ÉLIE CARTAN

Sur la structure des groupes infinis de transformation

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 21 (1904), p. 153-206
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1904_3_21__153_0>

SUR LA STRUCTURE

DES

GROUPES INFINIS DE TRANSFORMATIONS,

Par M. E. CARTAN.

Le but de ce Mémoire est de donner une base nouvelle à la théorie de la structure des groupes de transformations continus définis par des systèmes d'équations aux dérivées partielles. Tout groupe de cette nature peut être regardé comme formé des transformations les plus générales qui laissent invariantes un certain nombre d'expressions de Pfaff. J'ai exposé très brièvement, dans une Note aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (¹), comment cette propriété, jointe à la notion des covariants bilinéaires des expressions de Pfaff, conduisait, pour les groupes finis, aux constantes c_{iks} introduites par Sophus Lie et quelles modifications subit la théorie lorsqu'on passe aux groupes infinis. Je renvoie le lecteur à cette Note.

Ce Mémoire est divisé en quatre Chapitres. Le premier est consacré à la théorie des systèmes d'équations de Pfaff en involution; il sert en quelque sorte de complément à un Mémoire paru précédemment dans ces mêmes *Annales* sur l'intégration des systèmes d'équations aux différentielles totales (1901). Le Chapitre II définit tout groupe continu au moyen d'un certain nombre d'expressions de Pfaff et introduit

(¹) *Sur la structure des groupes infinis*, novembre 1902.

les constantes caractéristiques de la structure du groupe; les conditions nécessaires et suffisantes auxquelles doivent satisfaire ces constantes sont établies et démontrées. Dans le Chapitre III il est question des différents *prolongements* possibles de la structure des groupes infinis; pour cette étude, on montre que le groupe peut être défini comme l'ensemble des transformations qui établissent entre un certain nombre d'expressions de Pfaff une substitution linéaire appartenant à un groupe linéaire donné. Enfin le Chapitre IV traite des groupes infinis qui dépendent de fonctions arbitraires d'un seul argument et montre que ceux de ces groupes qui sont transitifs simples sont isomorphes au groupe général à une variable.

CHAPITRE I.

LES SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS EN INVOLUTION.

1. Étant donnée une expression de Pfaff à n variables

$$\omega_d = a_1\,dx_1 + a_2\,dx_2 + \ldots + a_n\,dx_n, \tag{1}$$

on sait qu'on peut lui adjoindre une expression covariante, bilinéaire par rapport à deux systèmes de différentielles caractérisés par les symboles d et δ :

$$\begin{aligned}\omega_{d\delta} = d\omega_\delta - \delta\omega_d &= da_1\,\delta x_1 - \delta a_1\,dx_1 + \ldots + da_n\,\delta x_n - \delta a_n\,dx_n \\ &= \sum_{(i,k)} \left(\frac{\partial a_k}{\partial x_i} - \frac{\partial a_i}{\partial x_k}\right)(dx_i\,\delta x_k - dx_k\,\delta x_i).\end{aligned} \tag{2}$$

Les coefficients du covariant bilinéaire d'une expression de Pfaff ne sont pas des fonctions arbitraires des variables. Ils satisfont à des relations fournies par les considérations suivantes :

Si l'on considère une expression différentielle bilinéaire alternée quelconque

$$(3)\qquad \Omega_{d\delta} = \sum_{(i,k)} a_{ik}(dx_i\,\delta x_k - dx_k\,\delta x_i) \qquad (a_{ik} = -a_{ki},\quad a_{ii} = 0),$$

on peut lui adjoindre une expression covariante, trilinéaire par rapport à trois systèmes de différentielles caractérisés par les symboles d, δ et D,

$$(4)\qquad \Omega_{d\delta\mathrm{D}} = d\Omega_{\delta\mathrm{D}} + \delta\Omega_{\mathrm{D}d} + \mathrm{D}\Omega_{d\delta} = \Sigma a_{ijk}\begin{vmatrix} dx_i & dx_j & dx_k \\ \delta x_i & \delta x_j & \delta x_k \\ \mathrm{D}x_i & \mathrm{D}x_j & \mathrm{D}x_k \end{vmatrix},$$

où l'on a

$$a_{ijk} = \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial a_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial a_{ki}}{\partial x_j}.$$

Si $\Omega_{d\delta}$ est le covariant bilinéaire d'une expression de Pfaff ω, on vérifie sans difficulté que $\Omega_{d\delta\mathrm{D}}$ est identiquement nul, et, réciproquement, si le covariant trilinéaire de $\Omega_{d\delta}$ est identiquement nul, on peut démontrer qu'il existe une expression de Pfaff (définie à la différentielle exacte d'une fonction arbitraire près) dont $\Omega_{d\delta}$ est le covariant bilinéaire.

L'identité exprimée par le théorème précédent est l'analogue et pour ainsi dire la dualistique de l'identité de Jacobi dans la théorie des systèmes complets. Nous en ferons un fréquent usage dans la suite en la désignant sous le nom de l'*identité fondamentale*.

2. Nous emploierons des notations symboliques destinées à simplifier les calculs. Si ω et ϖ sont deux expressions de Pfaff quelconques, nous poserons symboliquement

$$(5)\qquad \omega\varpi = \omega_d\varpi_\delta - \omega_\delta\varpi_d;$$

de même, si ω, ϖ, χ sont trois expressions de Pfaff quelconques, nous poserons

$$(6)\qquad \omega\varpi\chi = \begin{vmatrix} \omega_d & \varpi_d & \chi_d \\ \omega_\delta & \varpi_\delta & \chi_\delta \\ \omega_\mathrm{D} & \varpi_\mathrm{D} & \chi_\mathrm{D} \end{vmatrix}.$$

Avec ces notations, on a

$$\omega\varpi = -\varpi\omega, \qquad \omega\omega = 0,$$
$$\omega\varpi\chi = \varpi\chi\omega = \chi\omega\varpi = -\varpi\omega\chi = -\chi\varpi\omega = -\omega\chi\varpi.$$

Nous désignerons simplement par ω' le covariant bilinéaire d'une expression de Pfaff ω, de sorte qu'on a

$$\omega' = \sum\left(\frac{\partial a_k}{\partial x_i} - \frac{\partial a_i}{\partial x_k}\right) dx_i\, dx_k.$$

Si A désigne une fonction quelconque des x, le covariant bilinéaire de $A\omega$ est

$$dA\,\omega + A\,\omega'$$

et le covariant trilinéaire de l'expression bilinéaire $A\omega\varpi$ est

$$(7) \qquad dA\,\omega\varpi + A\,\omega'\varpi - A\,\omega\varpi'.$$

Enfin, si l'on considère n expressions de Pfaff indépendantes en $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$, soient

$$\omega_1, \quad \omega_2, \quad \ldots, \quad \omega_n,$$

toute expression de Pfaff peut se mettre sous la forme

$$a_1\omega_1 + a_2\omega_2 + \ldots + a_n\omega_n,$$

toute expression bilinéaire sous la forme

$$\sum_{(i,k)} a_{ik}\,\omega_i\,\omega_k,$$

et enfin toute expression trilinéaire sous la forme

$$\sum_{ijk} a_{ijk}\,\omega_i\,\omega_j\,\omega_k.$$

3. Étant donné un système d'équations de Pfaff, la théorie de l'existence et du degré d'indétermination des multiplicités intégrales *générales* de ce système peut se résumer ainsi qu'il suit :

Convenons d'appeler *élément linéaire* l'ensemble d'un point $(x_1,$

$x_2, \ldots, x_n$) et d'une droite (de paramètres directeurs $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$) passant par ce point, et de même *élément à p dimensions*, l'ensemble d'un point et d'une multiplicité plane à p dimensions passant par ce point. Un élément linéaire sera dit *intégral* lorsque ses coordonnées satisferont aux équations du système de Pfaff; deux éléments linéaires intégraux, issus d'un même point, seront dits *en involution* lorsque leurs coordonnées

$$dx_1, \quad \ldots, \quad dx_n \qquad \text{et} \qquad \delta x_1, \quad \ldots, \quad \delta x_n$$

annuleront tous les covariants bilinéaires des premiers membres des équations du système; enfin un élément d'ordre p sera dit *intégral* lorsque tous ses éléments linéaires seront intégraux et en involution deux à deux.

Cela étant, soit s le nombre des équations linéairement indépendantes qui expriment qu'un élément linéaire, issu d'un point *arbitraire*, est intégral (c'est le nombre des équations indépendantes du système). On a évidemment

$$s \leqq n;$$

si s est égal à n, il n y a pas d'élément linéaire intégral et le système n'admet aucune multiplicité intégrale *générale;* si s est inférieur à n, il passe par chaque point au moins un élément linéaire intégral.

Soit E un élément linéaire intégral arbitraire et soit $s+s_1$ le nombre des équations linéairement indépendantes qui expriment qu'un élément linéaire est intégral et en involution avec E; on a évidemment

$$s+s_1 \leqq n-1;$$

si $s+s_1$ est égal à $n-1$, il ne passe par E aucun élément intégral d'ordre 2 et le système n'admet que des multiplicités intégrales générales à une dimension au plus; si $s+s_1$ est inférieur à $n-1$, il passe par E au moins un élément intégral d'ordre 2.

Soit E' un élément intégral arbitraire d'ordre 2 et soit $s+s_1+s_2$ le nombre des équations linéairement indépendantes qui expriment qu'un élément linéaire est intégral et en involution avec E'; on a évidemment

$$s+s_1+s_2 \leqq n-2$$

et ainsi de suite.

Finalement on arrive à un certain entier m qui indique le nombre maximum de dimensions des multiplicités intégrales générales du système, et à $m+1$ entiers

$$s, \quad s_1, \quad s_2, \quad \ldots, \quad s_m$$

qui ne vont pas en croissant et qui indiquent le degré d'indétermination de l'intégrale générale à m dimensions; elle dépend, en effet, de

s_m	fonctions arbitraires de m	arguments,
s_{m-1}	fonctions arbitraires de $m-1$	arguments,
......	......	......,
s_1	fonctions arbitraires de 1	argument,
s	constantes arbitraires.	

Enfin, on a

$$s+s_1+\ldots+s_m = n-m.$$

Si p est un entier quelconque inférieur ou égal à m, nous dirons que le système, considéré comme à p variables indépendantes, est en involution. On a

$$s+s_1+\ldots+s_p \leq n-p \tag{8}$$

et les éléments intégraux non singuliers à p dimensions, issus d'un point arbitraire, dépendent de

$$Q = p(n-p)-ps-(p-1)s_1-(p-2)s_2-\ldots-2s_{p-2}-s_{p-1}$$

paramètres.

Remarquons que, si l'on suppose les équations du système résolues par rapport aux différentielles de s des variables, le nombre des autres variables *dépendantes* est précisément $n-p-s$. En le désignant par q, le nombre Q est

$$Q = pq-(p-1)s_1-(p-2)s_2-\ldots-s_{p-1}. \tag{9}$$

4. La théorie qui vient d'être résumée doit être complétée pour répondre au problème suivant dont l'importance pratique est évidente.

Déterminer les multiplicités intégrales, à un nombre donné p de dimensions, d'un système donné de Pfaff, ces multiplicités étant assujetties à n'établir aucune relation finie entre p variables déterminées prises parmi les variables données, ou plus généralement à n'établir aucune relation linéaire entre p expressions de Pfaff données

$$\omega_1, \quad \omega_2, \quad \ldots, \quad \omega_p$$

(*indépendantes entre elles et indépendantes des premiers membres des équations du système*).

En particulier, il s'agit de ramener au besoin toutes ces multiplicités à être des multiplicités intégrales générales d'un nouveau système de Pfaff *en involution*.

Les premiers membres

$$\theta_1, \quad \theta_2, \quad \ldots, \quad \theta_s$$

des équations du système et les p expressions données

$$\omega_1, \quad \omega_2, \quad \ldots, \quad \omega_p$$

forment $s+p$ expressions linéairement indépendantes; on peut leur en adjoindre $q = n - s - p$ autres indépendantes entre elles et indépendantes des premières, soit

$$\varpi_1, \quad \varpi_2, \quad \ldots, \quad \varpi_q.$$

Alors, *en tenant compte des équations du système*, les covariants bilinéaires des θ sont des expressions bilinéaires par rapport aux ω et aux ϖ. Nous allons d'abord montrer qu'on peut toujours les supposer de la forme

$$(10) \qquad \theta'_k = \sum_{(ij)} c_{ijk}\omega_i\omega_j + \sum_{i,\rho} a_{i\rho k}\omega_i\varpi_\rho \qquad (k = 1, 2, \ldots, s).$$

En effet, toute multiplicité intégrale à p dimensions satisfait, non seulement aux équations données, mais à des équations de la forme

$$(11) \qquad \varpi_k = l_{k1}\omega_1 + \ldots + l_{kp}\omega_p \qquad (k = 1, 2, \ldots, q),$$

les l_{ki} étant des fonctions des variables telles que tous les θ'_k s'annulent si l'on y remplace les ϖ par les valeurs précédentes. Il se peut que la compatibilité des équations auxquelles doivent satisfaire les l exige des relations particulières entre les variables données; si ces relations ne laissent pas indépendantes les ω, il y a impossibilité; sinon elles ont pour effet de réduire le nombre q. Il faudra alors recommencer sur le nouveau système obtenu jusqu'à ce qu'on arrive soit à une impossibilité, soit à un système d'équations compatibles pour les l. Alors on pourra exprimer tous les coefficients l en fonction des variables données et d'un certain nombre de variables auxiliaires $y_1, y_2, \ldots$. Les covariants bilinéaires du système de Pfaff obtenu en adjoignant à l'ancien système les équations (11) seront alors, en tenant compte des équations de ce système, tous de la forme

$$\Sigma \gamma_{ij} \omega_i \omega_j + \Sigma a_{ik} \omega_i dy_k,$$

ce qui démontre la proposition [1].

Nous supposerons donc dorénavant que les θ'_k sont de la forme (10).

5. Nous allons d'abord chercher les conditions nécessaires et suffisantes pour que *le système de Pfaff, considéré comme à p variables indépendantes, soit en involution et pour que les éléments intégraux arbitraires d'ordre inférieur ou égal à p n'établissent aucune relation linéaire entre les ω*. S'il en est ainsi, les multiplicités cherchées seront bien, en effet, des multiplicités intégrales *générales* du système donné.

Il faut d'abord pour cela évidemment qu'il y ait des éléments intégraux d'ordre p définis par des équations de la forme (11); s'il en est ainsi, on peut, en ajoutant aux ϖ certaines combinaisons linéaires des ω, faire en sorte que

$$\varpi_1 = \varpi_2 = \ldots = \varpi_q = 0$$

définisse un élément intégral; par conséquent, *on peut supposer les coefficients c_{ijk} tous nuls*.

(1) Les covariants θ' sont, en effet, tous nuls en tenant compte de (11); quant aux équations (11) elles-mêmes, elles donnent des covariants tels que

$$\varpi'_k - l_{k1}\omega'_1 - \ldots - l_{kp}\omega'_p + \omega_1 dl_{k1} + \ldots + \omega_p dl_{kp},$$

et il suffit de remplacer, dans les ω' et les ϖ' développés, les ϖ par leurs valeurs (11).

Cela étant, considérons les entiers $s_1, s_2, \ldots, s_p$ définis au n° 3. Tout élément linéaire intégral étant défini par un système d'équations

$$\frac{\omega_1}{u_1} = \frac{\omega_2}{u_2} = \ldots = \frac{\omega_p}{u_p} = \frac{\varpi_1}{v_1} = \ldots = \frac{\varpi_q}{v_q}, \tag{12}$$

le nombre s_1 indique le nombre des équations indépendantes du système

$$\sum_{i,\rho} a_{i\rho k} u_i \varpi_\rho - \sum_{i,\rho} a_{i\rho k} v_\rho \omega_i = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, s), \tag{13}$$

où les u_i et les v_ρ sont des constantes arbitraires, les ω_i et les ϖ_ρ étant des variables. *Comme ces équations ne doivent entraîner aucune relation entre les* ω, ce nombre s_1 est le rang (degré du déterminant principal) de la matrice à ~~trois~~ s lignes

$$\left\| \begin{matrix} \sum a_{i11} u_i & \sum a_{i21} u_i & \ldots & \sum a_{iq1} u_i \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \sum a_{i1s} u_i & \sum a_{i2s} u_i & \ldots & \sum a_{iqs} u_i \end{matrix} \right\|.$$

Pour avoir $s_2, \ldots, s_p$ considérons la matrice à ps lignes

$$\left\| \begin{matrix} \sum a_{i11} u_i & \sum a_{i21} u_i & \ldots & \sum a_{iq1} u_i \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \sum a_{i1s} u_i & \sum a_{i2s} u_i & \ldots & \sum a_{iqs} u_i \\ \sum a_{i11} u'_i & \sum a_{i21} u'_i & \ldots & \sum a_{iq1} u'_i \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \sum a_{i1s} u'_i & \sum a_{i2s} u'_i & \ldots & \sum a_{iqs} u'_i \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \sum a_{i1s} u_i^{(p-1)} & \sum a_{i2s} u_i^{(p-1)} & \ldots & \sum a_{iqs} u_i^{(p-1)} \end{matrix} \right\|, \tag{14}$$

où les $u_i, u'_i, \ldots, u_i^{(p-1)}$ sont p^2 arbitraires. Le nombre $s_1 + s_2$ est le rang de la matrice obtenue en prenant les $2s$ premières lignes, $s_1 + s_2 + s_3$ le rang de la matrice obtenue en prenant les $3s$ premières lignes et ainsi de suite.

Cela étant, les formules (8) et (9) montrent que l'on a

$$s_1 + s_2 + \ldots + s_p \leqq q$$

et que le nombre des paramètres arbitraires, dont dépend l'élément intégral le plus général d'ordre p de la forme (11), est

$$pq - (p-1)s_1 - (p-2)s_2 - \ldots - s_{p-1}.$$

6. Réciproquement, *étant donné un système de Pfaff, dont les covariants θ'_k ont la forme* (10), *formons, au moyen des coefficients $a_{i\rho k}$, la matrice* (14) *et considérons les entiers*

$$\sigma_1, \quad \sigma_2, \quad \ldots, \quad \sigma_p,$$

rangs des matrices obtenues en prenant successivement dans (14) *les*

$$s, \quad 2s, \quad \ldots, \quad ps$$

premières lignes. Le nombre des paramètres arbitraires, dont dépend l'élément intégral le plus général d'ordre p qui n'établit aucune relation linéaire entre les ω, ne dépasse jamais l'entier

$$pq - (p-1)\sigma_1 - (p-2)\sigma_2 - \ldots - \sigma_{p-1};$$

s'il l'atteint, le système est en involution et ses multiplicités intégrales générales à p dimensions n'établissent aucune relation linéaire entre les ω.

D'abord, puisque d'après l'énoncé même il existe des éléments intégraux d'ordre p de la forme (11), c'est qu'on peut supposer dans les formules (10) tous les c_{ijk} nuls.

De plus, on peut, en effectuant au besoin une substitution linéaire convenable sur les ω, supposer que les rangs des p matrices considérées ne diminuent pas si l'on prend

$$u^{(i)}_{i+1} = 1, \qquad u^i_j = 0 \text{ pour } j \neq i+1.$$

Enfin on peut toujours poser

$$(15) \qquad \theta'_\rho = \omega_1 \varpi_{\rho 1} + \omega_2 \varpi_{\rho 2} + \ldots + \omega_p \varpi_{\rho p} \qquad (\rho = 1, 2, \ldots, s),$$

les $\varpi_{\rho i}$ étant des combinaisons linéaires des ϖ.

Il résulte alors de l'hypothèse que parmi les $\varpi_{\rho i}$ il y en a exactement

σ_1 indépendantes, soit

$$\varpi_{11}, \quad \varpi_{21}, \quad \ldots, \quad \varpi_{\sigma_1 1},$$

les $\varpi_{\rho i}$ pour lesquelles ρ dépasse σ_1 dépendant des précédentes; de même parmi les $\varpi_{\rho 2}$ $(\rho \leqq \sigma_1)$ il y en a σ_2 indépendantes, soit

$$\varpi_{12}, \quad \varpi_{22}, \quad \ldots, \quad \varpi_{\sigma_2 2},$$

les $\varpi_{\rho i}$ pour lesquelles ρ dépasse σ_2 dépendant des $\sigma_1 + \sigma_2$ précédentes et ainsi de suite.

En d'autres termes, des *sp* combinaisons $\varpi_{\rho i}$, sont indépendantes celles pour lesquelles on a

$$\rho \leqq \sigma_i;$$

nous les appellerons *principales;* elles sont au nombre de

$$\sigma_1 + 2\sigma_2 + \ldots + p\sigma_p;$$

les autres $\varpi_{\rho i}$ se déduisent linéairement des expressions principales pour lesquelles le second indice ne dépasse pas i. Enfin, il se peut que parmi les ϖ_k il y en ait qui ne se déduisent pas des $\varpi_{\rho i}$ principales; elles sont au nombre de

$$q - (\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_p).$$

Cela étant, on peut d'abord, dans tous les cas, exprimer ces dernières tout à fait arbitrairement au moyen des ω, ce qui donne déjà

(16) $$p(q - \sigma_1 - \sigma_2 - \ldots - \sigma_p)$$

paramètres arbitraires. Quant aux expressions $\varpi_{\rho i}$, si l'on pose

$$\varpi_{\rho i} = l_{\rho i 1}\omega_1 + l_{\rho i 2}\omega_2 + l_{\rho i p}\omega_p,$$

la condition que les θ'_ρ s'annulent donne

$$l_{\rho ij} = l_{\rho ji},$$

de sorte que les $l_{\rho ij}$ satisfont aux deux conditions suivantes :

1° *Si l'on donne au dernier indice j une valeur déterminée quelconque, toute relation linéaire entre les $\varpi_{\rho i}$ existe également entre les $l_{\rho ij}$ correspondantes;*

2° *On a*

$$l_{\rho ij} = l_{\rho ji}. \tag{17}$$

Il résulte de là que les seuls coefficients $l_{\rho ij}$ qui puissent être pris arbitrairement sont *tout au plus* ceux pour lesquels

$$\rho \leqq \sigma_i, \quad \rho \leqq \sigma_j; \tag{18}$$

nous les appellerons les coefficients *l principaux;* ils sont au nombre de

$$\sigma_1 + 2\sigma_2 + \ldots + p\sigma_p; \tag{19}$$

en lui ajoutant le nombre (16) on obtient, comme nombre maximum des paramètres dont dépend l'élément intégral d'ordre p,

$$pq - (p-1)\sigma_1 - (p-2)\sigma_2 - \ldots - \sigma_{p-1}.$$

La première partie du théorème est donc démontrée.

Supposons maintenant que ce nombre soit effectivement atteint, c'est-à-dire qu'on puisse satisfaire aux deux conditions énoncées plus haut en prenant arbitrairement les coefficients $l_{\rho ij}$ *principaux*. Nous allons démontrer que le système est en involution et que les nombres s_i correspondants sont respectivement égaux aux nombres σ_i.

Or, considérons un élément linéaire intégral *arbitraire* E_1; on peut toujours, en effectuant au besoin une substitution linéaire sur les ω, le supposer défini par les relations

$$\frac{\omega_1}{1} = \frac{\omega_2}{0} = \ldots = \frac{\omega_p}{0} = \frac{\varpi_{\rho i}}{v_{\rho i 1}},$$

les $v_{\rho i 1}$ étant des quantités arbitraires uniquement assujetties à vérifier les mêmes relations que les $\varpi_{\rho i}$ correspondantes, autrement dit qui s'expriment toutes au moyen de celles d'entre elles pour lesquelles

$$\rho \leqq \sigma_i.$$

Les équations qui expriment qu'un élément linéaire intégral est en involution avec E_1 sont alors

$$\varpi_{\rho 1} - v_{\rho 11}\omega_1 - v_{\rho 21}\omega_2 - \ldots - v_{\rho p 1}\omega_p = 0. \tag{20}$$

Ces équations n'établissent aucune relation entre les ω, sinon, i étant un certain indice, il y aurait entre les $\varpi_{\rho 1}$ une relation qui ne serait pas vérifiée par les $v_{\rho i 1}$ correspondantes; par suite, il serait impossible de trouver un système de quantités $v_{\rho ij}$, dont feraient partie les $v_{\rho i 1}$ données, satisfaisant aux deux conditions sus-énoncées sans qu'il y eût une relation nécessaire entre les $v_{\rho i 1}$ *principales*, puisqu'il y aurait entre les $v_{\rho 1 i}$ une relation qui ne serait pas vérifiée par les quantités égales $v_{\rho i 1}$.

Donc on voit bien que s_1 est égal à σ_1 et par suite que l'entier m est au moins égal à 2.

De même un élément intégral *arbitraire* de deuxième ordre E_2 peut toujours être supposé défini par les deux éléments

$$(1, 0, \ldots, 0; v_{\rho i 1}) \quad \text{et} \quad (0, 1, \ldots, 0; v_{\rho i 2}),$$

la condition d'involution de ces deux éléments donnant

$$v_{\rho 12} = v_{\rho 21},$$

les $v_{\rho i 1}$ ainsi que les $v_{\rho i 2}$ étant, à part cela, assujetties à la seule condition de vérifier entre elles les mêmes relations que les $\varpi_{\rho i}$; on peut donc prendre arbitrairement les $v_{\rho 12} = v_{\rho 21}$ pour lesquelles ρ ne dépasse pas σ_2, les autres $v_{\rho i 1}$ et $v_{\rho i 2}$ pour lesquelles ρ ne dépasse pas σ_i. Le système qui exprime qu'un élément linéaire intégral quelconque est en involution avec E_2 est alors

$$(21) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varpi_{\rho 1} - v_{\rho 11}\omega_1 - v_{\rho 21}\omega_2 - \ldots - v_{\rho p 1}\omega_p = 0 \\ \varpi_{\rho 2} - v_{\rho 12}\omega_1 - v_{\rho 22}\omega_2 - \ldots - v_{\rho p 2}\omega_p = 0 \end{array} \right. \qquad (\rho = 1, 2, \ldots, s).$$

Il contient $\sigma_1 + \sigma_2$ équations indépendantes et n'établit aucune relation entre les ω, sinon, i étant un certain indice, il y aurait entre les $\varpi_{\rho 2}$ et $\varpi_{\rho 1}$ une relation qui ne serait pas vérifiée par les $v_{\rho i 2}$ et les $v_{\rho i 1}$ correspondantes; par suite, il serait impossible de trouver un système de quantités $v_{\rho ij}$, dont feraient partie les $v_{\rho i 1}$ et les $v_{\rho i 2}$ données, satisfaisant aux conditions sus-énoncées, sans qu'il y eût une relation nécessaire entre les $v_{\rho i 1}$ et les $v_{\rho i 2}$ *principales*, puisqu'il y aurait entre les $v_{\rho 1 i}$ et les $v_{\rho 2 i}$ une relation (la même qu'entre les $\varpi_{\rho 1}$ et les $\varpi_{\rho 2}$) qui ne serait pas vérifiée par les quantités égales $v_{\rho i 1}$ et $v_{\rho i 2}$. On voit donc bien que s_2 est égal à σ_2 et que, par suite, si p est supérieur à 2, il passe par chaque élément intégral arbitraire E_2 au moins un élément intégral E_3.

On peut continuer ainsi de proche en proche et l'on trouve

$$s_1 = \sigma_1, \quad s_2 = \sigma_2, \quad \ldots, \quad s_p = \sigma_p,$$

ce qui démontre le théorème.

7. Toutes les fois que nous aurons un système de pqs quantités

$$a_{i\rho k} \qquad (i = 1, 2, \ldots, p; \quad \rho = 1, 2, \ldots, q; \quad k = 1, 2, \ldots, s)$$

satisfaisant aux conditions du théorème du n° 6, nous dirons qu'il constitue un système *involutif*. Il est utile, pour la suite, d'étudier encore quelques propriétés remarquables de ces systèmes.

Reprenons les notations du numéro précédent

$$\sum_{i,k} a_{ik\rho}\,\omega_i\varpi_k = \omega_1\varpi_{\rho 1} + \omega_2\varpi_{\rho 2} + \ldots + \omega_p\varpi_{\rho p} \qquad (\rho = 1, 2, \ldots, s), \tag{22}$$

les $\varpi_{\rho i}$ étant des combinaisons linéaires des ϖ qui s'expriment toutes au moyen de

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_p$$

d'entre elles, que nous avons appelées *principales*, et qui sont celles pour lesquelles

$$\rho \leqq \sigma_i.$$

Il est possible de trouver un système de quantités $l_{\rho ij}$ jouissant des trois propriétés suivantes :

1° Toute relation qui existe entre les $\varpi_{\rho i}$ existe entre les $l_{\rho ij}$ correspondantes, j désignant un indice donné d'ailleurs quelconque ;

2° On a, quels que soient ρ, i, j,

$$l_{\rho ij} = l_{\rho ji};$$

3° Les quantités $l_{\rho ij}$ *principales*, c'est-à-dire pour lesquelles

$$\rho \leqq \sigma_i, \qquad \rho \leqq \sigma_j,$$

peuvent être prises *arbitrairement*.

Remarquons d'après cela que, si l'on désigne par

$$X_{\rho i} = 0 \qquad (\rho > \sigma_i)$$

l'équation qui détermine l'expression non principale $\varpi_{\rho i}$ au moyen des ϖ *principales* dont le second indice est inférieur ou égal à i et si l'on désigne par

$$X^j_{\rho i} = 0 \qquad (j \leqq i,\ \rho > \sigma_i)$$

l'équation qu'on en déduit en y remplaçant tous les $\varpi_{\rho' i'}$ par les $l_{\rho' i' j}$ correspondants, *on obtient ainsi un système d'équations définissant complètement les $l_{\rho i j}$ non principales au moyen des $l_{\rho i j}$ principales.* Il suffit de prendre de proche en proche les équations

$$X^1_{\rho 1} = 0; \qquad X^1_{\rho 2} = 0, \qquad X^2_{\rho 2} = 0; \qquad X^1_{\rho 3} = 0, \qquad X^2_{\rho 3} = 0, \qquad X^3_{\rho 3} = 0; \qquad \dots$$

Cela étant on peut *prolonger* le système involutif donné en considérant, *par définition*, les $\sigma_1 + 2\sigma_2 + \ldots + p\sigma_p$ expressions bilinéaires

$$(23) \qquad \omega_1 \varpi_{\rho i 1} + \omega_2 \varpi_{\rho i 2} + \ldots + \omega_p \varpi_{\rho i p} \qquad (\rho = 1, 2, \ldots, s;\ i = 1, 2, \ldots, p),$$

qui joueront ici le même rôle que les expressions (22) pour le système donné, et où les $\varpi_{\rho i j} = \varpi_{\rho j i}$ sont liées exactement par les mêmes relations que les $l_{\rho i j}$. Pour ce nouveau système, on a

$$\begin{aligned}
\sigma'_1 &= \sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_p, \\
\sigma'_2 &= \phantom{\sigma_1 + {}} \sigma_2 + \ldots + \sigma_p, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\sigma'_p &= \phantom{\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + {}} \sigma_p.
\end{aligned}$$

Je dis *qu'il est encore involutif.*

En effet, nous allons déterminer de la manière suivante un système de $\dfrac{sp(p+1)(p+2)}{6}$ quantités

$$l_{\rho i j k} = l_{\rho j i k} = l_{\rho i k j} = l_{\rho k i j} = l_{\rho j k i} = l_{\rho k j i}.$$

Nous prendrons arbitrairement les quantités

$$l_{\rho i j k} \qquad (i \geqq j \geqq k,\ \rho \leqq \sigma_i)$$

que nous appellerons *principales*. Quant aux autres, elles seront complètement déterminées au moyen des précédentes par les équations

$$X_{\rho i}^{jk} = 0 \quad (k \leqq j \leqq i,\ \rho > \sigma_i)$$

obtenues en remplaçant dans $X_{\rho i}$ les $\varpi_{\rho' i'}$ par les $l_{\rho' i' jk}$ correspondants. On rangera ces équations dans le sens des i croissants; celles qui correspondent à la même valeur de i étant rangées dans le sens des j croissants (de 1 à i) et celles qui correspondent aux mêmes valeurs de i et j étant rangées dans le sens des k croissants (de 1 à j).

Cela étant, on démontre sans peine que les quantités $l_{\rho ijk}$ ainsi déterminées jouissent de la propriété que *toute relation entre les* $\varpi_{\rho i}$ *existe entre les* $l_{\rho i \alpha\beta}$ *correspondants, quels que soient les indices donnés* α *et* β; de même, par suite, toute relation entre les $\varpi_{\rho ij}$ existe entre les $l_{\rho ij\alpha}$ correspondants, quel que soit l'indice donné α.

Les $l_{\rho ijk}$ jouent donc par rapport aux $\varpi_{\rho ij}$ le même rôle que les $l_{\rho ij}$ jouaient par rapport aux $\varpi_{\rho i}$. Or le nombre de celles de ces quantités qui sont arbitraires est précisément

$$\sigma'_1 + 2\sigma'_2 + p\sigma'_p;$$

par suite, le système considéré est bien involutif.

8. Les systèmes involutifs de quantités $a_{ik\rho}$ jouissent encore d'une autre propriété qui nous sera utile. *Si l'on cherche à déterminer le système le plus général d'expressions bilinéaires* $\Pi_{\rho i}$ *annulant identiquement les expressions trilinéaires*

$$(24) \qquad \omega_1 \Pi_{\rho 1} + \omega_2 \Pi_{\rho 2} + \ldots + \omega_p \Pi_{\rho p} \qquad (\rho = 1, 2, \ldots, s),$$

et reliées entre elles par les mêmes relations que les $\varpi_{\rho i}$, *on trouve*

$$(25) \qquad \Pi_{\rho i} = \omega_1 \chi_{\rho i 1} + \omega_2 \chi_{\rho i 2} + \ldots + \omega_p \chi_{\rho i p},$$

où les $\chi_{\rho ij} = \chi_{\rho ji}$ *sont des expressions de Pfaff arbitraires assujetties seulement à être liées par les mêmes relations que les* $l_{\rho ij}$.

Dans l'énoncé, on suppose que les $\Pi_{\rho i}$ sont des expressions bilinéaires par rapport aux ω, et à un nombre quelconque d'autres expressions de Pfaff indépendantes.

Il est d'abord évident que, si l'on prend pour les $\Pi_{\rho i}$ des expressions de la forme (25) elles satisfont à la question. C'est la réciproque qu'il s'agit de démontrer.

Or, les $\Pi_{\rho i}$ s'annulant avec les ω, comme il est facile de le voir, peuvent toujours se mettre sous la forme (25), les $\chi_{\rho ij}$ étant provisoirement quelconques; de plus, on peut supposer que toute relation entre les $\Pi_{\rho i}$ existe entre les $\chi_{\rho i\alpha}$, quel que soit l'indice donné α. Cela étant, supposons démontré qu'il existe un entier $h < p$ tel que l'on ait

$$\chi_{\rho\alpha\beta} = \chi_{\rho\beta\alpha} \qquad (\alpha, \beta, = 1, 2, \ldots, h).$$

Je dis que cette propriété peut aussi être supposée vraie pour $h+1$. En ne tenant pas compte des termes en

$$\omega_{h+2}, \quad \omega_{h+3}, \quad \ldots, \quad \omega_p,$$

l'expression (24) prend, en effet, la forme

$$\omega_1\omega_{h+1}(\chi_{\rho,1,h+1} - \chi_{\rho,h+1,1}) + \ldots + \omega_h\omega_{h+1}(\chi_{\rho,h,h+1} - \chi_{\rho,h+1,h}).$$

Il résulte de là que l'on a, *en ne tenant pas compte non plus de* ω_{h+1},

$$(26) \qquad \left\{\begin{array}{l} \chi_{\rho,1,h+1} = \chi_{\rho,h+1,1} + \lambda_{\rho 11}\omega_1 + \ldots + \lambda_{\rho 1h}\omega_h, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \chi_{\rho,h,h+1} = \chi_{\rho,h+1,h} + \lambda_{\rho h1}\omega_1 + \ldots + \lambda_{\rho hh}\omega_h, \end{array}\right.$$

les $\lambda_{\rho ij}$ étant des quantités finies satisfaisant à

$$\lambda_{\rho ij} = \lambda_{\rho ji} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, h).$$

Par suite, on peut poser, en négligeant $\omega_{h+2}, \ldots, \omega_p$,

$$\begin{array}{l} \Pi_{\rho 1} = \omega_1\chi_{\rho 11} + \ldots + \omega_h\chi_{\rho 1h} + \omega_{h+1}\chi_{\rho,h+1,1} - \lambda_{\rho 11}\omega_1\omega_{h+1} - \ldots - \lambda_{\rho 1h}\,\omega_h\omega_{h+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \Pi_{\rho h} = \omega_1\chi_{\rho h1} + \ldots + \omega_h\chi_{\rho hh} + \omega_{h+1}\chi_{\rho,h+1,h} - \lambda_{\rho h1}\omega_1\omega_{h+1} - \ldots - \lambda_{\rho hh}\,\omega_h\omega_{h+1}. \end{array}$$

On peut manifestement, en ajoutant au besoin aux $\chi_{\rho ij}$ *principales* des expressions de la forme $\mu_{\rho ij}\omega_{h+1}$, faire en sorte que l'on ait

$$\lambda_{\rho ij} = 0 \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, h;\ \rho \leqq \sigma_i, \rho \leqq \sigma_j),$$

cette modification entraînant nécessairement des modifications analogues pour les $\chi_{\rho i j}$ non principales, ainsi que pour les $\chi_{\rho, h+1, i}$; mais en ce qui concerne ces dernières, comme elles n'entrent dans $\Pi_{\rho 1}, \ldots, \Pi_{\rho h}$ que multipliées par ω_{h+1}, cela n'a aucune importance. On voit donc finalement que les $\Pi_{\rho i}$ se présenteront sous la forme voulue, abstraction faite d'expressions bilinéaires telles que

$$\Psi_{\rho i} = \lambda_{\rho i 1}\omega_1\omega_{h+1} + \ldots + \lambda_{\rho i h}\omega_h\omega_{h+1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, p)$$

avec

$$\lambda_{\rho i j} = \lambda_{\rho j i} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, h),$$
$$\lambda_{\rho i j} = 0 \qquad (\rho \leqq \sigma_i, \rho \leqq \sigma_j;\ i = 1, 2, \ldots, p;\ j = 1, 2, \ldots, h).$$

En exprimant les relations nécessaires entre les $\Pi_{\rho i}$, on voit que ces relations doivent également exister entre les $\Psi_{\rho i}$; par suite, les $\lambda_{\rho i j}$ satisfont aux propriétés fondamentales des $l_{\rho i j}$, et comme *celles d'entre elles qui sont principales sont nulles*, il en est de même des autres. Le théorème est donc démontré.

9. A l'aide des deux théorèmes précédents, on peut, *en se servant uniquement de l'identité fondamentale*, démontrer que, si l'on prolonge un système en involution, on obtient encore un système en involution, propriété qu'on pourrait déduire facilement, *a priori*, de l'existence et de l'indétermination des multiplicités intégrales du système donné.

Si aux équations du système on ajoute les nouvelles équations

$$(27) \quad \bar{\varpi}_{\rho i} = \varpi_{\rho i} - l_{\rho i 1}\omega_1 - l_{\rho i 2}\omega_2 - \ldots - l_{\rho i p}\omega_p = 0 \qquad \begin{pmatrix} \rho = 1, 2, \ldots, s \\ i = 1, 2, \ldots, p \end{pmatrix},$$

les covariants des premiers membres des nouvelles équations du système sont manifestement, en tenant compte de ces équations elles-mêmes et des équations primitives, de la forme

$$(28) \qquad \bar{\varpi}'_{\rho i} = \omega_1\chi_{\rho i 1} + \omega_2\chi_{\rho i 2} + \ldots + \omega_p\chi_{\rho i p} + \ldots,$$

les termes non écrits ne dépendant que des ω, les $\chi_{\rho i j}$ n'étant autres, aux ω_i près, que les différentielles $dl_{\rho i j}$. Or, en appliquant l'identité fondamentale aux covariants

$$\theta'_\rho = \omega_1\bar{\varpi}_{\rho 1} + \omega_2\bar{\varpi}_{\rho 2} + \omega_p\bar{\varpi}_{\rho p} \qquad (\mathrm{mod}\,\theta_1, \ldots, \theta_s),$$

on obtient évidemment

$$0 = \omega_1 \overline{\varpi}'_{\rho 1} + \omega_2 \overline{\varpi}'_{\rho 2} + \ldots + \omega_p \overline{\varpi}'_{\rho p} \qquad (\bmod \theta_1, \ldots, \theta_s; \overline{\varpi}_{\sigma 1}, \ldots, \overline{\varpi}_{\sigma p}),$$

et, par suite, d'après le théorème du n° 8, on a

$$(29) \qquad \overline{\varpi}'_{\rho i} = \omega_1 \chi_{\rho i 1} + \ldots + \omega_p \chi_{\rho i p} \qquad (\bmod \theta_1, \ldots, \theta_s; \overline{\varpi}_{\sigma 1}, \ldots, \overline{\varpi}_{\sigma p}),$$

les $\chi_{\rho ij} = \chi_{\rho ji}$ étant liées par les mêmes relations que les $l_{\rho ij}$.

Comme, d'après la formule (28), les $\chi_{\rho ij}$ principales sont nécessairement indépendantes entre elles et des ω, on voit, en appliquant le théorème du n° 7, que le système prolongé est bien en involution.

Remarque. — *Ce théorème pourrait tomber en défaut si l'on se contentait d'un prolongement partiel du système donné, c'est-à-dire si l'on adjoignait à ce système quelques-unes seulement des équations* (27). On en a un exemple si l'on prolonge le système en involution

$$\theta'_1 = \omega_1 \varpi_1,$$
$$\theta'_2 = \omega_2 \varpi_2,$$

par l'adjonction de l'équation unique

$$\overline{\varpi} = \varpi_1 + \varpi_2 - u\,\omega_1 - v\,\omega_2 = 0.$$

10. Après cette étude des systèmes en involution, nous allons considérer un système de Pfaff pour lequel les covariants bilinéaires ont été réduits à la forme (10) et nous supposerons que le nombre des paramètres arbitraires dont dépend l'élément intégral le plus général d'ordre p est *inférieur* à l'entier

$$\sigma_1 + 2\sigma_2 + \ldots + p\sigma_p + p(q - \sigma_1 - \sigma_2 - \ldots - \sigma_p),$$

où les σ sont les nombres définis au moyen de la matrice (14). Nous allons montrer que le système de Pfaff peut être *prolongé* de manière à satisfaire aux conditions du théorème du n° 6.

Nous dirons que les covariants bilinéaires du système sont mis sous forme *normale* lorsque, en tenant compte des équations du système et en n'écrivant que les termes qui contiennent les ϖ, on peut partager les covariants en un certain nombre de groupes ayant les propriétés suivantes. A chacun d'eux est associé un entier N de sorte qu'il contient autant de covariants $\Pi_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p}$ qu'il y a de combinaisons d'entiers α positifs ou nuls satisfaisant à

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_p = \mathrm{N};$$

de plus

$$\Pi_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p} = \omega_1 \varpi_{\alpha_1+1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p} + \omega_2 \varpi_{\alpha_1, \alpha_2+1, \ldots, \alpha_p} + \ldots + \omega_p \varpi_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p+1}.$$

Nous supposerons de plus qu'on peut associer à chacun de ces groupes un autre entier h compris entre o et p tel que si

$$h, \quad h', \quad h'', \quad \ldots$$

sont les entiers associés aux 1er, 2e, 3e, ... groupes, les ϖ du premier groupe, pour lesquels les $p-h$ derniers indices sont nuls, les ϖ' du deuxième groupe pour lesquels les $p-h'$ derniers indices sont nuls, etc., sont indépendants entre eux et que de plus tous les autres ϖ, ϖ', ... dépendent des précédents; nous appellerons ces dernières expressions les *expressions ϖ principales*.

Si l'on effectue sur les ω une substitution linéaire *arbitraire*, les covariants ne cessent pas d'être sous une forme normale, les ϖ d'un même groupe subissant une substitution linéaire.

Si l'on établit entre les variables une relation quelconque, cela se traduit par une relation linéaire entre ϖ, ϖ', ... et les ω. Supposons qu'elle contienne effectivement les expressions principales ϖ du premier groupe et que les entiers $h^{(i)}$ associés aux groupes dont les expressions principales entrent en tout ou en partie dans la relation considérée soient tous supérieurs ou égaux à h. Alors on peut, par une substitution linéaire effectuée sur $\omega_1, \ldots, \omega_h$, faire en sorte que la relation contienne effectivement

$$\varpi_{00 \ldots \mathrm{N}+1, 0 \ldots 0} \qquad (\alpha_h = \mathrm{N}+1).$$

S'il en est ainsi, tous les ϖ, ϖ', ... s'expriment au moyen des expressions principales des 2e, 3e, ... groupes *et des coefficients de $\omega_1, \ldots, \omega_{h-1}$ dans le premier groupe*. On peut alors remplacer le premier groupe par un certain nombre d'autres groupes *pour lesquels l'entier h est diminué d'une unité.*

Enfin, remarquons que si l'on veut prolonger le système par le procédé du n° 4, les covariants du nouveau système sont encore sous une forme canonique, avec le même nombre de groupes, les mêmes entiers h, h', ..., les entiers N sont augmentés d'une unité et il peut y avoir des relations linéaires nécessaires entre les nouvelles expressions principales. En effet, en négligeant au besoin des combinaisons de $\omega_1, \ldots, \omega_p$ dont les coefficients ne dépendent que des variables primitives, on a des formules de la forme suivante

$$\varpi_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p} = t_{\alpha_1+1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p}\,\omega_1 + t_{\alpha_1, \alpha_2+1, \alpha_p}\,\omega_2 + \ldots + t_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p+1}\,\omega_p,$$

et les t, t', ... ne dépendent que de ceux du premier groupe pour lesquels les $p-h$ derniers indices sont nuls, etc.; il suffit de prendre pour expressions principales du système prolongé les différentielles de ces coefficients t; seulement, si ces t ne sont pas réellement indépendants, les nouvelles expressions principales doivent être liées par des relations dont chacune, comme nous l'avons vu tout à l'heure, dissout un groupe de covariants en diminuant d'une unité l'entier h associé.

11. Cela étant, désignons par

$$\nu_0, \quad \nu_1, \quad \ldots, \quad \nu_p,$$

le nombre des groupes de covariants du système primitif pour lesquels l'entier h est respectivement égal à

$$0, \quad 1, \quad \ldots, \quad p.$$

Supposons qu'on n'arrive jamais à un prolongement laissant invariables les entiers ν. Alors l'entier ν_p ne peut pas augmenter, et il arrivera nécessairement un moment où il ne changera plus; à partir de ce moment l'entier ν_{p-1} ne pourra pas augmenter, et il arrivera un moment où il ne changera plus. On peut raisonner ainsi successivement pour tous les entiers ν et démontrer qu'à partir d'un certain prolongement aucun de ces entiers ne peut changer.

Or, dire qu'aucun des entiers ν ne change, c'est dire que dans le prolongement tous les t pour lesquels les $p-h$ derniers indices sont nuls, tous les t' pour lesquels les $p-h'$ derniers indices sont nuls, etc., sont arbitraires. Si maintenant

τ_1 désigne le nombre des expressions principales pour lesquelles le premier indice est au moins égal à 1;

τ_2 le nombre des expressions principales pour lesquelles le premier indice est nul sans que le second le soit;

τ_3 le nombre des expressions principales pour lesquelles les deux premiers indices sont nuls sans que le troisième le soit, etc.;

le nombre des t, t', ... arbitraires est, comme il est facile de le voir, égal à

$$\tau_1+2\tau_2+3\tau_3+\ldots+p\tau_p, \tag{30}$$

et de plus le nombre des ϖ, ϖ', ..., indépendants est

$$\tau_1+\tau_2+\ldots+\tau_p.$$

Or, pour le système considéré, on a manifestement

$$\tag{31} \left\{\begin{aligned} \sigma_1 &\leqq \tau_1, \\ \sigma_1+\sigma_2 &\leqq \tau_1+\tau_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \sigma_1+\sigma_2+\ldots+\sigma_{p-1} &\leqq \tau_1+\tau_2+\ldots+\tau_{p-1}, \\ \sigma_1+\sigma_2+\ldots+\sigma_p &= \tau_1+\tau_2+\ldots+\tau_p. \end{aligned}\right.$$

On a à la dernière ligne une égalité, chacun des deux membres étant égal au nombre des ϖ, ϖ', ... indépendants. Des inégalités (21) on déduit les suivantes :

$$\tag{32} \left\{\begin{aligned} \sigma_p &\leqq \tau_p, \\ \sigma_{p-1}+\sigma_p &\leqq \tau_{p-1}+\tau_p, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \sigma_2+\ldots+\sigma_{p-1}+\sigma_p &\leqq \tau_2+\ldots+\tau_{p-1}+\tau_p, \\ \sigma_1+\sigma_2+\ldots+\sigma_{p-1}+\sigma_p &= \tau_1+\tau_2+\ldots+\tau_{p-1}+\tau_p, \end{aligned}\right.$$

et aussi, par addition,

$$\sigma_1+2\sigma_2+\ldots+p\sigma_p\leqq\tau_1+2\tau_2+\ldots+p\tau_p. \tag{33}$$

Le nombre des paramètres arbitraires dont dépend l'élément intégral le plus général d'ordre p est donc *au moins* égal, d'après (33), à l'entier

$$\sigma_1 + 2\sigma_2 + \ldots + p\sigma_p;$$

d'autre part, d'après un théorème précédent (n° 6), il lui est *au plus* égal; donc il lui est égal et le système est en involution. De plus l'indétermination est définie par les nombres

$$s_1 = \tau_1, \qquad s_2 = \tau_2, \qquad \ldots, \qquad s_p = \tau_p.$$

12. La démonstration précédente est analogue, comme on peut le remarquer, aux diverses démonstrations connues de la possibilité de ramener à un système en involution un système quelconque d'équations aux dérivées partielles. J'appellerai néanmoins l'attention sur l'importance pratique du théorème du n° 6 : pour rendre en involution par prolongements successifs, un sytème de Pfaff donné, on calculera, chaque prolongement étant effectué, les valeurs des entiers $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_p$ et l'on s'arrêtera dès que le nombre des nouvelles variables que fournirait le prolongement suivant atteindra l'entier $\sigma_1 + 2\sigma_2 + \ldots + p\sigma_p$. Une fois ce système en involution, un prolongement de plus donnerait les nouvelles valeurs

$$(34) \qquad \begin{cases} \sigma'_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_p, \\ \sigma'_2 = \sigma_2 + \ldots + \sigma_p, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \sigma'_p = \sigma_p. \end{cases}$$

Remarquons encore que si un système est en involution avec une valeur de l'entier σ_p au moins égale à 1, une relation *arbitraire* entre les variables maintiendrait le système en involution, σ_p étant simplement diminué d'une unité; au lieu d'une relation on pourrait en prendre un nombre quelconque, inférieur ou égal à σ_p, qui serait alors diminué de ce nombre-là. Sans vouloir insister sur ce point, cette remarque prouve néanmoins qu'un système *arbitraire* de m équations aux dérivées partielles (non nécessairement du même ordre) à m fonctions inconnues, est toujours en involution lorsque l'on a dérivé les équations du système d'ordre inférieur à l'ordre maximum jusqu'à les rendre toutes de ce même ordre maximum.

CHAPITRE II.

LES GROUPES CONTINUS ET LEUR STRUCTURE.

13. Considérons un groupe continu de transformations défini par un sytème en involution d'équations aux dérivées partielles. Pour rester dans le cas le plus général, supposons que les variables transformées soient

$$x_1, x_2, \ldots, x_m, \qquad x_{m+1}, \ldots, x_n,$$

que le groupe admette $n-m$ invariants indépendants et que les $n-m$ variables $x_{m+1}, \ldots, x_n$ soient précisément invariantes. Alors si l'on désigne par

$$X_1, X_2, \ldots, X_m$$

les m premières variables transformées, ce sont m fonctions des n variables x que l'on peut définir par un système en involution d'équations de Pfaff. Ces équations forment h catégories si les équations de définition sont d'ordre h; la première catégorie est de la forme

$$(E_1)\qquad \left\{\begin{array}{l} dX_1 - \alpha_{11}\,dx_1 - \alpha_{12}\,dx_2 - \ldots - \alpha_{1n}\,dx_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ dX_m - \alpha_{m1}\,dx_1 - \alpha_{m2}\,dx_2 - \ldots - \alpha_{mn}\,dx_n = 0, \end{array}\right.$$

où les coefficients α_{ik} sont des fonctions des x, des X et de p_1 quantités nouvelles

$$y_1, y_2, \ldots, y_{p_1};$$

la seconde catégorie est de la forme

$$(E_2)\qquad \left\{\begin{array}{l} dy_1 - \beta_{11}\,dx_1 - \beta_{12}\,dx_2 - \ldots - \beta_{1n}\,dx_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ dy_{p_1} - \beta_{p_1 1}\,dx_1 - \beta_{p_1 2}\,dx_2 - \ldots - \beta_{p_1 n}\,dx_n = 0, \end{array}\right.$$

où les coefficients β_{ik} sont des fonctions des x, des X, des y et de p_2

quantités nouvelles

$$z_1, \quad z_2, \quad \ldots, \quad z_{p_2},$$

et ainsi de suite, la $h^{\text{ième}}$ catégorie étant de la forme

$$(\mathrm{E}_h) \qquad \left\{ \begin{array}{l} du_1 - \lambda_{11}\, dx_1 - \ldots - \lambda_{1n}\, dx_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ du_{p_{h-1}} - \lambda_{p_{h-1}1}\, dx_1 - \ldots - \lambda_{p_{h-1}n}\, dx_n = 0, \end{array} \right.$$

les λ_{ik} étant des fonctions des x, des X, des α_{ik}, des β_{ik}, etc., et des p_h quantités nouvelles

$$v_1, \quad v_2, \quad \ldots, \quad v_{p_h}.$$

Par hypothèse le système des équations (E) est en involution, les variables indépendantes étant $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Or les covariants bilinéaires des premiers membres des équations (E) ne dépendent, lorsque l'on tient compte de ces équations elles-mêmes, que des dx_i et des dv_k; de plus les dv_k n'interviennent que dans les covariants des équations de la dernière catégorie (E_h)

$$\begin{array}{l} \Pi_1 = dx_1\, d\lambda_{11} \quad + \ldots + dx_n\, d\lambda_{1n}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \Pi_{p_h} = dx_1\, d\lambda_{p_{h-1}1} + \ldots + dx_n\, d\lambda_{p_{h-1}n}; \end{array}$$

ces covariants permettent, comme il a été montré au Chapitre I, de définir n entiers

$$\sigma_1, \quad \sigma_2, \quad \ldots, \quad \sigma_n$$

qui indiquent le degré d'arbitraire des transformations du groupe.

Si le groupe est fini, il n'y a pas de quantités v et les covariants sont tous nuls en tenant compte des équations (E).

14. Au lieu de définir le groupe par les équations (E), nous allons le définir comme l'ensemble des transformations qui laissent invariantes un certain nombre d'*expressions* de Pfaff.

Tout d'abord, il résulte d'un théorème connu que toute transformation portant sur les x, X, y, z, …, v qui laisse invariantes les X ainsi que $x_{m+1}, \ldots, x_n$, qui transforme entre elles les x et qui laisse invariant le système de Pfaff (E), donne pour les variables x une transfor-

Nous poserons

$$(6)\qquad \omega'_k = \sum_{(ij)}^{1,2,\ldots,r} c_{ijk}\,\omega_i\omega_j + \sum_{i=1,\ldots,r}^{\rho=1,\ldots,p_k} a_{i\rho k}\,\omega_i\varpi_\rho + \ldots \qquad (k=1,2,\ldots,r),$$

les termes non écrits contenant l'une des différentielles $dX_1, \ldots, dX_m$.

En utilisant la remarque du n° 14, nous pouvons donner aux X_i des valeurs constantes et négliger par suite leurs différentielles dX_i. Enfin nous pouvons remarquer que d'après l'origine même des quantités $a_{i\rho k}$, elles forment un système involutif (n° 7). Nous arrivons donc au théorème suivant :

Étant donné un groupe continu G transformant les variables x_1, $x_2, \ldots, x_n$ et admettant les invariants indépendants $U_1, U_2, \ldots, U_h$, on peut, en ajoutant au besoin de nouvelles variables auxiliaires, construire un groupe G' transformant entre elles les x comme le groupe G, et qui peut être défini comme le plus grand groupe laissant invariantes un certain nombre r d'expressions de Pfaff

$$\omega_1,\quad \omega_2,\quad \ldots,\quad \omega_r$$

et h fonctions U, *dont les différentielles s'expriment par des combinaisons linéaires des ω à coefficients fonctions des* U. *Les covariants ω'_k sont de la forme*

$$(7)\qquad \omega'_k = \sum c_{ijk}\,\omega_i\omega_j + \sum a_{i\rho k}\,\omega_i\varpi_\rho,$$

les ϖ étant p nouvelles expressions de Pfaff indépendantes des ω, les coefficients c_{ijk} et $a_{i\rho k}$ *étant des fonctions des* U, *les quantités* $a_{i\rho k}$ *formant un système involutif.*

17. Réciproquement, si l'on a $r+p$ expressions de Pfaff

$$\omega_1, \ldots, \omega_r; \qquad \varpi_1, \ldots, \varpi_p$$

et h fonctions U satisfaisant aux conditions de l'énoncé précédent, la transformation la plus générale qui laisse invariantes les U et les ω est donnée par le système de Pfaff

$$(8) \qquad \Omega_k - \omega_k = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, r)$$

où l'on désigne par Ω_k ce que devient ω_k par la substitution des nouvelles variables aux anciennes. *Et ce système est en involution*, car l'on a, en tenant compte des équations (7),

$$(9) \qquad \Omega'_k - \omega'_k = \sum a_{i\rho k} \omega_i (\Pi_\rho - \varpi_\rho),$$

et, par hypothèse, les $a_{i\rho k}$ forment un système involutif.

Au sujet des théorèmes précédents qui sont fondamentaux, on peut faire les remarques suivantes :

En premier lieu *si l'on a deux groupes* G' *pour lesquels les entiers* r, h, p *ont les mêmes valeurs, pour lesquels les invariants s'expriment par des combinaisons linéaires des* ω *dont les coefficients sont les mêmes fonctions des invariants, pour lesquels enfin les* c_{ijk} *et les* $a_{i\rho k}$ *sont les mêmes fonctions des invariants, ces deux groupes sont semblables;* car le système de Pfaff qui fournit la transformation la plus générale permettant de passer de l'un à l'autre, est en involution, comme l'indiquent les formules (8) et (9) où les Ω_k et les Π_ρ se rapportent à l'un des groupes, les ω_k et les ϖ_ρ à l'autre.

En second lieu, sans changer le groupe G', on peut, au lieu de r expressions ω_i, prendre r autres expressions quelconques combinaisons linéaires indépendantes des premières, les coefficients étant des fonctions des U; de même on peut remplacer les ϖ par p nouvelles expressions quelconques, combinaisons linéaires des ω et des ϖ indépendantes par rapport aux ϖ et ayant pour coefficients des fonctions des U.

Si le groupe est *transitif*, les c_{ijk} et les a_{ijk} sont des *constantes*. Si le groupe est fini, il n'y a pas d'expressions ϖ et dans les formules (7) il ne subsiste que les coefficients c_{ijk}.

18. Tout ce qui précède peut être envisagé d'un point de vue nouveau, fondamental pour la théorie de la structure des groupes, si l'on définit l'isomorphisme de la manière suivante.

en faisant toujours la même hypothèse sur les termes non écrits. Mais comme $\overline{\omega}_i$ est égale à ω_i on voit que chaque différence $\overline{\varpi}_{ik} - \varpi_{ik}$ peut s'exprimer linéairement au moyen des ω_i et des dX_i. Par suite enfin *si parmi les mn expressions ϖ_{ik} on considère p_1 d'entre elles indépendantes et que l'on exprime toutes les autres au moyen de celles-là, les coefficients sont des invariants par rapport aux transformations* (1) *et par suite sont des fonctions des* X *et de $x_{m+1}, \ldots, x_n$.*

Autrement dit *on peut supposer que les mn expressions ϖ_{ik} s'expriment linéairement au moyen de p_1 expressions $\varpi_1 \ldots, \varpi_{p_1}$, les coefficients étant des fonctions des X_i et des $x_{m+1}, \ldots, x_n$.* Ces p_1 expressions se reproduisent par les transformations (1) à des combinaisons linéaires près de

$$dX_1 - \omega_1, \qquad dX_2 - \omega_2, \quad \ldots, \quad dX_m - \omega_m.$$

On peut aller plus loin; considérons l'une des expressions ϖ_{ik} qui ne soit pas identiquement nulle et considérons dans ω'_i les termes en $\omega_k\, dX_j$

$$\omega'_i = \omega_k \varpi_{ik} + \sum A_j \omega_k\, dX_j + \ldots,$$

on peut supposer que tous les A_j sont nuls en ajoutant au besoin aux ϖ des combinaisons linéaires des premiers nombres de (E_1), alors il est évident que ϖ_{ik} se reproduira par toutes les transformations (1). En faisant cela pour p_1 expressions indépendantes, on voit que *les ϖ_i peuvent être choisis de manière à rester invariantes par toutes les transformations* (1).

Une fois un tel choix fait, il est clair que tous les coefficients des covariants ϖ'_i sont des invariants pour les transformations (1), et par suite ne dépendent que des X et de $x_{m+1}, \ldots, x_n$.

En résumé, les *covariants bilinéaires des expressions ω_i sont des expressions bilinéaires par rapport aux ω_i, aux dX_i et à p_1 nouvelles expressions ϖ; les coefficients de ces covariants ne dependent que des* X *et de $x_{m+1}, \ldots, x_n$. Enfin les p_1 expressions ϖ sont des combinaisons linéaires des premiers membres des équations* (E_2) et (E_1) *qui sont indépendantes entre elles et indépendantes des premiers membres des équations* (E_1).

16. Formons de même les covariants des expressions ϖ_i; on montrera de la même façon qu'elles peuvent s'exprimer bilinéairement par rapport aux ω_i, aux dX_i, aux ϖ_i et à p_2 nouvelles expressions indépendantes χ; les coefficients de ces covariants ne dépendent que des X et de $x_{m+1}, \ldots, x_n$; les p_2 expressions χ sont des combinaisons linéaires des premiers membres des équations (E_3), (E_2) et (E_1), qui sont indépendantes des premiers membres des équations (E_2) et (E_1). Enfin elles sont invariantes par toute transformation (1).

On peut continuer ainsi de proche en proche jusqu'à ce que l'on arrive à p_{h-1} expressions θ, combinaisons linéaires des premiers membres des équations (E_h), (E_{h-1}), $\ldots$, (E_1) et invariantes par les transformations (1). Leurs covariants bilinéaires dépendent des ω, des dX, des ϖ, χ, $\ldots$, θ et des différentielles dv_k

$$\theta'_i = \omega_1 v_{i1} + \ldots + \omega_n v_{in} + \ldots \qquad (i = 1, 2, \ldots, h_{p-1}),$$

les termes non écrits ne dépendant que des ω, dX, ϖ, ..., θ. On verra comme tout à l'heure que, si parmi les v_{ik} on en prend h_p indépendants et que l'on exprime tous les autres au moyen de ceux-là, les coefficients ne dépendent que des X et de $x_{m+1}, \ldots, x_n$; autrement dit tous les v_{ik} peuvent s'exprimer en fonctions linéaires de h_p expressions nouvelles $v_1, v_2, \ldots, v_p$, les coefficients ne dépendant que des X et de $x_{m+1}, \ldots, x_n$. Si l'on ajoute à ces expressions des combinaisons linéaires à coefficients arbitraires des ω, dX, ϖ, $\ldots$, θ, on peut disposer de ces arbitraires de manière à annuler le plus grand nombre possible des autres coefficients des θ'_i; alors les autres coefficients seront nécessairement des invariants pour toutes les transformations (1).

Finalement, en changeant les notations, on voit que l'on arrive à obtenir un certain nombre r d'expressions de Pfaff,

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r \qquad (r = n + p_1 + \ldots + p_{h-1}),$$

dont *les covariants bilinéaires s'expriment au moyen des* ω, *des* dX, *et de* p_h *expressions nouvelles* ϖ, *et s'annulent avec les* ω, *les coefficients ne dépendant que des* X *et de* $x_{m+1}, \ldots, x_n$. *Les transformations* (1) *sont les plus générales qui laissent invariante chacune de ces expressions de Pfaff.*

mation du groupe considéré et réciproquement. Soit, en effet,

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{ll} X'_i = X_i & (i = 1, 2, \ldots, m), \\ x'_i = f_i(x_1, \ldots, x_n) & (i = 1, 2, \ldots, m), \\ x'_{m+j} = x_{m+j} & (i = 1, 2, \ldots, n-m), \\ y'_i = \varphi_i(x, X, y) & (i = 1, 2, \ldots, p_1), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ v'_i = \Psi_i(x, X, y, \ldots, v) & (i = 1, 2, \ldots, p_h), \end{array}\right.$$

une transformation laissant invariant le système (E). La condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi c'est que, si l'on prend pour les $X, y, \ldots, v$ le système le plus général de fonctions des x satisfaisant aux équations (E), il en résulte, d'après (1), pour $X', y', \ldots, v'$, des fonctions des x' satisfaisant également aux équations (E). Autrement dit, désignons par S la transformation la plus générale du groupe, par Σ la transformation qui fait passer des x aux x' d'après les formules (1); la transformation qui fait passer des x' aux X' résulte manifestement de la succession des transformations Σ^{-1} et S. La condition nécessaire et suffisante cherchée est donc que, quelle que soit la transformation S du groupe, la transformation $\Sigma^{-1}S$ appartienne encore au groupe; finalement *il faut et il suffit que Σ soit une transformation du groupe.*

Remarquons que si l'on ne considère dans les formules (1) que les équations qui définissent les x', les $y', \ldots, v'$, on peut, dans les seconds membres, donner aux X des valeurs constantes arbitraires, cela ne change rien aux transformations effectuées sur les variables x.

Enfin remarquons aussi que les transformations des variables x, X, $y, \ldots, v$ exprimées par les formules (1), n'admettent aucun invariant indépendant des

$$(2)\qquad X_1, X_2, \ldots, X_m, \qquad x_{m+1}, \ldots, x_n.$$

Supposons, en effet, que l'on ait une relation de la forme

$$(3)\qquad \Phi(x, X, y, \ldots, v) = \Phi(x', X', y', \ldots, v')$$

identique en tenant compte des formules (1). Donnons aux variables x, X, $y, \ldots, v$ des valeurs particulières, mais quelconques, x^0, X^0, $y^0, \ldots, v^0$ et soient x'^0, X'^0, $y'^0, \ldots, v'^0$ les valeurs correspondantes fournies par les formules (1). Il existe toujours une transformation S du groupe donné telle que, pour $x_i = x_i^0$, les X, y, ..., v prennent les valeurs X^0, y^0, ..., v^0. Quelle que soit la transformation (1), il est donc indifférent, pour calculer les x'^0, X'^0, y'^0, ..., v'_0, de supposer que, dans les seconds membres, les variables restent indépendantes ou que les X, y, ..., v soient exprimées au moyen des x d'après la transformation S. De ce dernier point de vue, les X', y', ..., v' deviennent des fonctions des x' définissant une transformation S' du groupe donné. Si nous choisissons en particulier pour fonctions f_i celles qui, dans la transformation S, font passer des x aux X, on a $x'_i = X_i = X'_i$, et S' se réduit à la *transformation identique*; les y', ..., v' deviennent des fonctions parfaitement déterminées des x', c'est-à-dire des X'_i et des x'_{m+j}. Or $X_i'^0 = X_i^0$, $x'^0_{m+j} = x^0_{m+j}$. Par suite on a

$$\Phi(x^0, X^0, y^0, \ldots, v^0) = \Psi(X_i^0, x^0_{m+j}),$$

Ψ désignant une fonction parfaitement déterminée de ses arguments. Donc enfin Φ ne dépend essentiellement que des variables (2).

15. Cela étant, posons

$$(4)\quad \begin{cases} \omega_i = \alpha_{i1} dx_1 + \alpha_{i2} dx_2 + \ldots + \alpha_{in} dx_n & (i = 1, 2, \ldots, m), \\ \omega_{m+j} = dx_{m+j} & (j = 1, 2, \ldots, n-m), \end{cases}$$

les α_{ik} étant les coefficients qui entrent dans les équations (E_1).

Toutes les transformations (1) laissent invariante chacune des n expressions de Pfaff ω_1, ..., ω_n et par suite aussi leurs covariants bilinéaires. Or, ces covariants sont des expressions bilinéaires par rapport aux ω_i, aux dX_i et aux premiers membres des équations (E_2), ils s'annulent de plus avec les ω_i :

$$(5)\qquad \omega'_i = \omega_1 \varpi_{i1} + \omega_2 \varpi_{i2} + \ldots + \omega_n \varpi_{in} + \ldots \qquad (i = 1, 2, \ldots, m);$$

les termes non écrits ne dépendant que des ω_i et des dX_i, les ϖ_{ik} étant des combinaisons linéaires des premiers membres des équations (E_2). Si l'on désigne par $\overline{\omega}_i$, $\overline{\varpi}_{ik}$ ce que deviennent ω_i et ϖ_{ik} par la transformation (1), il est évident que l'on a

$$\overline{\omega}_1 \overline{\varpi}_{i1} + \overline{\omega}_2 \overline{\varpi}_{i2} + \ldots + \overline{\omega}_n \overline{\varpi}_{in} = \omega_1 \varpi_{i1} + \ldots + \omega_n \varpi_{in} + \ldots,$$

Soient donnés $m+n$ variables

$$x_1, x_2, \ldots, x_m; \quad y_1, y_2, \ldots, y_n,$$

et deux groupes G et G′, le premier transformant entre elles les seules variables x, le second au contraire les $m+n$ variables x et y. Si G′ transforme entre elles les variables x, et cela de la même manière que le groupe G, nous disons que G′ est *prolongé* de G, ou que G′ résulte du prolongement de G. Le prolongement sera dit *holoédrique* si toute transformation de G′ qui ne change pas les variables x laisse également invariantes les variables y; il sera dit *hémiédrique* dans le cas contraire.

Cela étant, deux groupes G et Γ quelconques seront dits *isomorphes holoédriques*, ou, plus simplement, *isomorphes*, si l'on peut les prolonger holoédriquement de manière à obtenir deux groupes G′ et Γ′ transformant le même nombre de variables et semblables entre eux (¹). Le groupe G sera dit *isomorphe mériédrique* de Γ si le groupe Γ′ seul résulte du prolongement holoédrique de Γ, le groupe G′ résultant d'un prolongement mériédrique, et si de plus G et Γ ne sont pas isomorphes holoédriques.

On reconnaît bien facilement que deux groupes isomorphes holoédriques d'un troisième sont isomorphes holoédriques entre eux; que si G est isomorphe mériédrique de G′, G′ isomorphe holoédrique ou mériédrique de G″, G est isomorphe mériédrique de G″.

Nous verrons plus loin que la définition précédente de l'isomorphisme coïncide au fond avec la définition ordinaire dans le cas des groupes finis. Jusqu'à présent il n'a pas été donné de définition précise de l'isomorphisme dans le cas des groupes infinis.

Nous dirons enfin que deux groupes isomorphes holoédriques ont la même *structure*.

19. D'après ces définitions ont voit que les transformations (1) considérées au début de ce Chapitre définissent un prolongement holoé-

(¹) Deux groupes, l'un à n variables x, l'autre à n variables y, sont semblables, d'après Lie, lorsqu'on peut passer de l'un à l'autre en prenant pour les y des fonctions convenables indépendantes des x.

drique du groupe défini par les équations (E) et, par suite, un groupe de la même structure. Les résultats des nos 16 et 17 peuvent donc s'énoncer de la manière suivante :

Étant donné un groupe admettant h invariants indépendants

$$U_1, \quad U_2, \quad \ldots, \quad U_h,$$

on peut en déduire, au besoin par l'adjonction de variables auxiliaires, $r+p$ expressions de Pfaff,

$$\omega_1, \quad \omega_2, \quad \ldots, \quad \omega_r; \qquad \varpi_1, \quad \varpi_2, \quad \ldots, \quad \varpi_p$$

telles que l'on ait des formules

$$dU_i = V_{i1}\omega_1 + V_{i2}\omega_2 + \ldots + V_{ir}\omega_r \qquad (i = 1, 2, \ldots, h),$$
$$\omega'_k = \sum c_{ijk}\omega_i\omega_j + \sum a_{i\rho k}\omega_i\varpi_\rho \qquad (i = 1, 2, \ldots, h),$$

où les V_{ik}, c_{ijk}, $a_{i\rho k}$ sont des fonctions des U, les quantités $a_{i\rho k}$ formant un système involutif. Si deux groupes ont le même nombre h d'invariants, si pour eux r et p ont les mêmes valeurs et si les V_{ik}, c_{ijk}, $a_{i\rho k}$ sont les mêmes fonctions des invariants, ces deux groupes ont la même structure. Enfin on peut, sans changer la structure d'un groupe, effectuer sur les U une transformation quelconque, remplacer les ω par r combinaisons linéaires indépendantes quelconques des ω à coefficients fonctions des U, et les ϖ par p combinaisons linéaires quelconques des ω et des ϖ, à coefficients fonctions des U, et indépendantes par rapport aux ϖ.

On peut donc dire que, jusqu'à un certain point, les entiers h, r, p, les fonctions V_{ik}, c_{ijk}, $a_{i\rho k}$ *définissent* la structure d'un groupe. Mais nous verrons plus loin que deux groupes peuvent avoir la même structure sans que les entiers, h et r par exemple, soient les mêmes, et cela est d'ailleurs à peu près évident *a priori*. Naturellement on peut toujours s'arranger pour que l'on ait

$$dU_1 = \omega_1, \qquad \ldots, \qquad dU_h = \omega_h.$$

Enfin, remarquons que le plus grand groupe qui laisse invariantes les fonctions U et les expressions de Pfaff ω à ses équations de définition du premier ordre puisque ces équations sont (n° 17)

$$\Omega_k - \omega_k = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, r).$$

20. Nous allons maintenant montrer que les coefficients c_{ijk}, $a_{i\rho k}$ de la structure d'un groupe ne sont pas arbitraires. Ils satisfont évidemment aux conditions qu'on obtient en appliquant l'*identité fondamentale* aux covariants ω'_k. Nous allons chercher ces conditions et nous démontrerons ensuite qu'elles sont suffisantes.

Supposons d'abord que le groupe soit fini, et, pour fixer les idées, transitif. Alors les r^3 coefficients c_{ijk} sont des constantes. Le covariant trilinéaire de

$$\omega'_k = \sum_{(ij)} c_{ijk}\,\omega_i\,\omega_j \qquad (k = 1, 2, \ldots, r) \tag{10}$$

est donné par la formule

$$\sum c_{ijk}(\omega'_i\,\omega_j - \omega_i\,\omega'_j)$$

ou, en développant,

$$\sum_{(\lambda,\mu,\nu)} \sum_{i} (c_{\lambda\mu i}\,c_{i\nu k} + c_{\mu\nu i}\,c_{i\lambda k} + c_{\nu\lambda i}\,c_{i\mu k})\,\omega_\lambda\,\omega_\mu\,\omega_\nu.$$

Les conditions cherchées sont, par suite,

$$\sum_{i}^{1,2,\ldots,r} (c_{\lambda\mu i}\,c_{i\nu k} + c_{\mu\nu i}\,c_{i\lambda k} + c_{\nu\lambda i}\,c_{i\mu k}) = 0 \tag{11}$$
$$(\lambda, \mu, \nu, k = 1, 2, \ldots, r),$$

auxquelles on doit ajouter les suivantes, évidentes,

$$c_{ijk} + c_{jik} = 0. \tag{12}$$

On reconnaît les conditions auxquelles satisfont les r^3 constantes qui se présentent dans la théorie ordinaire de la structure des groupes finis. On peut d'ailleurs mettre en évidence le lien qui rattache les deux théories. Supposons que $\omega_1, \ldots, \omega_r$ soient des expressions de Pfaff (linéairement indépendantes) à r variables. Si f désigne une fonction quelconque de ces r variables, la différentielle df peut manifestement se mettre sous la forme d'une combinaison linéaire des ω. En désignant par $X_i f$ le coefficient de ω_i

$$df = X_1 f \omega_1 + X_2 f \omega_2 + \ldots + X_r f \omega_r, \tag{13}$$

on peut regarder les $X_i f$ comme les symboles de r transformations infinitésimales. En égalant alors les covariants bilinéaires des deux membres de (13), on trouve

$$X_i(X_j f) - X_j(X_i f) = \sum_k c_{jik} X_k f, \tag{14}$$

ce qui montre que les r transformations $X_i f$ engendrent un groupe dont la structure, au sens ordinaire du mot, est précisément caractérisée par les r^3 constantes c_{ijk}. C'est le groupe simplement transitif réciproque du groupe donné. Réciproquement, la formule (13) permettrait de déduire d'un groupe simplement transitif donné par ses transformations infinitésimales un autre groupe défini par r expressions de Pfaff invariantes.

21. Passons maintenant aux groupes infinis et, pour simplifier les calculs, supposons-les transitifs; les modifications à introduire dans les formules pour les groupes intransitifs seront indiquées ensuite.

La structure d'un groupe infini transitif est donnée par les formules

$$\omega'_k = \sum c_{ijk} \omega_i \omega_j + \sum a_{i\rho k} \omega_i \varpi_\rho \qquad (k = 1, 2, \ldots, r), \tag{7}$$

où les $a_{i\rho k}$ et les c_{ijk} sont des *constantes*, les premières formant un système involutif. Calculant le covariant trilinéaire de ω'_k en tenant compte de (7), on obtient l'expression

$$
(15)\quad \left\{
\begin{aligned}
&- \sum_{\lambda,\rho} a_{\lambda\rho k}\,\omega_\lambda\,\varpi'_\rho \\
&+ \sum_{\lambda,(\rho\sigma)} \sum_i (a_{\lambda\rho i}\,a_{i\sigma k} - a_{\lambda\sigma i}\,a_{i\rho k})\,\omega_\lambda\,\varpi_\rho\,\varpi_\sigma \\
&+ \sum_{(\lambda\mu\nu),\rho} \sum_i (c_{\lambda\mu i}\,a_{i\rho k} + c_{i\lambda k}\,a_{\mu\rho i} - c_{i\mu k}\,a_{\lambda\rho i})\,\omega_\lambda\,\omega_\mu\,\varpi_\rho \\
&+ \sum_{(\lambda\mu\nu)} \sum_i (c_{\lambda\mu i}\,c_{i\nu k} + c_{\mu\nu i}\,c_{i\lambda k} + c_{\nu\lambda i}\,c_{i\mu k})\,\omega_\lambda\,\omega_\mu\,\omega_\nu.
\end{aligned}
\right.
$$

Remarquons maintenant que les ϖ' sont des expressions bilinéaires par rapport aux ω et aux ϖ, soit

$$
(16)\qquad \varpi'_\tau = \sum_{(\rho\sigma)} \gamma_{\rho\sigma\tau}\,\varpi_\rho\,\varpi_\sigma + \sum_{\lambda,\rho} z_{\lambda\rho\tau}\,\omega_\lambda\,\varpi_\rho + \sum_{(\lambda\mu)} y_{\lambda\mu\tau}\,\omega_\lambda\,\omega_\mu.
$$

Si alors dans l'expression (15) on annule le coefficient de $\omega_\lambda\,\varpi_\rho\,\varpi_\sigma$, on obtient

$$
(17)\qquad \sum_i^{1,2,\dots,r} (a_{\lambda\rho i}\,a_{i\sigma k} - a_{\lambda\sigma i}\,a_{i\rho k}) = \sum_\tau^{1,2,\dots,p} a_{\lambda\tau k}\,\gamma_{\rho\sigma\tau}.
$$

Les équations (17) *où les* $\gamma_{\rho\sigma\tau}$ *sont des indéterminées doivent donc être compatibles.*

On peut énoncer cette condition sous une forme plus intuitive. Les seconds membres des équations (17) sont en effet linéairement indépendants par rapport aux $\frac{p^2(p-1)}{2}$ quantités $\gamma_{\rho\sigma\tau}$, car les r^2 formes linéaires

$$
\sum_\tau a_{\lambda\tau k}\,\varpi_\tau \qquad (\lambda,\ k = 1, 2, \dots, r)
$$

donnent les p expressions ϖ. Par suite, le système (17), s'il est compatible, donne pour les $\gamma_{\rho\sigma\tau}$ des valeurs *constantes*. Les équations (17) signifient alors que les p transformations infinitésimales linéaires et homogènes

$$\text{(18)} \qquad U_\rho f = \sum_{i,k} a_{i\rho k} u_i \frac{\partial f}{\partial u_k} \qquad (\rho = 1, 2, \ldots, p)$$

engendrent un groupe dont la structure est déterminée par les constantes $\gamma_{\rho\sigma\tau}$.

Donc *une première condition nécessaire à laquelle doivent satisfaire les constantes* $a_{i\rho k}$ *est que les* p *transformations infinitésimales* (18) *engendrent un groupe linéaire et homogène.*

Nous désignerons ce groupe par Γ.

22. Nous arriverons à une nouvelle condition en égalant à zéro dans l'expression (15) le coefficient de $\omega_\lambda \omega_\mu \varpi_\rho$.

En se reportant à (16), cette nouvelle condition peut s'exprimer de la manière suivante :

Le système des $\frac{pr(r-1)}{2}$ *équations linéaires aux* $p^2 r$ *inconnues* $z_{\lambda\rho\tau}$

$$\text{(19)} \qquad \sum_\tau^{1,2,\ldots,p} (a_{\lambda\tau k} z_{\mu\rho\tau} - a_{\mu\tau k} z_{\lambda\rho\tau}) = \sum_i^{1,2,\ldots,r} (c_{\lambda\mu i} a_{i\rho k} + c_{i\lambda k} a_{\mu\rho i} - c_{i\mu k} a_{\lambda\rho i})$$
$$(\lambda, \mu = 1, 2, \ldots, r; \quad \rho = 1, 2, \ldots, p)$$

est compatible.

Enfin une dernière condition nécessaire s'obtient en annulant dans l'expression (15) le coefficient de $\omega_\lambda \omega_\mu \omega_\nu$.

En se reportant à (16), on a la condition suivante :

Le système des $\frac{r(r-1)(r-2)}{6}$ *équations linéaires aux* $\frac{pr(r-1)}{2}$ *inconnues* $y_{\lambda\mu\tau}$

$$\text{(20)} \qquad \begin{aligned} &\sum_\tau^{1,2,\ldots,p} (a_{\lambda\tau k} y_{\mu\nu\tau} + a_{\mu\tau k} y_{\nu\lambda\tau} + a_{\nu\tau k} y_{\lambda\mu\tau}) \\ &= \sum_i^{1,2,\ldots,r} (c_{\lambda\mu i}\, c_{i\nu k} + c_{\mu\nu i}\, c_{i\lambda k} + c_{\nu\lambda i}\, c_{i\mu k}) \end{aligned} \qquad (\lambda, \mu, \nu = 1, 2, \ldots, r)$$

est compatible.

23. Nous sommes donc arrivés à trouver pour les constantes $a_{i\rho k}$ et c_{ijk} des conditions nécessaires de quatre espèces, à savoir :

1° La propriété des $a_{i\rho k}$ de former un système involutif;

2° La propriété des p transformations infinitésimales $U_\rho f$ de former un groupe;

3° La compatibilité du système (19);

4° La compatibilité du système (20).

Remarquons que les deux premières conditions ne se rapportent qu'aux constantes $a_{i\rho k}$ et que, si elles sont vérifiées, il existe un moyen de satisfaire aux deux dernières : c'est de prendre toutes les constantes c_{ijk} nulles [1].

Remarquons encore que le système (19), s'il est compatible, ne détermine pas complètement les inconnues $z_{\lambda\rho\tau}$; on peut encore prendre arbitrairement

$$\sigma_1 + 2\sigma_2 + \ldots + r\sigma_r$$

d'entre elles; cela résulte de ce que les $a_{i\rho k}$ forment un système involutif.

Si le groupe est intransitif, les deux premières conditions subsistent intégralement. Les deux autres subsistent également, mais à condition d'ajouter aux seconds membres des équations (19) et (20) des termes complémentaires. Supposons, pour fixer les idées, que le groupe admette les h invariants indépendants $x_1, x_2, \ldots, x_h$ et que l'on ait pris

$$\omega_1 = dx_1, \qquad \omega_2 = dx_2, \qquad \ldots, \qquad \omega_h = dx_h,$$

ce qui est toujours possible. Alors il faut ajouter au second membre de l'équation (19) le terme complémentaire

$$\frac{\partial a_{\mu\rho k}}{\partial x_\lambda} - \frac{\partial a_{\lambda\rho k}}{\partial x_\mu} \tag{19'}$$

---

[1] Dans le cas général, les conditions 3° et 4° expriment que, *une fois les $a_{i\rho k}$ choisies*, les constantes c_{ijk} sont assujetties à vérifier deux systèmes d'équations homogènes entières, l'un du premier degré, l'autre du second degré.

et au second membre de l'équation (20) le terme complémentaire

$$(20') \qquad \frac{\partial c_{\lambda\mu k}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial c_{\mu\nu k}}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial c_{\nu\lambda k}}{\partial x_\mu}.$$

Il est bon d'ailleurs de rappeler que les $a_{i\rho k}$ et les c_{ijk} ne dépendent que de $x_1, x_2, \ldots, x_h$.

24. Nous allons démontrer maintenant la réciproque du théorème précédent, à savoir que *les conditions nécessaires énoncées au n° 23 pour les coefficients $a_{i\rho k}$ et c_{ijk} sont également suffisantes*, c'est-à-dire que, *si elles sont vérifiées, on peut toujours trouver $r+p$ expressions de Pfaff linéairement indépendantes à un nombre quelconque $n \geqq r+p$ de variables dont les covariants satisfassent aux relations* (7).

Nous allons faire la démonstration pour les groupes transitifs, elle serait la même pour les groupes intransitifs.

Si

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_n$$

sont les n variables données, il s'agit au fond de déterminer $n(r+p)$ fonctions de ces variables définies par

$$\begin{aligned} \omega_i &= z_{i1}\,dx_1 + \ldots + z_{in}\,dx_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, r), \\ \varpi_\rho &= t_{\rho 1}\,dx_1 + \ldots + t_{\rho n}\,dx_n \qquad (\rho = 1, 2, \ldots, p). \end{aligned}$$

Le système d'équations aux dérivées partielles auxquelles satisfont ces fonctions s'obtient en égalant dans les deux membres de l'équation (7) les coefficients de $dx_\alpha\,dx_\beta$

$$(21) \qquad \frac{\partial z_{k\beta}}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial z_{k\alpha}}{\partial x_\beta} = \sum_{(ij)} c_{ijk}(z_{i\alpha} z_{j\beta} - z_{i\beta} z_{j\alpha}) + \sum_{i,\rho} a_{i\rho k}(z_{i\alpha} t_{\rho\beta} - z_{i\beta} t_{\rho\alpha})$$
$$(k = 1, 2, \ldots, r;\ \alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n).$$

Nous poserons

$$(22) \qquad z_{k\alpha\beta} = \frac{\partial z_{k\alpha}}{\partial x_\beta}, \qquad z_{k\alpha\beta\gamma} = \frac{\partial^2 z_{k\alpha}}{\partial x_\beta\,\partial x_\gamma},$$

$$(23) \qquad t_{\rho\alpha\beta} = \frac{\partial t_{\rho\alpha}}{\partial x_\beta}.$$

Le système (21) peut alors être remplacé par un système de Pfaff

$$(24)\quad dz_{k\alpha} - z_{k\alpha 1}\,dx_1 - \ldots - z_{k\alpha n}\,dx_n = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, r;\ \alpha = 1, 2, \ldots, n),$$

les coefficients $z_{k\alpha\beta}$ étant liés par les relations (24')

$$(24')\quad z_{k\beta\alpha} - z_{k\alpha\beta} = \sum_{(ij)} c_{ijk}(z_{i\alpha} z_{j\beta} - z_{i\beta} z_{j\alpha}) + \sum_{i,\rho} a_{i\rho k}(z_{i\alpha} t_{\rho\beta} - z_{i\beta} t_{\rho\alpha})$$

qui permettent de prendre arbitrairement les $z_{k\alpha\beta}$ pour lesquels

$$\alpha \leqq \beta,$$

les autres s'exprimant au moyen des premiers, des $z_{i\alpha}$ et des $t_{\rho\alpha}$.

Nous allons d'abord chercher quels sont, pour ce système de Pfaff, les entiers caractéristiques, que nous désignerons ici par

$$Q;\quad \Sigma_1,\quad \Sigma_2,\quad \ldots,\quad \Sigma_n,$$

en réservant les notations σ pour désigner les entiers caractéristiques du système involutif des $a_{i\rho k}$; on a d'ailleurs ici

$$\sigma_{r+1} = \sigma_{r+2} = \ldots = \sigma_n = 0,$$
$$p = \sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_n.$$

Si l'on prend les covariants bilinéaires des premiers membres des équations (24), en tenant compte de ces équations elles-mêmes, les expressions de Pfaff nouvelles qui s'introduisent sont, à part les dx_i, les différentielles

$$dz_{k\alpha\beta} \qquad (\alpha \leqq \beta)$$

et les différentielles

$$dt_{\rho\alpha},$$

ces dernières n'entrant d'ailleurs que par les combinaisons

$$(25)\quad \sum_{i,\rho} a_{i\rho k}(z_{i\alpha}\,dt_{\rho\beta} - z_{i\beta}\,dt_{\rho\alpha}) \qquad (k = 1, 2, \ldots, r;\ \alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n).$$

On a donc déjà immédiatement

$$(26)\qquad Q = r\,\frac{n(n+1)}{2} + pn.$$

Pour calculer les Σ, considérons d'abord les expressions (25) pour lesquelles α et β prennent toutes les valeurs inférieures ou égales à un nombre donné h et cherchons le nombre de celles de ces expressions qui sont linéairement indépendantes. Or ce nombre n'est autre chose que celui des équations indépendantes qui expriment que les h éléments linéaires

$$\frac{\omega_1}{z_{1\alpha}} = \frac{\omega_2}{z_{2\alpha}} = \ldots = \frac{\omega_r}{z_{r\alpha}} = \frac{\varpi_1}{t_{1\alpha}} = \ldots = \frac{\varpi_p}{t_{p\alpha}} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, h)$$

sont en involution deux à deux par rapport aux r expressions bilinéaires

$$\sum_{i,\rho} a_{i\rho k}\,\omega_i \varpi_\rho \qquad (k = 1, 2, \ldots, r);$$

ce nombre est donc

$$\sigma_1 + (\sigma_1 + \sigma_2) + \ldots + (\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_{h-1}).$$

On déduit de là très facilement les valeurs suivantes des Σ_i dont chacun est la somme de deux entiers, l'un se rapportant aux différentielles $dz_{k\alpha\beta}\,(\alpha \leqq \beta)$, l'autre aux expressions (25):

$$(27)\qquad \begin{cases} \Sigma_1 = rn, \\ \Sigma_2 = r(n-1) + \sigma_1, \\ \Sigma_3 = r(n-2) + \sigma_1 + \sigma_2, \\ \Sigma_n = r.1 \qquad\quad + \sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_{n-1}. \end{cases}$$

Par conséquent, pour que le système soit en involution, il faut et il suffit que le nombre des paramètres, dont dépend l'élément intégral le plus général d'ordre n, soit égal à

$$(28)\qquad nQ - (n-1)\Sigma_1 - (n-2)\Sigma_2 - \ldots - \Sigma_{n-1},$$

autrement dit, en désignant par

$$\Sigma'_1, \quad \Sigma'_2, \quad \ldots, \quad \Sigma'_n$$

les entiers caractéristiques du système prolongé, on doit avoir

$$\Sigma'_1 + \Sigma'_2 + \ldots + \Sigma'_n + (n-1)\Sigma_1 + (n-2)\Sigma_2 + \ldots + \Sigma_{n-1} = nQ.$$

25. Pour former le système prolongé du système de Pfaff (24), considérons d'abord le cas extrêmement simple du système

$$(29)\qquad \frac{\partial z_\alpha}{\partial x_\beta} - \frac{\partial z_\beta}{\partial x_\alpha} = A_{\alpha\beta} \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n),$$

les $A_{\alpha\beta}$ étant des fonctions données des x. Les équations qu'on obtient en différentiant les équations du système peuvent se ranger dans deux catégories :

1° Des équations qui ramènent les $\frac{\partial^2 z_\alpha}{\partial x_\beta \partial x_\gamma}$, à des fonctions près des x, à celles d'entre elles pour lesquelles on a

$$\alpha \geqq \beta \geqq \gamma;$$

2° Les relations

$$\frac{\partial A_{\beta\gamma}}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial A_{\gamma\alpha}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial A_{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma} = 0 \qquad (\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \ldots, n)$$

entre les dérivées des fonctions $A_{\alpha\beta}$; ces relations expriment d'ailleurs simplement que le covariant trilinéaire de l'expression

$$dz_1\, dx_1 + dz_2\, dx_2 + \ldots + dz_n\, dx_n$$

est identiquement nul; par suite, elles peuvent s'obtenir en appliquant l'*identité fondamentale* au covariant bilinéaire de l'expression inconnue

$$z_1\, dx_1 + z_2\, dx_2 + \ldots + z_n\, dx_n.$$

D'après cela, les paramètres dont dépend l'élément intégral le plus général d'ordre n du système de Pfaff (24) sont les $z_{k\alpha\beta\gamma}$ et les $t_{\rho\alpha\beta}$. Mais ces quantités sont liées par des relations de deux catégories :

1° Les unes ramènent, à des combinaisons linéaires près des $t_{\rho\alpha\beta}$, tous les $z_{k\alpha\beta\gamma}$ à ceux pour lesquels

$$\alpha \geqq \beta \geqq \gamma$$

et qui sont en nombre

$$r\frac{n(n+1)(n+2)}{6};$$

2° Les autres établissent des relations entre les $t_{\rho\alpha\beta}$ seuls, et l'*on peut les obtenir en appliquant l'identité fondamentale aux covariants bilinéaires des expressions de Pfaff inconnues*

$$\omega_1, \quad \omega_2, \quad \ldots, \quad \omega_r.$$

Or l'application de l'identité fondamentale aux ω exprime tout simplement que l'expression (15) (n° 21) est identiquement nulle. D'après l'hypothèse même on peut trouver des *constantes* $\gamma_{\rho\sigma\tau}$, $z_{\lambda\rho\tau}$, $y_{\lambda\mu\tau}$, telles que les expressions bilinéaires

$$\varpi'_\tau = \sum_{(\rho\sigma)} \gamma_{\rho\sigma\tau}\varpi_\rho\varpi_\sigma + \sum_{\lambda,\rho} z_{\lambda\rho\tau}\omega_\lambda\varpi_\rho + \sum_{(\lambda\mu)} y_{\lambda\mu\tau}\omega_\lambda\omega_\mu$$

annulent (15). Les expressions les plus générales qui satisferont à ces conditions s'obtiendront alors en leur ajoutant les expressions bilinéaires Π_ρ les plus générales qui annulent

$$\sum_{i,\rho} a_{i\rho k}\omega_i\Pi_\rho \qquad (k = 1, 2, \ldots, r).$$

Or, d'après un théorème démontré au Chapitre Ier (n° 8), si l'on considère le système involutif *prolongé* du système des $a_{i\rho k}$ et qui provient de l'élément le plus général d'ordre n qui annule

$$\sum a_{i\rho k}\omega_i\varpi_\rho,$$

soit

$$\varpi_\tau = \sum_{i,\lambda} b_{i\lambda\tau} u_\lambda \omega_i \qquad (\tau = 1, 2, \ldots, p),$$

on a

$$\Pi_\tau = \sum_{i,\lambda} b_{i\lambda\tau}\omega_i \chi_\lambda \qquad (\tau = 1, 2, \ldots, p).$$

Nous voyons alors que *le nombre des $t_{\lambda\alpha\beta}$ indépendants se calcule comme tout à l'heure celui des $z_{\lambda\alpha\beta}$*; ce dernier était

$$\Sigma_1 + \Sigma_2 + \ldots + \Sigma_n;$$

ici il faudra remplacer

$$\begin{array}{lll} r & \text{par} & p, \\ \sigma_1 & \text{par} & \sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_n, \\ \sigma_2 & \text{par} & \qquad \sigma_2 + \ldots + \sigma_n, \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \sigma_n & \text{par} & \qquad\qquad \sigma_n, \end{array}$$

les entiers caractéristiques σ' du système involutif des $b_{i\lambda\tau}$ se déduisant en effet des σ du système des $a_{i\lambda\rho}$ comme l'indiquent les formules précédentes.

Donc le nombre des paramètres dont dépend l'élément intégral le plus général d'ordre n du système (24) est, d'après les formules (27),

$$\begin{aligned} & r\frac{n(n+1)(n+2)}{6} + pn \\ & \qquad + p(n-1) + \sigma'_1 \\ & \qquad + p(n-2) + \sigma'_1 + \sigma'_2 \\ & \qquad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \qquad + p - 1 \qquad + \sigma'_1 + \sigma'_2 + \ldots + \sigma'_{n-1} \\ = {} & r\frac{n(n+1)(n+2)}{6} + p\frac{n(n+1)}{2} \\ & \qquad + p\frac{n(n-1)}{2} - (n-2)\sigma_1 - (n-3)(\sigma_1 + \sigma_2) \\ & \qquad\qquad - \ldots - (\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_{n-2}). \end{aligned}$$

On vérifie sans peine que ce nombre est égal au nombre (28), ce qui démontre bien la propriété du système (24) d'être en involution.

On voit de plus, d'après ce qui précède, que les valeurs des $z_{i\alpha}$ et des $t_{\rho\alpha}$ sont absolument arbitraires, que par suite il existe toujours une infinité d'intégrales pour lesquelles les $r + p$ expressions de Pfaff ω et ϖ sont indépendantes. Cette remarque démontre complètement le théorème.

On peut aussi, de la démonstration même, déduire le degré d'indétermination de la solution. Elle dépend en particulier de

$$Q - (\Sigma_1 + \ldots + \Sigma_{n-1})$$

fonctions arbitraires de n arguments; ce nombre est égal à

$$r + 2\sigma_1 + 3\sigma_2 + \ldots + n\sigma_{n-1} + n\sigma_n.$$

Enfin l'on peut remarquer que dans le cas des groupes finis la démonstration est à peu près immédiate; on peut la considérer comme une des démonstrations les plus simples du troisième théorème fondamental de la théorie des groupes de Lie.

26. Pour terminer ces généralités, nous allons montrer comment on peut, dans certains cas, réduire le degré d'intransitivité d'un groupe sans changer sa structure et nous nous appuierons pour cela sur la remarque suivante sur laquelle nous reviendrons en détail dans le Chapitre suivant.

Si l'on considère les r expressions de Pfaff

$$\omega_1, \quad \omega_2, \quad \ldots, \quad \omega_r$$

laissées invariantes par le groupe, elles définissent, égalées à zéro, un système complètement intégrable, puisque les covariants ω' s'annulent tous avec les ω. Désignons par

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_r$$

les intégrales de ce système, nous supposerons que les h dernières soient précisément les invariants du groupe. Ces r variables x sont échangées entre elles par le groupe, en vertu des équations

$$\Omega_k - \omega_k = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, r)$$

qui expriment tous les dX_k en fonctions linéaires des dx. De plus, si l'on pose

$$\omega_k = \alpha_{k1} dx_1 + \alpha_{k2} dx_2 + \ldots + \alpha_{kr} dx_r \qquad (k = 1, 2, \ldots, r),$$

les α_{ki} dépendent de p fonctions nouvelles indépendantes des x et toute transformation du groupe qui laisse invariantes $x_1, x_2, \ldots, x_r$ laisse manifestement invariants ces coefficients. Par suite le groupe considéré est le *prolongement holoédrique* d'un groupe en

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_r.$$

Ce dernier groupe a d'ailleurs manifestement ses équations de définition du premier ordre. Il peut être pris comme représentant la structure définie par les coefficients qui entrent dans les ω'_k :

$$(7)\qquad \omega'_k = \sum_{(ij)} c_{ijk}\omega_i\omega_j + \sum a_{i\rho k}\omega_i\varpi_\rho \qquad (k=1, 2, \ldots, r).$$

27. Une autre remarque importante est la suivante. Considérons les pr équations de Pfaff

$$(30)\qquad \sum_i a_{i\rho k}\omega_i = 0 \qquad (\rho = 1, 2, \ldots, p;\ k = 1, 2, \ldots, r).$$

Elles forment un système complètement intégrable. Supposons en effet, ce qui est toujours possible, que ce système soit

$$\omega_1 = \omega_2 = \ldots = \omega_q = 0 \qquad (q \leqq r),$$

alors les $a_{i\rho k}$ sont tous nuls pour $i > q$ et, parmi les formes linéaires $\Sigma a_{i\rho k}\omega_i$, il y en a q indépendantes. Il s'agit de démontrer au fond que l'on a

$$(31)\qquad c_{q+\alpha, q+\beta, k} = 0 \qquad (\alpha = \beta = 1, 2, \ldots, r-q;\ k = 1, 2, \ldots, q).$$

Or l'application de l'identité fondamentale donne, en prenant le terme en

$$\omega_{q+\alpha}\omega_{q+\beta}\varpi_\rho,$$

la relation

$$\sum_i^{1,\ldots,q} a_{i\rho k}c_{q+\alpha, q+\beta, i} = 0 \qquad (\rho = 1, 2, \ldots, p;\ k = 1, 2, \ldots, r;\ \alpha, \beta = 1, 2, \ldots, r-q),$$

et par suite on en déduit les relations cherchées (31).

28. Cela étant, supposons, comme nous l'avons déjà dit, que

$$x_{r-h+1}, \quad \ldots, \quad x_r$$

soient les h invariants;

$$(32)\qquad \begin{cases} X_1 = f_1 \quad (x_1, \ldots, x_r), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ X_{r-h} = f_{r-h}(x_1, \ldots, x_r), \end{cases}$$

les équations du groupe donné G. Cherchons ce que deviennent ces équations quand, dans les seconds membres, on donne aux q intégrales du système (30) des valeurs constantes. Les équations (32) définissent alors la solution générale du système de Pfaff

$$(33) \qquad \Omega_k - \omega_k = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, r),$$

où les ω sont liées par les relations (30). Les covariants bilinéaires des premiers membres de ce système sont alors nuls en tenant compte des équations (33); par suite *le système est complètement intégrable* et son intégrale générale dépend de $r - h$ constantes arbitraires.

Autrement dit *les équations* (32) *du groupe peuvent se mettre sous la forme*

$$(34) \qquad \left\{ \begin{array}{l} X_1 \quad = f_1 \quad (x_1, \ldots, x_r;\ A_1, \ldots, A_{r-h}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ X_{r-h} = f_{r-h}(x_1, \ldots, x_r;\ A_1, \ldots, A_{r-h}), \end{array} \right.$$

où les f sont des fonctions parfaitement déterminées de leurs arguments, indépendantes par rapport aux A, *et où les* A *ne dépendent que des q intégrales du système* (30).

Parmi ces q intégrales de (30), il peut y en avoir un certain nombre qui soient des invariants du groupe; supposons qu'il y en ait h' et h' seulement, soit

$$x_{r-h+1}, \quad \ldots, \quad x_{r-h+h'}$$

que nous désignerons, pour plus de simplicité, par

$$y_1, \quad \ldots, \quad y_{h'}.$$

Si maintenant nous donnons aux autres des valeurs constantes fixées une fois pour toutes, ainsi qu'aux autres variables $x_1, \ldots, x_{r-h}$ indépendantes des précédentes, nous voyons que si dans les formules (32) on donne à

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_{r-h}$$

des valeurs constantes

$$x_1^0, \quad x_2^0, \quad \ldots, \quad x_{r-h}^0,$$

elles se réduisent à

$$(35)\quad \left\{\begin{array}{l} X_1 \quad = f_1 \quad (x_{r-h+1}, \ldots, x_r;\ A_1, \ldots, A_{r-h}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ X_{r-h} = f_{r-h}(x_{r-h+1}, \ldots, x_r;\ A_1, \ldots, A_{r-h}), \end{array}\right.$$

où les f sont des fonctions déterminées de leurs arguments, indépendantes par rapport aux A, ces quantités A étant elles-mêmes des fonctions des h' invariants y.

Nous pouvons d'après cela faire un changement de variables tel que ces équations se réduisent à

$$(36)\quad \left\{\begin{array}{l} \overline{X}_1 \quad = A_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \overline{X}_{r-h} = A_{r-h}, \end{array}\right.$$

et ces formules (36) indiqueront alors la transformation la plus générale du groupe G lorsque les valeurs initiales

$$\overline{x}_1, \quad \overline{x}_2, \quad \ldots, \quad \overline{x}_{r-h}$$

sont $r-h$ fonctions *déterminées* des invariants. Supposons qu'il en soit ainsi. Je dis alors que dans la transformation la plus générale du groupe

$$(37)\quad \left\{\begin{array}{l} \overline{X}_1 \quad = \varphi_1 \quad (\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_{r-h};\ x_{r-h+1}, \ldots, x_r), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \overline{X}_{r-h} = \varphi_{r-h}(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_{r-h};\ x_{r-h+1}, \ldots, x_r), \end{array}\right.$$

les fonctions φ ne dépendent pas des $h-h'$ derniers invariants. En effet, en faisant d'abord la transformation la plus générale de la forme (36) puis la transformation (37), on doit trouver encore une transformation de la forme (36); or cette transformation résultante est

$$(38)\quad \left\{\begin{array}{l} \overline{X}_1 \quad = \varphi_1 \quad (A_1, \ldots, A_{r-h};\ x_{r-h+1}, \ldots, x_r), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \overline{X}_{r-h} = \varphi_{r-h}(A_1, \ldots, A_{r-h};\ x_{r-h+1}, \ldots, x_r). \end{array}\right.$$

Les seconds membres ne devant dépendre que des h' invariants y et les A ne dépendant eux-mêmes que de ces h' invariants y, il en résulte que *les fonctions* φ *ne dépendent pas de*

$$x_{r-h+h'+1}, \quad \ldots, \quad x_r.$$

En ajoutant aux équations (37) les équations

$$\begin{gathered} Y_1 = y_1, \\ \ldots\ldots\ldots, \\ Y_{h'} = y_{h'}, \end{gathered}$$

on voit que l'on obtient un groupe G' *à* h' *invariants seulement* et $r-h+h'$ variables qui est manifestement isomorphe holoédrique au groupe donné G, puisqu'en le prolongeant holoédriquement par les $h-h'$ équations

$$X_{r-i} = x_{r-i} \qquad (i = 0, 1, \ldots, h-h'-1)$$

on obtient un groupe $\overline{\mathrm{G}}$ semblable au groupe donné G.

29. La remarque suivante donne tout son intérêt *pratique* au théorème précédent. On peut déduire le groupe $\overline{\mathrm{G}}$ à r variables du groupe G en donnant aux $h-h'$ invariants

$$x_{r-h+h'+1}, \quad \ldots, \quad x_r$$

des valeurs constantes (ou fonctions déterminées des invariants y). Comme $\overline{\mathrm{G}}$ est semblable à G, si dans ce groupe donné G on donne aux mêmes $h-h'$ invariants des valeurs constantes, on obtient un groupe *semblable* à G', à h' invariants et $r-h+h'$ variables. On peut donc énoncer le théorème du numéro précédent sous la forme suivante :

Étant donné un groupe admettant h invariants

$$U_1, \quad U_2, \quad \ldots, \quad U_h$$

et dont la structure est définie par r expressions de Pfaff ω_k *dont les covariants ont la forme*

$$(7) \qquad \omega'_k = \sum_{(ij)} c_{ijk}\omega_i\omega_j + \sum_{i,\rho} a_{i\rho k}\omega_i\varpi_\rho \qquad (k = 1, 2, \ldots, r),$$

on considère parmi les expressions de Pfaff

$$\sum_i a_{i\rho k}\omega_i \qquad (\rho = 1, 2, \ldots, p;\ k = 1, 2, \ldots, r) \tag{30}$$

toutes celles qui s'expriment en fonction linéaire des dU_i; si elles sont au nombre de h', on établit entre les invariants $h - h'$ relations indépendantes quelconques, assujetties seulement à n'établir aucune relation entre les expressions (30). Le groupe ainsi obtenu est isomorphe au groupe donné et n'a plus que h' invariants; pour ce nouveau groupe $h - h'$ des expressions ω peuvent s'exprimer en fonctions linéaires des autres, les coefficients ne dépendant que des h' invariants restants.

Nous donnerons à ces h' invariants le nom d'*essentiels*.

En particulier, si le groupe est fini, il est toujours isomorphe à un groupe *transitif*. Cela n'est plus vrai si le groupe est infini; dans ce dernier cas il y a manifestement un degré minimum d'intransitivité pour chaque structure donnée.

30. Nous allons rapidement, pour terminer ce Chapitre, déterminer toutes les structures pour $r = 1$ et $r = 2$.

Considérons d'abord le cas de $r = 1$. Il est clair que la seule structure possible est donnée par la formule

$$\omega_1' = \omega_1 \varpi_1;$$

on pourra prendre par exemple

$$\omega_1 = y_1\, dx_1,$$

ce qui donnera le groupe

$$X_1 = f(x_1),$$

qui n'est autre que le *groupe général à une variable*.

31. Soit maintenant

$$r = 2.$$

A chaque structure possible est associé un système de nombres σ_1 et σ_2 qui indiquent le degré d'indétermination du groupe. Il y a à cet égard cinq cas possibles :

(a) $\sigma_1 = 1, \quad \sigma_2 = 0, \quad p = 1;$

(b) $\sigma_1 = 2, \quad \sigma_2 = 0, \quad p = 2;$

(c) $\sigma_1 = 1, \quad \sigma_2 = 1, \quad p = 2;$

(d) $\sigma_1 = 2, \quad \sigma_2 = 1, \quad p = 3;$

(e) $\sigma_1 = 2, \quad \sigma_2 = 2, \quad p = 4.$

Dans les cas (a) et (b) les transformations du groupe ne dépendent que de fonctions arbitraires d'un argument; dans les cas (c) et (d), d'une fonction arbitraire de deux arguments; dans le cas (e), de deux fonctions arbitraires de deux arguments.

On voit sans grande difficulté que, en effectuant au besoin une substitution linéaire sur ω_1 et ω_2 et en désignant par Π_1 et Π_2 deux combinaisons linéaires des expressions bilinéaires

$$\sum_\rho a_{1\rho 1}\omega_1\varpi_\rho + \sum_\rho a_{2\rho 1}\omega_2\varpi_\rho,$$
$$\sum_\rho a_{1\rho 2}\omega_1\varpi_\rho + \sum_\rho a_{2\rho 2}\omega_2\varpi_\rho,$$

on peut prendre

$$(\mathrm{a})\quad \begin{cases} \Pi_1 = \omega_1\varpi_1, \\ \Pi_2 = 0, \end{cases}$$

$$(\mathrm{b}_1)\quad \begin{cases} \Pi_1 = \omega_1\varpi_1, \\ \Pi_2 = \omega_1\varpi_2, \end{cases} \qquad (\mathrm{b}_2)\quad \begin{cases} \Pi_1 = \omega_1\varpi_1, \\ \Pi_2 = \omega_2\varpi_2, \end{cases} \qquad (\mathrm{b}_3)\quad \begin{cases} \Pi_1 = \omega_1\varpi_1, \\ \Pi_2 = \omega_1\varpi_2 + \omega_2\varpi_1, \end{cases}$$

$$(\mathrm{c})\quad \begin{cases} \Pi_1 = \omega_1\varpi_1 + \omega_2\varpi_2, \\ \Pi_2 = 0, \end{cases}$$

$$(\mathrm{d}_1)\quad \begin{cases} \Pi_1 = \omega_1\varpi_1, \\ \Pi_2 = \omega_1\varpi_2 + \omega_2\varpi_3, \end{cases} \qquad (\mathrm{d}_2)\quad \begin{cases} \Pi_1 = \omega_1\varpi_1 + \omega_2\varpi_2, \\ \Pi_2 = \omega_1\varpi_3 - \omega_2\varpi_1, \end{cases}$$

$$(\mathrm{e})\quad \begin{cases} \Pi_1 = \omega_1\varpi_1 + \omega_2\varpi_2, \\ \Pi_2 = \omega_1\varpi_3 + \omega_2\varpi_4. \end{cases}$$

Dans chacune de ces formules, Π_1 et Π_2 désignent en somme, à des termes près en $\omega_1\omega_2$, deux combinaisons linéaires (à coefficients fonctions des invariants) de ω'_1 et ω'_2, soit

$$\begin{aligned} H_1 &= a_1\omega'_1 + b_1\omega'_2, \\ H_2 &= a_2\omega'_1 + b_2\omega'_2. \end{aligned}$$

Il nous faut alors exprimer dans chaque cas que les p transformations infinitésimales linéaires désignées par Uf dans le Chapitre précédent forment un groupe, ce qui établira des conditions pour a_1, b_1, a_2, b_2. En tenant compte dans chaque cas du degré d'indétermination qui reste encore dans le choix des ω et des ϖ, on arrive aux formules suivantes, dans lesquelles on a provisoirement négligé les termes en $\omega_1\omega_2$:

$$(\mathrm{a}) \left\{ \begin{aligned} \omega'_1 &= \omega_1\varpi_1, \\ \omega'_2 &= 0, \end{aligned} \right. \qquad (\mathrm{a}') \left\{ \begin{aligned} \omega'_1 &= 0, \\ \omega'_2 &= \omega_1\varpi_1, \end{aligned} \right.$$

$$(\mathrm{b}_1) \left\{ \begin{aligned} \omega'_1 &= \omega_1\varpi_1, \\ \omega'_2 &= \omega_1\varpi_2, \end{aligned} \right. \qquad (\mathrm{b}_2) \left\{ \begin{aligned} \omega'_1 &= \omega_1\varpi_1, \\ \omega'_2 &= \omega_2\varpi_2, \end{aligned} \right. \qquad (\mathrm{b}_3) \left\{ \begin{aligned} \omega'_1 &= m\,\omega_1\varpi_1, \\ \omega'_2 &= \omega_1\varpi_2 + \omega_2\varpi_1, \end{aligned} \right.$$

$$(\mathrm{c}) \left\{ \begin{aligned} \omega'_1 &= \omega_1\varpi_1 + \omega_2\varpi_2, \\ \omega'_2 &= 0, \end{aligned} \right.$$

$$(\mathrm{d}_1) \left\{ \begin{aligned} \omega'_1 &= \omega_1\varpi_1, \\ \omega'_2 &= \omega_1\varpi_2 + \omega_2\varpi_3, \end{aligned} \right. \qquad (\mathrm{d}_2) \left\{ \begin{aligned} \omega'_1 &= \omega_1\varpi_1 + \omega_2\varpi_2, \\ \omega'_2 &= \omega_1\varpi_3 - \omega_2\varpi_1, \end{aligned} \right.$$

$$(\mathrm{e}) \left\{ \begin{aligned} \omega'_1 &= \omega_1\varpi_1 + \omega_2\varpi_2, \\ \omega'_2 &= \omega_1\varpi_3 + \omega_2\varpi_4. \end{aligned} \right.$$

Comme on le voit, il n'y a que dans le cas (b_3) qu'on trouve un paramètre essentiel m qui est d'ailleurs ici une constante, car le groupe dans ce cas ne saurait avoir d'invariant.

Enfin il reste à déterminer les coefficients de $\omega_1\omega_2$; en ajoutant au besoin aux ϖ des combinaisons convenablement choisies des ω et en tenant compte de l'identité fondamentale on arrive aux formules définitives suivantes :

$$(\mathrm{a}) \left\{ \begin{aligned} \omega'_1 &= \omega_1\varpi_1, \\ \omega'_2 &= 0, \end{aligned} \right. \qquad (\mathrm{a}'_1) \left\{ \begin{aligned} \omega'_1 &= 0, \\ \omega'_2 &= \omega_1\varpi_1, \end{aligned} \right. \qquad (\mathrm{a}'_2) \left\{ \begin{aligned} \omega'_1 &= \omega_1\omega_2, \\ \omega'_2 &= \omega_1\varpi_1, \end{aligned} \right.$$

$$(\mathrm{b}_1) \left\{ \begin{aligned} \omega'_1 &= \omega_1\varpi_1, \\ \omega'_2 &= \omega_1\varpi_2, \end{aligned} \right. \qquad (\mathrm{b}_2) \left\{ \begin{aligned} \omega'_1 &= \omega_1\varpi_1, \\ \omega'_2 &= \omega_2\varpi_2, \end{aligned} \right. \qquad (\mathrm{b}_3) \left\{ \begin{aligned} \omega'_1 &= m\,\omega_1\varpi_1, \\ \omega'_2 &= \omega_1\varpi_2 + \omega_2\varpi_1, \end{aligned} \right.$$

$$(\mathrm{c}) \quad \begin{cases} \omega'_1 = \omega_1\varpi_1 + \omega_2\varpi_2, \\ \omega'_2 = 0, \end{cases}$$

$$(\mathrm{d}_1) \quad \begin{cases} \omega'_1 = \omega_1\varpi_1, \\ \omega'_2 = \omega_1\varpi_2 + \omega_2\varpi_3, \end{cases} \qquad (\mathrm{d}_2) \quad \begin{cases} \omega'_1 = \omega_1\varpi_1 + \omega_2\varpi_2, \\ \omega'_2 = \omega_1\varpi_3 - \omega_2\varpi_1, \end{cases}$$

$$(\mathrm{e}) \quad \begin{cases} \omega'_1 = \omega_1\varpi_1 + \omega_2\varpi_2, \\ \omega'_2 = \omega_1\varpi_3 + \omega_2\varpi_4. \end{cases}$$

On ne peut avoir de groupe intransitif que dans les cas (a'_1) et (c); on pourrait aussi, dans le cas (a), prendre pour ω_2 la différentielle d'un invariant, mais, d'après le théorème de la fin du Chapitre II, ce groupe serait isomorphe à un groupe transitif pour lequel r serait égal à 1.

On arrive donc finalement, pour $r = 2$, à douze structures : dix transitives et deux intransitives. Les théorèmes généraux ultérieurs montreront d'ailleurs que le groupe (a'_2) est isomorphe au groupe général à une variable. Voici, dans chaque cas, comment on peut choisir ω_1 et ω_2 :

$$(\mathrm{a}) \quad \begin{cases} \omega_1 = y_1\, dx_1, \\ \omega_2 = dx_2, \end{cases} \qquad (\mathrm{a}'_1) \quad \begin{cases} \omega_1 = dx_1, \\ \omega_2 = dx_2 + y_1\, dx_1, \end{cases} \qquad (\mathrm{a}'_2) \quad \begin{cases} \omega_1 = \dfrac{dx_1}{x_2}, \\ \omega_2 = \dfrac{dx_2}{x_2} + y_1\, dx_1, \end{cases}$$

$$(\mathrm{b}_1) \quad \begin{cases} \omega_1 = y_1\, dx_1, \\ \omega_2 = dx_2 + y_2\, dx_1, \end{cases} \qquad (\mathrm{b}_2) \quad \begin{cases} \omega_1 = y_1\, dx_1, \\ \omega_2 = y_2\, dx_2, \end{cases} \qquad (\mathrm{b}_3) \quad \begin{cases} \omega_1 = y_1^m\, dx_1, \\ \omega_2 = y_1\, dx_2 + y_2\, dx_1, \end{cases}$$

$$(\mathrm{c}) \quad \begin{cases} \omega_1 = y_1\, dx_1 + y_2\, dx_2, \\ \omega_2 = dx_2, \end{cases}$$

$$(\mathrm{d}_1) \quad \begin{cases} \omega_1 = y_1\, dx_1, \\ \omega_2 = y_2\, dx_1 + y_3\, dx_2, \end{cases} \qquad (\mathrm{d}_2) \quad \begin{cases} \omega_1 = y_1\, dx_1 + y_2\, dx_2 \\ \omega_2 = y_3\, dx_1 + y_4\, dx_2 \end{cases} \quad (y_1 y_4 - y_2 y_3 = 1),$$

$$(\mathrm{e}) \quad \begin{cases} \omega_1 = y_1\, dx_1 + y_2\, dx_2, \\ \omega_2 = y_3\, dx_1 + y_4\, dx_2. \end{cases}$$

Enfin, les formules suivantes donnent, dans chaque cas, les équations finies du groupe à deux variables correspondant :

$$(\mathrm{a})\ \begin{cases} X_1 = f(x_1), \\ X_2 = x_2 + a, \end{cases} \qquad (\mathrm{a}'_1)\ \begin{cases} X_1 = x_1 \quad \text{ou} \quad x_1 + a, \\ X_2 = x_2 + f(x_1), \end{cases} \qquad (\mathrm{a}'_2)\ \begin{cases} X_1 = f(x_1), \\ X_2 = x_2 f'(x_1), \end{cases}$$

$$(\mathrm{b}_1)\ \begin{cases} X_1 = f(x_1), \\ X_2 = x_2 + \varphi(x_1), \end{cases} \qquad (\mathrm{b}_2)\ \begin{cases} X_1 = f(x_1), \\ X_2 = \varphi(x_2), \end{cases} \qquad (\mathrm{b}_3)\ \begin{cases} X_1 = f(x_1), \\ X_2 = x_2[f'(x_1)]^{\frac{1}{m}} + \varphi(x_1), \end{cases}$$

$$(\mathrm{c})\ \begin{cases} X_1 = f(x_1, x_2), \\ X_2 = x_2 \quad \text{ou} \quad x_2 + a, \end{cases}$$

$$(\mathrm{d}_1)\ \begin{cases} X_1 = f(x_1), \\ X_2 = \varphi(x_1, x_2), \end{cases} \qquad (\mathrm{d}_2)\ \begin{cases} X_1 = f(x_1, x_2) \\ X_2 = \varphi(x_1, x_2) \end{cases} \quad \text{avec} \quad \frac{D(f, \varphi)}{D(x_1, x_2)} = 1,$$

$$(\mathrm{e})\ \begin{cases} X_1 = f(x_1, x_2), \\ X_2 = \varphi(x_1, x_2). \end{cases}$$

On voit bien que le groupe (a'_2) résulte du prolongement holoédrique du groupe général à une variable. On remarquera aussi que tous ceux de ces groupes qui sont transitifs, sauf les deux derniers (d_2) et (e), résultent du prolongement hémiédrique d'un groupe fini ou infini à une variable.

(*A suivre.*)