ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

ÉMILE PICARD

Sur certains développements en séries déduits de la méthode de Cauchy dans la théorie des équations différentielles ordinaires

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 21 (1904), p. 141-151

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1904_3_21__141_0>

SUR

CERTAINS DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIES

DÉDUITS DE LA MÉTHODE DE CAUCHY

DANS LA

THÉORIE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES,

PAR M. ÉMILE PICARD.

Je publie ici une leçon que je viens de faire dans mon cours sur une propriété [1] intéressante de la méthode, souvent désignée sous le nom de *Cauchy-Lipschitz*, faisant connaître l'existence des intégrales des équations différentielles ordinaires. Pour ce qui est de la partie classique de cette méthode et pour les notations employées, je prie le lecteur de se reporter au Tome II de mon *Traité d'Analyse*, et je me borne, pour simplifier, au cas d'une seule équation.

1. Avant d'arriver à la propriété que j'ai en vue, je ferai une remarque, presque immédiate, relative à la continuité de l'intégrale. Envisageons l'intégrale de l'équation

$$\frac{dy}{dx}=f(x, y) \qquad (f \text{ satisfaisant aux conditions de Lipschitz}),$$

---

[1] J'ai indiqué cette propriété dans une Note *Sur les développements en séries des intégrales des équations différentielles par la méthode de Cauchy* (*Comptes rendus*, 5 juin 1899). M. Painlevé avait, de son côté, fait la même remarque, comme on peut le voir dans les *Comptes rendus* (19 juin 1899).

prenant pour $x = x_0$ la valeur y_0. Si l'on prend comme valeur initiale une valeur y'_0 très voisine de y_0, on aura une intégrale très voisine de la précédente. La chose est à peu près évidente; pour le démontrer, cherchons d'abord la différence des valeurs obtenues, quand on a partagé, comme dans la démonstration de Cauchy, l'intervalle (x_0, x) par les points de subdivision

$$x_0, \quad x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_{n-1}, \quad x \qquad (x > x_0),$$

en prenant successivement pour valeurs initiales y_0 et y'_0.

On a les deux systèmes successifs d'équations

$$\begin{aligned} y_1 - y_0 \quad &= (x_1 - x_0) f(x_0, y_0), \\ y_2 - y_1 \quad &= (x_2 - x_1) f(x_1, y_1), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y - y_{n-1} &= (x - x_{n-1}) f(x_{n-1}, y_{n-1}), \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} y'_1 - y'_0 \quad &= (x_1 - x_0) f(x_0, y'_0), \\ y'_2 - y'_1 \quad &= (x_2 - x_1) f(x_1, y'_1), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y' - y'_{n-1} &= (x - x_{n-1}) f(x_{n-1}, y'_{n-1}). \end{aligned}$$

On a donc

$$y - y' = y_{n-1} - y'_{n-1} + (x - x_{n-1}) [f(x_{n-1}, y_{n-1}) - f(x_{n-1}, y'_{n-1})]$$

et par suite

$$|y - y'| < |y_{n-1} - y'_{n-1}| \, |1 + k(x - x_{n-1})|.$$

On a de même

$$|y_{n-1} - y'_{n-1}| < |y_{n-2} - y'_{n-2}| \, |1 + k(x_{n-1} - x_{n-2})|,$$

et ainsi de suite. En multipliant ces diverses inégalités membre à membre, on a

$$|y - y'| < |y_0 - y'_0| \, e^{k(x - x_0)}.$$

Soient d'autre part Y et Y' les deux intégrales de l'équation prenant respectivement pour $x = x_0$ les valeurs y_0 et y'_0. D'après la théorie classique de Cauchy, et λ ayant la signification de mon Traité, on a

$$|Y - y| < \frac{2\lambda}{k} (e^{k(x - x_0)} - 1)$$

et

$$|Y' - y'| < \frac{2\lambda}{k}(e^{k(x-x_0)} - 1).$$

On a donc

$$|Y - Y'| < |y_0 - y'_0| e^{k(x-x_0)} + \frac{4\lambda}{k}(e^{k(x-x_0)} - 1).$$

Or λ est aussi petit que l'on veut, si la subdivision a été poussée suffisamment loin.

Donc, si $|y_0 - y'_0|$ est pris suffisamment petit, on voit que $|Y - Y'|$ sera aussi petit que l'on voudra, ce qui établit le continuité annoncée des deux intégrales Y et Y′ correspondant aux valeurs initiales y_0 et y'_0.

2. Nous sommes maintenant en mesure d'indiquer la propriété annoncée de la méthode de Cauchy. Quoiqu'elle paraisse presque évidente en elle-même, elle présente un certain intérêt, surtout quand on la rapproche de quelques travaux récents sur les développements en séries de certaines fonctions. Soit toujours l'équation

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

et considérons l'intégrale Y prenant pour $x = x_0$ la valeur y_0. Supposons que, x croissant à partir de x_0, Y soit continue tant que x ne dépasse pas $x_0 + h$, et que, de plus, pour chacune des valeurs (x, Y) correspondant à notre intégrale, *la fonction f ne cesse, pour un petit domaine autour de (x, Y), de remplir les conditions de Lipschitz.* Dans cette hypothèse, prenons un point x entre x_0 et $x_0 + h$ et partageons l'intervalle de $x_0 x$ par les points $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, de manière à avoir la suite

$$x_0, \quad x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_{n-1}, \quad x.$$

Soit d'une manière générale Y_i la valeur de notre intégrale pour $x = x_i$; on peut, d'après nos hypothèses, prendre les intervalles assez petits pour que dans chacun des intervalles

$$x_i, \quad x_{i+1}$$

la méthode de Cauchy soit applicable et que, par suite, l'intégrale de l'équation prenant la valeur Y_i pour $x = x_i$ puisse être donnée par cette méthode. Ces conditions remplies, les intervalles précédents vont rester fixes.

Imaginons alors que l'on fractionne chacun des intervalles précédents; l'intervalle $(x_0 x)$ sera alors partagé par des subdivisions comprenant les x_i et d'autres points de subdivision, et soit désigné par x' ce mode de subdivision. Pour cette subdivision, formons directement les équations aux différences, dont l'emploi caractérise la méthode de Cauchy, et cela depuis x_0 jusqu'à x. On se rend compte aisément que les valeurs des y auxquelles conduiront les différences successives resteront dans le champ où $f(x, y)$ est définie, *si la subdivision x' a tous ses intervalles assez petits*. En effet, tout d'abord en x_1, on trouve une valeur Y'_1 très peu différente de Y_1; ensuite, quand on arrive en x_2, on trouve une valeur très peu différente de l'intégrale de l'équation qui prend en x_1 la valeur Y'_1, et, par suite, très peu différente (d'après le paragraphe précédent) de l'intégrale qui prend en x_1 la valeur Y_1, c'est-à-dire de Y_2. On peut aller ainsi de proche en proche (n étant fini), et finalement, quand on arrive en x, la valeur donnée au moyen des équations successives aux différences, diffère très peu de la valeur Y de notre intégrale, cela, bien entendu, sous la condition que tous les intervalles correspondant aux x' soient suffisamment petits. Écrivons la subdivision

$$x_0, \quad x'_1, \quad x'_2, \quad \ldots, \quad x'_{n'-1}, \quad x;$$

il résulte de ce qui précède que les équations successives

$$\begin{aligned}
y'_1 - y_0 \quad &= (x'_1 - x_0) f(x_0, y_0), \\
y'_2 - y'_1 \quad &= (x'_2 - x'_1) f(x'_1, y'_1), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
y' - y'_{n'-1} &= (x - x'_{n'-1}) f(x'_{n'-1}, y'_{n'-1})
\end{aligned}$$

donnent pour y' une valeur très peu différente de Y. *La méthode de Cauchy est donc valable dans tout l'intervalle $x_0 x$, où l'intégrale est continue, avec la condition imposée en plus ci-dessus à $f(x, y)$*. Elle donne dans cet intervalle une valeur approchée de l'intégrale, et il est clair que $|y' - Y|$ est inférieur à tel nombre que l'on voudra, si chacun des intervalles x' est assez petit, cela d'ailleurs quel que soit x dans l'intervalle $(x_0, x_0 + h')$, où h' est inférieur au nombre h dont il a été parlé plus haut.

Supposons, par exemple, que l'intervalle (x_0, x) ait été partagé en n parties égales. Pour n assez grand, les équations aux différences conduisent à une expression

$$P_n(x),$$

et l'on peut prendre n assez grand pour que dans tout l'intervalle $(x_0, x_0 + h')$ on ait

$$|Y - P_n(x)| < \varepsilon,$$

ε étant une quantité donnée à l'avance, aussi petite que l'on voudra.

Arrivé à ce point, nous pouvons, si nous voulons, représenter notre intégrale Y par une série. Reprenons en effet l'expression $P_n(x)$, et donnons à n_0 une valeur fixe suffisamment grande.

Posons alors

$$f_{n_0}(x) = P_{n_0}(x), \quad f_{n_0+1}(x) = P_{n+1}(x) - P_n(x), \quad \ldots, \quad f_{n+1}(x) = P_{n+1}(x) - P_n(x).$$

La série

$$f_{n_0}(x) + f_{n_0+1}(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots$$

est uniformément convergente dans l'intervalle $(x_0, x_0 + h')$. En effet la somme de ses $n - n_0 + 1$ premiers termes est égale à $P_n(x)$, et, par suite, pour $n \geqq \mu$, cette somme différera de Y de moins de ε.

3. Les résultats précédents s'appliquent manifestement au cas d'un système d'équations

$$\frac{dy_i}{dx} = F_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_p) \qquad (i = 1, 2, \ldots, p),$$

la fonction F_i satisfaisant aux conditions de Lipschitz.

4. Arrêtons-nous un moment sur un cas particulier. Soient les p équations simultanées du premier ordre

$$(1) \qquad \frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, x_2, \ldots, x_p) \qquad (i = 1, 2, \ldots, p),$$

où les X sont des *polynomes* en x, et considérons les intégrales prenant pour $t = 0$ les valeurs $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_p^0$.

Les conditions de Lipschitz sont évidemment vérifiées ici, tant que les valeurs absolues des x restent moindres qu'un nombre fixe. D'ailleurs, les équations aux différences de la méthode de Cauchy donneront de proche en proche, si nous partageons l'intervalle

$$(0, t),$$

en n parties égales des *polynomes* en t. *Donc les x pourront être représentées par des séries dont les termes seront des polynomes en t.* Ces développements seront convergents tant que les intégrales x correspondant aux conditions initiales $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_p^0$ (pour $t = 0$) *seront des fonctions continues de t.* On peut ajouter que les termes de ces séries sont aussi des polynomes en $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_p^0$.

Le résultat précédent est intéressant, mais, malheureusement, il n'a, en général, qu'un intérêt théorique, car il semble bien difficile de déduire de ces développements quelques renseignements sur le champ de la variable t, où les intégrales restent continues. Dans certains cas particuliers, cependant, on peut tirer parti très utilement des remarques précédentes; nous allons en donner quelques exemples simples.

5. Supposons que, pour les équations de la forme (1), quelque considération soit susceptible d'apprendre que les $|x|$ restent toujours inférieurs à un nombre fixe. Sous cette condition, les intégrales considérées se trouvent définies autour de toute valeur de t *dans un champ fixe*, et l'on a alors *des développements en séries de polynomes valables pour toute valeur de t.*

Un exemple intéressant de la circonstance précédente sera fourni par les équations du mouvement d'un corps solide pesant mobile autour de l'origine O. Les équations classiques de ce problème peuvent s'écrire

$$(2) \quad \begin{cases} A\dfrac{dp}{dt} = (B-C)qr + Mg(y_0\gamma'' - z_0\gamma'), & \dfrac{d\gamma}{dt} = r\gamma' - q\gamma'', \\ B\dfrac{dq}{dt} = (C-A)rp + Mg(z_0\gamma - x_0\gamma''), & \dfrac{d\gamma'}{dt} = p\gamma'' - r\gamma, \\ C\dfrac{dr}{dt} = (A-B)pq + Mg(x_0\gamma' - y_0\gamma), & \dfrac{d\gamma''}{dt} = q\gamma - p\gamma', \end{cases}$$

où p, q, r désignent les composantes de la rotation instantanée sur les axes d'inertie du point O, et γ, γ', γ'' les cosinus directeurs de ces axes avec la verticale; A, B, C sont les moments d'inertie, (x_0, y_0, z_0) représentent les coordonnées du centre de gravité par rapport aux axes d'inertie et Mg est le poids du corps. Nous avons là *six* équations différentielles du premier ordre en p, q, r, γ, γ', γ''. On a d'abord l'intégrale première

$$\gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 = \text{const.}$$

Dans le problème qui nous occupe, la constante doit être prise égale à *un*; écrivons donc

$$\gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 = 1.$$

Une seconde intégrale première est fournie par le théorème des forces vives et s'écrit

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - 2Mg(x_0\gamma + y_0\gamma' + z_0\gamma'') = h,$$

h étant une constante arbitraire. Des deux équations précédentes, il résulte de suite que, pour des conditions initiales données (évidemment réelles), les valeurs absolues

$$|p|, \quad |q|, \quad |r|, \quad |\gamma|, \quad |\gamma'|, \quad |\gamma''|$$

restent moindres qu'un nombre fixe. Nous pouvons donc appliquer ce qui vient d'être dit, et nous arrivons à la conclusion que, pour le système (2), *on peut développer p, q, r, γ, γ' et γ'' en séries de polynomes convergentes pour toute valeur de temps t.*

6. Un exemple plus général sera fourni par un type d'équations dont M. Volterra (¹) a montré l'intérêt dans certains problèmes de Dynamique. Ce sont les équations

$$\frac{dp_s}{dt} = \sum_{r=1}^{r=n} \sum_{k=1}^{k=n} a_{s,k}^{(r)} p_r p_k \qquad (s = 1, 2, \ldots, n),$$

où les constantes a satisfont aux conditions

$$a_{s,k}^{(r)} = - a_{k,s}^{(r)}.$$

On a alors l'intégrale première

$$p_1^2 + p_2^2 + \ldots + p_n^2 = \text{const.}$$

Il en résulte que les p restent moindres qu'un nombre fixe. Par suite, *on aura encore des développements des intégrales en séries de polynomes, valables pour toute valeur du temps.*

7. Dans les exemples des deux paragraphes précédents, les seconds membres étaient des polynomes. Notre remarque générale peut s'appliquer encore dans d'autres cas. Soient, plus généralement, les équations

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i(x_1, x_2, \ldots, x_p) \qquad (i = 1, 2, \ldots, p),$$

les F étant des fonctions définies pour toutes valeurs des x. Supposons que l'on ait pu démontrer que, pour un système d'intégrales déterminé par certaines conditions initiales, les valeurs absolues des F restent toujours moindres qu'un nombre fixe, quand à la place des x on met les fonctions de t correspondant à ce système. Admettons de plus que

$$\xi_1, \quad \xi_2, \quad \ldots, \quad \xi_p$$

(¹) Volterra, *Sopra una classe di equationi dinamiche* (*Atti della R. Academia di Torino*, 1898).

désignant ce système d'intégrales, on puisse déterminer une quantité *fixe* (c'est-à-dire indépendante de t) b, telle que les fonctions des x

$$F_i(x_1, x_2, \ldots, x_p) \qquad (i = 1, 2, \ldots, p)$$

restent moindres qu'un nombre fixe M, quand

$$\xi_i - b < x_i < \xi_i + b \qquad (i = 1, 2, \ldots, p),$$

et satisfassent à la condition de Lipschitz.

On sera assuré, dans ces conditions, que le système d'intégrales envisagé est défini autour de toute valeur de t dans un champ fixe de longueur $\frac{2b}{M}$, et par suite, en allant de proche en proche, le système d'intégrales est défini pour toute valeur de t.

La remarque générale faite plus haut sur la méthode de Cauchy-Lipschitz, appliquée dans l'intervalle $(0, t)$ partagé en n parties égales, nous donne le système d'intégrales prenant, pour $t = 0$, les valeurs $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_p^0$, sous la forme de *séries convergentes pour toute valeur de t*; ces développements seront uniformément convergents dans tout champ fini de la variable t.

Comme application, considérons p points *se repoussant* en raison inverse de la $\mu^{\text{ième}}$ puissance de la distance $(\mu > 1)$. En désignant par m_i la masse du point M_i, nous avons les équations

$$\frac{dx_i}{dt} = x'_i, \qquad \frac{dx'_i}{dt} = -f\sum_h \frac{m_h(x_h - x_i)}{r_{i,h}^{\mu+1}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, p),$$

en désignant par $r_{i,h}$ la distance des points M_i et M_h, et f étant un coefficient positif avec des équations analogues pour les y et les z. Or le théorème des forces vives donne

$$\frac{1}{2}\sum_i m_i(x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2) + \frac{f}{\mu - 1}\sum_h\sum_k \frac{m_h m_k}{r_{h,k}^{\mu-1}} = h \qquad (h \text{ étant une constante}).$$

Il résulte de là que, pour des conditions initiales données, et, par suite, pour une valeur de la constante h, les $|x'_i|$ les $|y'_i|$ et les $|z'_i|$ restent inférieures à un nombre fixe, et les $r_{h,k}$ supérieures à un nombre fixe. Toutes les conditions, postulées ci-dessus, sont vérifiées, car les points M_i, M_h restant à une distance supérieure à un nombre fixe, on peut fixer un nombre fixe b répondant à la seconde condition. Les seconds membres des équations resteront donc moindres qu'un nombre fixe M. Donc, *les équations différentielles du problème de p points se repoussant en raison inverse de la $\mu^{\text{ième}}$ puissance de la distance ($\mu > 1$) s'intègrent par des séries convergentes pour toute valeur de t.*

8. Notre remarque relative à la méthode de Cauchy s'applique aussi au cas où l'on a des équations analytiques et où la variable est complexe. *Sur une droite déterminée partant d'un point x_0, la méthode de Cauchy est applicable à l'intégrale prenant en x_0 la valeur y_0 tant que cette intégrale ne cesse pas d'être holomorphe.*

Prenons, en particulier, les équations considérées plus haut

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, x_2, \ldots, x_p) \qquad (i = 1, 2, \ldots, p),$$

où les X sont des polynomes en x.

Envisageons le système d'intégrales prenant pour $t = t_0$ les valeurs $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_p^0$. En joignant le point t_0 au point variable t, et partageant l'intervalle $t_0 t$ en n parties égales, on arrivera, comme plus haut, à représenter les intégrales x par des séries dont les termes sont des *polynomes* en t (et aussi en $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_p^0$).

Quelle sera la région de convergence de ces séries? Elle convergeront, tant que les intégrales envisagées resteront holomorphes sur le rayon allant de t_0 en t. *Elles seront donc convergentes dans le domaine que M. Mittag-Leffler appelle une étoile.* On voit que, dans le cas des équations différentielles de la forme précédente, les développements de M. Mittag-Leffler se déduisent tout naturellement du procédé élémentaire et classique de Cauchy pour démontrer l'existence des intégrales.

9. On pourra souvent obtenir de cette manière des développements de fonctions en séries de polynomes. Prenons comme exemple la fonction

$$y = \frac{1}{1-x}.$$

Elle satisfait à l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = y^2.$$

Donc, d'après ce qui précède, la fonction précédente *peut être développée en une série de polynomes*

$$P_1(x) + P_2(x) + \ldots + P_n(x) + \ldots,$$

uniformément convergente à l'intérieur de l'étoile relative à cette fonction.

Or l'étoile relative à la fonction

$$\frac{1}{1-x}$$

est manifestement le plan tout entier à l'exception de la coupure $(+1, +\infty)$ sur l'axe des quantités réelles. Nous avons donc un développement uniformément convergent dans toute aire finie, n'ayant aucun point commun avec la coupure précédente. Ainsi se trouve établi le résultat duquel, comme l'a montré M. Borel, on peut déduire le théorème de M. Mittag-Leffler sur le développement d'une fonction en séries de polynomes convergent dans une *étoile*. On sait que plusieurs autres méthodes ont été proposées pour obtenir le développement de $\frac{1}{1-x}$ dans son étoile; une des plus simples est celle de M. Goursat (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 1903).