\theta_1) \\ 3 & -6\eta\eta_1 & 6\eta_1 \\ 2(1+2\lambda)\theta_1 & -2(1+2\lambda)\eta(1+2\eta_1\theta_1) & (1+2\lambda)(1+4\eta_1\theta_1) \end{bmatrix}.$$

Il est facile de voir que toutes les substitutions qu'on en déduit en prenant pour η et θ des entiers complexes quelconques de la forme $m + n\lambda$ et pour η_1, θ_1 les entiers conjugués, sont des substitutions d'ordre 3. Je vais d'abord effectuer la réduction des substitutions U et V, puis je montrerai que les substitutions quelconques d'ordre 3 sont équivalentes aux mêmes substitutions que les substitutions U et V.

11. D'une manière générale, nous avons vu que, pour déterminer si deux substitutions sont équivalentes, il faut porter leurs coefficients dans les relations (12) et chercher si les nombres M, P, R ainsi obtenus sont entiers. S'il s'agit de substitutions U ou V, on voit immédiatement que M_1, M_2, M_3, P_2, R_2, R_3 sont entiers; il suffit donc de s'occuper des trois quantités P_1, R_1 et P_3. Des deux substitutions dont je cherche l'équivalence, je suppose l'une caractérisée par η, θ, et l'autre par η', θ'. On trouve que les quantités M, P, R sont les mêmes que l'on compare deux substitutions U ou que l'on compare deux substitutions V; mais elles ont d'autres valeurs si l'on compare une substitution U et une substitution V. Je désignerai par M′, P′, R′ les quantités M, P, R relatives à ce second cas.

Posons

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned}
(P_1) &= (1 + 4\eta'\theta' + 4\eta'\eta'_1\theta'\theta'_1)\theta\theta_1 + (1 + 4\eta_1\theta_1 + 4\eta\eta_1\theta\theta_1)\theta'\theta'_1 \\
&\quad - 2(1 + 2\eta\theta)(1 + 2\eta'_1\theta'_1)\theta_1\theta', \\
(R_1) &= (1 + 4\eta'\theta' + 4\eta'\eta'_1\theta'\theta'_1)\theta + 2\eta_1(1 + 2\eta\theta)\theta'\theta'_1 \\
&\quad - (1 + 4\eta\theta)(1 + 2\eta'_1\theta'_1)\theta', \\
(P_3) &= 2\eta'(1 + 2\eta'_1\theta'_1)\theta\theta_1 + (1 + 4\eta_1\theta_1 + 4\eta\eta_1\theta\theta_1)\theta'_1 \\
&\quad - (1 + 2\eta\theta)(1 + 4\eta'_1\theta'_1)\theta_1,
\end{aligned}\right.$$

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned}
(P'_1) &= 4\theta\theta_1\theta'\theta'_1 + (1 + 4\eta_1\theta_1 + 4\eta\eta_1\theta\theta_1)(1 + 4\eta'\theta' + 4\eta'\eta'_1\theta'\theta'_1) \\
&\quad + 4(1 + 2\eta\theta)(1 + 2\eta'_1\theta'_1)\theta_1\theta', \\
(R'_1) &= 2\theta\theta'\theta'_1 + \eta_1(1 + 2\eta\theta)(1 + 4\eta'\theta' + 4\eta'\eta'_1\theta'\theta'_1) \\
&\quad + (1 + 4\eta\theta)(1 + 2\eta'_1\theta'_1)\theta', \\
(P'_3) &= 2\theta\theta_1\theta'_1 + \eta'(1 + 4\eta_1\theta_1 + 4\eta\eta_1\theta\theta_1)(1 + 2\eta'_1\theta'_1) \\
&\quad + (1 + 2\eta\theta)(1 + 4\eta'_1\theta'_1)\theta_1.
\end{aligned}\right.$$

Si l'on cherche l'équivalence de deux substitutions U ou de deux substitutions V, on trouve

$$(15)\qquad P_1 = -\frac{2}{3}(P_1), \qquad R_1 = \frac{2}{1+2\lambda}(R_1), \qquad P_3 = -\frac{2}{1+2\lambda}(P_3).$$

Si l'on cherche l'équivalence d'une substitution U et d'une substitution V, on trouve

$$(16)\qquad P'_1 = \frac{1}{3}(P'_1), \qquad R'_1 = -\frac{2}{1+2\lambda}(R'_1), \qquad P'_3 = \frac{2}{1+2\lambda}(P'_3).$$

Il est utile de remarquer que l'on a

$$(17)\qquad (P_1) = \theta_1(R_1) + (Q_1) = \theta'(P_3) + (Q_3),$$

en posant

$$(18)\qquad \left\{\begin{aligned}
(Q_1) &= (1 + 2\eta_1\theta_1)\theta'\theta'_1 - (1 + 2\eta'_1\theta'_1)\theta_1\theta', \\
(Q_3) &= (1 + 2\eta'\theta')\theta\theta_1 \quad - (1 + 2\eta\theta)\theta_1\theta',
\end{aligned}\right.$$

et, de même,

$$(19)\qquad (P'_1) = 2\theta_1(R'_1) + (Q'_1) = 2\theta'(P'_3) + (Q'_3),$$

en posant

$$(20)\quad \begin{cases} (Q'_1) = (1 + 2\eta_1\theta_1)(1 + 4\eta'\theta' + 4\eta'\eta'_1\theta'\theta'_1) + 2(1 + 2\eta'_1\theta'_1)\theta_1\theta', \\ (Q'_2) = (1 + 2\eta'\theta')(1 + 4\eta_1\theta_1 + 4\eta\eta_1\theta\theta_1) \quad + 2(1 + 2\eta\theta)\theta_1\theta'. \end{cases}$$

12. Considérons d'abord deux substitutions U ou deux substitutions V relatives à une même valeur de η.

En faisant $\eta' = \eta$ dans les formules (15), il vient

$$(P_1) = \theta\theta_1 + \theta'\theta'_1 - 2\theta_1\theta', \qquad (R_1) = \theta - \theta', \qquad (P_3) = \theta'_1 - \theta_1.$$

En portant ces valeurs dans les équations (15), on voit que R_1 et P_3 sont entiers si l'on a

$$(21)\qquad \theta - \theta' = (1 + 2\lambda)x,$$

où x est un entier complexe quelconque.

Pour que P_1 soit entier, il faut que P_1 soit multiple de 3; or, en tenant compte de (21), on a

$$(P_1) = 3xx_1 + (1 + 2\lambda)(\theta x_1 + x\theta_1).$$

Pour que (P_1) soit multiple de 3, il faut que $\theta x_1 + x\theta_1$ soit multiple de $1 + 2\lambda$; mais $\theta x_1 + x\theta_1$, qui est réel, ne peut être multiple de $1 + 2\lambda$ sans l'être de 3; il faut donc que l'on ait

$$\theta x_1 + x\theta_1 = 3\nu,$$

où ν est un entier réel. Posons

$$\theta x_1 = \varphi + \lambda\psi \qquad (\varphi \text{ et } \psi \text{ réels}),$$

nous aurons

$$\psi = 2\varphi - 3\nu,$$

d'où

$$\theta x_1 = \varphi + \lambda(2\varphi - 3\nu) = (1 + 2\lambda)[\varphi + (1 + 2\lambda)\lambda\nu].$$

Ainsi θx_1 doit être multiple de $1 + 2\lambda$; ce qui entraîne que soit θ, soit x_1 le soit aussi. Si θ est multiple de $1 + 2\lambda$, on voit facilement sur la forme primitive que, pour que (P_1) soit multiple de 3, il faut et il suffit que θ' soit aussi multiple de $1 + 2\lambda$. Pour que x_1 le soit, il faut et suffit que $\theta - \theta'$ soit multiple de 3. Ainsi pour que deux substitutions d'un Tableau U ou d'un Tableau V relatives à une même valeur de η ne soient pas équivalentes, il faut que les valeurs correspondantes de θ soient incongrues selon le module 3 et qu'elles ne soient pas toutes deux multiples de $1+2\lambda$. Il en résulte que pour chaque valeur de η le Tableau U et le Tableau V donnent chacun $3^2-(3-1)=7$ substitutions non équivalentes entre elles.

13. Faisons $\eta = 0$ dans U et V, nous aurons les deux Tableaux suivants :

$$(\alpha)\qquad \begin{bmatrix} 1 & -2\theta\theta_1 & -2\theta \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2(1+2\lambda)\theta_1 & 1+2\lambda \end{bmatrix},$$

$$(\beta)\qquad \begin{bmatrix} -2\theta\theta_1 & 1 & -2\theta \\ 3 & 0 & 0 \\ 2(1+2\lambda)\theta_1 & 0 & 1+2\lambda \end{bmatrix}.$$

Cherchons dans quel cas ces deux Tableaux sont équivalents. Pour cela, supposons que dans (β), θ soit remplacé par θ', puis faisons $\eta = \eta' = 0$ dans les relations (14) et (16); nous aurons

$$\begin{aligned} P'_1 &= \frac{1}{3}(1+4\theta_1\theta'+4\theta\theta_1\theta'\theta'_1), \\ R'_1 &= -\frac{2\theta'}{1+2\lambda}(1+2\theta\theta'_1), \\ P'_3 &= \frac{2\theta_1}{1+2\lambda}(1+2\theta\theta'_1). \end{aligned}$$

Si θ' est multiple de $1+2\lambda$, P'_1 ne peut pas être entier; si au contraire θ' est premier avec 3, on peut choisir θ de manière que $1+2\theta\theta'_1$, et, par suite, $1+2\theta_1\theta'$ soient multiples de 3 et ainsi

$$P'_1 = \frac{1}{3}[1+2\theta_1\theta'+2\theta_1\theta'(1+2\theta\theta'_1)],$$

R'_1, P'_3 sont entiers. Mais, d'après le numéro précédent, toutes les substitutions de (β) qui correspondent à θ multiple de $1+2\lambda$ sont équivalentes entre elles. Le Tableau (β) ne donne donc qu'une seule substitution non équivalente aux substitutions (α).

14. Comparons maintenant une substitution U ou V quelconque, que je supposerai caractérisée par η' et θ', aux substitutions (α) et (β), il faut pour cela faire $\eta = 0$ dans les relations (13), (20). On est amené à distinguer les cas suivants :

1° Soit θ' multiple de $1 + 2\lambda$. En prenant θ multiple de $1 + 2\lambda$, on voit que (R_1) et (P_3) sont multiples de $1 + 2\lambda$ et que (Q_1) et (Q_3) sont multiples de 3; il en résulte, d'après la formule (17), que (P_1) est aussi multiple de 3 et l'équivalence est établie.

2° Soient θ' et $1 + 2\eta'\theta'$ premiers avec $1 + 2\lambda$. En assujettissant θ à vérifier la congruence

$$(1 + 2\eta'\theta')\theta - \theta' \equiv 0 \pmod{1 + 2\lambda}, \tag{22}$$

on voit que (Q_1) et (Q_3) sont multiples de $1 + 2\lambda$. On a ensuite, en tenant compte de (22),

$$\left.\begin{aligned} (1 + 2\eta'\theta')(R_1) &\equiv 2\theta'(\eta'\theta' - \eta'_1\theta'_1) \\ (1 + 2\eta'\theta')(1 + 2\eta'_1\theta'_1)(P_3) &\equiv 2\theta'_1(\eta'\theta' - \eta'_1\theta'_1) \end{aligned}\right\} \pmod{1 + 2\lambda}.$$

Mais la différence de deux quantités conjuguées est le produit de $1 + 2\lambda$ par un entier réel; les premiers membres et par suite (R_1) et (P_3) sont donc multiples de $1 + 2\lambda$. Il reste à voir que

$$(P_1) = \theta_1(R_1) + (Q_1)$$

est multiple de 3. Écrivons

$$(1 + 2\eta'\theta')\theta - \theta' = (1 + 2\lambda)x.$$

x est de la forme

$$x = \xi + (1 + 2\eta'\theta')\varpi$$

où ξ est une détermination quelconque de x et ϖ est un entier complexe quelconque. Il en résulte

$$\frac{(1 + 2\eta'\theta')(P_1)}{1 + 2\lambda} \equiv \frac{2\theta_1\theta'(\eta'\theta' - \eta'_1\theta'_1)}{1 + 2\lambda} + \theta'(1 + 2\eta'\theta')[\xi_1 + (1 + 2\eta'_1\theta'_1)\varpi_1]$$
$$\pmod{1 + 2d}.$$

Le coefficient de ϖ_1 étant premier avec $1 + 2\lambda$, on peut profiter de l'indétermination de ϖ_1 pour rendre le second membre multiple de $1+2\lambda$ et (P_1) se trouve ainsi multiple de 3. L'équivalence est donc encore obtenue.

3° Soit $1+2\eta'\theta'$ multiple de $1+2\lambda$. Donc θ' premier à $1+2\lambda$. Je remarque d'abord que (Q_1) (avec $\eta=0$) ne peut être multiple de $1+2\lambda$. Au contraire, (Q'_1) l'est par le fait de l'hypothèse, car

$$1+4\eta'\theta'+4\eta'\eta'_1\theta'\theta'_1 = 1+2\eta'\theta'+2\eta'\theta'(1+2\eta'_1\theta'_1).$$

De plus, pour que (Q'_3) le soit, il est nécessaire de choisir θ multiple lui-même de $1+2\lambda$; θ étant ainsi choisi, (R'_1) et (P'_3) sont aussi multiples de cette même quantité, mais alors, pour que

$$(P'_1) = 2\theta_1(R'_1)+(Q'_1)$$

soit multiple de 3, il faut que (Q'_1) le soit. Or, dans (Q'_1), le terme $2(1+2\eta'_1\theta'_1)\theta_1\theta'$ l'est également, il faut donc que l'autre terme $1+4\eta'\theta'+4\eta'\eta'_1\theta'\theta'_1$ le soit. Or posons

$$1+2\eta'\theta' = (1+2\lambda)x,$$

nous aurons

$$1+4\eta'\theta'+4\eta'\eta'_1\theta'\theta'_1 = 3xx_1+(1+2\lambda)(x+x_1).$$

En raisonnant comme au n° 12, on voit que, pour que le second membre soit multiple de 3, il faut que x soit multiple de $1+2\lambda$ et par suite que $1+2\eta'\theta'$ soit multiple de 3. Cette condition est d'ailleurs suffisante.

Nous trouvons donc un cas unique où les substitutions U et V les plus générales ne se réduisent pas à (α) ou à (β); c'est celui où $1+2\eta'\theta'$ est multiple de $1+2\lambda$ sans l'être de 3.

15. Faisons $\eta=1$ dans U et V, nous aurons les tableaux suivants :

$$(\gamma)\qquad \begin{bmatrix} 1+4\theta+4\theta\theta_1 & -2\theta\theta_1 & -2\theta(1+2\theta_1) \\ -6 & 3 & 6 \\ -2(1+2\lambda)(1+2\theta_1) & 2(1+2\lambda)\theta_1 & (1+2\lambda)(1+4\theta_1) \end{bmatrix},$$

$$(\gamma')\qquad \begin{bmatrix} -2\theta\theta_1 & 1+4\theta+4\theta\theta_1 & -2\theta(1+2\theta_1) \\ 3 & -6 & 6 \\ 2(1+2\lambda)\theta_1 & -2(1+2\lambda)(1+2\theta_1) & (1+2\lambda)(1+4\theta_1) \end{bmatrix}.$$

Supposons θ remplacé par θ' dans (γ') et comparons entre elles les substitutions (γ) et (γ') en nous mettant dans le cas où elles ne se réduisent pas à (α) ou (β), c'est-à-dire en supposant $1+2\theta'$ multiple de $1+2\lambda$ et non divisible par 3. Pour cela, faisons $\eta=\eta'=1$ dans les formules (14) et (20). $1+2\theta'$ étant multiple de $1+2\lambda$, on voit qu'il en est de même de (Q'_1) et que, pour que (R'_1) le soit, il faut et il suffit que θ le soit aussi. θ étant ainsi choisi, pour que

$$(P'_1)=2\theta_1(R'_1)+(Q'_1)$$

soit multiple de 3, il faut que (Q'_1) le soit, or nous avons vu au numéro précédent que ceci exige que $1+2\theta'$ soit multiple de 3 contrairement à l'hypothèse. Ainsi dans le cas où les substitutions (γ) et (γ') ne sont pas équivalentes aux substitutions (α) ou (β), elles ne le sont pas entre elles.

16. Il s'agit maintenant, en supposant $1+2\eta'\theta'$ multiple de $1+2\lambda$ et non de 3, de comparer les substitutions caractérisées par η' et θ' aux substitutions (γ) et (γ'). Nous allons voir que la réduction réussit en portant les expressions (13), où nous aurons fait $\eta=1$, dans les équations (15); il en résultera que les substitutions U se réduisent à (γ) et les substitutions V à (γ').

Dans les hypothèses actuelles, pour que (Q_1) soit multiple de $1+2\lambda$, il faut que $1+2\theta$ le soit. θ étant choisi de manière à vérifier cette condition, on voit que (R_1), (P_3) et (Q_3) sont aussi multiples de $1+2\lambda$; il reste à rendre (P_1) multiple de 3, ou

$$\frac{(P_1)}{1+2\lambda}=\frac{\theta_1(R_1)+(Q_1)}{1+2\lambda}$$

multiple de $1+2\lambda$. Posons

$$1+2\eta'\theta'=(1+2\lambda)x, \qquad 1+2\theta=(1+2\lambda)y;$$

nous aurons

$$\frac{4(P_1)}{1+2\lambda}\equiv x+x_1-4(y+y_1)\theta'\theta'_1 \qquad (\mathrm{mod}\, 1+2\lambda).$$

Or y est de la forme

$$y = Y + 2\varpi$$

où Y est une détermination quelconque de y, et ϖ est un entier arbitraire qu'il suffit ici de supposer réel. On peut donc écrire

$$\frac{4(P_1)}{1+2\lambda} \equiv x + x_1 - 4(Y + Y_1)\theta'\theta'_1 - 16\theta'\theta'_1\varpi \pmod{1+2\lambda}.$$

Le coefficient de ϖ est premier avec 3, on peut donc choisir ϖ de manière à rendre le second membre multiple de 3.

Chacun des tableaux (γ) et (γ') fournit autant de substitutions non équivalentes entre elles ni aux substitutions (α) et (β) qu'il y a de classes de nombres incongrus (mod 3), multiples de $1 + 2\lambda$ et non de 3, c'est-à-dire $3 - 1 = 2$.

17. En joignant ce résultat à ceux que nous venons d'obtenir, on voit que le nombre des substitutions non équivalentes auxquelles se réduisent les tableaux U et V d'ordre 3 est

$$7 + 1 + 2 + 2 = 12.$$

Ces substitutions correspondent à $n = 0$ (n° 4); si l'on veut introduire celles qui correspondent à $n = 1$, il faudra ajouter l'unique substitution

$$(\zeta) \qquad \begin{bmatrix} 1+2\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1+2\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1+2\lambda \end{bmatrix}.$$

18. Avec $k = 3$, on ne peut pas remplacer (γ') par le tableau (δ) obtenu en faisant $\eta = 2$ dans U. En effet, les substitutions qui se réduisent à (γ') étant des substitutions V, il faudrait que les quantités (14), où l'on aurait fait $\eta = 2$, $\eta' = 1$, rendissent entiers les seconds membres des équations (16) et cela en supposant $1 + 2\theta'$ multiples de $1 + 2\lambda$ et non de 3.

Or $1 + 2\theta'$ étant multiple de $1 + 2\lambda$, pour que (R'_1) le soit, il faut que θ le soit aussi. D'autre part, (Q'_1) est multiple de $1 + 2\lambda$ quel que soit 0. Mais alors, pour que

$$(P'_1) = 2\theta_1(R'_1) + (Q'_1)$$

soit multiple de 3, il faut que (Q'_1) le soit, ce qui exigerait, comme au nº 14, 3º, que $1 + 2\theta'$ soit multiple de 3, contrairement à l'hypothèse.

19. Il reste à montrer que toutes les substitutions d'ordre 3 se réduisent à celles des tableaux (α), (β), (γ), (γ'), (ζ).

Considérons une substitution quelconque d'ordre 3; on peut faire sur cette substitution les remarques suivantes qui se déduisent des équations de condition écrites plus haut :

1º S'il n'existe aucune ligne du tableau des coefficients

$$\begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{bmatrix}$$

dont deux éléments soient premiers avec $1 + 2\lambda = \sqrt{-3}$, tous les éléments premiers avec $\sqrt{-3}$ appartiennent à la même colonne. C'est une conséquence des équations (9) et (11); en effet, supposons, par exemple, que A_1 et B_2 soient premiers avec $1 + 2\lambda$, le binome $A_2B_1 - A_1B_2$ étant multiple de cette quantité, il faut que A_2 et B_1 ne le soient pas, et ainsi deux des lignes ont deux éléments premiers avec $1 + 2\lambda$.

2º Si tous les A et tous les B sont multiples de $1 + 2\lambda$, il en est de même des C. En effet, les équations (6') envisagées comme congruences peuvent s'écrire $(i, j = 1, 2, 3)$

$$A_i\beta_j + B_i\alpha_j + C_i\gamma_j \equiv 0 \pmod{3}. \tag{23}$$

Si $A_i\beta_j + B_i\alpha_j$ est multiple de 3, il faut que $C_i\gamma_j$ le soit aussi et par suite que tous les C soient multiples de $1 + 2\lambda$ [1].

---

[1] Une troisième remarque qui était vérifiée avec $k = 3m + 1$ (*voir* ma Thèse, p. 83. 2º) ne l'est plus ici, un A étant premier avec $1 + 2\lambda$, les B et les C étant multiples de cette quantité, les B ne sont pas nécessairement multiples de 3; en effet, une quantité B_i et sa conjuguée β_i étant toutes deux multiples de $1 + 2\lambda$, on ne peut en conclure que B_i soit multiple de 3.

Les cas qui peuvent se présenter sont donc les suivants :

1° Deux éléments d'une même ligne sont premiers avec $1 + 2\lambda$;

2° Un des A est premier avec $1 + 2\lambda$, les B sont multiples de 3, les C sont multiples de $1 + 2\lambda$;

3° Un des B est premier avec $1 + 2\lambda$, les A sont multiples de 3, les C sont multiples de $1 + 2\lambda$;

4° Un des A est premier avec $1 + 2\lambda$, les B et les C sont multiples de cette quantité;

5° Un des B est premier avec $1 + 2\lambda$, les A et les C sont multiples de cette quantité;

6° Tous les éléments sont multiples de $1 + 2\lambda$.

20. Dans ce dernier cas, nous savons que la substitution est équivalente à (6), mais, avant d'effectuer la réduction des autres cas, je ferai encore les remarques suivantes.

21. On sait qu'une quantité de la forme $p + \lambda q$, où p et q sont des entiers réels, peut encore s'écrire

$$\tfrac{1}{2}\left[m + (m + 2n)\sqrt{-3}\right]$$

où m et n sont aussi des entiers réels. Écrivons en conséquence

$$2A_i = a_i + (a_i + 2a'_i)\sqrt{-3}, \qquad 2B_i = b_i + (b_i + 2b'_i)\sqrt{-3},$$
$$2C_i = c_i + (c_i + 2c'_i)\sqrt{-3}.$$

Les relations (23) avec $j = i$ deviennent

$$\begin{aligned}&\left[a_i + (a_i + 2a'_i)\sqrt{-3}\right]\left[b_i - (b_i + b'_i)\sqrt{-3}\right]\\ &\quad + \left[b_i + (b_i + 2b_i)\sqrt{-3}\right]\left[a_i - (a_i + 2a'_i)\sqrt{-3}\right]\\ &\quad + \left[c_i + (c_i + 2c'_i)\sqrt{-3}\right]\left[c_i - (c_i + 2c'_i)\sqrt{-3}\right] \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\, 3).\end{aligned}$$

On en tire

$$(24) \qquad c_i^2 \equiv a_i b_i \qquad (\mathrm{mod}\, 3).$$

Il résulte de cette relation que, si c_i n'est pas multiple de 3, a_i et b_i sont, ou bien tous deux congrus à 1, ou bien tous deux congrus à $-1 \pmod 3$.

22. De même, les relations (9) donnent, en séparant les parties réelles et imaginaires,

$$(25)\qquad \begin{cases} a_i b_j - a_j b_i \equiv 0 \\ b_i c_j - b_j c_i \equiv 0 \\ a_i c_j - a_j c_i \equiv 0, \end{cases} \pmod 3 \quad (i, j = 1, 2, 3,\ i \neq j),$$

et

$$(26)\qquad \begin{cases} a_1 c'_3 - c_1 a'_3 + c_3 a'_1 - a_3 c'_1 \equiv -a_1 \\ a_2 c'_3 - c_2 a'_3 + c_3 a'_2 - a_3 c'_2 \equiv a_2 \\ a_1 c'_2 - c_1 a'_2 + c_2 a'_1 - a_2 c'_1 \equiv a_3 \\ b_1 c'_3 - c_1 b'_3 + c_3 b'_1 - b_3 c'_1 \equiv b_1 \\ b_2 c'_3 - c_2 b'_3 + c_3 b'_2 - b_3 c'_2 \equiv -b_2 \\ b_1 c'_2 - c_1 b'_2 + c_2 b'_1 - b_2 c'_1 \equiv -b_3 \\ a_1 b'_3 - b_1 a'_3 + b_3 a'_1 - a_3 b'_1 \equiv c_1 \\ a_2 b'_3 - b_2 a'_3 + b_3 a'_2 - a_3 b'_2 \equiv -c_2 \\ a_1 b'_2 - b_1 a'_2 + b_2 a'_1 - a_2 b'_1 \equiv -c_3 \end{cases} \pmod 3.$$

23. Supposons que pour une valeur de l'indice on ait

$$(27)\qquad a_i \equiv b_i \equiv \varepsilon c_i \equiv \varepsilon' \pmod 3,$$

ε et ε' désignant indépendamment l'un de l'autre ± 1; il résulte des relations (25) que l'on aura pour les autres valeurs de l'indice

$$a_j \equiv b_j \equiv \varepsilon c_j \pmod 3.$$

D'autre part, les équations (6) montrent que les congruences (27) ne peuvent pas être réalisées uniquement pour l'indice 3; si donc elles sont réalisées pour une valeur de l'indice, elles le seront pour $i = 1$ ou pour $i = 2$. Mais en échangeant les deux premières lignes, ou en changeant tous les signes, on obtient des substitutions équivalentes; on peut donc toujours supposer que les hypothèses (27) sont remplacées par les suivantes:

$$(28)\qquad a_1 \equiv b_1 \equiv \varepsilon c_1 \equiv 1 \pmod 3.$$

Supposons ces dernières hypothèses réalisées, les relations (26) donnent en particulier (1[re], 3[e], 4[e] et 6[e] relations)

$$\left.\begin{array}{l} c'_3 - \varepsilon a'_3 + c_3 a'_1 - \varepsilon c_3 c'_1 \equiv -1 \\ c'_2 - \varepsilon a'_2 + c_2 a'_1 - \varepsilon c_2 c'_1 \equiv \varepsilon c_3 \\ c'_3 - \varepsilon b'_3 + c_3 b'_1 - \varepsilon c_3 c'_1 \equiv 1 \\ c'_2 - \varepsilon b'_2 + c_2 b'_1 - \varepsilon c_2 c'_1 \equiv -\varepsilon c_3 \end{array}\right\} \pmod 3.$$

On en tire facilement

$$(29)\qquad \left\{\begin{array}{l} \varepsilon c_2(a'_1 + b'_1 + \varepsilon c'_1) \equiv a'_2 + b'_2 + \varepsilon c'_2 \\ \varepsilon c_3(a'_1 + b'_1 + \varepsilon c'_1) \equiv a'_3 + b'_3 + \varepsilon c'_3 \end{array}\right. \pmod 3.$$

24. Si pour une valeur de i, b_i étant premier avec 3, a_i et c_i sont multiples de 3, les équations (25) montrent que l'on a

$$a_1 \equiv a_2 \equiv a_3 \equiv c_1 \equiv c_2 \equiv c_3 \equiv 0 \pmod 3,$$

et les trois dernières des équations (26) donnent

$$(30)\qquad b_i a'_j - b_j a'_i \equiv 0 \pmod 3 \quad (i, j = 1, 2, 3, i \neq j).$$

25. Ces préliminaires établis, revenons à la réduction proposée; et d'abord comparons la substitution la plus générale d'ordre 3 à la substitution (α); il faut pour l'équivalence que l'on ait [1]

$$\left.\begin{array}{ll} (\mathrm{R}_i) = 2\mathrm{A}_i\theta + \mathrm{C}_i \equiv 0 & (\bmod \sqrt{-3}) \\ -(\mathrm{P}_i) = 2\mathrm{A}_i\theta\theta_1 + 2\mathrm{C}_i\theta_1 - \mathrm{B}_i \equiv 0 & (\bmod 3) \end{array}\right\} (i = 1, 2, 3).$$

Supposons que, pour une valeur de i, A_i et C_i soient premiers avec $\sqrt{-3}$, alors a_i et c_i sont premiers avec 3 et, d'après (24), a_i et b_i sont congrus entre eux et à ± 1, on est donc ramené aux hypothèses (27) qui, ainsi que nous l'avons vu, peuvent être remplacées par les hypo-

(1) Ici et dans ce qui suit, je suppose que, dans les relations (12), on remplace les lettres accentuées par les éléments des Tableaux (α), (β), (γ), (γ') et que l'on supprime les accents des autres lettres. Les expressions (P_i) et (R_i) sont analogues à celles qui ont été désignées plus haut par les mêmes notations; elles sont construites de manière à vérifier, dans le cas actuel, les relations (15).

thèses (28). Soit donc

$$(31)\qquad a_1 \equiv b_1 \equiv \varepsilon c_1 \equiv 1 \pmod 3.$$

Posons

$$2\theta = t + (t + 2t')\sqrt{-3} \qquad (t \text{ et } t' \text{ réels}),$$

nous aurons

$$2(R_1) = [a_1 + (a_1 + 2a'_1)\sqrt{-3}][t + (t + 2t')\sqrt{-3}] + c_1 + (c_1 + 2c'_1)\sqrt{-3}.$$

Le second membre sera multiple de $\sqrt{-3}$, si l'on a

$$a_1 t + c_1 \equiv 0 \pmod 3,$$

c'est-à-dire

$$t \equiv -\varepsilon \pmod 3;$$

il en résulte

$$\theta\theta_1 \equiv 1 \pmod 3,$$

et l'on a

$$\begin{aligned} -4(P_1) \equiv\ & a_1 + (a_1 + 2a'_1)\sqrt{-3} \\ & - 2[c_1 + (c_1 + 2c'_1)\sqrt{-3}][\varepsilon + (-\varepsilon + 2t')\sqrt{-3}] \\ & - 2[b_1 + (b_1 + 2b'_1)\sqrt{-3}] \pmod 3 \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} -(P_1) \equiv\ & a_1 + (a_1 + 2a'_1)\sqrt{-3} \\ & + b_1 + (b_1 + 2b'_1)\sqrt{-3} + \varepsilon c_1 + \varepsilon(c_1 + 2c'_1)\sqrt{-3} \\ & + c_1(-\varepsilon + 2t')\sqrt{-3} \pmod 3. \end{aligned}$$

Pour que (P_1) soit multiple de 3, il faut et suffit que l'on ait

$$\left.\begin{aligned} & a_1 + b_1 + \varepsilon c_1 \equiv 0 \\ & c_1(-\varepsilon + 2t') \equiv a'_1 + b'_1 + \varepsilon c'_1 \end{aligned}\right\} \pmod 3.$$

Or la première de ces congruences est une conséquence immédiate des hypothèses (31) et quant à la seconde, on peut déterminer t' de manière qu'elle soit réalisée puisque c_1 est premier avec 3. Supposons t' ainsi déterminé, nous aurons

$$2\theta \equiv -\varepsilon + \varepsilon(a'_1 + b'_1 + \varepsilon c'_1)\sqrt{-3} \pmod 3.$$

Il reste à montrer que θ étant ainsi déterminée, (R_j) et (P_j) $(j=2, 3)$ jouissent des mêmes propriétés que (R_1) et (P_1).

Pour (R_j), cela résulte, comme avec $k=3m+1$, des relations

$$A_1(R_j) \equiv A_1 C_j - A_j C_1 \equiv 0 \pmod{\sqrt{-3}}.$$

Quant à (P_j), on a

$$\begin{aligned} -4(P_j) \equiv a_j &+ (a_j + 2a'_j)\sqrt{-3} \\ &+ 2\left[c_j + (c_j + 2c'_j)\sqrt{-3}\right]\left[-\varepsilon - \varepsilon(a'_1 + b'_1 + \varepsilon c'_1)\sqrt{-3}\right] \\ &- 2\left[b_j + (b_j + 2b'_j)\sqrt{-3}\right] \qquad \pmod 3. \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} -(P_j) \equiv a_j &+ b_j + \varepsilon c_j \\ &+ [a_j + b_j + \varepsilon c_j + 2a'_j + 2b'_j + 2\varepsilon c'_j - 2\varepsilon c_j(a'_1 + b'_1 + \varepsilon c'_1)]\sqrt{-3} \pmod 3. \end{aligned}$$

Pour que (P_j) soit multiple de 3, il faut et suffit que l'on ait

$$\left.\begin{aligned} a_j + b_j + \varepsilon c_j &\equiv 0 \\ \varepsilon c_j(a'_1 + b'_1 + c'_1) &\equiv a'_j + b'_j + \varepsilon c'_j \end{aligned}\right\} \pmod 3.$$

Ces deux conditions sont réalisées, la première en vertu de (31), la seconde en vertu de (29).

La substitution la plus générale d'ordre 3 est donc équivalente à (α) quand A_1 et C_1 sont premiers avec $\sqrt{-3}$. On voit, comme avec $k=3m+1$ ([1]), qu'elle est aussi équivalente à (α) si, A_1 étant premier avec $\sqrt{-3}$, tous les B sont multiples de 3 et tous les C sont multiples de $\sqrt{-3}$.

On en conclut par symétrie que si B_1 et C_1 sont premiers avec $\sqrt{-3}$, ou si B_1 étant premier avec $\sqrt{-3}$, les A sont multiples de 3 et les C sont multiples de $\sqrt{-3}$, la substitution est équivalente à (β).

26. Pour qu'une substitution se ramène à (γ), il faut qu'on puisse

---

([1]) *Voir* ma Thèse, p. 85, n° 108.

déterminer θ de manière à avoir, pour $i = 1, 2, 3$,

$$(\mathrm{R}_i) = 2(\mathrm{A}_i - 2\mathrm{B}_i + 2\mathrm{C}_i)\theta - 2\mathrm{B}_i + \mathrm{C}_i \equiv 0 \pmod{\sqrt{-3}},$$
$$-(\mathrm{P}_i) = 2(\mathrm{A}_i - 2\mathrm{B}_i + 2\mathrm{C}_i)\theta\theta_1 - 2(2\mathrm{B}_i - \mathrm{C}_i)\theta_1 - \mathrm{B}_i \equiv 0 \pmod{3}.$$

Faisons les hypothèses suivantes : pour une valeur de i, B_i est premier avec $\sqrt{-3}$ et A_i et C_i sont multiples de cette quantité et par suite, b_i est premier avec 3 et a_i et c_i sont multiples de 3; en posant, comme plus haut,

$$2\theta = t + (t + 2t')\sqrt{-3},$$

nous aurons

$$(\mathrm{R}_i) \equiv b_i(t+1) \pmod{\sqrt{-3}}.$$

Il faut donc prendre, pour que (R_i) soit multiple de $\sqrt{-3}$,

$$t \equiv -1 \pmod{3},$$

d'où

$$\theta\theta_1 \equiv 1 \pmod{3}.$$

Il en résulte

$$\begin{aligned}-2(\mathrm{P}_i) \equiv {} & a'_i\sqrt{-3} - \left[b_i + (b_i + 2b'_i)\sqrt{-3}\right] + 2c'_i\sqrt{-3} \\ & + \left\{2\left[b_i + (b_i + 2b'_i)\sqrt{-3}\right] - 2c'_i\sqrt{-3}\right\}\left[1 + (-1 + 2t')\sqrt{-3}\right] \\ & - \left[b_i + (b_i + 2b'_i)\sqrt{-3}\right] \pmod{3}.\end{aligned}$$

On trouve, en ordonnant, que la partie indépendante de $\sqrt{-3}$ est multiple de 3 et que la condition, pour que (P_i) le soit, se réduit à

$$b_i(-1 + 2t') \equiv a'_i \pmod{3}.$$

On peut déterminer t' de manière à vérifier cette congruence et l'on a alors

$$2b_i\theta \equiv -b_i + a'_i\sqrt{-3} \pmod{3}.$$

θ étant ainsi déterminé, je dis que (R_j) est multiple de $\sqrt{-3}$ et que (P_j) est multiple de 3, j représentant les deux indices autres que i. En effet, nous avons vu, (nº 24), que dans les hypothèses actuelles (c'est-à-dire b_i étant premier avec 3, a_i et c_i étant multiples de 3), a_j et c_j sont aussi multiples de 3. Il en résulte immédiatement

$$b_i(\mathrm{R}_j) \equiv 0 \pmod{\sqrt{-3}}.$$

On a ensuite

$$\begin{aligned}
-2b_i(\mathrm{P}_j) \equiv b_i \big\{ a'_j\sqrt{-3} - [b_j + (b_j + 2b'_j)\sqrt{-3}] + 2c'_j\sqrt{-3} \big\} \\
+ \big\{ 2[b_j + (b_j + 2b'_j)\sqrt{-3}] - 2c'_j\sqrt{-3} \big\} (b_i + a'_i\sqrt{-3}) \\
- b_i[b_j + (b_j + 2b'_j)\sqrt{-3}] \qquad (\mathrm{mod}\ 3).
\end{aligned}$$

La partie indépendante de $\sqrt{-3}$ est multiple de 3 et la condition pour que (P_j) le soit se réduit à

$$b_i a'_j - b_j a'_i \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ 3).$$

Or cette condition est réalisée en vertu de (30).

Ainsi, quand un des B est premier avec $\sqrt{-3}$ et que les A et les C sont multiples de cette quantité, la substitution est équivalente à (γ).

Par symétrie, quand un des A est premier avec $\sqrt{-3}$ et que les B et les C sont multiples de cette quantité, la substitution est équivalente à (γ').

27. Si l'on remarque que, en vertu de (24), A_i et B_i ne peuvent pas être premiers avec $\sqrt{-3}$ sans que C_i le soit aussi, on voit que la réduction de la substitution la plus générale d'ordre 3 se trouve effectuée dans tous les cas indiqués au n° 19 et par suite que les douze substitutions (α), (β), (γ), (γ') constituent un système complet de substitutions non équivalentes d'ordre 3.

28. J'ai dit au commencement que pour toutes les valeurs considérées de k, U étant une substitution particulière de cet ordre et U' une substitution quelconque du même ordre, on peut trouver une substitution T du premier ordre telle que U' soit équivalente à UT. Ceci résulte immédiatement de ce que le Tableau (A) (n° 8) contient des représentants de toutes les classes de substitutions non équivalentes et que la substitution (A) est égale au produit suivant :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & a + b\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 + 4\eta\theta + 4\eta\eta_1\theta\theta_1 & -2\theta\theta_1 & -2\theta(1 + 2\eta_1\theta_1) \\ -2\eta\eta_1 & 1 & 2\eta_1 \\ -2\eta(1 + 2\eta_1\theta_1) & 2\theta_1 & 1 + 4\eta_1\theta_1 \end{bmatrix}.$$

La première de ces substitutions est la substitution d'ordre k qui se déduit de (A) en y faisant $\eta = \theta = 0$; la seconde est une substitution d'ordre 1, car elle se déduit de (A) en y faisant $k = 1$.

Voici, pour $k = 3$, un système de représentants des douze classes et leurs expressions sous la forme UT en prenant pour U la substitution U_1 qui est la plus simple des substitutions d'ordre 3 et en me servant d'ailleurs des notations employées dans ma thèse et dans l'article publié dans cette revue (t. XIX, p. 289).

TABLEAU (α).

$\theta = 0$

$$U_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - \lambda^2 \end{bmatrix},$$

$\theta = 1$

$$U_2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2(\lambda - \lambda^2) & \lambda - \lambda^2 \end{bmatrix} = U_1 T_1^3 T_3'^3,$$

$= -1$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2(\lambda^2 - \lambda) & \lambda - \lambda^2 \end{bmatrix} = U_1 T_5'^3 T_1^3,$$

$\theta = \lambda$

$$U_4 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2\lambda \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2(1 - \lambda) & \lambda - \lambda^2 \end{bmatrix} = U_1 T_1^3$$

$= -\lambda$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2\lambda \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2(\lambda - 1) & \lambda - \lambda^2 \end{bmatrix} = U_1 T_5^3 T_1^3,$$

$\theta = \lambda^2$

$$U_6 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2\lambda^2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2(\lambda^2 - 1) & \lambda - \lambda^2 \end{bmatrix} = U_1 T_6^3$$

$\theta = -\lambda^2$

$$U_7 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2\lambda^2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2(1 - \lambda^2) & \lambda - \lambda^2 \end{bmatrix} = U_1 T_1^3 T_6^3.$$

TABLEAU (β).

$\theta = 0$

$$V_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - \lambda^2 \end{bmatrix} = U_1 \Theta^3.$$

TABLEAU (γ).

$\theta = \lambda$

$$U_8 = \begin{bmatrix} 5+4\lambda & -2 & 2(\lambda^2-1) \\ -6 & 3 & 6 \\ -6 & 2(1-\lambda) & 5-2\lambda \end{bmatrix} = U_1 T_1^3 T_5^3 T_1^3 T_3^3,$$

$\theta = \lambda^2$

$$U_9 = \begin{bmatrix} 5+4\lambda^2 & -2 & 2(\lambda-1) \\ -6 & 3 & 6 \\ 6 & 2(\lambda^2-1) & 2\lambda^2-5 \end{bmatrix} = U_1 T_6^3 T_3^3.$$

TABLEAU (γ').

$\theta = \lambda$

$$V_2 = \begin{bmatrix} -2 & 5+4\lambda & 2(\lambda^2-1) \\ 3 & -6 & 6 \\ 2(1-\lambda) & -6 & 5-2\lambda \end{bmatrix} = U_1 T_1^3 T_5^3 T_1^3 T_3^3 \Theta^3,$$

$\theta = \lambda^2$

$$V_3 = \begin{bmatrix} -2 & 5+4\lambda^2 & 2(\lambda-1) \\ 3 & -6 & 6 \\ 2(\lambda^2-1) & 6 & 2\lambda^2-5 \end{bmatrix} = U_1 T_6^3 T_3^3 \Theta^3.$$