ERNEST VESSIOT

# Sur la théorie des groupes continus

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série*, tome 20 (1903), p. 411-451
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1903_3_20__411_0>

SUR LA

# THÉORIE DES GROUPES CONTINUS,

PAR M. E. VESSIOT.

Ce travail (¹) a pour but de faciliter l'application de la théorie des groupes continus à l'intégration des équations aux dérivées partielles, par l'exposition systématique de résultats connus, que nous avons cherché à compléter sur divers points.

Bien que ces résultats s'appliquent aussi aux groupes continus finis, c'est surtout les groupes infinis que nous avons eus en vue : aussi les groupes qui y interviennent sont-ils toujours définis par leurs équations de définition. En dehors de quelques propositions de la théorie des groupes continus finis, nous ne supposons connues que les propositions générales contenues dans le Mémoire de S. Lie, *Die Grundlagen für die Theorie der unendlichen Gruppen*. (*Leipziger Berichte*, 1891.)

C'est à M. Engel (²) qu'est due l'idée très féconde de donner une forme commune aux équations de définition de tous les groupes

---

(¹) Ce travail faisait partie d'un Mémoire couronné par l'Académie des Sciences. Les deux parties essentielles du même Mémoire seront publiées prochainement : l'une (*Sur la Théorie de Galois et ses généralisations*), dans ce recueil; l'autre (*Sur l'intégration des systèmes différentiels qui admettent des groupes de transformations*), dans les *Acta Mathematica*.

(²) *Ueber die Definitionsgleichungen der continuirlichen Transformationsgruppen* (*Math. Annalen*, t. XXVII). — *Kleinere Beiträge zur Gruppentheorie* (*Leipziger Berichte*, t. IX, 1894).

ponctuels qui appartiennent à un même type, c'est-à-dire tels que l'on passe de l'un à l'autre par un simple changement de variables.

M. Engel ne s'était occupé que des équations de définition des transformations infinitésimales. M. Medolaghi (1) a donné la forme correspondante pour les équations de définition des transformations finies. Nous avons repris les résultats de ces deux auteurs par une méthode nouvelle et simple, en approfondissant les problèmes auxiliaires dont dépend la séparation effective des divers types de groupes. Nous avons montré comment la théorie de la similitude des groupes infinis découle de cette théorie de la recherche des types de groupes ponctuels.

Nous étendons ensuite la méthode à la recherche des types de sous-groupes d'un groupe donné : c'est un sujet qui, à notre connaissance, n'avait pas été traité. Nous avons, en particulier, précisé la nature des opérations nécessaires pour la détermination des sous-groupes invariants, qui est si importante dans les théories d'intégration fondées sur la considération des groupes.

Nous terminons en donnant une définition de l'isomorphisme des groupes infinis, qui permette l'application de cette notion fondamentale aux théories d'intégration (2).

## I. — Deux modes de prolongement des groupes ponctuels.

1. Considérons d'abord la transformation infinitésimale

$$\text{(1)} \qquad \mathrm{XF} = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_i},$$

et prolongeons-la, en introduisant les dérivées par rapport aux $x_i$ de $n$ nouvelles variables non transformées, $y_1, \ldots, y_n$, que nous considérons comme fonctions des $x_i$.

---

(1) *Sulla teoria dei gruppi infinite continui* (*Annali di Matematica*, 1897). *Contributo alla determinazione dei gruppi continui*, etc. (*Rendiconti della R. Accademia dei Lincei*, 1899).

(2) Ces pages étaient écrites lorsque M. Cartan a publié (*Comptes rendus*, 17 novembre 1902) une définition de l'isomorphisme qui concorde avec la nôtre.

Posant, pour abréger l'écriture,

$$\frac{\partial^{\alpha_1+\ldots+\alpha_n} f}{\partial x_1^{\alpha_1}, \ldots, \partial x_n^{\alpha_n}} = f^{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)}, \qquad f = f^{(0, \ldots, 0)},$$

nous partons, suivant le procédé de calcul bien connu, de l'identité,

$$dy_k^{(\beta_1, \ldots, \beta_n)} - \sum_{i=1}^{n} y_k^{(\beta_1, \ldots, \beta_i+1, \ldots, \beta_n)} dx_i = 0.$$

Nous lui appliquons l'opération X, ce qui donne

$$d\mathrm{X}y_k^{(\beta_1, \ldots, \beta_n)} - \sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}y_k^{(\beta_1, \ldots, \beta_i+1, \ldots, \beta_n)} dx_i - \sum_{i=1}^{n} y_k^{(\beta_1, \ldots, \beta_i+1, \ldots, \beta_n)} d\xi_i = 0.$$

Et nous tirons de là

$$\mathrm{X}y_k^{(\beta_1, \ldots, \beta_i+1, \ldots, \beta_n)} = \frac{d}{dx_i} \mathrm{X}y_k^{(\beta_1, \ldots, \beta_n)} - \sum_{s=1}^{n} y_k^{(\beta_1, \ldots, \beta_s+1, \ldots, \beta_n)} \frac{\partial \xi_s}{\partial x_i}.$$

Le second membre s'écrit

$$\frac{d}{dx_i}\left(\mathrm{X}y_k^{(\beta_1, \ldots, \beta_n)} - \sum_{s=1}^{n} \xi_s \frac{\partial y_k^{(\beta_1, \ldots, \beta_n)}}{\partial x_s}\right) + \sum_{s=1}^{n} \xi_s \frac{\partial y_k^{(\beta_1, \ldots, \beta_i+1, \ldots, \beta_n)}}{\partial x_s},$$

et l'on obtient, en posant

$$(2) \qquad \mathfrak{X}y_k^{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)} = \sum_{s=1}^{n} \xi_s \frac{\partial y_k^{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)}}{\partial x_s},$$

la formule de récurrence,

$$\mathrm{X}y_k^{(\beta_1, \ldots, \beta_i+1, \ldots, \beta_n)} - \mathfrak{X}y_k^{(\beta_1, \ldots, \beta_i+1, \ldots, \beta_n)} = \frac{d}{dx_i}\left[\mathrm{X}y_k^{(\beta_1, \ldots, \beta_i, \ldots, \beta_n)} - \mathfrak{X}y_k^{(\beta_1, \ldots, \beta_i, \ldots, \beta_n)}\right].$$

On obtient alors sans peine la formule définitive

$$(2') \qquad \mathrm{X}y_k^{(\beta_1, \ldots, \beta_n)} = \mathfrak{X}y_k^{(\beta_1, \ldots, \beta_n)} - \frac{d^{\beta_1+\ldots+\beta_n}(\mathfrak{X}y_k)}{dx_1^{\beta_1} \ldots dx_n^{\beta_n}},$$

où la caractéristique $d$ désigne la dérivation totale

$$\frac{d\mathrm{F}(x_1, \ldots, x_n \mid \ldots y_k^{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)} \ldots)}{dx_i} = \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_i} + \sum_{k \mid \alpha_1, \ldots, \alpha_n} \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y_k^{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)}} \frac{\partial y_k^{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)}}{\partial x_i}.$$

Le second membre de cette formule est linéaire et homogène par rapport aux dérivées des $\xi_s$ prises jusqu'à l'ordre de la dérivée $y_k^{(\beta_1, \ldots, \beta_n)}$ considérée; et aussi par rapport aux dérivées de la seule fonction $y_k$, prises jusqu'au même ordre, car les $\dfrac{\partial y_k^{(\beta_1, \ldots, \beta_n)}}{\partial x_s}$ disparaissent après réductions.

La transformation (1) prolongée sera donc de la forme

$$\text{(3)} \qquad XF = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \frac{\partial F}{\partial x_i} + \sum_{i \mid \alpha_1, \ldots, \alpha_n} \frac{\xi_i^{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)}}{\alpha_1 ! \ldots ! \alpha_n !} A_{i \mid \alpha_1, \ldots, \alpha_n} F,$$

où les $A_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n} F$ sont certaines transformations infinitésimales portant sur les dérivées des $y_k$, et qui sont linéaires et homogènes. D'après cette formule (3), $A_{i \mid \alpha_1, \ldots, \alpha_n} F$ est, du reste, ce que devient la transformation infinitésimale $x_1^{\alpha_1} \ldots, x_n^{\alpha_n} \dfrac{\partial F}{\partial x_i}$ quand, après l'avoir prolongée, on y fait

$$x_1 = \ldots = x_n = 0.$$

Les formules (2), (2') donnent donc

$$\text{(4)} \qquad A_{i \mid \alpha_1, \ldots, \alpha_n} y_k^{(\beta_1, \ldots, \beta_n)} = - \left[ \frac{d^{\beta_1 + \ldots + \beta_n} \left( x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n} \dfrac{\partial y_k}{\partial x_i} \right)}{dx_1^{\beta_1} \ldots dx_n^{\beta_n}} \right]_{x_1 = \ldots = x_n = 0}.$$

Posant alors, suivant l'usage,

$$C_p^q = \frac{p(p-1) \ldots (p-q+1)}{1 . 2 \ldots q},$$

nous aurons les formules entièrement explicites

$$\text{(5)} \qquad A_{i \mid \alpha_1, \ldots, \alpha_n} y_k^{(\beta_1, \ldots, \beta_n)} = - C_{\beta_1}^{\alpha_1} \ldots C_{\beta_n}^{\alpha_n} \frac{\partial y_k^{(\beta_1 - \alpha_1, \ldots, \beta_n - \alpha_n)}}{\partial x_i} \qquad (\beta_j \geqq \alpha_j);$$

et

$$\text{(6)} \qquad A_{i \mid \alpha_1, \ldots, \alpha_n} F = - \sum_{(\beta_1, \ldots, \beta_n)} C_{\beta_1}^{\alpha_1} \ldots C_{\beta_n}^{\alpha_n} \frac{\partial y_k^{(\beta_1 - \alpha_1, \ldots, \beta_n - \alpha_n)}}{\partial x_i} \frac{\partial F}{\partial y_k^{(\beta_1, \ldots, \beta_n)}},$$

où la sommation doit s'étendre à tous les systèmes de valeurs des $\beta_1, \ldots, \beta_n$ pour lesquels on a, quel que soit $j$, $\beta_j \geqq \alpha_j$.

2. Supposons maintenant qu'on limite le prolongement aux dérivées d'un ordre $m$ quelconque. On devra introduire dans les formules (5), (6) les conditions

$$0 < \beta_1 + \ldots + \beta_n \leqq m, \qquad 0 < \alpha_1 + \ldots + \alpha_n \leqq m.$$

Les $A_{i|\alpha_1,\ldots,\alpha_n}F$ correspondants constitueront un système de M transformations linéaires homogènes entre les M variables,

$$y_k^{(\beta_1,\ldots,\beta_n)}, \qquad 0 < \beta_1 + \ldots + \beta_n \leqq = m, \qquad M = n\left[\frac{(n+1)\ldots(n+m)}{1.2\ldots m} - 1\right].$$

Ces transformations, que nous désignerons par $A^{(m)}_{i|\alpha_1,\ldots,\alpha_n}$, forment un groupe simplement transitif, que nous appellerons $\mathcal{A}_m$.

On a en effet

$$\left(x_1^{\alpha_1}\ldots x_n^{\alpha_n}\frac{\partial F}{\partial x_i},\ x_1^{\gamma_1}\ldots x_n^{\gamma_n}\frac{\partial F}{\partial x_j}\right)$$
$$= \gamma_i x_1^{\alpha_1+\gamma_1}\ldots x_i^{\alpha_i+\gamma_i-1}\ldots x_n^{\alpha_n+\gamma_n}\frac{\partial F}{\partial x_j} - \alpha_j x_1^{\alpha_1+\gamma_1}\ldots x_j^{\alpha_j+\gamma_j-1}\ldots x_n^{\alpha_n+\gamma_n}\frac{\partial F}{\partial x_i};$$

d'où l'on déduit, en prolongeant jusqu'à l'ordre $m$, et annulant ensuite tous les $x_i$,

$$(7)\quad \begin{aligned}&(A^{(m)}_{i|\alpha_1,\ldots,\alpha_n}F,\quad A^{(m)}_{j|\gamma_1,\ldots,\gamma_n}F)\\ &\quad = \gamma_i A^{(m)}_{j|\alpha_1+\gamma_1,\ldots,\alpha_i+\gamma_i-1,\ldots,\alpha_n+\gamma_n} - \alpha_j A^{(m)}_{i|\alpha_1+\gamma_1,\ldots,\alpha_j+\gamma_j-1,\ldots,\alpha_n+\gamma_n}F,\end{aligned}$$

où l'on doit remplacer par zéro toute expression $A^{(m)}_{h|\sigma_1,\ldots,\sigma_n}$ pour laquelle la somme $\sigma_1 + \ldots + \sigma_n$ surpasserait $m$.

Ces formules (7) montrent bien qu'on a affaire à un groupe, et en donnent la structure. Pour voir qu'il est transitif, il suffit de remarquer qu'un invariant de ce groupe serait un invariant différentiel du groupe ponctuel général. Tout revient à prouver qu'un tel invariant $\Omega(\ldots y_k^{(\beta_1,\ldots,\beta_n)}\ldots)$ ne peut exister; et en effet, en appelant $\omega(x_1,\ldots,x_n)$ la valeur qu'il prendrait pour $n$ fonctions $y_k$ particulières quelconques, on voit que l'équation aux dérivées partielles

$$\Omega(\ldots y_k^{(\beta_1,\ldots,\beta_n)}\ldots) = \omega(x_1,\ldots,x_n),$$

admettant toutes les transformations ponctuelles en $x_1, \ldots, x_n$, admettrait comme solution n'importe quel système de fonctions de ces variables, ce qui est impossible.

3. On a facilement les équations finies du groupe $\mathcal{A}_m$. En effet, XF étant une transformation infinitésimale ponctuelle quelconque, il n'y a qu'à partir d'une transformation ponctuelle finie quelconque

$$(8) \qquad x'_i = \varphi_i(x_1, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

et à effectuer sur elle les mêmes opérations. Nous considérerons à cet effet, en même temps que (8), la transformation inverse

$$(9) \qquad x_i = \Phi_i(x'_1, \ldots, x'_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Posant alors, pour abréger,

$$\frac{\partial^{\alpha_1+\ldots+\alpha_n} y_k}{\partial x'^{\alpha_1}_1 \ldots \partial x'^{\alpha_n}_n} = y'^{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)}_k,$$

il suffit d'appliquer les règles du calcul différentiel pour obtenir les formules donnant les $y'^{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)}_k$ en fonction des $y^{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)}_k$; et elles se présentent d'elles-mêmes sous la forme

$$(10) \quad y'^{(\beta_1, \ldots, \beta_n)}_k = b_{\beta_1, \ldots, \beta_n}(\ldots y^{(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)}_k \ldots | \ldots \Phi^{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)}_i \ldots) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Telles sont les équations finies de $\mathcal{A}_m$, en supposant qu'on se limite aux dérivées prises jusqu'à l'ordre $m$, et en y considérant les dérivées des $\Phi$ comme des constantes arbitraires (les paramètres du groupe). On voit que ce groupe transforme entre elles les dérivées de chaque fonction $y_k$ : il est donc isomorphe à un groupe linéaire homogène à $\frac{M}{n}$ variables

$$(11) \qquad \left\{ \begin{array}{c} y'^{(\beta_1, \ldots, \beta_n)} = b_{\beta_1, \ldots, \beta_n}(\ldots y^{(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)} \ldots | \ldots \Phi^{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)}_i \ldots) \\ (0 < \beta_1 + \ldots + \beta_n \leqq m). \end{array} \right.$$

On peut enfin modifier les formules (10) par un changement de paramètres. En effet, l'équivalence des formules (8) et (9) conduit, par l'emploi des règles du calcul différentiel, à des formules

$$(12) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \Phi^{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)}_i = \varpi_{i|\alpha_1, \ldots, \alpha_n}(\ldots \varphi^{(\delta_1, \ldots, \delta_n)}_j \ldots) \\ \varphi^{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)}_i = \varpi_{i|\alpha_1, \ldots, \alpha_n}(\ldots \Phi^{(\delta_1, \ldots, \delta_n)}_j \ldots) \end{array} \right\} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

au moyen desquelles on donnera aux formules (10) la forme nouvelle

$$(13)\quad y_k'^{(\beta_1,\ldots,\beta_n)} = a_{\beta_1,\ldots,\beta_n}(\ldots y_k^{(\gamma_1,\ldots,\gamma_n)}\ldots \mid \ldots \varphi_j^{(\delta_1,\ldots,\delta_n)}\ldots) \qquad (k=1,2,\ldots,n);$$

et aux formules (11) la forme correspondante

$$(14)\qquad y'^{(\beta_1,\ldots,\beta_n)} = a_{\beta_1,\ldots,\beta_n}(\ldots y^{(\gamma_1,\ldots,\gamma_n)}\ldots \mid \ldots \varphi_j^{(\delta_1,\ldots,\delta_n)}\ldots).$$

On peut encore remarquer qu'on aurait les formules qui définissent les transformations inverses par le simple échange des $\Phi$ en $\varphi$, c'est-à-dire

$$(15)\qquad y_k^{(\beta_1,\ldots,\beta_n)} = a_{\beta_1,\ldots,\beta_n}(\ldots y_k'^{(\gamma_1,\ldots,\gamma_n)}\ldots \mid \ldots \Phi_j^{(\delta_1,\ldots,\delta_n)}\ldots),$$

et

$$(16)\qquad y_k^{(\beta_1,\ldots,\beta_n)} = b_{\beta_1,\ldots,\beta_n}(\ldots y_k'^{(\gamma_1,\ldots,\gamma_n)}\ldots \mid \ldots \varphi_i^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)}\ldots).$$

4. Nous considérons maintenant la transformation

$$(17)\qquad \mathrm{YF} = \sum_{k=1}^{n} \eta_k(y_1,\ \ldots,\ y_n)\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y_k},$$

et nous la prolongeons en adjoignant aux $y_k$ $n$ variables $x_1, \ldots, x_n$, non transformées, et en considérant les $y_k$ comme fonctions de ces nouvelles variables. La méthode employée au n° 1 donne ici immédiatement

$$\mathrm{Y}y_k^{(\beta_1,\ldots,\beta_i+1,\ldots,\beta_n)} = \frac{d\mathrm{Y}y_k^{(\beta_1,\ldots,\beta_i,\ldots,\beta_n)}}{dx_i},$$

et l'on en déduit

$$(18)\qquad \mathrm{Y}y_k^{(\beta_1,\ldots,\beta_n)} = \frac{d^{\beta_1+\ldots+\beta_n}\eta_k}{dx_1^{\beta_1}\ldots dx_n^{\beta_n}},$$

$d$ désignant toujours une dérivation totale. Si donc on pose

$$\eta_k^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)} = \frac{\partial^{\alpha_1+\ldots+\alpha_n}\eta_k}{\partial y_1^{\alpha_1}\ldots\partial y_n^{\alpha_n}},$$

on obtient le prolongement cherché sous la forme

$$(19)\qquad \mathrm{YF} = \sum_{i=1}^{n}\eta_i\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y_i} + \sum_{i\mid\alpha_1,\ldots,\alpha_n} \frac{\eta_i^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)}}{\alpha_1!\ldots!\alpha_n!}\mathrm{B}_{i\mid\alpha_1,\ldots,\alpha_n}\mathrm{F},$$

où les $B_{i|\alpha_1,\ldots,\alpha_n}$ sont des transformations infinitésimales dont les coefficients ne dépendent pas du choix des $\eta_k$.

On voit encore, sur cette formule, que $B_{i|\alpha_1,\ldots,\alpha_n}F$ est ce que devient la transformation infinitésimale $y_1^{\alpha_1}\ldots y_n^{\alpha_n}\dfrac{\partial F}{\partial y_i}$ lorsque, après l'avoir prolongée, on y fait $y_1 = \ldots = y_n = 0$.

On en déduirait facilement que si, comme précédemment, on limite le prolongement à l'ordre $m$, ces transformations infinitésimales deviennent M transformations $B^{(m)}_{i|\alpha_1,\ldots,\alpha_n}F$, qui forment un groupe $\mathcal{B}_m$, isomorphe au groupe $\mathcal{A}_m$, et simplement transitif comme lui. Les théorèmes de Lie prouvent qu'ils sont, par suite, semblables.

On le vérifie en remarquant que si dans la transformation

$$Y^{(m)}F = \sum_{i=1}^{n} \eta_i \frac{\partial F}{\partial y_i} + \sum_{i|\alpha_1,\ldots,\alpha_n} \frac{\eta_i^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)}}{\alpha_1!\ldots!\alpha_n!} B^{(m)}_{i|\alpha_1,\ldots,\alpha_n}F$$

on fait, sur les dérivées des $y_k$, le changement de variables

$$(20)\qquad y_i^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)} = \varpi_{i|\alpha_1,\ldots,\alpha_n}(\ldots x_j^{(\delta_1,\ldots,\delta_n)}\ldots),$$

qui donne (*voir* n° 3) l'expression de ces dérivées en fonction des dérivées

$$x_j^{(\delta_1,\ldots,\delta_n)} = \frac{\partial x_j^{\delta_1+\ldots+\delta_n}}{\partial y_1^{\delta_1}\ldots \partial y_n^{\delta_n}}$$

de $x_1, \ldots, x_n$, considérées comme le système des fonctions de $y_1, \ldots, y_n$, qui provient par inversion du système des fonctions $y_1, \ldots, y_n$ de $x_1, \ldots, x_n$ considérées jusqu'ici, on obtiendra précisément ce que devient YF quand on la prolonge en considérant $n$ variables $x_1, \ldots, x_n$ non transformées, fonctions de $y_1, \ldots, y_n$; c'est-à-dire

$$\overline{Y^{(m)}}F = \sum_i \eta_i \frac{\partial F}{\partial y_i} + \sum_{i|\alpha_1,\ldots,\alpha_n} \frac{\eta_i^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)}}{\alpha_1!\ldots!\alpha_n!} \overline{A^{(m)}_{i|\alpha_1,\ldots,\alpha_n}}F,$$

en désignant par

$$\overline{A^{(m)}_{i|\alpha_1,\ldots,\alpha_n}}$$

les transformations $A^{(m)}_{i|\alpha_1,\ldots,\alpha_n}$, où on a mis les lettres $x_k^{(\beta_1,\ldots,\beta_n)}$ à la place des lettres $y_k^{(\beta_1,\ldots,\beta_n)}$. On en conclut que le changement de variables (20) change chaque $B^{(m)}_{i|\alpha_1,\ldots,\alpha_n}$ en la $A^{(m)}_{i|\alpha_1,\ldots,\alpha_n}$ de mêmes indices (aux notations près), ce qui démontre les résultats énoncés plus haut.

5. Cherchons encore les transformations finies de $\mathfrak{B}_m$. Nous partons cette fois d'une transformation

$$\overline{y_k} = \psi_k(y_1, \ldots, y_n) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{21}$$

ou de la transformation inverse

$$y_k = \Psi_k(\overline{y_1}, \ldots, \overline{y_n}) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{22}$$

et nous différentions par rapport à $x_1, \ldots, x_n$. Le calcul est le même que celui du n° 3, aux notations près : les $\psi_k$ jouent ici le rôle des $y_k$ dans le calcul du n° 3, les $y_k$ jouent le rôle des $\Phi_k$, et les $x_i$ le rôle des $x'_i$. On obtiendra donc, en posant

$$\frac{\partial^{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n} \overline{y_k}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} = \overline{y}_k^{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)},$$

le nouveau groupe de formules

$$\left\{\begin{aligned} \overline{y}_k^{(\beta_1, \ldots, \beta_n)} &= b_{\beta_1, \ldots, \beta_n}(\ldots \psi_k^{(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)} \ldots | \ldots y_i^{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)} \ldots), \\ y_k^{(\beta_1, \ldots, \beta_n)} &= b_{\beta_1, \ldots, \beta_n}(\ldots \Psi_k^{(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)} \ldots | \ldots \overline{y}_i^{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)} \ldots), \\ \overline{y}_k^{(\beta_1, \ldots, \beta_n)} &= a_{\beta_1, \ldots, \beta_n}(\ldots \Psi_k^{(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)} \ldots | \ldots y_i^{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)} \ldots), \\ y_k^{(\beta_1, \ldots, \beta_n)} &= a_{\beta_1, \ldots, \beta_n}(\ldots \psi_k^{(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)} \ldots | \ldots \overline{y}_i^{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)} \ldots). \end{aligned}\right. \tag{23}$$

On passe donc des équations finies de $\mathfrak{A}_m$ à celles de $\mathfrak{B}_m$ en échangeant les rôles des variables et des paramètres. Cela donne à penser, d'après un théorème de Lie ([1]), que ces deux groupes sont deux groupes simplement transitifs réciproques, dont chacun sert à l'autre de groupe paramétrique.

On a, en effet, identiquement

$$(\mathrm{XF}, \mathrm{YF}) = 0,$$

et, en particulier,

$$\left(x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n} \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_i}, \; y_1^{\beta_1} \ldots y_n^{\beta_n} \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y_k}\right) = 0.$$

Prolongeant jusqu'à l'ordre $m$, en considérant $y_1, \ldots, y_n$ comme des

---

([1]) Dont l'idée paraît due à M. Engel (*voir* Lie et Engel, *Th. der Transf. gr.*, t. I, p. 428).

fonctions de $x_1, \ldots, x_n$, et annulant dans le résultat $x_1, \ldots, x_n$; $y_1, \ldots, y_n$, on obtient

$$(\mathrm{A}_{i|\alpha_1,\ldots,\alpha_n}^{(m)}\mathrm{F},\ \mathrm{B}_{k|\beta_1,\ldots,\beta_n}^{(m)}\mathrm{F}) = 0,$$

ce qui prouve bien que les groupes $\mathcal{A}_m$ et $\mathcal{B}_m$ sont, au sens de Lie, deux groupes simplement transitifs réciproques.

### II. — Diverses formes des équations de définition d'un groupe.

6. Soit (G) un groupe ponctuel de l'espace à $n$ dimensions. On sait qu'il peut être défini, soit par les équations de définition de ses transformations finies, que nous désignerons par $(\mathcal{E})$, soit par les équations de définition de ses transformations infinitésimales, que nous désignerons par (E). Ces systèmes d'équations sont susceptibles de diverses formes remarquables, que nous allons rappeler.

Nous désignerons par

$$x'_i = y_i(x_1, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{24}$$

une transformation finie quelconque de (G) et par

$$\mathrm{XF} = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_i} \tag{25}$$

l'une quelconque de ses transformations infinitésimales.

Les équations $(\mathcal{E})$ peuvent, d'après Lie [1], se mettre sous la forme

$$\mathrm{U}_s(y_1, \ldots, y_n, \ldots, y_k^{(\beta_1,\ldots,\beta_n)}\ldots) = \omega_s(x_1, \ldots, x_n) \qquad (s = 1, 2, \ldots, p), \tag{26}$$

où les $\mathrm{U}_s$ constituent un système complet d'invariants différentiels de (G), quand on considère les $y_k$ comme les variables transformées, et les $x_i$ comme non transformés; et où les $\omega_s$ se déduisent des $\mathrm{U}_s$ en y remplaçant les fonctions $y_1, \ldots, y_n$ respectivement par $x_1, \ldots, x_n$, et leurs dérivées par les valeurs qui en résultent.

Il est important, pour les applications de la théorie des groupes, de montrer que la réduction des équations $(\mathcal{E})$, supposées données sous

(1) *Leipziger Berichte*, 1891, p. 391.

une forme quelconque, à cette forme (26), ne comporte que des calculs rationnels.

Nous supposons, pour plus de netteté, que ces équations ($\mathcal{E}$) données soient algébriques, rationnelles et entières par rapport aux dérivées $y_k^{(\beta_1,\ldots,\beta_n)}$. On en déduit alors, par voie d'éliminations, les relations différentielles qui lient un système de $n$ fonctions $x_1, \ldots, x_n$ de $n$ variables indépendantes $t_1, \ldots, t_n$ aux fonctions $x'_1, \ldots, x'_n$ des mêmes variables qui en résultent par une transformation (24) quelconque du groupe, les variables indépendantes $t_1, \ldots, t_n$ n'étant pas transformées. Soient

$$(27)\quad \left\{ \begin{array}{c} f_s(x_1, \ldots, x_n, \ldots, x_i^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)} \ldots \mid x'_1, \ldots, x'_n, \ldots, x_i'^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)} \ldots) = 0 \\ (s = 1, 2, \ldots, p) \end{array} \right.$$

ces relations. En écrivant qu'elles lient aussi les fonctions $x'_1, \ldots, x'_n$ à un nouveau système de fonctions $x''_1, \ldots, x''_n$ en résultant par une autre transformation du groupe, on obtient

$$(28)\quad \left\{ \begin{array}{c} f_s(x''_1, \ldots, x''_n, \ldots, x_i''^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)} \ldots \mid x'_1, \ldots, x'_n, \ldots, x_i'^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)} \ldots) = 0 \\ (s = 1, 2, \ldots, q). \end{array} \right.$$

On écrira alors que les systèmes (27) et (28) en

$$x'_1, \quad \ldots, \quad x'_n, \quad \ldots, \quad x_i'^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)}, \quad \ldots$$

sont équivalents.

Si le groupe (G) est transitif, $x'_1 \ldots, x'_n$ joueront seulement le rôle de paramètres dans ce calcul, et l'on obtiendra rationnellement des relations de la forme

$$\mathrm{U}_s(x_1, \ldots, x_n, \ldots, x_i^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)} \ldots) = \mathrm{U}_s(x''_1, \ldots, x''_n, \ldots, x_i''^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)}, \ldots)$$
$$(s = 1, 2, \ldots, p),$$

où les fonctions $\mathrm{U}_s$ seront les fonctions demandées. Si $x'_1, \ldots, x'_n$ figuraient dans ces fonctions $\mathrm{U}_s$, ce serait à titre de constantes arbitraires, et on leur donnerait successivement divers systèmes de valeurs, jusqu'à ce que cela ne fournisse plus d'équations indépendantes des équations déjà écrites.

Si le groupe (G) est intransitif, $x'_1, \ldots, x'_n$ interviendront effectivement dans l'identification des systèmes (27) et (28); en mettant à part le plus grand nombre possible d'équations (27) qui n'entraînent aucune relation entre les $x'_1, \ldots, x'_n$ où ne figure quelqu'une de leurs dérivées, et en leur comparant les équations (28) correspondantes, on obtiendra encore rationnellement les invariants *différentiels* proprement dits. Quant aux invariants d'ordre zéro, on les cherchera directement au moyen des équations ($\mathcal{E}$) données : on éliminera toutes les dérivées, ce qui donnera un certain nombre de relations de la forme

$$g_k(y_1, \ldots, y_n; x_1, \ldots, x_n) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, r);$$

et c'est en les identifiant au système

$$g_k(y'_1, \ldots, y'_n; x_1, \ldots, x_n) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, r),$$

par rapport à $x_1, \ldots, x_n$, qu'on trouvera les relations

$$U_k(y_1, \ldots, y_n) = U_k(y'_1, \ldots, y'_n) \qquad (k = 1, 2, \ldots, r),$$

dont les premiers membres seront les invariants cherchés.

On ne peut donc rien dire de précis sur la nature, rationnelle ou algébrique, de cette partie du calcul, si l'on ne suppose pas les équations ($\mathcal{E}$) données rationnelles aussi par rapport aux $x_1, \ldots, x_n$, ou, tout au moins, les combinaisons $g_k = 0$ rationnelles par rapport à $x_1, \ldots, x_n$.

7. Supposons donc connues les équations ($\mathcal{E}$) sous la forme (26), que nous appellerons la *forme de Lie*. Les $U_s$ constituent, d'après Lie, un système d'intégrales indépendantes d'un certain système complet, dont on peut supposer les équations obtenues en égalant à zéro un certain nombre de transformations infinitésimales

$$Y_h F = \sum_{i=1}^{n} \eta_{hi}(y_1, \ldots, y_n) \frac{\partial F}{\partial y_i}$$

du groupe (G) prolongées jusqu'à l'ordre $m$ du système (26), conformément à la formule (19). Ce système complet admet donc les transformations du groupe $\mathcal{A}_m$. On aura par suite des identités de la forme

$$(29) \qquad A^{(m)}_{i|\alpha_1,\ldots,\alpha_n} U_s = \lambda_{i|\alpha_1,\ldots,\alpha_n|s}(U_1, \ldots, U_p),$$

et les transformations infinitésimales

$$(30) \qquad A_{i|\alpha_1,\ldots,\alpha_n} F = \sum_{s=1}^{p} \lambda_{i|\alpha_1,\ldots,\alpha_n|s}(u_1, \ldots, u_p) \frac{\partial F}{\partial u_s}$$

définiront un groupe $\mathcal{L}$ isomorphe au groupe $\mathcal{A}_m$.

Si l'on fait intervenir les équations finies du groupe $\mathcal{A}_m$, on voit que, moyennant les formules (8) et (13), on a identiquement des relations de la forme

$$(31) \qquad \begin{aligned} &U_s(y_1, \ldots, y_n, \ldots, y'^{(\beta_1,\ldots,\beta_n)}_k, \ldots) \\ &\quad = L_s[\ldots U_h(y_1, \ldots, y_n, \ldots, y^{(\beta_1,\ldots,\beta_n)}_k, \ldots) \ldots | \ldots \varphi^{(\delta_1,\ldots,\delta_n)}_j \ldots] \\ &\qquad\qquad (s = 1, 2, \ldots, p), \end{aligned}$$

de sorte que le groupe $\mathcal{L}$ a pour équations finies

$$(32) \qquad u'_s = L_s(u_1, \ldots, u_p | \ldots \varphi^{(\delta_1,\ldots,\delta_n)}_j \ldots) \qquad (s = 1, 2, \ldots, p),$$

où les $\varphi^{(\delta_1,\ldots,\delta_n)}_j$ sont les paramètres.

On peut dire encore que la transformation infinitésimale

$$(33) \qquad \Xi F = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \frac{\partial F}{\partial x_i} + \sum_{i|\alpha_1,\ldots,\alpha_n} \frac{\xi^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)}_i}{\alpha_1! \ldots ! \alpha_n!} A_{i|\alpha_1,\ldots,\alpha_n} F,$$

où les $\xi_i$ sont des fonctions arbitraires de $x_1, \ldots, x_n$, est la transformation infinitésimale d'un groupe infini, dont les équations finies sont

$$(34) \qquad \begin{cases} x'_i = \varphi_i(x_1, \ldots, x_n) & (i = 1, 2, \ldots, n), \\ u'_s = L_s(u_1, \ldots, u_p | \ldots \varphi^{(\delta_1,\ldots,\delta_n)}_j \ldots) & (s = 1, 2, \ldots, p). \end{cases}$$

Nous aurons besoin quelquefois de résoudre les équations (32) par rapport à $u_1, \ldots, u_p$ : cela donne visiblement

$$(35) \qquad u_s = L_s(u'_1, \ldots, u'_p | \ldots \Phi^{(\delta_1,\ldots,\delta_n)}_j \ldots) \qquad (s = 1, 2, \ldots, p),$$

et, en réintroduisant les $\varphi$ par les formules (12), on obtiendra des équations de la forme

$$(36)\qquad u_s = \mathfrak{L}_s(u'_1, \ldots, u'_p \,|\, \ldots \varphi_j^{(\delta_1, \ldots, \delta_n)} \ldots) \qquad (s = 1, 2, \ldots, p).$$

Remarquons enfin que les transformations du groupe $\mathcal{A}_m$ [c'est-à-dire la transformation ponctuelle générale effectuée sur $x_1, \ldots, x_n$ dans les invariants $U_s$ de (G), puisque les variables $x_1, \ldots, x_n$ n'interviennent pas explicitement dans les $U_s$] laissent invariant tout invariant de (G), d'ordre zéro, s'il est intransitif, et transforment entre eux tous les invariants différentiels d'ordre inférieur ou égal à un ordre quelconque (inférieur ou égal à $m$).

8. Les résultats précédents conduisent à une nouvelle *forme des équations* ($\mathcal{E}$), *due à M. P. Medolaghi* [1]. Lie a montré que, pour qu'une transformation

$$(37)\qquad x'_i = \varphi_i(x_1, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

appartienne à (G), il faut et il suffit qu'elle laisse invariant le système ($\mathcal{E}$), et, par conséquent, que les équations

$$(38)\quad U_s(y_1, \ldots, y_n, \ldots, y_k'^{(\beta_1, \ldots, \beta_n)}, \ldots) = \omega_s(x'_1, \ldots, x'_n) \qquad (s = 1, 2, \ldots, p)$$

soient des conséquences des équations (26) et (27). Or les équations (38) s'écrivent, d'après (31),

$$L_s[\ldots U_h(y_1, \ldots, y_n, \ldots, y_k^{(\beta_1, \ldots, \beta_n)}, \ldots) \ldots \,|\, \ldots \varphi_j^{(\delta_1, \ldots, \delta_n)} \ldots] = \omega_s(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$$
$$(s = 1, 2, \ldots, p),$$

et la condition énoncée se réduit par suite à

$$L_s[\omega_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \omega_p(x_1, \ldots, x_n) \,|\, \ldots \varphi_j^{(\delta_1, \ldots, \delta_n)} \ldots] = \omega_s(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$$
$$(s = 1, 2, \ldots, p).$$

En remettant les lettres $y$ à la place des lettres $\varphi$, nous avons donc, pour la forme des équations ($\mathcal{E}$) annoncée,

$$(39)\quad L_s[\omega_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \omega_p(x_1, \ldots, x_n) \,|\, \ldots y_j^{(\delta_1, \ldots, \delta_n)} \ldots] = \omega_s(y_1, \ldots, y_n)$$
$$(s = 1, 2, \ldots, p),$$

[1] *Annali di Matematica*, 1897, p. 179-218.

qui peut s'écrire aussi, d'après (36),

$$(40)\quad \mathfrak{L}_s[\omega_1(y_1, \ldots, y_n), \ldots, \omega_p(y_1, \ldots, y_n) | \ldots y_j^{(\beta_1, \ldots, \beta_n)} \ldots] = \omega_s(x_1, \ldots, x_n)$$
$$(s = 1, 2, \ldots, p).$$

Si l'on cherche de même la condition pour que la transformation infinitésimale (25) laisse invariant le système (26), on obtient les équations de définition (E) des transformations infinitésimales de (G). Or, à cause des formules (3) et (29), on trouve comme condition

$$(41)\quad \sum_{i|\alpha_1, \ldots, \alpha_n} \frac{\xi_i^{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)}}{\alpha_1! \ldots ! \alpha_n!} \lambda_{i|\alpha_1, \ldots, \alpha_n|s}[\omega_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \omega_p(x_1, \ldots, x_n)] - \sum_{i=1}^{n} \xi_i \frac{\partial \omega_s}{\partial x_i} = 0$$
$$(s = 1, 2, \ldots, p).$$

*Cette forme remarquable des équations* (E) *est due à M. Engel* (¹).

8. Lie a fait cette remarque importante (²) que l'on arrive aux équations (41) [et par suite aux équations (39) ou (40)] en cherchant celles des transformations du groupe (33) [ou (34)] qui laissent invariant le système ou, en langage géométrique, la multiplicité

$$(42)\qquad u_s - \omega_s(x_1, \ldots, x_n) = 0 \qquad (s = 1, 2, \ldots, p).$$

### III. — Des groupes semblables à un groupe donné.

9. Partons du groupe (G) considéré au paragraphe précédent, et cherchons à déduire, de ses équations de définition, celles du groupe (G′) qu'on obtient en le transformant par une transformation ponctuelle quelconque.

Pour mieux poser la question, nous désignons par

$$(\Theta)\qquad y_i = g_i(x_1, \ldots, x_n) = \Theta x_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

une transformation quelconque de (G), et par

$$(\mathrm{T})\qquad x'_i = f_i(x_1, \ldots, x_n) = \mathrm{T} x_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

(¹) *Math. Annalen*, t. XXVII. *Ueber die Definitionsgleichungen*, etc., § 3.
(² *Ibid.*

la transformation déterminée par laquelle nous allons transformer $\Theta$. Posons encore

$$\overline{y_i} = f_i(y_1, \ldots, y_n) = \mathrm{T} y_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

la transformée $\Theta'$ de $\Theta$ sera, par définition, représentée par les équations

$$f_i(y_1, \ldots, y_n) = g_i[f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_n)] \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

c'est-à-dire

$$\mathrm{T} y_i = \Theta \mathrm{T} x_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

ou encore

$$y_i = \mathrm{T}^{-1} \Theta \mathrm{T} x_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Nous écrirons donc, symboliquement,

$$\Theta' = \mathrm{T}^{-1} \Theta \mathrm{T}, \qquad (\mathrm{G}') = \mathrm{T}^{-1} (\mathrm{G}) \mathrm{T}.$$

Cela posé, nous avons à remplacer les $\overline{y}$ et les $x'$ par leurs valeurs dans les équations de définition ($\mathcal{E}$), écrites avec ces variables, c'est-à-dire dans les équations

$$\mathrm{U}_s(\overline{y_1}, \ldots, \overline{y_n}, \ldots, \overline{y}_k'^{(\beta_1, \ldots, \beta_n)}, \ldots) = \omega_s(x_1', \ldots, x_n') \qquad (s = 1, 2, \ldots, p).$$

Remplaçons d'abord les $x_i'$ par leurs expressions $\mathrm{T} x_i$ : cela se fait au moyen des formules (31) et donne

$$\mathrm{L}_s[\ldots \mathrm{U}_h(\overline{y_1}, \ldots, \overline{y_n}, \ldots, \overline{y}_k'^{(\beta_1, \ldots, \beta_n)}, \ldots) \ldots | \ldots f_j^{(\delta_1, \ldots, \delta_n)} \ldots] = \omega_s(f_1, \ldots, f_n),$$

ce qu'on peut écrire, en vertu des formules (36),

$$\begin{aligned} &\mathrm{U}_s(\overline{y_1}, \ldots, \overline{y_n}, \ldots, \overline{y}_k'^{(\beta_1, \ldots, \beta_n)}, \ldots) \\ &\quad = \mathcal{L}_s[\ldots \omega_h(f_1, \ldots, f_n) \ldots | \ldots f_j^{(\delta_1, \ldots, \delta_n)} \ldots]. \end{aligned}$$

Nous poserons

$$(43) \quad \overline{\omega}_s(x_1, \ldots, x_n) = \mathcal{L}_s\{\ldots \omega_h[f_1(x), \ldots, f_n(x)] \ldots | \ldots f_j^{(\delta_1, \ldots, \delta_n)}(x) \ldots\} \\ (s = 1, 2, \ldots, p).$$

D'autre part, en remplaçant les $\overline{y_i}$ par leurs expressions $\mathrm{T} y_i$, on obtient des identités de la forme

$$(44) \qquad \begin{aligned} &\overline{U}_s(y_1, \ldots, y_n, \ldots, y_k^{(\beta_1, \ldots, \beta_n)}, \ldots) \\ &\quad = U_s[f_1(y), \ldots, f_n(y), \ldots, f_k^{(\beta_1, \ldots, \beta_n)}(y), \ldots]. \end{aligned}$$

Avec ces notations, les équations de définition de (G′) seront

$$(45) \quad \overline{U}_s(y_1, \ldots, y_n, \ldots, y_k^{(\beta_1, \ldots, \beta_n)}, \ldots) = \overline{\omega}_s(x_1, \ldots, x_n) \qquad (s = 1, 2, \ldots p).$$

Donc il suffit de faire le changement de variables sur les $y$ seulement dans les premiers membres des égalités (26), et de remplacer les seconds membres par les fonctions (43).

10. Mais on peut arriver à un résultat encore plus simple. En effet, des identités (44), c'est-à-dire

$$\overline{U}_s(y_1, \ldots, y_n, \ldots, y_k^{(\beta_1, \ldots, \beta_n)}, \ldots) = U_s(\overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_n, \ldots, \overline{y}_k^{(\beta_1, \ldots, \beta_n)}, \ldots),$$

on conclut que, si l'on fait sur $x_1, \ldots, x_n$, dans les $\overline{U}_s$, une transformation quelconque

$$x'_i = \varphi_i(x_1, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

les $\overline{U}_s$ se transformeront suivant le groupe $\mathfrak{L}$, c'est-à-dire qu'on aura

$$\begin{aligned} &\overline{U}_s(y_1, \ldots, y_n, \ldots, y_k'^{(\beta_1, \ldots, \beta_n)}, \ldots) \\ &\quad = L_s[\ldots \overline{U}_h(y_1, \ldots, y_n, \ldots, y_k^{(\beta_1, \ldots, \beta_n)}, \ldots) \ldots | \ldots \varphi_j^{(\delta_1, \ldots, \delta_n)} \ldots] \\ &\qquad\qquad (s = 1, 2, \ldots, p), \end{aligned}$$

et, par conséquent, *les équations de définition de* (G′) *se déduiront des équations de définition* (39), (40) *ou* (41) *de* (G) *en y remplaçant partout les fonctions* $\omega_s$ *par les fonctions* $\overline{\omega}_s$ *données par les formules* (43).

C'est à ce fait que la forme canonique de MM. Engel et Medolaghi doit son grand intérêt.

Il est du reste visible que, réciproquement, des équations qui se déduisent des équations (39), (40) ou (41) par la règle indiquée définissent toujours un groupe semblable à (G).

On peut interpréter ce résultat en disant que chaque groupe semblable à (G) s'obtient en cherchant celles des transformations du groupe (33) qui laissent invariante l'une des multiplicités

$$u_s - \overline{\omega}_s(x_1, \ldots, x_n) = 0 \qquad (s = 1, 2, \ldots, p),$$

homologues de la multiplicité (42) par rapport au groupe

$$x'_i = f_i(x_1, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$
$$u'_s = \mathrm{L}_s(u_1, \ldots, u_p | \ldots f_j^{\beta_1, \ldots, \beta_n}, \ldots) \qquad (s = 1, 2, \ldots, p).$$

## IV. — Sur la détermination des groupes ponctuels.

11. On doit à M. Engel [1] l'idée première d'une méthode générale pour déterminer, par leurs équations de définition, les types de groupes ponctuels de l'espace à $n$ dimensions. M. Engel ne s'était occupé que des équations de définition des transformations infinitésimales. M. Medolaghi [2] a considéré aussi les équations de définition des transformations finies, et a complété la méthode sur divers points. Nous allons l'exposer, en partant des résultats des paragraphes précédents, que nous compléterons d'abord par deux propositions réciproques.

Supposons, pour la première, que l'on connaisse $q$ fonctions différentielles, de la forme

$$\mathrm{V}_s(y_1, \ldots, y_n, \ldots, y_k^{\beta_1, \ldots, \beta_n}, \ldots) \qquad (s = 1, 2, \ldots, q),$$

satisfaisant à des identités de la forme

$$\mathrm{A}_{i|\alpha_1, \ldots, \alpha_n} \mathrm{V}_s = \mu_{i|\alpha_1, \ldots, \alpha_n|s}(\mathrm{V}_1, \ldots, \mathrm{V}_q) \qquad (s = 1, 2, \ldots, q) \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

pour tous les systèmes de valeurs de $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tels que l'on ait

$$0 < \alpha_1 + \ldots + \alpha_n \leqq m,$$

$m$ étant l'ordre maximum des $\mathrm{V}_s$. Cela revient à dire que, par la trans-

(1) *Loc. cit., Math. Annalen*, t. XXV.
(2) *Loc. cit., Annali di Matematica*, 1897.

formation (8), on obtient des identités

$$
(46)\quad \begin{gathered}
\mathrm{V}_s(y_1, \ldots, y_n, \ldots, y_k'^{(\beta_1,\ldots,\beta_n)}, \ldots) \\
= \mathrm{M}_s[\ldots \mathrm{V}_h(y_1, \ldots, y_n, \ldots, y_k^{(\beta_1,\ldots,\beta_n)}, \ldots) \ldots | \ldots \varphi_j^{(\delta_1,\ldots,\delta_n)} \ldots] \\
(s = 1, 2, \ldots, q).
\end{gathered}
$$

Considérons alors le système différentiel

$$
(47)\quad \begin{gathered}
\mathrm{V}_s(y_1, \ldots, y_n, \ldots, y_k^{(\beta_1,\ldots,\beta_n)}, \ldots) = \zeta_s(x_1, \ldots, x_n) \\
(s = 1, 2, \ldots, q),
\end{gathered}
$$

où les seconds membres se déduisent des premiers par la substitution $y_1 = x_1, \ldots, y_n = x_n$. Ce système ne se trouve pas nécessairement sous forme complètement intégrable, mais il n'est pas impossible, puisqu'il admet la solution $y_1 = x_1, \ldots, y_n = x_n$. On en déduirait, du reste, par différentiations, un système complètement intégrable d'équations différentielles dont les premiers membres jouiraient, relativement au groupe $\mathcal{A}_m$, de propriétés toutes semblables à celles qu'on a supposées aux $\mathrm{V}_s$, comme on le voit en différentiant les identités (46). Mais il nous suffira de garder les équations (47), qui suffisent à définir toutes les solutions. Nous allons montrer que, si ce système a plus d'une solution, l'ensemble de ses solutions constitue un groupe, quand on considère les équations

$$
(48)\qquad y_i = \chi_i(x_1, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),
$$

qui définissent l'une quelconque de ces solutions comme les équations d'une transformation ponctuelle. Il faut remarquer que nous supposons implicitement que les équations (47) sont satisfaites par des systèmes de fonctions (48) indépendantes; ce qui a lieu effectivement au moins pour la solution $y_1 = x_1, \ldots, y_n = x_n$; et que nous réservons le nom de *solution* aux systèmes de fonctions (48), satisfaisant au système différentiel considéré, qui remplissent cette condition. Les autres sont des solutions impropres, car elles satisfont à l'équation

$$
\frac{\mathrm{D}(y_1, \ldots, y_n)}{\mathrm{D}(x_1, \ldots, x_n)} = 0,
$$

qui n'est pas une conséquence des équations (47).

Exprimons que le système (47) admet la solution (48). Nous pouvons le faire en faisant d'abord dans le système le changement de variables

$$(49) \qquad x'_i = \chi_i(x_1, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

et en écrivant que le système transformé admet la solution $y_1 = x'_1, \ldots, y_n = x'_n$.

Or, en vertu des identités (46), le système transformé prendra la forme

$$V_s(y_1, \ldots, y_n, \ldots, y_k'^{(\beta_1, \ldots, \beta_n)}, \ldots) = \overline{\zeta}_s(x'_1, \ldots, x'_n) \qquad (s = 1, 2, \ldots, q),$$

et la condition cherchée revient alors à

$$\overline{\zeta}_s(x'_1, \ldots, x'_n) \equiv \zeta_s(x'_1, \ldots, x'_n) \qquad (s = 1, 2, \ldots, q).$$

La condition est donc que le système (47) prenne, par la transformation (49), la forme

$$V_s(y_1, \ldots, y_n, \ldots, y_k'^{(\beta_1, \ldots, \beta_n)}, \ldots) = \zeta_s(x'_1, \ldots, x'_n) \qquad (s = 1, 2, \ldots, q),$$

c'est-à-dire qu'il admette la transformation (49). Il en résulte que l'ensemble des solutions (48) correspond à l'ensemble des transformations (49) qui laissent le système (47) invariant : il définit donc bien l'ensemble des transformations finies d'un groupe ponctuel.

12. Supposons, en second lieu, que l'on ait un groupe $\mathcal{G}$, isomorphe au groupe $\mathcal{A}_m$. On pourra supposer que ses transformations infinitésimales, rapportées isomorphiquement à celles de $\mathcal{A}_m$, soient les transformations (30), et que ses équations finies aient été mises sous la forme (32), la correspondance de ce groupe avec le groupe (13) étant définie par l'égalité des valeurs des paramètres $\varphi_j^{(\delta_1, \ldots, \delta_m)}$.

Si l'on considère alors les systèmes (39) [ou (40)], et (41), où l'*on supposera les* $\omega_s$ *choisis de manière que* (39) *admette des solutions autres que la solution identique* $y_1 = x_1, \ldots, y_n = x_n$, ils définissent, par ses transformations, soit finies, soit infinitésimales, un même groupe. On pourrait le montrer, pour les équations (39), en se servant du théorème du numéro précédent.

Il est plus simple de faire appel à la remarque de Lie, rappelée à la fin du n° 8. Sous les hypothèses faites, il existe un groupe infini représenté par les équations (34), et dont la transformation infinitésimale générale est donnée par la formule (33).

Et les équations (39) ou (41) définissent le sous-groupe de ce groupe qui laisse invariante la multiplicité

$$u_s - \omega_s(x_1, \ldots, x_n) = 0, \qquad (s = 1, 2, \ldots, p).$$

Elles définissent donc bien un groupe.

On voit par là que la détermination des groupes ponctuels à $n$ variables se décompose en *deux problèmes*, que nous allons examiner de plus près : 1° *déterminer les équations des divers groupes* $\mathfrak{L}$ sous la forme (32); 2° *déterminer les fonctions* $\omega_s$ qui figurent dans les équations (39), (40) et (41), de manière qu'elles satisfassent à la condition énoncée plus haut.

### V. — Recherche des groupes transitifs.

13. Pour plus de netteté, nous nous bornerons d'abord à la recherche des groupes transitifs. Que seront les groupes $\mathfrak{L}$ correspondants?

La réponse est facile : pour un groupe (G) transitif, tous les invariants $U_s$ et les fonctions de ces invariants sont des invariants différentiels proprement dits, c'est-à-dire contiennent effectivement quelque dérivée des $y_k$ : il en résulte qu'aucune des fonctions $U_s$ ne peut rester invariante par toute transformation effectuée sur les $x_i$, et par conséquent que le groupe $\mathfrak{L}$ correspondant est transitif.

Réciproquement, si le groupe $\mathfrak{L}$ correspondant à un groupe (G) est transitif, il en est de même de (G), car aucune fonction des $U_s$, c'est-à-dire aucun invariant différentiel de (G), en $y_1, \ldots, y_k$ et leurs dérivées, ne peut être d'ordre zéro.

Donc on se bornera aux groupes $\mathfrak{L}$ transitifs. On doit de plus remarquer (ce qui serait vrai aussi pour les groupes (G) intransitifs) que, pour un groupe (G) donné, le groupe $\mathfrak{L}$ n'est pas entièrement défini, puisqu'on peut remplacer les $U_s$ par $p$ fonctions de ces $U_s$, assujetties seulement à être indépendantes. Donc le groupe $\mathfrak{L}$ peut être remplacé par l'un quelconque des groupes semblables en $u_1, \ldots, u_p$.

On se bornera donc à *chercher un représentant de chacun des types* *de groupes transitifs isomorphes à* $\mathcal{A}_m$. Et il n'y a pour cela qu'à appliquer la méthode donnée par Lie ([1]) : on cherchera les divers types de sous-groupes de $\mathcal{B}_m$; pour chacun d'eux on calculera les invariants, qui seront échangés entre eux, par les transformations de $\mathcal{A}_m$, suivant un groupe $\mathfrak{L}$ répondant à la question, et qui se trouvera d'emblée mis sous la forme (32).

On peut encore remarquer que, puisque $\mathcal{A}_m$ et $\mathcal{B}_m$ sont semblables, on peut faire l'inverse, c'est-à-dire chercher les sous-groupes de $\mathcal{A}_m$, calculer leurs invariants et les transformer par le groupe $\mathcal{B}_m$.

14. Si l'on a trouvé un groupe $\mathfrak{L}$, par le procédé précédent, il ne reste plus qu'à écrire les équations (39) ou (40) correspondantes, et à en chercher les conditions d'intégrabilité : elles devront donner un ou plusieurs systèmes d'équations aux dérivées partielles, qui détermineront les fonctions $\omega_s$. Nous allons voir qu'on peut opérer de manière à obtenir des systèmes différentiels distincts pour les divers types de groupes (G); c'est-à-dire tels que les fonctions $\omega_s$ fournies par les diverses solutions de l'un de ces systèmes correspondent aux divers groupes semblables à un même groupe (G).

Considérons, à cet effet ([2]), en même temps que le système (40), c'est-à-dire

$$(50)\qquad \mathfrak{L}_s[\omega_1(y_1, \ldots, y_n), \ldots, \omega_p(y_1, \ldots, y_n) \mid \ldots y_j^{(\delta_1, \ldots, \delta_n)} \ldots] = \omega_s(x_1, \ldots, x_n)$$
$$(s = 1, 2, \ldots, p),$$

le système un peu plus général

$$(51)\qquad \mathfrak{L}_s[\omega_1(y_1, \ldots, y_n) \ldots, \omega_p(y_1, \ldots, y_n) \mid \ldots y_j^{(\delta_1, \ldots, \delta_n)} \ldots) = \theta_s(x_1, \ldots, x_n)$$
$$(s = 1, 2, \ldots, p).$$

Remarquons d'abord que, quelles que soient les fonctions $\omega_s$, si l'on fait dans les premiers membres des équations (50), sur les $x_1, \ldots, x_n$,

---

([1]) *Theorie der Transf.*, t. I, p. 430 et suivantes.

([2]) Le principe de cette méthode est dû à M. P. Medolaghi (*Rendiconti del R. dei Lincei*, p. 291, 1899).

la transformation (37), on obtient les identités

$$\mathfrak{L}_s(\omega_1, \ldots, \omega_p) | \ldots y_j'^{(\delta_1, \ldots, \delta_n)}) = \mathfrak{L}_s[\ldots \mathfrak{L}_h(\omega_1, \ldots, \omega_p | \ldots y_j^{(\delta_1, \ldots, \delta_n)}) \ldots | \ldots \varphi_j^{(\delta_1, \ldots, \delta_n)}]$$
$$(s = 1, 2, \ldots, p),$$

car elles résultent, en considérant les $\omega_s$ comme des variables indépendantes, de ce que les équations (34) sont les équations d'un groupe. Il suffit, en effet, pour s'en convaincre, de considérer les deux transformations qui correspondent, par isomorphisme, à

$$x'_i = \varphi_i(x_1, \ldots, x_n), \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$
$$x''_i = y'_i(x'_1, \ldots, x'_n), \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

et dont le produit correspond à

$$x''_i = y'_i(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) = y_i(x_1, \ldots, x_n), \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Cela posé, si l'on suppose que le système (51) admet une solution

$$y_i = f_i(x_1, \ldots, x_n), \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{52}$$

constituée par des fonctions indépendantes, en y faisant la transformation

$$x'_i = f_i(x_1, \ldots, x_n), \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{53}$$

il prendra la forme

$$\mathfrak{L}_s[\omega_1(y_1, \ldots, \varphi_n), \ldots, \omega_p(y_1, \ldots, \varphi_n) | \ldots y_j'^{(\delta_1, \ldots, \delta_n)}] = \overline{\theta}_s(x'_1, \ldots, x'_n), \quad (s = 1, 2, \ldots, p);$$

et, comme il doit admettre la solution $y_i = x'_i$, les fonctions $\overline{\theta}_s$ sont identiques aux $\omega_s$. Donc, par la transformation (53), le système (51) se réduit au système (50), ce qui prouve déjà que les intégrales générales des deux systèmes ont le même degré de généralité.

De plus, pour chaque système de fonctions $\omega_s$ rendant les équations (50) compatibles, la valeur générale des fonctions $\theta_s$ telles que les équations (51) admettent une intégrale générale ayant le même degré de généralité, s'obtient, d'après ce qui précède, en écrivant qu'elles admettent une solution (52) quelconque, c'est-à-dire est fournie par les formules

$$\theta_s(x_1, \ldots, x_n) = \mathfrak{L}_s[\omega_1(f_1, \ldots, f_n), \ldots, \omega_p(f_1, \ldots, f_n) | \ldots f_j^{(\delta_1, \ldots, \delta_n)}], \quad (s = 1, 2, \ldots, p).$$

Comparant ces formules aux formules (43) du n° 9, on voit que ce sont précisément les divers systèmes de fonctions qu'il faudrait substituer aux $\omega_s$ dans les équations (50) pour obtenir les divers groupes qui appartiennent au même type que le groupe (G) supposé défini par ces équations (50).

L'étude des conditions d'intégrabilité du système (51) doit donc nous permettre de séparer les divers types de groupes (G) ayant des équations de la forme (50).

**15.** Étudions donc de plus près ces conditions d'intégrabilité.

Nous pouvons supposer que le groupe $\mathfrak{L}$ d'où nous partons est celui qui correspond aux équations des groupes (G) cherchés, mises sous forme complètement intégrable, et, par conséquent, nous borner à écrire que le système (51) est, tel quel, complètement intégrable. Le système de conditions ainsi obtenu, s'il a une solution donnant pour $\omega_1, \ldots, \omega_p$ et $\theta_1, \ldots, \theta_p$ deux systèmes de fonctions correspondant à deux groupes semblables, en aura d'autres correspondant à des couples quelconques de groupes semblables à ces deux-là, c'est-à-dire qu'il doit être invariant par le groupe infini qui a pour transformation générale

$$
\begin{aligned}
&y'_i = \psi_i(y_1, \ldots, y_n), \qquad (i = 1, 2, \ldots, n);\\
&\omega_s = \mathfrak{L}_s(\omega'_i, \ldots, \omega'_p \mid \ldots, \psi_j^{(\partial_1, \ldots, \partial_n)}), \qquad (s = 1, 2, \ldots, p);\\
&x'_i = \varphi_i(x_1, \ldots, x_n), \qquad (i = 1, 2, \ldots, n);\\
&\theta_s = \mathfrak{L}_s(\theta'_1, \ldots, \theta'_p \mid \ldots \varphi_j^{(\partial_1, \ldots, \partial_n)}), \qquad (s = 1, 2, \ldots, p);
\end{aligned}
$$

où les $\psi_i$ et les $\varphi_i$ sont des fonctions arbitraires.

Nous allons en conclure d'abord que les conditions d'intégrabilité ne peuvent contenir de relations d'ordre zéro entre les $\omega_s(y)$ et les $\theta_s(x)$ seuls. En effet, s'il en contenait, l'ensemble de ces relations constituerait un système invariant par rapport au groupe fini constitué par les transformations

$$
\left.
\begin{aligned}
&\omega_s = \mathfrak{L}_s(\omega'_1, \ldots, \omega'_p \mid \ldots \psi_j^{(\partial_1, \ldots, \partial_n)} \ldots)\\
&\theta_s = \mathfrak{L}_s(\theta'_1, \ldots, \theta'_p \ \ldots \varphi_j^{(\partial_1, \ldots, d_n)} \ldots)
\end{aligned}
\right\} \qquad (s = 1, 2, \ldots, p),
$$

où les $\psi_j^{(\partial_1, \ldots, \partial_n)}$ et les $\varphi_j^{(\partial_1, \ldots, \partial_n)}$ sont considérées comme des constantes arbitraires. Or, ce groupe étant transitif, tout système invariant comprend les relations obtenues en écrivant que ses équations ne peuvent pas se résoudre par rapport à $2p$ des paramètres. Par suite les équations (50) du groupe (G), où les équations analogues du groupe semblable correspondant aux fonctions $\theta_s$, ou encore les unes et les autres, ne pourraient pas se résoudre par rapport à $p$ des dérivées des $y_k$. Si, par exemple, cela avait lieu pour les équations (50), c'est qu'on en pourrait déduire des relations entre les $x_k$ et les $y_k$ seuls, c'est-à-dire que le groupe ne saurait être transitif, comme nous le supposons. De là résulte l'impossibilité annoncée.

Ce point établi, à quoi se réduira le calcul des conditions qui doivent exprimer que le système (51) est complètement intégrable? Suivons la marche indiquée par M. Delassus [1]. Nous prendrons d'abord celles des équations (51) qui sont d'ordre maximum $m$ et indépendantes par rapport aux dérivées de cet ordre; soit $p'$ leur nombre : on pourra les résoudre par rapport à $p'$ dérivées d'ordre $m$ de $n'$ des fonctions inconnues. Soit $\nu_m$ le nombre de dérivées d'ordre $m$ d'une fonction $y_k$ quelconque. En différentiant le groupe d'équations considérées, il faudra que les équations obtenues puissent se résoudre seulement par rapport à $p''$ dérivées d'ordre $(m+1)$ des mêmes $n'$ fonctions inconnues, $p''$ étant déterminé par la condition

$$n'\nu_{m+1} - p'' = n'\nu_m - p'.$$

Comme elles ne peuvent jamais se résoudre par rapport à moins de $p''$ de ces dérivées, et qu'elles sont linéaires par rapport aux dérivées d'ordre $(m+1)$, on aura à égaler à zéro certains déterminants dont les éléments ne dépendent visiblement que des $\omega_s(y_1, \ldots, y_n)$ et non de leurs dérivées. Ces déterminants devront être identiquement nuls, sans quoi le groupe $\mathfrak{G}$ serait à rejeter; puisqu'en écrivant que ces déterminants s'annulent sous le bénéfice des équations (51), on obtiendrait des relations entre les $\omega_s$ et les $\theta_s$ seuls qui, comme on l'a vu, ne sauraient exister.

Cette condition préliminaire étant supposée remplie, les équations d'ordre $(m+1)$ obtenues se résolvent par rapport à $p''$ des dérivées d'ordre $(m+1)$; et en portant leurs valeurs dans les autres équations

(1) *Annales de l'École Normale supérieure*, 1896, p. 445 et suiv.

d'ordre $(m+1)$, les dérivées d'ordre $(m+1)$ s'élimineront d'elles-mêmes.

On aura donc seulement à écrire que les équations ainsi obtenues, ainsi que celles qui résultent de la différentiation des équations (51) d'ordre inférieur à $m$, sont des conséquences des équations (51).

Or c'est là, aux notations près, le calcul que l'on aurait à faire pour déterminer une certaine classe de systèmes différentiels du premier ordre invariants par le groupe

$$(54)\qquad \begin{cases} u_s = \mathfrak{L}_s(u'_1, \ldots, u'_p \,|\, \ldots \varphi_j^{(\partial_1, \ldots, \partial_n)} \ldots) & (s = 1, 2, \ldots, p), \\ x'_i = \varphi_i(x_1, \ldots, x_n) & (i = 1, 2, \ldots, n). \end{cases}$$

Il conduira donc, comme l'a montré Lie dans sa théorie générale, à des systèmes qui pourront comprendre :

1° Des relations de forme entièrement déterminée, qui seront les mêmes pour les $\omega_s$ et les $\theta_s$ :

$$(55)\qquad \Omega_h\left(\omega_1, \ldots, \omega_p \,|\, \ldots \frac{\partial \omega_s}{\partial y_j} \ldots\right) = 0,$$

$$(56)\qquad \Omega_h\left(\theta_1, \ldots, \theta_p \,|\, \ldots \frac{\partial \theta_s}{\partial x_j} \ldots\right) = 0;$$

2° Des relations de la forme

$$(57)\qquad J_k\left(\omega_1, \ldots, \omega_p \,|\, \ldots \frac{\partial \omega_s}{\partial y_j} \ldots\right) = J_k\left(\theta_1, \ldots, \theta_p \,|\, \ldots \frac{\partial \theta_s}{\partial x_j} \ldots\right).$$

S'il contient des équations de la forme (57), la séparation des types est immédiate, puisque les équations (57) montrent précisément que, pour un même type, les invariants $J_k$ doivent être égaux à des constantes, toujours les mêmes.

**16.** En résumé, on obtient des systèmes de la forme générale

$$(58)\qquad \Omega_h\left(u_1, \ldots, u_p \,|\, \ldots \frac{\partial u_s}{\partial x_i} \ldots\right) = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, \rho),$$

$$(59)\qquad J_k\left(u_1, \ldots, u_p \,|\, \ldots \frac{\partial u_s}{\partial x_i} \ldots\right) = c_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, r),$$

tels que l'un quelconque de ces systèmes fournit l'ensemble de tous les groupes (G) d'un même type; en d'autres termes, la solution la plus générale de l'un quelconque de ces systèmes se déduit d'une solution particulière quelconque

$$u_s = \omega_s(x_1, \ldots, x_n) \qquad (s = 1, 2, \ldots, p) \tag{60}$$

par la transformation générale du groupe (54). La solution (60) du système (58) (59) donne pour groupe (G) celui qui est formé des transformations

$$x'_i = \varphi_i(x_1, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

auxquelles correspondent les transformations (54) laissant invariante la multiplicité (60) : ces dernières forment un groupe, isomorphe à (G), et que nous appellerons ($\mathcal{G}$).

Les diverses solutions (60) donnent ainsi tous les groupes (G) d'un même type; mais il peut arriver que deux de ces solutions donnent le même groupe : la condition pour cela est que la transformation (54) qui fait passer de l'une à l'autre laisse invariant le groupe ($\mathcal{G}$) correspondant à la première. Le fait se présentera donc quand le groupe ($\mathcal{G}$) sera invariant dans un sous-groupe plus grand ($\mathcal{G}_0$) du groupe (54); c'est-à-dire quand (G) sera invariant dans un groupe ponctuel plus étendu ($G_0$), qui correspondra à ($\mathcal{G}_0$) comme (G) correspond à ($\mathcal{G}$). A chaque solution (60) correspondra alors un groupe ($\mathcal{G}_0$) de transformations (54) qui la transformeront en toutes les autres solutions donnant le même groupe (G). Nous allons chercher à séparer les familles de solutions associées de cette manière.

Nous considérons à cet effet les équations de définition (41) des transformations infinitésimales, et nous écrivons que deux systèmes de valeurs des $\omega_s$ les changent en deux systèmes équivalents : nous obtenons ainsi un certain nombre de relations distinctes, de la forme

$$\mathrm{P}_k\left(\omega_1, \ldots, \omega_p \,\middle|\, \ldots \frac{\partial \omega_s}{\partial x_i} \ldots\right) = \mathrm{P}_k\left(\overline{\omega_1} \ldots, \overline{\omega_p} \,\middle|\, \ldots \frac{\partial \overline{\omega_s}}{\partial x_i} \ldots\right) \qquad (k = 1, 2, \ldots, \mu).$$

Et l'une quelconque des familles de solutions considérées sera définie par un système de la forme

$$(61)\quad P_k\left(u_1, \ldots, u_p \,\middle|\, \ldots \frac{\partial u_s}{\partial x_i} \ldots\right) = \pi_k(x_1, \ldots, x_n) \qquad (k = 1, 2, \ldots, \mu);$$

et tout reviendra à déterminer les fonctions $\pi_k$, puis à chercher une solution du système [(58), (59), (61)] correspondant à l'une des solutions du système auxiliaire auquel ces fonctions $\pi_k$ doivent satisfaire : ce système auxiliaire se déduira du reste du système [(58), (59)] au moyen des formules (61) qui définissent une transformation de ce système connu.

Remarquons encore qu'on pourra remplacer ce système auxiliaire par le système, analogue au système [(58), (59)], qui servirait à déterminer les groupes du même type que $(\mathcal{G}_0)$ et qu'on peut toujours obtenir en se servant des équations (41). Car, si les fonctions $\pi_k$ sont connues, on obtient les équations de définition de $(\mathcal{G}_0)$ en écrivant que la transformation (54) laisse invariant le système (61). Et inversement, si $(\mathcal{G}_0)$ est connu, on peut former, sans intégration, les équations de définition des transformations infinitésimales de ses divers sous-groupes invariants transitifs, ainsi qu'on le verra plus loin, c'est-à-dire qu'on doit pouvoir en déduire les fonctions $\pi_k$.

Quant à la nature du système [(58), (59), (61)], qui définit les transformations finies d'un sous-groupe invariant de $(\mathcal{G}_0)$, nous y reviendrons aussi plus loin.

Remarquons enfin qu'il serait possible que deux systèmes [(58), (59)] ne fournissent qu'un seul et même type : la considération des fonctions $P_k$ permettrait encore de constater la chose.

17. *Exemple I : $n = 2$, $m = 1$.* — On prend pour $\mathcal{L}$ le groupe suivant :

$$(\mathcal{L})\qquad \left\{\begin{aligned} x'_i &= \varphi_i(x_1, x_2) \qquad (i = 1, 2),\\ u_1 &= u'_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + u'_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1},\\ u_2 &= u'_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} + u'_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2},\\ u_3 &= u'_3 \frac{D(\varphi_1, \varphi_2)}{D(x_1, x_2)}.\end{aligned}\right.$$

Les équations de définition des groupes (G) correspondants sont donc :

$$(\mathcal{E})\quad \left\{\begin{aligned} \omega_1(y_1, y_2)\frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \omega_2(y_1, y_2)\frac{\partial y_2}{\partial x_1} &= \omega_1(x_1, x_2),\\ \omega_1(y_1, y_2)\frac{\partial y_1}{\partial x_2} + \omega_2(y_1, y_2)\frac{\partial y_2}{\partial x_2} &= \omega_2(x_1, x_2),\\ \omega_3(y_1, y_2)\frac{\mathrm{D}(y_1, y_2)}{\mathrm{D}(x_1, x_2)} &= \omega_3(x_1, x_2).\end{aligned}\right.$$

Nous considérons donc le système plus général

$$\begin{aligned} \omega_1(y_1, y_2)\frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \omega_2(y_1, y_2)\frac{\partial y_2}{\partial x_1} &= \theta_1(x_1, x_2),\\ \omega_1(y_1, y_2)\frac{\partial y_1}{\partial x_2} + \omega_2(y_1, y_2)\frac{\partial y_2}{\partial x_2} &= \theta_2(x_1, x_2),\\ \omega_3(y_1, y_2)\frac{\mathrm{D}(y_1, y_2)}{\mathrm{D}(x_1, x_2)} &= \theta_3(x_1, x_2).\end{aligned}$$

Les conditions pour qu'il soit complètement intégrable se réduisent à

$$\frac{\dfrac{\partial\omega_1(y_1, y_2)}{\partial y_2} - \dfrac{\partial\omega_2(y_1, y_2)}{\partial y_1}}{\omega_3(y_1, y_2)} = \frac{\dfrac{\partial\theta_1(x_1, x_2)}{\partial x_2} - \dfrac{\partial\theta_2(x_1, x_2)}{\partial x_1}}{\theta_3},$$

de sorte que, pour chaque type, on a une condition unique de la forme (59)

$$\frac{\partial\omega_1(x_1, x_2)}{\partial x_2} - \frac{\partial\omega_2(x_1, x_2)}{\partial x_1} = c\,\omega_3(x_1, x_2),$$

où $c$ est une constante entièrement arbitraire.

Pour $c = 0$, on peut prendre

$$\omega_1 = 1, \qquad \omega_2 = 1, \qquad \omega_3 = 1,$$

et l'on obtient le groupe type

$$(\mathrm{G})\qquad y_1 = x_1 + a, \qquad y_2 = x_2 + \varphi(x_1).$$

On voit ensuite que toutes les valeurs non nulles de $c$ donnent le même type, pour lequel on peut prendre

$$c = 1, \qquad \omega_1 = x_2, \qquad \omega_2 = 0, \qquad \omega_3 = 1,$$

ce qui donne pour groupe type

$$(G) \qquad y_1 = \varphi(x_1), \qquad y_2 = \frac{x_2}{\varphi'(x_1)}.$$

*Exemple II* : $n = 3$, $m = 1$. — On part donc de

$$x'_i = \varphi_i(x_1, x_2, x_3) \qquad (i = 1, 2, 3);$$

et du groupe $\mathfrak{L}$

$$(\mathfrak{L}) \qquad u_1 = \frac{\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} + u'_1 \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} + u'_2 \dfrac{\partial \varphi_3}{\partial x_2}}{\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + u'_1 \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} + u'_2 \dfrac{\partial \varphi_3}{\partial x_1}}, \qquad u_2 = \frac{\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_3} + u'_1 \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_3} + u'_2 \dfrac{\partial \varphi_3}{\partial x_3}}{\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + u'_1 \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} + u'_2 \dfrac{\partial \varphi_3}{\partial x_1}}.$$

Cela donne les équations

$$(\mathcal{E}) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\dfrac{\partial y_1}{\partial x_2} + \omega_1(y_1, y_2, y_3) \dfrac{\partial y_2}{\partial x_2} + \omega_2(y_1, y_2, y_3) \dfrac{\partial y_3}{\partial x_2}}{\dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} + \omega_1(y_1, y_2, y_3) \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1} + \omega_2(y_1, y_2, y_3) \dfrac{\partial y_3}{\partial x_1}} = \omega_1(x_1, x_2, x_3), \\ &\frac{\dfrac{\partial y_1}{\partial x_3} + \omega_1(y_1, y_2, y_3) \dfrac{\partial y_2}{\partial x_3} + \omega_2(y_1, y_2, y_3) \dfrac{\partial y_3}{\partial x_3}}{\dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} + \omega_1(y_1, y_2, y_3) \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1} + \omega_2(y_1, y_2, y_3) \dfrac{\partial y_3}{\partial x_1}} = \omega_2(x_1, x_2, x_3), \end{aligned} \right.$$

et l'application de la méthode conduit à une seule condition d'intégrabilité de la forme (58) :

$$\begin{aligned} 0 = {} & \frac{\partial \omega_1(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_3} - \frac{\partial \omega_2(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_2} \\ & + \omega_1(x_1, x_2, x_3) \frac{\partial \omega_2(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1} - \omega_2(x_1, x_2, x_3) \frac{\partial \omega_1(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1}; \end{aligned}$$

on obtient un seul type ayant pour représentant

$$(G) \qquad y_1 = \varphi_1(x_1), \qquad y_2 = \varphi_2(x_1, x_2, x_3), \qquad y_3 = \varphi_3(x_1, x_2, x_3).$$

*Remarque.* — On voit par cet exemple que, contrairement à une assertion de M. Medolaghi, les conditions définissant un type de groupes peuvent ne pas se composer uniquement d'équations de la forme (59) et que, par suite, le théorème que M. Medolaghi en avait conclu — à savoir que, dans tout type d'Engel figure un groupe de Picard, c'est-à-dire contenant toutes les translations — reste à démontrer.

## VI. — Recherche des sous-groupes transitifs d'un groupe transitif donné.

18. La méthode donnée au paragraphe précédent pour la détermination des groupes peut servir, convenablement modifiée, à la recherche des sous-groupes transitifs d'un groupe transitif donné (G). Ici deux sous-groupes ne font partie d'un même *type* que s'ils sont transformés l'un de l'autre par une transformation de (G) : nous disons encore, dans ce cas, qu'ils sont *homologues* dans (G).

Cherchons les sous-groupes dont les équations de définition, mises sous forme complètement intégrable, sont d'ordre $m$ au plus. Nous partirons des équations de définition de (G), différentiées, s'il est nécessaire, jusqu'à l'ordre $m$, qui sera toujours supposé au moins égal à l'ordre maximum des équations de définition de (G), mises sous forme complètement intégrable. Sous la forme actuelle, elles forment encore un système complètement intégrable, jouissant des propriétés établies dans les paragraphes précédents. Il leur correspond un groupe transitif $\mathcal{L}$, qui exprime comment le groupe $\mathcal{A}_m$ transforme les invariants d'un certain sous-groupe $(l)$ de $\mathcal{B}_m$; et par suite un groupe infini de la forme

$$(62)\quad \left\{\begin{array}{ll} x'_i = \varphi_i(x_1, \ldots, x_n), & (i = 1, 2, \ldots, n), \\ u_s = \mathcal{L}_s(u'_1, \ldots, u'_p | \ldots \varphi_j^{(\partial_1, \ldots, \partial_n)} \ldots), & (s = 1, 2, \ldots, p). \end{array}\right.$$

De sorte que les équations de définition de (G,) sous la forme considérée, c'est-à-dire différentiées jusqu'à l'ordre $m$, sont :

$$(63)\quad \left\{\begin{array}{l} \mathcal{L}_s[\omega_1(y_1, \ldots, y_n), \ldots, \omega_p(y_1, \ldots, y_n) | \ldots y_j^{(\partial_1, \ldots, \partial_n)} \ldots] = \omega_s(x_1, \ldots, x_n) \\ \qquad\qquad (s = 1, 2, \ldots, p). \end{array}\right.$$

Les équations de l'un quelconque des sous-groupes cherchés, différentiées, si cela est nécessaire, jusqu'à l'ordre $m$, contiendront, en plus des équations (63), certaines autres équations, de la forme

$$W_h(y_1, \ldots, y_n, \ldots, y_k^{(\partial_1, \ldots, \partial_n)} \ldots) = \pi_h(x_1, \ldots, x_n) \qquad (h = 1, 2, \ldots, q);$$

et, par suite, le groupe infini, analogue à (62), qui correspondra au sous-groupe (Γ) considéré, se composera des équations (62), et d'autres équations de la forme

$$(64)\quad w_h = \mathcal{N}_h(u'_1, \ldots, u'_p \,|\, w'_1, \ldots, w'_q \,|\, \ldots \varphi_{ij}^{(\partial_1, \ldots, \partial_n)} \ldots) \qquad (h = 1, 2, \ldots, q).$$

Ce groupe [(62), 64)], ou du moins le groupe fini (Λ) qu'on en déduit en supprimant les équations $x'_i = \varphi_i(x_1, \ldots, x_n)$, et considérant les $\varphi_{ij}^{(\partial_1, \ldots, \partial_n)}$ comme des constantes arbitraires, peut s'obtenir en introduisant dans les équations de $\mathcal{A}_m$ les invariants d'un sous-groupe (λ′) de $\mathcal{B}_m$. Or les invariants de (λ′) qui correspondent dans ce calcul aux variables $u_1, \ldots, u_p$, introduits seuls, donneraient le groupe $\mathcal{L}$ lui-même. C'est donc qu'ils sont invariants d'un sous-groupe de $\mathcal{B}_m$ plus grand que (λ′) : soit (*l′*) ce sous-groupe. D'après un théorème de Lie [1], on peut rapporter $\mathcal{A}_m$ isomorphiquement à lui-même, de manière que (*l*) et (*l′*) se correspondent, parce qu'ils fournissent le même groupe $\mathcal{L}$; mais alors au sous-groupe (λ′) de (*l′*) correspondra un sous-groupe (λ) de (*l*) donnant le même sous-groupe (Λ).

On conclut de là que, pour obtenir les groupes (Λ) correspondant aux sous-groupes de (G) cherchés, il suffit de chercher les divers types de sous-groupes (λ) de (*l*), et d'introduire leurs invariants nouveaux, en même temps que ceux de (*l*) qui ont servi pour trouver $\mathcal{L}$, dans les équations de $\mathcal{A}_m$.

La méthode est bien précise, à condition qu'on sache trouver (*l*), quand on connaît seulement les équations de (G), sous la forme de Lie, différentiées jusqu'à l'ordre $m$. Or il suffit pour cela, d'après les raisonnements du n° 7, de chercher les transformations de $\mathcal{B}_m$ qui laissent invariants les premiers membres $U_s$ des équations de définition, mises sous la forme (26), en traitant $y_1, \ldots, y_n$ comme des constantes arbitraires; puisque $\mathcal{L}$ exprime précisément la loi de transformation de ces $U_s$ par les transformations de $\mathcal{A}_m$.

**19.** Les équations de définition d'un des sous-groupes cherchés s'obtiendront donc en ajoutant aux équations (63) des équations de

(1) *Theorie der Transf. gr.*, T. I, p. 445.

la forme

$$(65)\quad \begin{cases} \mathfrak{M}_h[\omega_1(y_1, \ldots, y_n), \ldots, \omega_p(y_1, \ldots, y_n) \mid \pi_1(y_1, \ldots, y_n), \ldots, \pi_q(y_1, \ldots, y_n) \mid \ldots y_j^{(\beta_1, \ldots, \beta_n)} \ldots] \\ \quad = \pi_h(x_1, \ldots, x_n) \qquad (h = 1, 2, \ldots, q), \end{cases}$$

où les $\mathfrak{M}_h$ sont maintenant des fonctions connues de leurs arguments; c'est-à-dire où il ne reste plus qu'à déterminer les fonctions $\pi_h$, en écrivant que le système [(63), (65)] est complètement intégrable.

Le calcul à faire est identique à celui qui a été expliqué au paragraphe précédent. Il pourra fournir divers systèmes; et l'un quelconque d'entre eux sera de la forme

$$(66)\quad \begin{cases} \Omega_h\left(u_1, \ldots, u_p \mid \ldots \dfrac{\partial u_s}{\partial x_i} \ldots\right) = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, \rho), \\ \mathrm{J}_k\left(u_1, \ldots, u_p \mid \ldots \dfrac{\partial u_s}{\partial x_i} \ldots\right) = c_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, r); \end{cases}$$

$$(67)\quad \begin{cases} \Theta_\alpha\left(u_1, \ldots, u_p \mid \ldots \dfrac{\partial u_s}{\partial x_i} \ldots \mid w_1, \ldots, w_q \mid \ldots \dfrac{\partial w_h}{\partial x_i} \ldots\right) = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, \tau), \\ \mathrm{H}_\beta\left(u_1, \ldots, u_p \mid \ldots \dfrac{\partial u_s}{\partial x_i} \ldots \mid w_1, \ldots, w_q \mid \ldots \dfrac{\partial w_h}{\partial x_i} \ldots\right) = b_\beta \qquad (\beta = 1, 2, \ldots, t), \end{cases}$$

où l'on a mis à part celles de ces relations où ne figurent que les $u_s$, et qui sont vérifiées d'elles-mêmes, pour $u_1 = \omega_1, \ldots, u_p = \omega_p$.

La solution générale de ce système se déduit d'une solution particulière par les transformations du groupe [(62), (64)]; et l'on a ici à chercher les solutions pour lesquelles on a constamment

$$(68)\qquad u_1 = \omega_1(x_1, \ldots, x_n), \qquad \ldots, \qquad u_p = \omega_p(x_1, \ldots, x_n).$$

Elles se déduiront donc de l'une d'entre elles par celles des transformations [(62), (64)] qui laissent ce système invariant : pour exprimer cette condition, il suffit de faire intervenir les équations (62), et il résulte de ce qui a été vu au n° 8 qu'elle consiste en ce que l'on devra ne considérer que les transformations

$$x'_i = \varphi_i(x_1, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

qui appartiennent au groupe (G) donné.

On obtiendra donc, en définitive, pour chaque type de sous-groupe de (G), un système entièrement déterminé, de la forme

$$(69)\quad \begin{cases} \Theta_\alpha\left(\omega_1, \ldots, \omega_p, \ldots, \dfrac{\partial \omega_s}{\partial x_i} \ldots \middle| \varpi_1, \ldots, \varpi_q, \ldots, \dfrac{\partial \varpi_h}{\partial x_i} \ldots\right) = 0 & (\alpha = 1, 2, \ldots, \tau), \\ \mathrm{H}_\beta\left(\omega_1, \ldots, \omega_p, \ldots, \dfrac{\partial \omega_s}{\partial \omega_i} \ldots \middle| \varpi_1, \ldots, \varpi_q, \ldots, \dfrac{\partial \varpi_h}{\partial x_i} \ldots\right) = b_\beta & (\beta = 1, 2, \ldots, t), \end{cases}$$

dont la solution générale se déduit d'une solution particulière par les transformations du groupe infini, qui s'obtient en associant aux diverses transformations

$$(70)\qquad x'_i = \overline{\varphi}_i(x_1, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

du groupe (G), les transformations correspondantes

$$(71)\quad \varpi_h = \mathfrak{M}_h(\omega_1, \ldots, \omega_p | \varpi'_1, \ldots, \varpi'_q | \ldots \overline{\varphi}_j^{(\delta_1, \ldots, \delta_n)} \ldots) \qquad (h = 1, 2, \ldots, q).$$

Cela revient à dire, au point de vue géométrique, que les multiplicités

$$\varpi_h = \pi_h(x_1, \ldots, x_n) \qquad (h = 1, 2, \ldots, q),$$

fournies par ces diverses solutions de (69), sont homologues les unes des autres par rapport au groupe [(70), (71)]; et que chacune d'elles admet un sous-groupe de ce groupe [(70), (71)], qui se réduit au sous-groupe correspondant de (G) quand on considère seulement la manière dont il transforme les variables $x_1, \ldots, x_n$ en $x'_1, \ldots, x'_n$.

### VII. — Des sous-groupes invariants.

20. La méthode précédente donne, par un même système (69), tous les sous-groupes de (G) appartenant à un même type, et la formule (71) donne la loi suivant laquelle s'échangent ces groupes quand on les transforme par les diverses transformations de (G).

Il en résulte, d'une manière tout analogue à ce qu'on a vu au n° 15, que diverses solutions de (69) donneront un même sous-groupe (Γ) de (G), toutes les fois que ce sous-groupe sera invariant dans un plus grand sous-groupe de (G), et que les formules (71) liant entre elles ces diverses solutions correspondront à des transformations (70) appartenant à ce dernier sous-groupe.

On vérifiera le fait comme au n° 15, en faisant intervenir les transformations infinitésimales de $(\Gamma)$, dont les équations de définition se composeront, d'abord de celles de $(G)$ :

$$(72)\qquad \sum_{i|\alpha_1,\ldots,\alpha_n} \frac{\xi_i^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)}}{\alpha_1!\ldots!\,\alpha_n!}\lambda_{i|\alpha_1,\ldots,\alpha_n|s}(\omega_1,\ldots,\omega_p)=\sum_{i=1}^{n}\xi_i\frac{\partial\omega_s}{\partial\omega_i}\quad(s=1,2,\ldots,p);$$

puis d'équations de la forme

$$(73)\qquad \sum_{i|\alpha_1,\ldots,\alpha_n} \frac{\xi_i^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)}}{\alpha_1!\ldots!\,\alpha_n!}\nu_{i|\alpha_1,\ldots,\alpha_n|h}(\omega_1,\ldots,\omega_p|\pi_1,\ldots,\pi_q)=\sum_{i=1}^{n}\xi_i\frac{\partial\pi_h}{\partial x_i}$$
$$(h=1,2,\ldots,q).$$

La condition pour qu'elles représentent un même groupe, pour deux systèmes de valeurs attribuées aux fonctions $\pi_h$, s'exprimera par des relations de la forme

$$\mathfrak{R}_k\left(\omega_1,\ldots,\omega_p|\pi_1,\ldots,\pi_q,\ldots,\frac{\partial\pi_h}{\partial x_i},\ldots\right)$$
$$=\mathfrak{R}_k\left(\omega_1,\ldots,\omega_p|\pi'_1,\ldots,\pi'_q,\ldots,\frac{\partial\pi'_h}{\partial x_i},\ldots\right)\qquad(k=1,2,\ldots,\sigma),$$

c'est-à-dire

$$(74)\qquad \mathfrak{R}_k\left(\omega_1,\ldots,\omega_p|\pi_1,\ldots,\pi_q,\ldots,\frac{\partial\pi_h}{\partial x_i}\right)=\varepsilon_k(x_1,\ldots,x_n)$$
$$(k=1,2,\ldots,\sigma),$$

On aura donc à voir si l'on peut déterminer les $\varepsilon_k$ de manière à avoir plus d'une solution commune aux systèmes (69) et (74).

21. En particulier, pour que le système (69) fournisse un seul groupe $(\Gamma)$, c'est-à-dire un sous-groupe invariant de $(G)$, il faut et il suffit que toutes ses solutions appartiennent à un même système (74). Donc, dans ce cas, les fonctions $\varepsilon_k$ se détermineront sans intégration, en exprimant que les équations (74) sont des conséquences des équations (69). Or ce sont les valeurs des seuls coefficients des équations (72) et (73), résolues par rapport au plus grand nombre possible des $\xi_i$ et de leurs dérivées, qui dépendent des fonctions inconnues $\pi_h$.

Donc *les équations de définition des transformations infinitésimales des divers sous-groupes invariants (transitifs) de (G) s'obtiennent sous forme entièrement explicite.*

Soit (Γ) l'un de ces sous-groupes invariants; pour avoir les équations de définition de ses transformations finies, il faudra intégrer le système (69). Les diverses solutions de ce système correspondent aux divers systèmes d'invariants fondamentaux du groupe (Γ) qui se déduisent de l'un d'entre eux par les transformations de (G) : elles sont donc liées par des relations de la forme

$$(75) \qquad w'_h = f_h(w_1, \ldots, w_q | \omega_1, \ldots, \omega_p) \qquad (h = 1, 2, \ldots, q),$$

qui définissent un groupe isomorphe à (G). Cet isomorphisme n'est pas holoédrique, car la transformation identique du groupe (75) correspond au sous-groupe invariant (Γ) de (G), puisque chacune des transformations de (Γ) laisse inaltérée ses divers invariants fondamentaux, et que cela est caractéristique pour les transformations de (Γ).

On peut observer, du reste, que, puisque l'on connaît les équations de définition des transformations infinitésimales de (Γ), la recherche des équations de définition de ses transformations finies, qui revient à la détermination de ses invariants fondamentaux, ne dépend que de l'intégration d'un système complet. De sorte que l'intégration du système (69) doit se ramener à celle d'équations différentielles ordinaires.

## VIII. — Sur la recherche des groupes et sous-groupes intransitifs.

**22.** Disons quelques mots de la détermination des groupes intransitifs de l'espace à $n$ dimensions. On précisera en cherchant ceux qui ont un nombre donné $n - r$ d'invariants d'ordre zéro. Comme on ne cherche qu'un groupe de chaque type, on peut supposer que ces invariants sont les variables $x_{r+1}, \ldots, x_n$. Le groupe est alors un groupe transitif de l'espace à $r$ dimensions, de coordonnées $x_1, \ldots, x_r$, dans les transformations duquel $x_{r+1}, \ldots, x_n$ peuvent figurer comme paramètres.

On devra donc reprendre la méthode de recherche des groupes transitifs, en remplaçant toutes les constantes arbitraires qui pouvaient se présenter, soit dans la recherche du groupe $\mathcal{L}$, soit dans les systèmes auxiliaires introduits par les conditions d'intégrabilité et servant à séparer les types, par des fonctions arbitraires des variables $x_{r+1}, \ldots, x_n$.

La même idée servira pour trouver les types de sous-groupes intransitifs d'un groupe (G) donné. Mais ici il faudra chercher d'abord les systèmes de fonctions pouvant rester invariantes par les transformations d'un sous-groupe de (G) : ce qui pourra conduire à l'intégration de systèmes différentiels auxiliaires. Ayant calculé un tel système de fonctions, le plus simple sera de faire un changement de variables dans (G), en prenant ces fonctions pour certaines des variables nouvelles. On sera alors ramené à la détermination de groupes transitifs, dépendant de constantes arbitraires en nombre donné.

En particulier, si l'on cherche les sous-groupes intransitifs invariants de (G), les invariants d'ordre zéro de l'un d'eux devront se transformer entre eux par les transformations de (G). Le cas ne se présentera donc pas si (G) est primitif. Et, s'il est imprimitif, on devra intégrer d'abord les divers systèmes complets invariants par ce groupe (G). Après quoi, on achèvera sans difficulté.

## IX. — Sur la similitude et sur l'isomorphisme.

23. Les systèmes tels que le système (51), que nous avons introduit au n° 14, s'offrent d'eux-mêmes quand on cherche à *reconnaître si deux groupes* (G) et (G′), *donnés par leurs équations de définition, sont semblables, et à déterminer les transformations qui changent ces deux groupes l'un par l'autre* (¹). La question, en effet, est la suivante :

Les équations de définition de (G) ayant été mises sous la forme

$$(76)\quad \mathcal{L}_s[\omega_1(y_1, \ldots, y_n), \ldots, \omega_p(y_1, \ldots, y_n) | \ldots y_j^{(\delta_1, \ldots, \delta_n)} \ldots] = \omega_s(x_1, \ldots, x_n)$$
$$(s = 1, 2, \ldots, p).$$

(¹) Nous supposons, pour simplifier, les deux groupes transitifs.

celles de (G′) peuvent-elles se mettre sous la forme

$$(77)\quad \mathfrak{L}_s[\theta_1(y_1, \ldots, y_n), \ldots, \theta_p(y_1, \ldots, y_n) | \ldots y_j^{(\delta_1, \ldots, \delta_n)}] = \theta_s(x_1, \ldots, x_n)$$
$$(s = 1, 2, \ldots, p),$$

de telle manière qu'il existe des fonctions

$$(78)\qquad z_i = f_i(x_1, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

satisfaisant aux équations aux dérivées partielles

$$(79)\quad \mathfrak{L}_s[\omega_1(z_1, \ldots, z_n), \ldots, \omega_p(z_1, \ldots, z_n) | \ldots z_j^{(\delta_1, \ldots, \delta_n)} \ldots] = \theta_s(x_1, \ldots, x_n)$$
$$(s = 1, 2, \ldots, p)?$$

Que ce soit bien là la question à résoudre, cela résulte immédiatement des résultats du n° 10 : et l'on voit que le système (79) ne diffère que par les notations du système (51).

On commencera donc par mettre les équations de définition de (G′) sous la forme de Medolaghi, comme on l'a vu aux n$^{os}$ 6 et 8. Elles seront alors, par exemple,

$$\overline{\mathfrak{L}}_s[\overline{\omega}_1(y_1, \ldots, y_n), \ldots, \overline{\omega}_p(y_1, \ldots, y_n) | \ldots y_j^{(\delta_1, \ldots, \delta_n)} \ldots] = \overline{\omega}_s(x_1, \ldots, x_n)$$
$$(s = 1, 2, \ldots, p),$$

car la question ne se pose que si elles sont du même ordre que celles de (G), et en même nombre. On ne peut ensuite les modifier qu'en remplaçant les invariants fondamentaux par d'autres, c'est-à-dire en effectuant dans ces équations des transformations ponctuelles

$$\overline{\omega}_1 = f_s(\theta_1, \ldots, \theta_p) \qquad (s = 1, 2, \ldots, p)$$

Il s'agit donc de reconnaître d'abord si les deux groupes *finis* (car les $y_j^{(\delta_1, \ldots, \delta_n)}$ jouent le rôle de paramètres dans ce calcul)

$$u'_s = \mathfrak{L}_s(u_1, \ldots, u_p | \ldots a_j^{(\delta_1, \ldots, \delta_n)} \ldots) \qquad (s = 1, 2, \ldots, p),$$

et

$$u'_s = \overline{\mathfrak{L}}_s(u_1, \ldots, u_p | \ldots a_j^{(\delta_1, \ldots, \delta_n)} \ldots) \qquad (s = 1, 2, \ldots, p)$$

sont semblables, et de trouver toutes les transformations qui font passer de l'un à l'autre. C'est un problème qui a été complètement traité par S. Lie ([1]) et qui n'exige que des opérations effectuables, parce qu'on connaît les équations finies de ces deux groupes.

On obtiendra ainsi divers systèmes de fonctions $\theta_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \theta_p(x_1, \ldots, x_n)$, et il faudra chercher s'il y en a, parmi eux, qui satisfassent aux conditions d'intégrabilité du système (79), c'est-à-dire au système auxiliaire [(58), (59)] qui correspond aux groupes du même type que (G). Dans ce cas, les groupes (G) et (G′) sont effectivement semblables et, pour trouver les transformations qui permettent de passer de l'un à l'autre, il n'y a plus qu'à intégrer les divers systèmes (79) complètement intégrables que l'on aura ainsi obtenus.

24. Essayons de préciser, pour les groupes infinis, la notion de l'*isomorphisme;* en nous bornant, pour plus de simplicité, à l'isomorphisme holoédrique. Il est clair que l'on peut prendre pour définition, soit celle de la théorie des substitutions :

« Deux groupes sont isomorphes, si leurs transformations finies se correspondent univoquement, de manière que le produit de deux transformations de l'un des groupes corresponde toujours au produit des deux transformations homologues de l'autre groupe. »

Soit la définition de la théorie des groupes finis :

« Deux groupes sont isomorphes, si leurs transformations infinitésimales se correspondent univoquement, de manière que le crochet de deux transformations infinitésimales quelconques du premier groupe corresponde toujours au crochet des deux transformations infinitésimales homologues de l'autre groupe. »

Et il n'y aurait pas de difficulté à montrer que ces deux définitions sont, au fond, équivalentes. Mais il paraît beaucoup plus difficile de déduire, de ces définitions, une manière analytique de traduire la correspondance qui y est énoncée. C'est pour éviter cette difficulté que nous proposons une autre définition, peut-être plus restreinte, mais où le mode de correspondance entre les transformations, finies ou infinitésimales, des deux groupes sera déterminé d'une manière analytique précise.

---

([1]) *Theorie der Transf. gr.*, t. I, p. 327 et suiv.

Rappelons à cet effet ce qui se passe pour les groupes finis.

Les transformations des deux groupes ne dépendant que de constantes arbitraires, la correspondance énoncée dans les deux définitions précédentes ne peut se traduire que par des équations finies entre les constantes arbitraires, ou paramètres, nécessaires pour définir l'une des transformations de l'un ou l'autre des deux groupes. Il n'y a pas alors de difficulté à traduire analytiquement la correspondance isomorphique.

Supposons toujours les groupes considérés $(G)$ et $(G_1)$ transitifs. *Prolongeons* le premier, en considérant les variables $x_1, \ldots, x_n$ qu'il transforme, comme fonctions d'une variable $t$, non transformée; en poussant assez loin le prolongement, nous finirons par obtenir un groupe intransitif. Nous déterminerons ses invariants, et, les prenant comme nouvelles variables à la place de certaines des dérivées $\frac{d^m x_i}{dt^m}$, nous obtiendrons un groupe simplement transitif $(\overline{G})$, qui sera imprimitif, et dont on peut dire que $(G)$ provient en le *raccourcissant*, c'est-à-dire en ne gardant de ses équations finies que celles qui échangent entre elles les variables $x_1, \ldots, x_n$ elles-mêmes.

Nous obtiendrions de même un groupe simplement transitif $(\overline{G_1})$, dont $(G_1)$ se déduirait en le *raccourcissant*, et qui serait isomorphe holoédriquement à $(G_1)$, et par suite à $(G)$ et à $(\overline{G})$.

Mais alors $(\overline{G})$ et $(\overline{G_1})$ étant simplement transitifs et holoédriquement isomorphes, sont semblables. Désignons, pour préciser, par

$$x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_r$$

les variables que $(\overline{G})$ transforme, et par

$$y_1, \ldots, y_p, y_{p+1}, \ldots, y_r$$

celles qui sont transformées par $(\overline{G_1})$, les $p$ premières étant celles que transforme le groupe $(G_1)$ donné. On passera de $(\overline{G})$ à $(\overline{G_1})$ par des formules

$$y_i = \varphi_i(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_r) \qquad (i = 1, 2, \ldots, r),$$

et, par conséquent, de $(\overline{G})$ au groupe $(G_1)$ donné par des formules

$$(80) \qquad y_i = \varphi_i(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_r) \qquad (i = 1, 2, \ldots, p).$$

On voit donc que, en écartant le cas simple où (G) et ($G_1$) sont semblables, *ils correspondent à deux modes d'imprimitivité différents du groupe* ($\overline{G}$). Dans le premier s'échangent entre elles les fonctions de $x_1, \ldots, x_n$; dans le second, les fonctions de $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$, et il n'y a aucune transformation de ($\overline{G}$) autre que la transformation identique, qui laisse invariantes à la fois, ni les variables $x_1, \ldots, x_n$, ni les fonctions $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$.

On voit également que, réciproquement, deux groupes (G) et ($G_1$) qui seront associés de cette manière à un troisième groupe ($\overline{G}$), sans que celui-ci soit, nécessairement, simplement transitif, seront holoédriquement isomorphes.

C'est ce caractère que nous proposons de prendre comme définition ([1]) pour l'isomorphisme des groupes infinis :

*Deux groupes infinis (ou finis) sont dits* isomorphes holoédriquement : *soit s'ils sont semblables; soit s'ils expriment deux modes d'imprimitivité différents d'un même troisième groupe,* c'est-à-dire s'ils expriment la loi de l'échange, par ce troisième groupe, de deux systèmes de fonctions des variables qu'il transforme, avec cette condition que la transformation identique soit la seule transformation de ce troisième groupe qui laisse invariante chacune des fonctions de l'un ou l'autre de ces deux systèmes.

---

([1]) Cette définition paraît d'accord avec une phrase de Lie assez obscure (*Leipziger Berichte*, 1895, p. 290, au bas de la page).