ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

J. CLAIRIN

Sur les transformations de Baecklund

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 19 (1902), p. 3-63 (supplément)
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1902_3_19__S3_0>

SUR LES

TRANSFORMATIONS DE BAECKLUND,

PAR M. J. CLAIRIN,

AGRÉGÉ PRÉPARATEUR A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

INTRODUCTION.

La célèbre méthode de Laplace pour l'intégration des équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre est fondée sur les propriétés d'une transformation très simple qui remplace chaque intégrale de l'équation donnée par une intégrale d'une autre équation linéaire du second ordre et réciproquement. En étudiant les équations linéaires et, en particulier, en cherchant à obtenir des équations de ce type dont il soit possible de trouver l'intégrale générale, les géomètres ont été conduits à considérer des transformations qui diffèrent de la transformation de Laplace par certaines de leurs propriétés, mais qui jouissent cependant de la propriété caractéristique de cette transformation : étant donnée une surface quelconque, il n'existe pas de surface transformée, tandis qu'à chaque intégrale d'une certaine équation linéaire du second ordre la transformation fait correspondre soit une intégrale, soit une infinité d'intégrales d'une équation analogue. La théorie des équations linéaires a été exposée par M. Darboux (¹), auquel on doit un très grand nombre de résultats importants; je citerai simplement les noms de Moutard, de M. Lucien Lévy

(¹) *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, t. II.

et de M. Roger Liouville qui ont étudié certains modes de transformation des équations linéaires.

Les transformations des équations aux dérivées partielles du second ordre non linéaires n'ont pas été l'objet d'un aussi grand nombre de travaux, des résultats assez généraux ont cependant été démontrés par M. Bäcklund dans des Mémoires [1] dont la lecture est malheureusement un peu difficile. En cherchant à étudier analytiquement la transformation des surfaces à courbure totale constante découverte par M. Bianchi, Lie avait remarqué [2] que cette transformation ne s'appliquait pas à une surface quelconque, mais seulement à des surfaces à courbure totale constante; M. Bäcklund a montré que dans certains cas des systèmes d'équations aux dérivées partielles analogues au système qui avait fait l'objet des travaux de Lie permettent de déduire, par l'intégration d'équations différentielles ordinaires, de toute intégrale d'une équation de Monge-Ampère une infinité d'intégrales d'une équation de même espèce. En même temps, M. Bäcklund a défini une transformation des surfaces à courbure totale constante, qui comprend la transformation de M. Bianchi comme cas particulier; un peu plus tard M. Darboux [3] a généralisé ce dernier résultat et a indiqué une méthode très élégante pour démontrer les théorèmes obtenus par M. Bäcklund.

Quelques transformations particulières des équations aux dérivées partielles du second ordre ont été étudiées par M. Gomes Teixeira [4]; plus récemment, M. Goursat a montré [5] que dans un cas étendu les surfaces auxquelles s'appliquent les transformations considérées par M. Bäcklund, c'est-à-dire les transformations définies, avec les notations ordinaires, par un système de quatre équations entre x, y,

---

(1) BAECKLUND, *Zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung* (*Mathematische Annalen*, t. XVII, p. 285; 1880), et *Zur Theorie der Flächentransformationen* (même Recueil, t. XIX, p. 387; 1882).

(2) *Archiv for Mathematik og Naturvidenskab*, t. V, p. 282; 1880.

(3) *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, t. III, p. 438.

(4) *Comptes rendus*, t. XCIII, p. 702; 1881. — *Bulletin de l'Académie de Belgique*, 3e série, t. III, p. 486; 1882.

(5) GOURSAT, *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre*, t. II, p. 284.

$z, p, q, x', y', z', p', q'$ sont les intégrales d'une équation du second ordre.

Le présent Travail, qui est divisé en trois Parties, a pour objet l'étude des transformations définies comme il vient d'être expliqué, dans le cas où chacune des deux familles de surfaces qui se correspondent se compose des intégrales d'une équation du second ordre : ces transformations sont dites *transformations de Bäcklund*.

Dans la première Partie, j'indique les propriétés générales de ces transformations; en particulier, après avoir rappelé brièvement les résultats obtenus par M. Bäcklund, j'examine un cas, qui n'avait pas encore été considéré, où quatre équations entre $x, y, z, p, q, x', y', z', p', q'$ définissent une transformation qui s'applique aux intégrales d'une équation du second ordre.

Dans la deuxième Partie, j'étudie les transformations de Bäcklund qui font correspondre une à une les intégrales des deux équations transformées; il est aisé d'obtenir quelques propositions très générales et très précises.

Lorsqu'à une intégrale de l'une au moins des deux équations la transformation fait correspondre une infinité d'intégrales de l'autre équation, la théorie semble beaucoup plus compliquée; bien que très incomplets, les résultats que je démontre dans la troisième Partie sont peut-être susceptibles de fournir des indications utiles pour une étude plus approfondie.

Les principaux résultats contenus dans les deux premières Parties ont été présentés à l'Académie des Sciences (séances des 5 février et 9 avril 1900 et du 11 février 1901).

PREMIÈRE PARTIE.

1. Étant donnés dans l'espace deux systèmes d'éléments du premier ordre, nous désignerons, suivant l'usage, par x, y, z, p, q les coordonnées d'un élément quelconque du premier système que nous appellerons système (E); pour le second système nous emploierons les mêmes lettres accentuées; nous dirons qu'une surface dont tous les éléments font partie de l'un des deux systèmes appartient à ce système. Nous aurons à considérer des transformations de contact auxquelles sont soumis, soit les éléments de (E), soit ceux de (E′); nous appellerons souvent, pour abréger, les premières transformations (T) et les autres transformations (T′).

On sait que, si le point x, y, z décrit une surface $z = f(xy)$, les coordonnées des éléments de cette surface ont pour valeurs

$$p = \frac{\partial f}{\partial x}, \qquad q = \frac{\partial f}{\partial y},$$

nous écrirons encore

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \qquad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}, \qquad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2},$$

et, pour les dérivées d'ordre supérieur,

$$p_{i,k} = \frac{\partial^{i+k} f}{\partial x^i\, \partial y^k} \qquad (i + k > 2).$$

Soit V une fonction de x, y, z et des dérivées de z jusqu'à l'ordre n, et soit $\frac{d^{i+k}\mathrm{V}}{dx^i\, dy^k}$ la dérivée prise i fois par rapport à x et k fois par rapport à y; si l'on en retranche les termes qui contiennent les dérivées de z d'ordre $n + i + k$, il reste une expression que nous désignerons par

$$\left(\frac{d^{i+k}\mathrm{V}}{dx^i\, dy^k}\right).$$

Le problème que s'est proposé M. Bäcklund peut être énoncé de la manière suivante :

Étant données quatre équations

$$F_i(x, y, z, p, q; x', y', z', p', q') = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4) \tag{1}$$

entre les coordonnées des éléments de deux systèmes (E), (E′), *déterminer les surfaces du système* (E) *auxquelles correspondent des surfaces de* (E′).

Nous allons montrer que les équations (1) définissent toujours une transformation qui fait correspondre certaines surfaces de (E) à des surfaces de (E′) : nous ne considérerons pas comme distinctes deux transformations définies par deux systèmes d'équations qui se ramènent l'un à l'autre par des transformations (T) et (T′), de même que nous regarderons comme identiques deux équations aux dérivées partielles qui se déduisent l'une de l'autre par une transformation de contact.

Nous ne nous occuperons pas d'abord du cas où l'on peut déduire du système (1) une équation qui ne dépende que de x, y, z, p, q; nous supposerons, en outre, les équations (1) résolues par rapport aux variables x', y', p', q'; si cette résolution était impossible, il suffirait d'effectuer d'abord un changement de variables ou une transformation (T′) convenablement choisie, par exemple la transformation d'Ampère. Le système (1) devient donc

$$\left\{\begin{array}{ll} x' = f_1(x, y, z, p, q; z'), & y' = f_2(x, y, z, p, q; z'), \\ p' = f_3(x, y, z, p, q; z'), & q' = f_4(x, y, z, p, q; z'). \end{array}\right. \tag{2}$$

Les éléments de (E′), qui engendrent une surface, satisfont à l'équation

$$dz' - p'\,dx' - q'\,dy' = 0,$$

qui devient, si l'on remplace x', y', p', q' par leurs valeurs,

$$A\,dz' + B\,dx + C\,dy + \alpha\,dp + \beta\,dq = 0 \tag{3}$$

ou encore

$$A\,dz' + (B + \alpha r + \beta s)\,dx + (C + \alpha s + \beta t)\,dy = 0, \tag{3'}$$

à condition de poser

$$A = f_3 \frac{\partial f_1}{\partial z'} + f_4 \frac{\partial f_2}{\partial z'} - 1,$$

$$B = f_3 \left(\frac{df_1}{dx}\right) + f_4 \left(\frac{df_2}{dx}\right), \qquad C = f_3 \left(\frac{df_1}{dy}\right) + f_4 \left(\frac{df_2}{dy}\right),$$

$$\alpha = f_3 \frac{\partial f_1}{\partial p} + f_4 \frac{\partial f_2}{\partial p}, \qquad \beta = f_3 \frac{\partial f_1}{\partial q} + f_4 \frac{\partial f_2}{\partial q}.$$

La condition d'intégrabilité de $(3)'$ peut s'écrire

$$\text{(4)} \qquad Hr + 2Ks + Lt + M + N(rt - s^2) = 0,$$

où H, K, L, M, N sont des fonctions faciles à calculer de x, y, z, p, q, z'.

Deux cas peuvent alors se présenter. Si l'équation (4) dépend de z', on en tirera z' en fonction de x, y, z, p, q, r, s, t et après avoir porté dans $(3)'$, il restera deux équations aux dérivées partielles du troisième ordre pour déterminer z. Ces équations sont compatibles; il existe, en général, ∞^1 intégrales passant par une courbe donnée et admettant en chaque point de cette courbe un plan tangent donné [1]; à une intégrale de ces équations ne correspond qu'une surface de (E').

Il peut également se faire que l'équation (4) ne dépende pas de z'; c'est alors une équation de Monge-Ampère : si l'on remplace z par une intégrale de (4), l'équation $(3)'$ est complètement intégrable et détermine une infinité de surfaces de (E') dépendant d'un paramètre arbitraire. On voit immédiatement qu'il en sera ainsi, en particulier, si z' ne figure pas dans les équations (2). Si ces équations admettent une transformation infinitésimale (T'), on pourra, à l'aide d'une transformation (T'), remplacer le système (2) par un système analogue de quatre équations qui ne contiennent plus z' et la condition d'intégrabilité (4) se réduira encore à une équation de Monge-Ampère.

2. Ces résultats sont dus à M. Bäcklund, qui les a démontrés dans les Mémoires déjà cités; j'y ajouterai la remarque suivante. Je ne considérerai ici que le cas où l'on est conduit à une équation de Monge-Ampère (4). Il est toujours possible, par une transformation

---

(1) Baecklund, *Mathematische Annalen*, t. XVII, p. 291, et t. XIX, p. 389.

de contact, de faire disparaître le terme en $rt - s^2$ de cette équation qui admet alors une famille d'intégrales composées chacune d'un point et de tous les plans qui y passent.

D'après cela, l'équation

$$A\,dz' + \alpha\,dp + \beta\,dq = 0,$$

où l'on regarde x, y, z comme des constantes, est complètement intégrable. Nous aurons donc, en appelant ρ et θ deux fonctions de x, y, z, p, q, z',

$$A\,dz' + \alpha\,dp + \beta\,dq = \rho\,d\theta,$$

à condition de différentier θ par rapport aux seules variables p, q, z'.

Si l'on prend maintenant la différentielle ordinaire, on pourra écrire

$$A\,dz' + \alpha\,dp + \beta\,dq = \rho\left[d\theta - \left(\frac{d\theta}{dx}\right)dx - \left(\frac{d\theta}{dy}\right)dy\right].$$

Portons cette valeur de $A\,dz' + \alpha\,dp + \beta\,dq$ dans (3) et, en même temps, remplaçons z' par son expression en fonction de x, y, z, p, q, et d'une nouvelle variable définie par

$$\zeta = \theta(x, y, z, p, q, z'),$$

l'équation (3) devient

$$(3)'' \qquad d\zeta - \lambda\,dx - \mu\,dy = 0,$$

λ et μ désignant des fonctions de x, y, z, p, q, ζ, et cette équation sera complètement intégrable en même temps que (3)'. Une équation linéaire en r, s, t n'est pas en général identique à la condition d'intégrabilité d'une expression telle que (3)''; si l'on suppose par exemple que l'équation considérée ne contienne ni s, ni t, il faut que cette équation soit bilinéaire en r et q. Par conséquent, une équation de Monge-Ampère ne dérive généralement pas d'une transformation (2) par la méthode indiquée dans le paragraphe précédent. S'il semble difficile de déterminer toutes les équations qui jouissent de cette propriété, il suffit de supposer que λ et μ ne dépendent pas de ζ pour en avoir une infinité.

En écrivant que H, K, L, M, N sont proportionnels aux coefficients d'une équation de Monge-Ampère donnée, on obtient quatre équations aux dérivées partielles pour déterminer les quatre fonctions f_1, f_2, f_3, f_4, mais ce système d'équations est un système singulier auquel ne s'appliquent pas les théorèmes de Cauchy et n'admet pas en général de solution.

3. Si (4) est une équation de Monge-Ampère, dès que l'on connaîtra une intégrale de cette équation, z' sera déterminée par une intégration; x', y', p', q' sont données par les équations (2) en fonction de x, y, z, p, q, z'; d'une manière générale, une dérivée quelconque $p'_{i,k}$ de z' s'exprime en fonction de z', x, y, z et des dérivées de z jusqu'à l'ordre $i+k$. On le voit en procédant de proche en proche; par exemple pour obtenir s' et t', on différentiera $q'=f_4(x, y, z, p, q; z')$, on remplacera dx', dy', dz' par leurs valeurs tirées de (2) et de (3)' et l'on annulera les coefficients de dx et de dy. Le déterminant du système de deux équations linéaires que l'on obtient ainsi pour calculer deux dérivées consécutives $p'_{i,k}$, $p'_{i-1,k+1}$ est toujours $\frac{D(f_1, f_2)}{D(x, y)}$; il n'est nul que si les multiplicités de (E') qui correspondent à des multiplicités de (E) satisfont à l'équation

$$y' = \text{fonction arbitraire de } x';$$

il suffit d'effectuer une transformation (T') pour que cette circonstance ne se présente pas. On comprend aisément, du reste, pourquoi ce cas se distingue des autres : étant donnée une intégrale pour laquelle y' est fonction de x', z' n'est plus une fonction de deux variables indépendantes et il n'y a pas lieu de considérer les dérivées partielles de cette quantité.

4. Les raisonnements de M. Bäcklund supposent essentiellement que, dans l'équation (3), le coefficient A est différent de zéro; si ce coefficient est identiquement nul, les choses se passent tout différemment. L'interprétation géométrique de la condition

$$A = f_3 \frac{\partial f_1}{\partial z'} + f_4 \frac{\partial f_2}{\partial z'} - 1 = 0$$

est facile; cette égalité exprime qu'à un élément x, y, z, p, q correspondent ∞^1 éléments unis de (E').

L'équation

$$dz' - p'\,dx' - q'\,dy' = 0,$$

à laquelle satisfont les éléments de (E′) qui engendrent une surface, se réduit ici, après que x', y', p', q' ont été remplacées par leurs valeurs, à

$$(B + \alpha r + \beta s)\,dx + (C + \alpha s + \beta t)\,dy = 0$$

et ne peut être vérifiée que si l'on a à la fois

$$(5)\qquad \begin{cases} B + \alpha r + \beta s = 0, \\ C + \alpha s + \beta t = 0. \end{cases}$$

En éliminant z' entre ces équations, on est conduit à une équation aux dérivées partielles du second ordre

$$(6)\qquad F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$$

qui définit les surfaces de (E) auxquelles correspondent des surfaces de (E′). Regardons pour un instant x, y, z, p, q comme des paramètres quelconques et r, s, t comme des coordonnées cartésiennes dans un espace à trois dimensions; les deux équations (5) représentent une droite qui appartient au complexe (G) des droites parallèles aux génératrices du cône $rt - s^2 = 0$. L'équation (6) représente une surface réglée dont les génératrices appartiennent à (G), cette équation possède donc un système de caractéristiques du premier ordre. A chaque intégrale de (6) ne correspond qu'une surface de (E′), les équations (2) et (5) donnent x', y', z', p', q'.

Réciproquement, étant donnée une équation aux dérivées partielles du second ordre (6) qui possède un système de caractéristiques du premier ordre, il existe une infinité de transformations (2) telles que l'équation proposée dérive de l'une quelconque de ces transformations de la manière qui vient d'être dite.

L'équation (6) peut être remplacée par un système de deux équations

$$\lambda r + \mu s + \nu = 0,$$
$$\lambda s + \mu t + \rho = 0,$$

λ, μ, ν, ρ étant liées par deux relations homogènes

$$\psi_1(x, y, z, p, q, \lambda, \mu, \nu, \rho) = 0, \qquad \psi_2(x, y, z, p, q, \lambda, \mu, \nu, \rho) = 0.$$

D'autre part, l'équation aux dérivées partielles du second ordre qui dérive d'une transformation (2) pour laquelle on a

$$(7) \qquad f_3 \frac{\partial f_1}{\partial z'} + f_4 \frac{\partial f_2}{\partial z'} = 1$$

équivaut, comme nous venons de le voir, au système de deux équations (5) où B, C, α, β ont les valeurs indiquées plus haut (n° 1). Cette équation sera identique à (6) si l'on a

$$(8) \quad \psi_1(x, y, z, p, q, \alpha, \beta, B, C) = 0, \qquad \psi_2(x, y, z, p, q, \alpha, \beta, B, C) = 0.$$

Ces deux équations sont homogènes par rapport à f_3 et f_4; on peut donc éliminer f_3 et f_4, il reste une seule équation aux dérivées partielles du premier ordre à laquelle doivent satisfaire f_1 et f_2. On pourra prendre une de ces fonctions, f_2 par exemple, arbitrairement, et dès que l'on connaîtra une solution f_1 de l'équation aux dérivées partielles ainsi obtenue, on aura f_3 et f_4 sans nouvelle intégration en résolvant le système formé par l'équation (7) et une des équations (8).

Lorsque l'on aura déterminé une transformation dont dérive l'équation proposée, on en connaîtra une infinité, puisqu'il suffira pour cela d'effectuer une transformation (T') quelconque, mais, d'après nos conventions, nous ne considérerons pas comme distinctes deux transformations qui se déduisent ainsi l'une de l'autre; le problème que nous venons de traiter admet du reste une infinité de solutions distinctes dans le sens que nous donnons à ce mot, nous indiquerons plus loin une relation remarquable entre ces solutions.

Si nous appelons (C) le système de caractéristiques du premier ordre de l'équation proposée qui est défini par les équations

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$
$$\psi_1(x, y, z, p, q, dx, dy, -dp, -dq) = 0,$$
$$\psi_2(x, y, z, p, q, dx, dy, -dp, -dq) = 0,$$

nous dirons que les transformations qui viennent d'être étudiées sont déduites du système de caractéristiques (C).

5. Reprenons les quatre équations

$$x'=f_1(x, y, z, p, q; z'), \qquad y'=f_2(x, y, z, p, q; z'),$$
$$p'=f_3(x, y, z, p, q; z'), \qquad q'=f_4(x, y, z, p, q; z'),$$

f_1, f_2, f_3, f_4 satisfaisant à l'égalité (7), et supposons que f_1 et f_2 dépendent des variables x, y, z, p, q par l'intermédiaire de trois fonctions φ_1, φ_2, φ_3 de ces variables, c'est-à-dire que les multiplicités ponctuelles qui supportent les multiplicités engendrées par les éléments de (E′) qui correspondent à un élément (x, y, z, p, q) forment une famille à trois paramètres : une transformation de contact permettra de les remplacer par l'ensemble des points de l'espace [1]. Les équations de la transformation que nous voulons étudier seront alors

$$\text{(9)} \qquad \begin{cases} x'=\varphi_1(x, y, z, p, q), \\ y'=\varphi_2(x, y, z, p, q), \\ z'=\varphi_3(x, y, z, p, q), \\ \Phi(x, y, z, p, q; p', q')=0. \end{cases}$$

Dans la pratique il y a souvent intérêt, quand la chose est possible, à considérer les équations d'une transformation sous cette forme plutôt que sous la forme (2); il résulte du théorème général du paragraphe précédent que (9) conduira pour $z(x, y)$ à une équation du second ordre comme l'avait déjà montré M. Goursat; nous nous proposons de caractériser ces équations.

La condition

$$dz'-p'\,dx'-q'\,dy'=0$$

équivaut aux deux équations

$$\text{(10)} \qquad \begin{cases} \dfrac{d\varphi_3}{dx}-p'\dfrac{d\varphi_1}{dx}-q'\dfrac{d\varphi_2}{dx}=0, \\[2mm] \dfrac{d\varphi_3}{dy}-p'\dfrac{d\varphi_1}{dy}-q'\dfrac{d\varphi_2}{dy}=0; \end{cases}$$

en éliminant p', q' entre (9) et (10), on obtient l'équation du second

---

[1] Goursat, *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre,* t. I, p. 12.

ordre cherchée

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0.$$

Écrivons le système (10) sous la forme

$$(10)' \qquad \begin{cases} \lambda r + \mu s + \nu = 0, \\ \lambda s + \mu t + \rho = 0, \end{cases}$$

λ, μ, ν, ρ ont des valeurs faciles à calculer et satisfont à la relation

$$(11) \qquad h\nu + l\rho + m\lambda + n\mu = 0,$$

h, l, m, n étant des quantités définies à un facteur près par les équations

$$h\left(\frac{d\varphi_i}{dx}\right) + l\left(\frac{d\varphi_i}{dy}\right) + m\frac{\partial\varphi_i}{\partial p} + n\frac{\partial\varphi_i}{\partial q} = 0 \qquad (i = 1, 2, 3).$$

La relation (11) a une signification très simple; elle exprime que toutes les droites (10)′ qui engendrent la surface représentée par l'équation du second ordre rencontrent une droite fixe

$$(12) \qquad \begin{cases} hr + ls + m = 0, \\ hs + lt + n = 0, \end{cases}$$

qui appartient au complexe (G).

Réciproquement, si une équation aux dérivées partielles du second ordre, $F = 0$, représente une surface réglée dont les génératrices appartiennent au complexe (G) et rencontrent une droite fixe de ce complexe, il existe une infinité de transformations (9) dont dérive l'équation proposée. Les paramètres λ, μ, ν, ρ des génératrices de la surface satisfont à la relation (11) en supposant que la droite fixe est représentée par les équations (12); si φ_1, φ_2, φ_3 sont trois intégrales distinctes de l'équation linéaire

$$h\left(\frac{d\varphi}{dx}\right) + l\left(\frac{d\varphi}{dy}\right) + m\frac{\partial\varphi}{\partial p} + n\frac{\partial\varphi}{\partial q} = 0,$$

les valeurs de ces paramètres, dont les rapports seuls importent, peuvent s'écrire

$$\lambda = \frac{\partial\varphi_3}{\partial p} - p'\frac{\partial\varphi_1}{\partial p} - q'\frac{\partial\varphi_2}{\partial p},$$
$$\mu = \frac{\partial\varphi_3}{\partial q} - p'\frac{\partial\varphi_1}{\partial q} - q'\frac{\partial\varphi_2}{\partial q},$$
$$\nu = \left(\frac{d\varphi_3}{dx}\right) - p'\left(\frac{d\varphi_1}{dx}\right) - q'\left(\frac{d\varphi_2}{dx}\right),$$
$$\rho = \left(\frac{d\varphi_3}{dy}\right) - p'\left(\frac{d\varphi_1}{dy}\right) - q'\left(\frac{d\varphi_2}{dy}\right),$$

p', q' désignant des arbitraires. Les droites qui engendrent la surface $F = 0$ correspondent à une relation entre les paramètres p', q'

$$\Phi(x, y, z, p, q; p', q') = 0.$$

Il apparaît immédiatement que l'équation proposée dérive de la transformation définie par le système (9).

Les transformations (9) ne différant pas essentiellement de celles que nous avons considérées plus haut (n° 4), toutes les propriétés que nous démontrerons en supposant les transformations définies par un système tel que (2) pour lequel la condition (7) est satisfaite s'appliqueront aux transformations que nous venons d'étudier.

6. Des développements qui précèdent il résulte que, sous certaines conditions, les équations (2) conduisent pour z à une équation aux dérivées partielles du second ordre; on pourrait naturellement répéter pour z' ce qui a été dit pour z. Si z et z' satisfont simultanément à deux équations aux dérivées partielles du second ordre, nous dirons que les équations (2) définissent une transformation de Bäcklund.

Plusieurs cas sont possibles. Si à chaque élément de l'un des deux systèmes correspondent ∞^1 éléments unis de l'autre, les intégrales des deux équations se correspondront une à une; la transformation sera appelée *transformation de Bäcklund de première espèce* ou, plus brièvement, *transformation* (B_1). Lorsqu'une transformation est définie par quatre équations non résolues par rapport à x', y', p', q',

$$V_i(x, y, z, p, q; x', y', z', p', q') = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

on voit, sans aucune difficulté, qu'à un élément (x, y, z, p, q) correspondent ∞^1 éléments unis de (E′), si le déterminant

$$\left| \left(\frac{dV_i}{dx'}\right) \quad \left(\frac{dV_i}{dy'}\right) \quad \frac{\partial V_i}{\partial p'} \quad \frac{\partial V_i}{\partial q'} \right|$$

est nul; il n'est du reste pas nécessaire que ce déterminant soit nul identiquement, il suffit qu'il le soit en tenant compte des équations de la transformation.

Supposons qu'à un élément (x, y, z, p, q) correspondent ∞^1 éléments unis (x', y', z', p', q') sans que les éléments de (E), qui correspondent à un élément de (E′), jouissent de la même propriété : si z' satisfait à une équation de Monge-Ampère, la transformation sera une transformation de Bäcklund; à une intégrale $z(x, y)$ ne correspondra qu'une intégrale $z'(x', y')$; au contraire, étant donnée une intégrale $z'(x', y')$, il lui correspondra une infinité d'intégrales $z(x, y)$ dépendant d'une constante arbitraire. La transformation sera dite *transformation de Bäcklund de seconde espèce* ou *transformation* (B_2).

Enfin $z(x, y)$ et $z'(x', y')$ peuvent satisfaire simultanément à deux équations de Monge-Ampère de telle sorte qu'à chaque intégrale de l'une quelconque de ces deux équations correspondent ∞^1 intégrales de l'autre. Nous désignerons ces transformations sous le nom de *transformations de Bäcklund de troisième espèce* ou *transformations* (B_3).

Il est facile de donner des exemples de ces trois espèces de transformations.

Pour les transformations (B_3), il suffit de considérer un système de quatre équations

$$F_i(x, y, p, q; x', y', p', q') = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4);$$

deux transformations de contact permettent toujours de remplacer deux équations de ce système par

$$x' = x, \qquad y' = y.$$

Considérons maintenant trois fonctions quelconques f_1, f_2, f_3 de x, y, p, q, z', f_2 dépendant effectivement de z' et une fonction f_4 satisfaisant à l'équation

$$f_3 \frac{\partial f_1}{\partial z'} + f_4 \frac{\partial f_2}{\partial z'} = 1;$$

les équations

$$x' = f_1(x, y, p, q; z'), \qquad y' = f_2(x, y, p, q; z'),$$
$$p' = f_3(x, y, p, q; z'), \qquad q' = f_4(x, y, p, q; z')$$

définissent une transformation (B_2). Soit une équation du second ordre admettant un système de caractéristiques du premier ordre; supposons que cette équation ne contienne pas la variable z, les opérations indiquées plus haut (n° 4) permettent de déterminer quatre fonctions indépendantes de z qui définissent une transformation (B_2) analogue à celles que nous venons de considérer. En d'autres termes, si l'équation proposée reste invariante pour une transformation infinitésimale de contact, il sera toujours possible de lui faire correspondre par une transformation (B_2) une équation de Monge-Ampère, les équations de la transformation (B_2) restant également invariantes pour la transformation infinitésimale de contact.

Proposons-nous de montrer comment on peut écrire sans aucune intégration les équations de certaines transformations (B_1). Considérons dans l'espace (E) une famille de ∞^1 multiplicités composées chacune de ∞^1 éléments unis; il suffit de considérer une famille de ∞^1 courbes et d'adjoindre à chaque courbe une développable passant par cette courbe, les équations résolues par rapport aux constantes pourront s'écrire

$$\varphi_i(x, y, z, p, q) = \text{const.} \qquad (i = 1, 2, 3, 4);$$

soient de même

$$\varphi'_i(x', y', z', p', q') = \text{const.} \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

les équations d'une famille analogue de (E'), les équations

$$\varphi_i(x, y, z, p, q) = \varphi'_i(x', y', z', p', q') \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

définissent une transformation (B_1).

7. Nous avons montré plus haut (n° 4) comment, étant donnée une transformation

$$(13) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} x' = f_1(x, y, z, p, q; z'), & y' = f_2(x, y, z, p, q; z'), \\ p' = f_3(x, y, z, p, q; z'), & q' = f_4(x, y, z, p, q; z'), \end{array} \right.$$
$$\left(f_3 \frac{\partial f_1}{\partial z'} + f_4 \frac{\partial f_2}{\partial z'} = 1\right),$$

il lui correspond une équation du second ordre

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0 \tag{14}$$

admettant un système de caractéristiques du premier ordre. Lorsque l'on connaît une intégrale de cette équation, z' est déterminée,

$$z' = f(x, y, z, p, q, s, t),$$

et les équations (13) définissent x', y', p', q'. On obtient la valeur de z' en résolvant la seconde des équations (5) et il est facile de déduire de là la valeur du rapport $\dfrac{\frac{\partial f}{\partial s}}{\frac{\partial f}{\partial t}}$; cette valeur est $\frac{\alpha}{\beta}$ à condition de remplacer z' par f dans cette expression. D'après la convention que nous avons faite sur le sens à attribuer aux variables r, s, t, ce rapport est, au signe près, égal au coefficient angulaire de la projection sur le plan $r = 0$ de la génératrice de la surface (14) qui passe par le point r, s, t.

Considérons maintenant l'équation (14); il lui correspond une infinité de transformations telles que (11), soit

$$\left\{\begin{array}{ll} x'' = f'_1(x, y, z, p, q; z''), & y'' = f'_2(x, y, z, p, q; z''), \\ p'' = f'_3(x, y, z, p, q; z''), & q'' = f'_4(x, y, z, p, q; z''), \end{array}\right. \tag{15}$$

une de ces transformations, z'' sera donnée par

$$z'' = f'(x, y, z, p, q, s, t)$$

et, d'après ce qui vient d'être dit, nous aurons

$$\frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial f'}{\partial t} - \frac{\partial f'}{\partial s}\frac{\partial f}{\partial t} = 0.$$

L'égalité précédente montre que si, entre (13), (15) et les équations $z' = f$, $z'' = f'$, on élimine les quantités x, y, z, p, q, s, t, il viendra toujours au moins quatre relations entre les coordonnées x', y', z', p', q'; x'', y'', z'', p'', q'' de deux éléments qui se correspondent dans les systèmes (E′), (E″)

$$\psi_i(x', y', z', p', q'; x'', y'', z'', p'', q'') = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4). \tag{16}$$

En particulier, si les transformations (13) et (15) sont des transformations de Bäcklund, la transformation (16) en sera également une : on verra facilement d'après la nature des transformations (13) et (15) de quelle espèce sera la transformation (16).

Lorsque l'on fera l'élimination précédente, il pourra arriver que l'on obtienne cinq relations entre les quantités $x', y', z', p', q'; x'', y'', z'', p'', q''$ et non seulement quatre ; dans ce cas, les transformations (13) et (15) ne sont pas distinctes, mais se déduisent l'une de l'autre par une transformation (T'). Ce dernier résultat peut se rattacher à des théorèmes généraux démontrés par M. Bäcklund : en se bornant au cas particulier qui nous occupe, il est facile de donner une démonstration très simple. Puisque nous ne considérons pas le cas où du système (13), par exemple, on déduirait une équation entre les seules variables x', y', z', p', q', nous pouvons supposer que les cinq relations sont écrites sous la forme

$$(17)\qquad \left\{\begin{aligned} x'' &= g_1(x', y', z', p', q'),\\ y'' &= g_2(x', y', z', p', q'),\\ z'' &= g_3(x', y', z', p', q'),\\ p'' &= h_1(x', y', z', p', q'),\\ q'' &= h_2(x', y', z', p', q'). \end{aligned}\right.$$

Les surfaces de (E') auxquelles correspondent des surfaces engendrées par les éléments $(x'', y'', z'', p'', q'')$ sont définies par le système

$$\begin{aligned} \frac{dg_3}{dx'} - h_1\frac{dg_1}{dx'} - h_2\frac{dg_2}{dx'} &= 0,\\ \frac{dg_3}{dy'} - h_1\frac{dg_1}{dy'} - h_2\frac{dg_2}{dy'} &= 0. \end{aligned}$$

Ce système est identiquement nul si les équations (17) définissent une transformation de contact; dans tous les autres cas il ne pourra admettre une intégrale passant par une courbe quelconque et tangente le long de cette courbe à une développable donnée arbitrairement, ce qui arrive toujours, au contraire, pour l'équation ou le système d'équations qui définit $z'(x', y')$.

Reprenons le cas où l'équation (14) ne contient pas z, il sera possible de lui faire correspondre une transformation (13) dont les équations ne dépendent pas de z et f ne dépendra pas non plus de z. Cette transformation sera unique, car, s'il en existe une seconde telle que (15), en éliminant x, y, p, q, s, t, il viendra cinq relations entre $x', y', z', p', q', x'', y'', z'', p'', q''$. Autrement dit, si l'équation (14) admet une transformation infinitésimale de contact (θ) engendrant un groupe (Θ), il lui correspond par une transformation (B_2) une équation de Monge-Ampère (ε) et une seule telle qu'à une intégrale de (ε) correspondent ∞^1 intégrales de la proposée déduites de l'une d'entre elles par les transformations du groupe (Θ).

Supposons maintenant que l'équation donnée n'admette pas seulement la transformation (θ) mais qu'elle admette aussi d'autres transformations infinitésimales, soit (θ_1) une de ces transformations qui laisse (θ) invariante, je dis qu'à (θ_1) correspond une transformation infinitésimale (θ') qui ne change pas (ε). Si, en effet, on effectue sur les équations de la transformation de Bäcklund une transformation du groupe (Θ_1) engendré par (θ_1) les équations de la nouvelle transformation resteront invariantes pour le groupe transformé de (Θ) par la transformation de (Θ_1) considérée, c'est-à-dire pour le groupe (Θ) lui-même : nous aurons ainsi une transformation (B_2) qui déterminera d'une part l'équation proposée, d'autre part l'équation de Monge-Ampère déjà obtenue; elle se déduira, par conséquent, de la transformation primitive par une transformation (T') qui laisse (ε) invariante. Toutes les transformations (T') qui correspondent aux transformations de (Θ_1) forment un groupe à un paramètre.

Les transformations du groupe de l'équation proposée qui laissent (θ) invariante forment elles-mêmes un groupe (γ) et l'équation de Monge-Ampère admet un groupe holoédrique isomorphe de (γ). Il peut du reste arriver que l'équation (ε) admette d'autres transformations de contact auxquelles ne correspondent pas des transformations analogues de la proposée, mais à un sous-groupe du groupe de l'équation primitive qui ne laisse pas (θ) invariante il ne correspond jamais un groupe de transformations (T') qui ne changent pas (ε).

On peut encore indiquer une application intéressante des résultats qui précèdent. Soit une équation (14) qui admette deux transformations infinitésimales (θ) et (θ_1); il est possible de faire correspondre à cette équation deux équations de Monge-Ampère (ε) et (ε_1) en employant les transformations (B_2) particulières dont nous avons parlé au n° 6 et en considérant successivement les transformations (θ) et (θ_1). Les deux équations de Monge-Ampère que l'on obtient ainsi se correspondent naturellement par une transformation (B_3), mais, en général, cette transformation (B_3) n'appartient pas à la classe particulière dont il a été question plus haut : il en sera ainsi seulement si (θ) et (θ_1) sont permutables.

Si (θ) et (θ_1) sont homologues à l'intérieur du groupe de la proposée, les deux équations (ε) et (ε_1) sont identiques; il existe alors une transformation de Bäcklund qui fait correspondre à toute intégrale de l'équation (ε) une infinité d'intégrales de la même équation.

Il est facile de donner un exemple qui montre très nettement comment les choses se passent. Considérons l'équation étudiée par M. Goursat [1]

$$s = 2\lambda(x, y)\sqrt{pq}, \tag{18}$$

si l'on prend pour inconnue $\sqrt{p} = z'$, on trouve que z' est défini par l'équation linéaire

$$s' - \frac{\partial \log \lambda}{\partial x} q' - \lambda^2 z' = 0. \tag{19}$$

La transformation qui permet de passer de (18) à (19) est définie par le système

$$z' = \sqrt{p}, \qquad q' = \lambda^2 q. \tag{20}$$

L'équation (18) admet toujours deux transformations infinitésimales de contact que nous désignerons par leurs fonctions caractéristiques qui sont 1 et z : on peut dire que l'équation linéaire qui vient d'être obtenue pour z' correspond à la transformation 1. Cette transformation reste invariante par rapport à la transformation z; à cette dernière transformation doit donc correspondre une transformation infinitésimale de (19), c'est la transformation qui a pour fonction caractéristique z'. En prenant pour nouvelle inconnue $\frac{p}{z} = z''$, on trouve pour z'' une nouvelle équation du second ordre qui correspond à la transfor-

(1) *Bulletin de la Société mathématique*, t. XXV, p. 36. — *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre*, t. II, p. 252.

mation z; il faut éliminer z entre

$$(21)\qquad z'' = \frac{p}{z}, \qquad q'' = \frac{2\lambda\sqrt{pq}}{z} - \frac{pq}{z^2}.$$

Le produit des deux transformations (20) et (21) est une transformation (B_3) dont on obtient les équations en écrivant les valeurs de z', p', q', z'', p'', q'' en fonction de x, y, z, p, q, r et en éliminant z, p, q, r. On trouve ainsi

$$(22)\qquad p'' = 2z''\frac{p'}{z'} - z''^2, \qquad q'' = 2z''\frac{q'}{z'} - z''^2\frac{q'^2}{\lambda^2 z'^2};$$

à une valeur de z'' correspondent une infinité de valeurs de z que l'on obtient en multipliant l'une quelconque d'entre elles par une constante arbitraire, les valeurs de z' qui correspondent à ces valeurs de z et qui correspondent par conséquent à une valeur de z'' s'obtiennent de même en multipliant l'une d'elles par une constante arbitraire, ce qui apparaît également sur les formules (22). Au contraire, la transformation I ne laissant pas la transformation z invariante, aux valeurs de z qui correspondent à une valeur de z' et qui ne diffèrent que par une constante additive correspondent des valeurs de z'' telles qu'il n'existe aucun groupe à un paramètre de transformations de contact qui, appliquées à une intégrale z'' quelconque, donnent toutes les intégrales z'' qui correspondent à la même solution de (19).

8. Les équations de Monge-Ampère admettent deux systèmes de caractéristiques du premier ordre; il leur correspondra deux familles de transformations analogues à celles que nous avons étudiées plus haut, mais pour appliquer le résultat établi au début du paragraphe précédent, il ne faudra considérer simultanément que deux transformations déduites du même système de caractéristiques; il est bien clair que nos raisonnements ne s'appliquent qu'à ce cas.

Il peut cependant arriver que le produit de deux transformations de Bäcklund déduites chacune de l'un des systèmes de caractéristiques soit également une transformation de Bäcklund. Supposons, par exemple, que nous ayons une équation de Monge-Ampère qui ne contienne pas z; en considérant successivement les deux systèmes de caractéristiques, on peut lui faire correspondre deux autres équations de

Monge-Ampère par des transformations (B_2) dont les équations ne dépendront pas de z.

On obtiendra ainsi huit équations entre x, y, p, q et les coordonnées de deux autres systèmes d'éléments $x', y', z', p', q', x'', y'', z'', p'', q''$; en éliminant x, y, p, q, il viendra quatre équations qui définissent évidemment une transformation (B_1).

L'équation de M. Goursat nous fournira encore un exemple : étant donnée l'équation

$$s = 2\lambda(x, y)\sqrt{pq},$$

en prenant successivement pour inconnues $\sqrt{p}$ et $\sqrt{q}$, on obtient deux équations linéaires qui se correspondent par une transformation de Laplace.

Proposons-nous d'appliquer aux équations de Monge-Ampère les résultats de l'étude que nous avons faite (nos 4 et 5) : nous considérerons seulement, ce qui ne restreint pas la généralité, les équations linéaires en r, s, t. Soit

$$r + (m + \mu)s + m\mu t + M = 0$$

une telle équation, m, μ, M désignant des fonctions de x, y, z, p, q. Cette équation possède deux systèmes de caractéristiques du premier ordre : le système (C) correspondant à l'équation différentielle $dy = m\,dx$ et le système (Γ) correspondant à $dy = \mu\,dx$. Du système (C) on déduira une transformation telle que (13) en prenant pour f_1 et f_2 deux intégrales de l'équation linéaire

$$X(f) = \frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z} + \mu\left(\frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z}\right) - (M + \lambda m)\frac{\partial f}{\partial p} + \lambda\frac{\partial f}{\partial q} = 0,$$

où λ est une fonction arbitraire de x, y, z, p, q, z'.

Pour f_3 et f_4, on aura

$$f_3 = \frac{\dfrac{\partial f_2}{\partial q} - m\dfrac{\partial f_2}{\partial p}}{\left(\dfrac{\partial f_2}{\partial q} - m\dfrac{\partial f_2}{\partial p}\right)\dfrac{\partial f_1}{\partial z'} - \left(\dfrac{\partial f_1}{\partial q} - m\dfrac{\partial f_1}{\partial p}\right)\dfrac{\partial f_1}{\partial z'}},$$

$$f_4 = -\frac{\dfrac{\partial f_1}{\partial q} - m\dfrac{\partial f_1}{\partial p}}{\left(\dfrac{\partial f_2}{\partial q} - m\dfrac{\partial f_2}{\partial p}\right)\dfrac{\partial f_1}{\partial z'} - \left(\dfrac{\partial f_1}{\partial q} - m\dfrac{\partial f_1}{\partial p}\right)\dfrac{\partial f_2}{\partial z'}}.$$

Remarquons que, si f est une intégrale de $X(f) = 0$, on a

$$X\left(\frac{\partial f}{\partial z'}\right) = \frac{\partial \lambda}{\partial z'}\left(m\frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial q}\right);$$

on en déduira, en se servant de l'identité $f_3\frac{\partial f_1}{\partial z'} + f_4\frac{\partial f_2}{\partial z'} = 1$,

$$\frac{\partial f_1}{\partial z'}X(f_3) + \frac{\partial f_2}{\partial z'}X(f_4) = 0. \tag{23}$$

La transformation considérée sera une transformation (B_1) si le déterminant

$$\left|\left(\frac{df_i}{dx}\right)\left(\frac{df_i}{dy}\right)\frac{\partial f_i}{\partial p}\frac{\partial f_i}{\partial q}\right| \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

est nul (n° 6); en vertu de (23) et des équations $X(f_1) = X(f_2) = 0$, on devra donc avoir

$$X(f_3) = X(f_4) = 0.$$

Nous déterminerons, dans la deuxième Partie, les transformations (B_1) qui correspondent à une classe assez étendue d'équations de Monge-Ampère; je me borne ici à indiquer un résultat dont la démonstration est très facile, après ce qui vient d'être dit. Si deux équations (ε), (ε_1) correspondent à une équation de Monge-Ampère par deux transformations (B_1) qui ne sont pas déduites du même système de caractéristiques, le produit de ces deux transformations n'est jamais une transformation de Bäcklund.

En effet, soient

$$(\alpha) \qquad \begin{cases} x' = f_1(x, y, z, p, q; z'), & y' = f_2(x, y, z, p, q; z'), \\ p' = f_3(x, y, z, p, q; z'), & q' = f_4(x, y, z, p, q; z') \end{cases}$$

les équations d'une transformation (B_1) déduite du système (C) de caractéristiques de l'équation de Monge-Ampère donnée; z' est donné par

$$z' = \psi(x, y, z, p, q, s, t),$$

et l'on a

$$m\frac{\partial \psi}{\partial s} - \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0;$$

f_1, f_2, f_3, f_4 satisfont à l'équation $X(f) = 0$.

Une transformation (B_1) déduite du système (Γ) sera définie par

$$(\beta)\qquad \begin{cases} x''=f'_1(x,y,z,p,q;z''), & y''=f'_2(x,y,z,p,q;z''),\\ p''=f'_3(x,y,z,p,q;z''), & q''=f'_4(x,y,z,p,q;z''); \end{cases}$$

pour déterminer z'', on a

$$z''=\psi'(x,y,z,p,q,s,t)$$

avec

$$\mu\frac{\partial\psi'}{\partial s}-\frac{\partial\psi'}{\partial t}=0.$$

D'autre part, en raisonnant comme il est expliqué pour la première transformation, on verrait que f'_1, f'_2, f'_3, f'_4 doivent satisfaire à une équation telle que

$$X_1(f)=\left(\frac{df'}{dx}\right)+m\left(\frac{df'}{dy}\right)-(M+\rho\mu)\frac{\partial f'}{\partial p}+\rho\frac{\partial f'}{\partial q}=0,$$

ρ étant une fonction de x, y, z, p, q, z''.

Pour que le produit des transformations (α) et (β) soit une transformation de Bäcklund, il est nécessaire et suffisant que, en éliminant x, y, z, p, q, s, t entre (α), (β) et les équations $z'=\psi$, $z''=\psi'$, on trouve quatre relations entre $x', y', z', p', q', x'', y'', z'', p'', q''$. Le déterminant

$$\frac{\partial\psi}{\partial s}\frac{\partial\psi'}{\partial t}-\frac{\partial\psi}{\partial t}\frac{\partial\psi'}{\partial s}$$

n'étant pas nul, il faudrait donc que l'on obtienne quatre relations en éliminant x, y, z, p, q entre (α) et (β), autrement dit il faudrait que tous les déterminants fonctionnels du cinquième ordre des fonctions $f_1, f_2, f_3, f_4, f'_1, f'_2, f'_3, f'_4$ par rapport à x, y, z, p, q soient nuls, c'est-à-dire que ces fonctions satisfassent à une même équation

$$A\frac{\partial f}{\partial x}+B\frac{\partial f}{\partial y}+C\frac{\partial f}{\partial z}+D\frac{\partial f}{\partial p}+E\frac{\partial f}{\partial q}=0.$$

Mais f_1, f_2, f_3, f_4 satisfont à $X(f)=0$ et ne satisfont à aucune autre équation puisque ce sont quatre fonctions indépendantes; de même f'_1, f'_2, f'_3, f'_4 satisfont à la seule équation $X_1(f')=0$, et il est visible que ces deux équations ne peuvent pas être identiques.

Pour trouver les transformations de la forme (9) dont dérive l'équation de Monge-Ampère proposée, il faudra prendre pour φ_1, φ_2, φ_3 trois intégrales distinctes de l'équation $X(f) = 0$, où λ désigne une fonction quelconque de x, y, z, p, q seulement; la quatrième équation qui définit la transformation est alors

$$m\left(\frac{\partial\varphi_3}{\partial p} - p'\frac{\partial\varphi_1}{\partial p} - q'\frac{\partial\varphi_2}{\partial p}\right) - \frac{\partial\varphi_3}{\partial q} + p'\frac{\partial\varphi_1}{\partial q} + q'\frac{\partial\varphi_2}{\partial q} = 0.$$

9. Les transformations que nous venons d'étudier permettent de calculer, comme nous l'avons déjà remarqué, x', y', z', p', q' en fonction de x, y, z, p, q, s, t; on a

$$\begin{aligned} x' &= \psi_1(x, y, z, p, q, s, t), \\ y' &= \psi_2(x, y, z, p, q, s, t), \\ z' &= \psi\ (x, y, z, p, q, s, t), \\ p' &= \psi_3(x, y, z, p, q, s, t), \\ q' &= \psi_4(x, y, z, p, q, s, t). \end{aligned}$$

Il est évident que l'on saura prolonger la transformation précédente et calculer les dérivées d'ordre n quelconque en fonction de x, y, z et des dérivées de z jusqu'à l'ordre $n+1$, mais il est nécessaire de préciser davantage et le calcul n'offre du reste aucune difficulté. Nous établirons en même temps certaines formules qui nous seront très utiles plus loin.

Nous écrirons l'équation du second ordre sous la forme

$$r + F(x, y, z, p, q, s, t) = 0, \tag{24}$$

et, m et μ étant les deux racines de l'équation du second degré en λ,

$$\lambda^2 - \lambda\frac{\partial F}{\partial s} + \frac{\partial F}{\partial t} = 0,$$

nous supposerons que le système (C) de caractéristiques qui satisfait à l'équation différentielle

$$dy = m\,dx$$

est du premier ordre et que la transformation considérée est déduite du système (C).

Toutes les fonctions ψ, ψ_1, ψ_2, ψ_3, ψ_4 satisfont à l'équation

$$m\frac{\partial f}{\partial s} - \frac{\partial f}{\partial t} = 0.$$

Cela posé, remarquons encore qu'il suffit de prendre la dérivée de (24) par rapport à y pour obtenir l'égalité suivante dont nous ferons usage

$$p_{2,1}+mp_{1,2}+\mu(p_{1,2}+mp_{0,3})+\left(\frac{dF}{dy}\right)=0. \tag{25}$$

Lorsque dans ψ, ψ_1, ψ_2, ψ_3, ψ_4 on remplace x, y, z, p, q, s, t par les expressions qui correspondent à une caractéristique de (24), on obtient un système de ∞^1 éléments de (E') : désignons par m' la valeur du rapport $\frac{dy'}{dx'}$ pour les systèmes qui correspondent à une caractéristique de (C); pour trouver l'expression de m', il suffira de remplacer, dans l'équation

$$d\psi_2-m'd\psi_1=0,$$

dy par mdx et l'on arrivera ainsi à la formule

$$m'=\frac{\left(\frac{d\psi_2}{dx}\right)+m\left(\frac{d\psi_2}{dy}\right)+(m-\mu)\frac{\partial\psi_2}{\partial s}(p_{1,2}+mp_{0,3})-\frac{\partial\psi_2}{\partial s}\left(\frac{dF}{dy}\right)}{\left(\frac{d\psi_1}{dx}\right)+m\left(\frac{d\psi_1}{dy}\right)+(m-\mu)\frac{\partial\psi_1}{\partial s}(p_{1,2}+mp_{0,3})-\frac{\partial\psi_1}{\partial s}\left(\frac{dF}{dy}\right)}.$$

Considérons maintenant le système (Γ) défini par l'équation

$$dy=\mu\,dx,$$

la valeur de μ', c'est-à-dire la valeur du rapport $\frac{dy'}{dx'}$ pour les systèmes d'éléments de (E') qui correspondent aux caractéristiques de (Γ), s'obtient en opérant comme pour m'; on trouve

$$\mu'=\frac{\left(\frac{d\psi_2}{dx}\right)+\mu\left(\frac{d\psi_2}{dy}\right)-\frac{\partial\psi_2}{\partial s}\left(\frac{dF}{dy}\right)}{\left(\frac{d\psi_1}{dx}\right)+\mu\left(\frac{d\psi_1}{dy}\right)-\frac{\partial\psi_1}{\partial s}\left(\frac{dF}{dy}\right)}.$$

Occupons-nous maintenant de calculer les dérivées successives de z'; nous ne considérerons que les dérivées $p'_{0,n}$, $p'_{1,n-1}$, la connaissance des expressions de ces dérivées nous suffira : si z' satisfait à une équation du second ordre, on peut toujours, comme nous l'avons fait pour l'équation (24), supposer effectué un changement de variables tel que toutes les dérivées de z' à partir du second ordre s'expriment en fonction de x', y', z' et des dérivées d'ordre inférieur ou égal, dont le premier indice est au plus égal à un.

Pour avoir s' et t' il faudra annuler le coefficient de dx et celui de dy dans l'équation

$$d\psi_4 - s'd\psi_1 - t'd\psi_2 = 0,$$

où nous remplaçons $p_{2,1} + mp_{1,2}$ par sa valeur tirée de (25); la résolution des équations ainsi obtenues est facile : si nous posons

$$\Delta = \left(\frac{d\psi_2}{dy}\right)\left[\left(\frac{d\psi_1}{dx}\right) - \frac{\partial\psi_1}{\partial s}\left(\frac{dF}{dy}\right)\right] - \left(\frac{d\psi_1}{dy}\right)\left[\left(\frac{d\psi_2}{dx}\right) - \frac{\partial\psi_2}{\partial s}\left(\frac{dF}{dy}\right)\right]$$
$$+ (p_{1,2} + mp_{0,3})\left\{\frac{\partial\psi_2}{\partial s}\left[\left(\frac{d\psi_1}{dx}\right) + \mu\left(\frac{d\psi_1}{dy}\right)\right] - \frac{\partial\psi_1}{\partial s}\left[\left(\frac{d\psi_2}{dx}\right) + \mu\left(\frac{d\psi_2}{dy}\right)\right]\right\},$$

il vient

$$\Delta s' = \left(\frac{d\psi_2}{dy}\right)\left[\left(\frac{d\psi_4}{dx}\right) - \frac{\partial\psi_4}{\partial s}\left(\frac{dF}{dy}\right)\right] - \left(\frac{d\psi_4}{dy}\right)\left[\left(\frac{d\psi_2}{dx}\right) - \frac{\partial\psi_2}{\partial s}\left(\frac{dF}{dy}\right)\right]$$
$$+ (p_{1,2} + mp_{0,3})\left\{\frac{\partial\psi_2}{\partial s}\left[\left(\frac{d\psi_4}{dx}\right) + \mu\left(\frac{d\psi_4}{dy}\right)\right] - \frac{\partial\psi_4}{\partial s}\left[\left(\frac{d\psi_2}{dx}\right) + \mu\left(\frac{d\psi_2}{dy}\right)\right]\right\},$$

$$\Delta t' = -\left(\frac{d\psi_1}{dy}\right)\left[\left(\frac{d\psi_4}{dx}\right) - \frac{\partial\psi_4}{\partial s}\left(\frac{dF}{dy}\right)\right] + \left(\frac{d\psi_4}{dy}\right)\left[\left(\frac{d\psi_1}{dx}\right) - \frac{\partial\psi_1}{\partial s}\left(\frac{dF}{dy}\right)\right]$$
$$+ (p_{1,2} + mp_{0,3})\left\{\frac{\partial\psi_4}{\partial s}\left[\left(\frac{d\psi_1}{dx}\right) + \mu\left(\frac{d\psi_1}{dy}\right)\right] - \frac{\partial\psi_1}{\partial s}\left[\left(\frac{d\psi_4}{dx}\right) + \mu\left(\frac{d\psi_4}{dy}\right)\right]\right\}.$$

On s'assure, comme plus haut (n° 3), qu'il n'y a pas lieu d'examiner le cas où Δ est nul. Nous voyons que s' et t' ne dépendent pas des dérivées de z' d'ordre supérieur à trois, mais nous voyons en outre que les dérivées troisièmes ne figurent que par la combinaison $p_{1,2} + mp_{0,3}$. Admettons qu'il en soit ainsi jusqu'à l'ordre $n - 1$, c'est-à-dire que $p'_{1,n-2}$ et $p'_{0,n-1}$ soient fonctions de $x, y, z, p, q, \ldots, p_{1,n-2}, p_{0,n-1}, p_{1,n-1} + mp_{0,n}$, et montrons que la propriété subsiste pour les dérivées d'ordre n, c'est-à-dire qu'elle est générale. En prenant la dérivée d'ordre $n - 1$ de l'équation donnée par rapport à y, on trouve

$$(25') \qquad p_{2,n-1} + mp_{1,n} + \mu(p_{1,n} + mp_{0,n+1}) + \left(\frac{d^{n-1}F}{dy^{n-1}}\right) = 0.$$

Par hypothèse, on a

$$p'_{0,n-1} = K(x, y, z, \ldots, u),$$

en posant $p_{1,n-1} + mp_{0,n} = u$, et pour calculer $p'_{0,n}$, $p'_{1,n-1}$ on doit égaler à zéro les coefficients de dx et de dy dans

$$p'_{1,n-1}d\psi_1 + p'_{0,n}d\psi_2 = dK;$$

on trouve deux équations

$$(26)\quad \left\{ \begin{aligned} & p'_{1,n-1}\left[\left(\frac{d\psi_1}{dy}\right)+\frac{\partial\psi_1}{\partial s}(p_{1,2}+mp_{0,3})\right] \\ & \quad + p'_{0,n}\left[\left(\frac{d\psi_2}{dy}\right)+\frac{\partial\psi_2}{\partial s}(p_{1,2}+mp_{0,3})\right]=\left(\frac{dK}{dy}\right)+\frac{\partial K}{\partial u}(p_{1,n}+mp_{0,n+1}), \\ & p'_{1,n-1}\left[\left(\frac{d\psi_1}{dx}\right)-\frac{\partial\psi_1}{\partial s}\left(\frac{dF}{dy}\right)-\mu\frac{\partial\psi_1}{\partial s}(p_{1,2}+mp_{0,3})\right] \\ & \quad + p'_{0,n}\left[\left(\frac{d\psi_2}{dx}\right)-\frac{\partial\psi_2}{\partial s}\left(\frac{dF}{dy}\right)-\mu\frac{\partial\psi_2}{\partial s}(p_{1,2}+mp_{0,3})\right] \\ & \quad =\left(\frac{dK}{dx}\right)-\left(\frac{\partial K}{\partial u}\right)\left(\frac{d^{n-1}F}{dy^{n-1}}\right)-\mu\frac{\partial K}{\partial u}(p_{1,n}+mp_{0,n+1}). \end{aligned} \right.$$

On voit tout de suite que $p'_{1,n-1}$ et $p'_{0,n}$ s'expriment en fonction de x, y, z, $\ldots$, $p_{1,n-1}$, $p_{0,n}$, $p_{1,n}+mp_{0,n+1}$, ce que nous voulions démontrer. On voit encore que $p'_{1,n-1}+\mu' p'_{0,n}$ ne dépend, si n est supérieur à deux, que de x, y, z et des dérivées de z jusqu'à l'ordre n; on le démontre en multipliant la première des équations (26) par μ et en ajoutant membre à membre les deux équations; au contraire, $p'_{1,n-1}+m'p'_{0,n}$ dépend des dérivées d'ordre $n+1$. Lorsque l'équation considérée est une équation linéaire en r, s, t

$$r+(m+\mu)s+m\mu t+M=0,$$

x', y', z', p', q' sont fonctions de $x, y, z, p, q, s+mt$, la propriété énoncée en dernier lieu sera vraie si n est égal à deux : $s'+m't'$ ne dépendra pas des dérivées troisièmes de z.

10. Étant donnée une transformation de Bäcklund, d'espèce quelconque, et deux surfaces intégrales qui se correspondent par cette transformation, les caractéristiques se correspondent sur ces deux surfaces [1]. Nous considérerons successivement deux cas : nous supposerons d'abord qu'à une intégrale de l'équation du second ordre (24) correspond une seule intégrale de la transformée.

Remarquons d'abord que, si dans les fonctions ψ, ψ_1, ψ_2, ψ_3, ψ_4 on remplace x, y, z, p, q, s, t par les expressions correspondant à une

---

[1] *Voir* GOURSAT, *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre*, t. II, p. 290.

multiplicité simplement infinie d'éléments unis du second ordre, les éléments (x', y', z', p', q') ne sont pas unis en général, mais qu'ils le sont si les éléments (x, y, z, p, q, s, t) appartiennent à une intégrale de (24) puisque (x', y', z', p', q') appartiennent alors à une intégrale de la transformée; il en sera ainsi, en particulier, si les éléments du second ordre engendrent une caractérisque de (24).

Une caractéristique d'ordre n de la proposée étant connue, cela revient à dire que l'on connaît ∞^1 systèmes de valeurs pour $x, y, z, p, q, \ldots, p_{1,n-1}, p_{0,n}$ et qu'il existe une infinité de surfaces intégrales dépendant d'une infinité de constantes arbitraires passant par cette multiplicité d'éléments du $n^{\text{ième}}$ ordre. Examinons en premier lieu le cas où la caractéristique considérée appartient au système (C), c'est-à-dire satisfait à l'équation

$$dy = m\,dx;$$

l'égalité

$$dp_{0,n} = (p_{1,n} + mp_{0,n+1})\,dx$$

est vérifiée tout le long de cette caractéristique et en chaque point $p_{1,n} + mp_{0,n+1}$ a une valeur déterminée. D'après ce qui a été dit dans le paragraphe précédent, à la caractéristique d'ordre n donnée correspond une multiplicité de ∞^1 éléments du $n^{\text{ième}}$ ordre, par laquelle passeront toutes les surfaces intégrales transformées des intégrales de (24) qui contiennent la caractéristique donnée. Ces surfaces ont donc un contact d'ordre n au moins le long de cette multiplicité, mais il peut arriver que ce contact soit d'ordre supérieur. Nous verrons que, si la transformation est une transformation de première espèce, les surfaces transformées ont un contact d'ordre $n+1$ en tous les points de cette multiplicité. A une caractéristique d'ordre n correspond ainsi une caractéristique d'ordre n ou d'ordre $n+1$. Le raisonnement précédent ne s'applique en général que si n est supérieur à un; il s'applique au cas où n est égal à un, si (24) est une équation de Monge-Ampère, c'est-à-dire, comme on peut toujours le supposer, une équation linéaire en r, s, t.

On voit très facilement, en raisonnant toujours de la même manière, qu'à une caractéristique d'ordre n du système (Γ) correspond une caractéristique d'ordre $n-1$ de la transformée.

Il reste à étudier le cas où, l'équation (24) étant une équation de

Monge-Ampère, il correspond à chacune de ses intégrales une infinité d'intégrales de la transformée. Comme nous l'avons déjà fait à plusieurs reprises, nous supposerons que l'équation donnée est linéaire en r, s, t.

Étant donnée une caractéristique du premier ordre, en remplaçant x, y, z, p, q par leurs valeurs dans l'équation (3)'' (n° 2), on trouve ζ par une intégration; déterminons ζ en nous donnant sa valeur ζ_0 pour un élément $(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0)$ de la caractéristique, nous définissons ainsi une multiplité de (E') qui correspond à la caractéristique donnée, puisque x', y', z', p', q' ne dépendent que de x, y, z, p, q, ζ. Il existe une infinité d'intégrales de (24) dépendant d'une infinité de constantes arbitraires qui contiennent la caractéristique du premier ordre considérée; il y a donc également une infinité d'intégrales de la transformée qui passent par la multiplicité transformée qui est par conséquent une multiplicité caractéristique.

Si l'on se donne une caractéristique d'ordre n, elle contient une caractéristique du premier ordre à laquelle on fera correspondre, comme il vient d'être dit, une caractéristique de la transformée : d'après la remarque faite au n° 3, le long de cette caractéristique on connaîtra les valeurs des dérivées de z' jusqu'à l'ordre n; à la caractéristique d'ordre n donnée correspond donc une caractéristique dont l'ordre est aussi n.

On démontre de la même façon que, si l'on sait résoudre le problème de Cauchy pour une équation aux dérivées partielles du second ordre (24), on sait résoudre ce problème pour toutes les équations qui correspondent à (24) par une transformation de Bäcklund.

Si deux équations du second ordre sont telles qu'à chaque intégrale de l'une on puisse faire correspondre les intégrales de l'autre par des opérations algébriques et par l'intégration d'équations différentielles ordinaires, et si l'une d'elles est intégrable par la méthode de M. Darboux, l'autre l'est également. Ce théorème a été démontré par M. Goursat; il en résulte, en particulier, que, si une équation est intégrable par la méthode de M. Darboux, toutes les équations qui lui correspondent par une transformation de Bäcklund jouissent de la même propriété. Nous reviendrons du reste sur cette question dans la suite pour indiquer des résultats plus précis.

11. Nous avons négligé jusqu'ici le cas où des quatre équations données entre $x, y, z, p, q, x', y', z', p', q'$ on peut déduire une équation qui ne contienne que les coordonnées d'un seul des deux systèmes d'éléments du premier ordre. Nous allons examiner rapidement ce cas particulier.

Supposons que l'une des équations du système ne contienne que x', y', z', p', q'; il est toujours possible, par une transformation de contact, de faire en sorte que cette équation se réduise à $y' = 0$. Les équations de la transformation que nous voulons étudier seront donc

$$x' = f(x, y, z, p, q; z'), \qquad y' = 0,$$
$$p' = \varphi(x, y, z, p, q; z'), \qquad q' = \psi(x, y, z, p, q; z');$$

la condition

$$dz' - p'\,dx' - q'\,dy' = 0,$$

qui exprime que (x', y', z', p', q') engendre une multiplicité de ∞^2 éléments unis, devient ici

$$\left(\varphi \frac{\partial f}{\partial z'} - 1\right) dz' + \varphi\left[\left(\frac{df}{dx}\right) + r\frac{\partial f}{\partial p} + s\frac{\partial f}{\partial q}\right] dx$$
$$+ \varphi\left[\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) + s\frac{\partial f}{\partial p} + t\frac{\partial f}{\partial q}\right] dy = 0.$$

La condition d'intégrabilité de l'équation précédente s'écrit

$$\frac{df}{\partial y}\frac{d\varphi}{dx} - \frac{d\varphi}{dy}\frac{df}{dx} = 0;$$

si cette condition ne dépend pas de z', elle se réduit à une équation du second ordre, intégrable par la méthode de Monge, qui admet l'intégrale intermédiaire

$$\varphi = \text{fonction arbitraire de } f,$$

dont l'existence était presque évidente *a priori*.

Si l'on a

$$\varphi \frac{\partial f}{\partial z'} = 1,$$

on ne peut pas répéter ce raisonnement; l'équation

$$dz' - p'\,dx' - q'\,dy' = 0$$

ne sera vérifiée que si l'on a

$$\left(\frac{df}{dx}\right) + r\frac{\partial f}{\partial p} + s\frac{\partial f}{\partial q} = 0,$$

$$\left(\frac{df}{dy}\right) + s\frac{\partial f}{\partial p} + t\frac{\partial f}{\partial q} = 0.$$

Ce système équivaut à une équation du second ordre qui admet une intégrale intermédiaire du premier ordre

$$f(x, y, z, p, q, \lambda) = \mu,$$

où λ et μ désignent deux constantes arbitraires : comme le précédent, ce résultat pouvait être prévu sans difficulté.

Il peut encore arriver que deux des équations de la transformation ne contiennent que les coordonnées x', y', z', p', q', ou qu'il y ait une équation ne dépendant que de x', y', z', p', q' et une autre ne dépendant que de x, y, z, p, q, mais ces cas particuliers n'ont plus aucun intérêt pour la théorie des équations du second ordre.

DEUXIÈME PARTIE.

12. Dans cette deuxième Partie nous allons étudier les transformations de Bäcklund de première espèce, ou transformations (B_1), selon la notation que nous avons adoptée, c'est-à-dire les transformations de Bäcklund qui font correspondre une à une les intégrales des équations transformées.

Les résultats fondamentaux vont nous être fournis par l'emploi des formules démontrées plus haut (n° 9) que je rappelle rapidement. Toutes les lettres employées ont la même signification que précédemment.

Soit une équation du second ordre

$$r + F(x, y, z, p, q, s, t) = 0, \tag{27}$$

qui admet deux systèmes de caractéristiques (C) et (Γ) définis respectivement par les équations

$$(\mathrm{C}) \qquad dy = m\,dx,$$
$$(\Gamma) \qquad dy = \mu\,dx;$$

nous supposerons que m et μ ont des valeurs différentes et nous ne nous occuperons pas du cas particulier où les deux systèmes de caractéristiques sont confondus.

Comme dans le paragraphe déjà cité, nous supposons que les caractéristiques du système (C) sont du premier ordre et que la transformation (B_1) est déduite de ce système.

L'équation transformée

$$r' + F'(x', y', z', p', q', s', t') = 0 \tag{28}$$

admet également deux systèmes de caractéristiques, l'un, le système (C'), correspondant à (C) qui satisfait à l'équation

$$dy' = m'\,dx',$$

l'autre, le système (Γ'), correspondant à (Γ), qui satisfait à

$$dy' = \mu'\,dx'.$$

Nous avons vu que $p'_{1,n-1} + \mu' p'_{0,n}$ ne dépendait que de $x, y, z, p, q, \ldots, p_{1,n-1}, p_{0,n}$, tandis que dans l'expression de $p'_{1,n-1} + m' p'_{0,n}$ figurent les dérivées de z jusqu'à l'ordre $n+1$, n étant un nombre entier quelconque plus grand que deux. Nous avons ainsi un moyen de distinguer les deux systèmes de caractéristiques qui va nous permettre de faire une remarque importante.

Il est bien évident que, réciproquement, nous pourrons exprimer $x, y, z, \ldots, p_{1,n-1}, p_{0,n}$ en fonction de $x', y', z', \ldots, p'_{1,n}, p'_{0,n+1}$ et, en remplaçant, dans la première des équations (26), x, y, z et les dérivées de z jusqu'à l'ordre n par leurs expressions en fonction de x', y', z' et des dérivées de z', on voit que $p_{1,n} + m p_{0,n+1}$ ne dépend que des dérivées de z' d'ordre au plus égal à $n+1$. Par conséquent, relativement à l'équation (28), la transformation (B_1) considérée est déduite du système (Γ') de caractéristiques, c'est-à-dire du système qui ne correspond pas au système (C) dont est déduite la transformation relativement à l'équation (27).

Nous avons vu (n^o 10) qu'à une famille (α) d'intégrales de (27) qui ont un contact d'ordre n le long d'une caractéristique du système (C) correspond une famille d'intégrales de (28) qui ont un contact d'ordre n au moins en tous les points d'une caractéristique de (C'); je dis que le long de cette caractéristique les intégrales de (28) considérées ont un contact du $(n+1)^{\text{ième}}$ ordre. En effet, si le contact était d'ordre moindre, la transformation étant, relativement à l'équation (28), déduite non du système (C') mais du système (Γ'), on verrait, en appliquant un résultat du paragraphe déjà cité, que les intégrales correspondantes de (27), c'est-à-dire les intégrales (α), admettraient un contact d'ordre inférieur à n le long de la caractéristique considérée, ce qui est contraire à l'hypothèse.

13. En nous servant du résultat qui vient d'être obtenu nous allons montrer que, étant donnée une équation aux dérivées partielles du second ordre (27), il ne peut exister qu'une seule équation qui lui corresponde par une transformation (B_1) déduite du système (C), ou, plus exactement, que toutes les équations qui lui correspondent de cette manière se déduisent de l'une d'entre elles par une transformation de contact.

Soit, en effet, l'équation (28), qui correspond à (27) par une transformation (B_1) déduite de (C); supposons qu'il existe une autre équation

$$\Psi(x'', y'', z'', p'', q'', r'', s'', t'') = 0 \tag{29}$$

qui jouisse de la même propriété; soient (C'') et (Γ'') les deux systèmes de caractéristiques de (29), (C'') correspondant à (C) et (Γ'') à (Γ). D'après ce qui a été démontré dans la première Partie (n^o 7), les équations (28) et (29) se ramènent l'une à l'autre par une transformation de Bäcklund ou par une transformation de contact : nous allons voir que la seconde hypothèse est seule admissible. La transformation qui établit une correspondance uniforme entre les intégrales de (27) et celles de (29) est déduite d'une part du système (C), d'autre part du système (Γ''), comme il résulte de la proposition qui a fait l'objet du paragraphe précédent, tandis que la transformation qui permet de passer de (27) à (28) est déduite du système (C) et du système (Γ').

S'il existait une transformation de Bäcklund qui change l'équation (28) en l'équation (29), ce serait une transformation (B_1) déduite du système (Γ') et du système (Γ''); cela ne peut pas arriver puisque ces deux systèmes de caractéristiques se correspondent, les équations (28) et (29) sont donc identiques à une transformation de contact près.

La démonstration précédente pourrait donner lieu à une objection. Supposons que (28) et (29) se correspondent par une transformation de Bäcklund; il n'est pas absolument évident que cette transformation, qui ne peut être qu'une transformation (B_1), soit déduite des systèmes (Γ') et (Γ''). Il est très aisé de lever cette difficulté en remarquant que, si cette transformation était, par exemple, déduite du système (C'), l'équation (28) ayant deux systèmes de caractéristiques du premier ordre serait une équation de Monge-Ampère et, d'après la remarque faite à la fin du n° 8, les équations (27) et (29) ne se correspondraient pas par une transformation de Bäcklund, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Nous allons indiquer une application du théorème précédent qui est particulièrement intéressante. Imaginons que l'équation (27) reste invariante pour un certain groupe continu de transformations de contact (g); nous allons montrer que l'équation (28) admet un groupe de transformations de contact holoédrique isomorphe de (g).

Soit (Θ) une transformation du groupe (g); les équations qui définissent (Θ) permettent d'exprimer x, y, z, p, q en fonction de nouvelles variables X, Y, Z, P, Q; en remplaçant x, y, z, p, q par leurs valeurs dans les équations de la transformation de Bäcklund, on obtient une nouvelle transformation (B_1) qui conduit pour $z'(x', y')$ à l'équation (28) et pour Z(X, Y) à la transformée de (27) par (Θ), c'est-à-dire à l'équation (27) elle-même. D'après le théorème démontré au commencement de ce paragraphe, on peut passer de la transformation (B_1) primitive à la nouvelle transformation par une transformation (T') qui ne change naturellement pas l'équation (28). Lorsque les paramètres dont dépendent les équations qui définissent le groupe (g) varient, on obtient une suite continue de transformations (T') qui correspondent aux transformations de (g) de la manière qui vient d'être expliquée et engendrent un groupe holoédrique isomorphe de (g); la proposition énoncée est donc démontrée.

Il importe de remarquer que le raisonnement ne s'applique pas à une transformation isolée ou à un groupe discontinu de transformations de contact laissant l'équation proposée invariante [1]. Considérons, pour fixer les idées, l'équation que l'on rencontre dans la théorie des surfaces à courbure totale constante

$$s = \sin z; \tag{30}$$

si l'on prend p pour nouvelle inconnue, les variables indépendantes étant conservées, on obtient l'équation

$$s' = z'\sqrt{1 - q'^2} \tag{31}$$

qui correspond à la précédente par une transformation (B_1) dont les équations sont

$$z' = p, \qquad q' = \sin z. \tag{32}$$

L'équation (30) ne change pas si l'on ajoute à z un multiple quelconque de 2π, mais à ces transformations ne correspond aucune transformation pour (31); quelle que soit la détermination de z, on trouve la même valeur pour z'. La transformation (32) reste ainsi invariante pour un groupe discontinu de transformations (T), tandis qu'il est impossible qu'il en soit ainsi pour un groupe continu; nous avons vu (n° 1) que la transformation ne serait pas de première espèce. On sait, du reste, que, au point de vue de la théorie qui nous occupe, les groupes continus de transformations de contact présentent seuls de l'importance.

14. Supposons que l'une des deux équations transformées, l'équation (28) par exemple, soit telle que l'un de ses systèmes de caractéristiques admette un invariant d'ordre n, c'est-à-dire qu'il existe une

---

[1] Dans une Note insérée aux *Comptes rendus* (t. CXXXII, p. 305), j'avais énoncé la proposition qui vient d'être démontrée sans faire ces restrictions, dont je n'ai reconnu que plus tard la nécessité.

fonction ϖ' de $x', y', z', \ldots, p'_{1,n-1}, p'_{0,n}$ telle que l'équation

(33) $$\varpi' = k,$$

où k désigne une constante quelconque, possède une infinité d'intégrales dépendant d'une infinité de constantes arbitraires qui satisfont en même temps à l'équation (28). En remplaçant dans ϖ' toutes les quantités qui y figurent par leurs expressions en fonction de x, y, z et des dérivées de z, on trouve une fonction ϖ qui est un invariant pour l'un des systèmes de caractéristiques de (27), car toutes les transformées des intégrales communes à (27) et à (33) satisfont à la fois à (27) et à

$$\varpi = k.$$

Inversement, si l'on considère l'invariant ϖ, qui appartient à l'un des systèmes de caractéristiques de (27), on voit qu'il existe un invariant pour le système correspondant de caractéristiques de (28), et cet invariant ne peut être que ϖ' puisque les intégrales se correspondent uniformément. Nous verrons, dans la dernière Partie, que, si les intégrales se correspondent suivant une loi plus compliquée, les choses se passent d'une manière toute différente.

Étant donné un invariant, nous nous proposons de rechercher quel est l'ordre de l'invariant qui lui correspond par une transformation (B_1), ainsi qu'il vient d'être expliqué; nous considérerons d'abord les invariants dont l'ordre est supérieur à deux.

Supposons qu'il existe un tel invariant ϖ' appartenant au système (C') de caractéristiques de (28); ϖ' est fonction de $x', y', z', \ldots, p'_{1,n-1} + \mu' p'_{0,n}$ et, en substituant à ces quantités leurs expressions, on trouve, d'après les résultats du n° 9, que ϖ ne dépend pas des dérivées de z d'ordre supérieur à n. Au contraire, si l'invariant considéré appartient au système (Γ'), il lui correspond un invariant d'ordre $n+1$, puisque $p'_{1,n-1} + m' p'_{0,n}$ dépend des dérivées de z d'ordre $n+1$.

Lorsque n est égal à deux, on trouve des résultats tout semblables. Un invariant du second ordre du système (C') satisfait à l'équation

$$\mu' \frac{\partial \varpi'}{\partial s'} - \frac{\partial \varpi'}{\partial t'} = 0;$$

un calcul direct permet de vérifier que, si l'on remplace dans une intégrale de l'équation précédente $x', y', z', p', q', s', t'$ par leurs valeurs trouvées dans le paragraphe déjà cité, on obtient une fonction de x, y, z, p, q, s, t seulement, la dérivée de ϖ' par rapport à $p_{1,2}+mp_{0,3}$ étant nulle. L'ordre de l'invariant qui correspond à ϖ' ne dépasse pas deux. Si l'invariant du second ordre que nous considérons appartient au système (Γ'), il lui correspond un invariant du troisième ordre; on vérifie très facilement que les dérivées du troisième ordre ne peuvent pas ne pas y figurer.

Il est bien évident que l'on arriverait à des résultats identiques en considérant d'abord les invariants des systèmes de caractéristiques de (27) et en recherchant l'ordre des invariants des systèmes correspondants de caractéristiques de (28). Finalement, on voit que, si n désigne un nombre quelconque égal ou supérieur à deux, à un invariant d'ordre n du système de caractéristiques (C) de l'équation primitive dont est déduite la transformation (B_1), cette transformation fait correspondre un invariant d'ordre $n+1$ du système de caractéristiques (C′) de la transformée, tandis qu'à un invariant d'ordre n du système (Γ) correspond un invariant d'ordre $n-1$ du système (Γ').

On démontre de la même manière qu'à une équation d'ordre n formant avec (27) un système en involution correspond une équation d'ordre $n-1$ ou d'ordre $n+1$ formant avec (28) un système en involution.

Il reste à examiner le cas où il existe un invariant du premier ordre pour l'un des systèmes de caractéristiques de (28). Supposons, pour fixer les idées, que l'on ait effectué une transformation de contact telle que cet invariant soit y' : il suffit de se reporter à l'expression de y pour voir qu'en général l'invariant correspondant est du deuxième ordre, mais nous allons montrer que dans certains cas cet invariant est du premier ordre seulement.

S'il en est ainsi, l'une des équations de la transformation (B_1) se réduit à

$$y'=f_2(x, y, z, p, q)$$

et, par conséquent, devient après une transformation (T) convenable

$$y'=y.$$

Cela posé, écrivons les équations de la transformation de Bäcklund

$$x'=f(x, y, z, p, q; z'), \qquad y'=y,$$
$$p'=\varphi(x, y, z, p, q; z'), \qquad q'=\psi(x, y, z, p, q; z');$$

cette transformation étant une transformation (B_1), on a

$$(34) \quad \left\{ \begin{aligned} &\varphi = \frac{1}{\frac{\partial f}{\partial z'}}, \\ &\begin{vmatrix} \left(\frac{df}{dx}\right) & \frac{\partial f}{\partial p} & \frac{\partial f}{\partial q} \\ \left(\frac{d\varphi}{dx}\right) & \frac{\partial \varphi}{\partial p} & \frac{\partial \varphi}{\partial q} \\ \left(\frac{d\psi}{dx}\right) & \frac{\partial \psi}{\partial p} & \frac{\partial \psi}{\partial q} \end{vmatrix} = 0. \end{aligned} \right.$$

En outre, l'équation (27) ne contenant pas t, puisque y est un invariant, on voit immédiatement que f ne doit pas dépendre de q et les équations (34) montrent qu'il en est de même pour φ et ψ $\left[\text{nous excluons le cas où l'équation (27) se réduirait à } \frac{df}{dx} = 0\right]$. Les équations qui définissent la transformation peuvent donc s'écrire

$$(35) \quad \left\{ \begin{aligned} &x' = f(x, y, z, p; z'), && y' = y, \\ &p' = \frac{1}{\frac{\partial f}{\partial z'}}, && q' = \psi(x, y, z, p; z'). \end{aligned} \right.$$

Si f ne dépend pas de z', on ne peut plus raisonner comme nous venons de faire : la transformation devra alors appartenir à la classe particulière de transformations indiquée par M. Goursat, et les équations qui la définissent seront

$$(35)' \quad \left\{ \begin{aligned} &x' = \varphi(x, y, z, p, q), && y' = y, \\ &z' = \varpi(x, y, z, p, q), && p' = g(x, y, z, p, q; q'). \end{aligned} \right.$$

En procédant comme plus haut, on trouve que g ne contient pas q' et que le déterminant

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{d\varphi}{dx}\right) & \frac{\partial \varphi}{\partial p} & \frac{\partial \varphi}{\partial q} \\ \left(\frac{d\varpi}{dx}\right) & \frac{\partial \varpi}{\partial p} & \frac{\partial \varpi}{\partial q} \\ \left(\frac{dg}{dx}\right) & \frac{\partial g}{\partial p} & \frac{\partial g}{\partial q} \end{vmatrix}$$

doit être nul. Les transformations telles que (35)' ne diffèrent pas des transformations (35), on aperçoit facilement que l'on passe des unes aux autres en remplaçant les variables accentuées par celles qui ne le sont pas et inversement.

En opérant sur les équations (35)′, comme il a été expliqué (nos 4 et 5), on trouve que z satisfait à une équation de Monge-Ampère dans laquelle t ne figure pas, tandis que z' satisfait à une équation de la forme suivante :

$$s' + q'\,\mathrm{G}(x', y', z', p', r') + \mathrm{K}(x', y', z', p', r') = 0.$$

15. Nous venons de constater que, dans certains cas, à un invariant du premier ordre une transformation (B_1) pouvait faire correspondre un invariant du même ordre : nous allons faire voir qu'il en est toujours ainsi pour les équations de la forme de celles que nous avons obtenues : nous allons pour cela montrer que l'on peut toujours trouver les transformations (B_1) correspondantes à ces équations par des calculs algébriques et par l'intégration de systèmes d'équations aux dérivées partielles du premier ordre à une seule fonction inconnue ; il suffira du reste de trouver une de ces transformations, puisque toutes les autres s'en déduisent par des transformations de contact.

Considérons une équation de Monge-Ampère dont l'un des systèmes de caractéristiques admet l'invariant y

$$r + ms + \mathrm{M} = 0;$$

cette équation dérive de la transformation définie par les équations

$$x' = \varphi(x, y, z, p, q), \qquad y' = y,$$

$$z' = \varpi(x, y, z, p, q), \qquad p' = \frac{m\dfrac{\partial\varpi}{\partial p} - \dfrac{\partial\varpi}{\partial q}}{m\dfrac{\partial\varphi}{\partial p} - \dfrac{\partial\varphi}{\partial q}} = g(x, y, z, p, q),$$

où φ et ϖ sont deux intégrales de

$$\mathrm{X}(f) = \frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z} - (\mathrm{M} + \lambda m)\frac{\partial f}{\partial p} + \lambda\frac{\partial f}{\partial q} = 0, \tag{36}$$

λ désignant une fonction quelconque de x, y, z, p, q (n° 8).

Il faudra, pour que la transformation considérée soit une transformation (B_1), que g satisfasse également à (36). Cette condition s'exprime aisément en remarquant que, si f est une solution de (36), la dérivée de $X(f)$ par rapport à une variable quelconque est nulle. Il résulte de cette remarque que l'on a

$$X\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right) = -\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial(M+\lambda m)}{\partial p}\frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial \lambda}{\partial p}\frac{\partial f}{\partial q},$$

$$X\left(\frac{\partial f}{\partial q}\right) = \frac{\partial(M+\lambda m)}{\partial q}\frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial \lambda}{\partial q}\frac{\partial f}{\partial q}.$$

En développant les calculs, on trouve que g satisfait à (36) si φ et ϖ sont deux intégrales distinctes du système

$$(37)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} + [p(\xi + mH) - M - \lambda m]\dfrac{\partial f}{\partial p} + (\lambda - pH)\dfrac{\partial f}{\partial q} = 0, \\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial z} - (\xi + mH)\dfrac{\partial f}{\partial p} + H\dfrac{\partial f}{\partial q} = 0, \end{cases}$$

où H désigne une fonction de x, y, z, p, q et où l'on a posé pour abréger

$$m\xi = \frac{\partial m}{\partial x} + p\frac{\partial m}{\partial z} - M\frac{\partial m}{\partial p} + m\frac{\partial M}{\partial p} - \frac{\partial M}{\partial q}.$$

Le système (37) doit être complet : cette condition détermine les deux fonctions H et λ. En combinant les deux équations qui expriment que le système jouit de cette propriété, on voit que λ est défini par l'égalité

$$\lambda\left(\frac{\partial m}{\partial z} - \xi\frac{\partial m}{\partial p} + m\frac{\partial \xi}{\partial p} - \frac{\partial \xi}{\partial q}\right) = \frac{\partial \xi}{\partial x} + p\frac{\partial \xi}{\partial z} - M\frac{\partial \xi}{\partial p} - \xi^2 + \xi\frac{\partial M}{\partial p} - \frac{\partial M}{\partial z}$$

et que H doit vérifier l'équation

$$\frac{\partial H}{\partial x} + p\frac{\partial H}{\partial z} + (M+\lambda m)\frac{\partial H}{\partial p} - \lambda\frac{\partial H}{\partial q} + (\xi + mH)\left(H - \frac{\partial \lambda}{\partial p}\right) + H\frac{\partial \lambda}{\partial q} + \frac{\partial \lambda}{\partial z} = 0.$$

φ et ϖ étant ainsi calculées, il résulte des développements du paragraphe précédent que l'équation qui définit z' est de la forme

$$s' + q'G(x', y', z', p', r') + K(x', y', z', p', r') = 0.$$

On voit tout de suite que, réciproquement, étant donnée une telle équation, la transformation

$$x = h(x', y', z', p'; z), \qquad y = y',$$
$$p = \frac{1}{\frac{\partial h}{\partial z}}, \qquad q = k(x', y', z', p'; z)$$

lui fait correspondre une équation de Monge-Ampère de l'espèce indiquée si h et k sont déterminées par les deux équations

$$\frac{\partial h}{\partial z'} = \frac{\partial h}{\partial p'} \mathrm{G}\left(x', y', z', p', -\frac{\frac{\partial h}{\partial x'} + p' \frac{\partial h}{\partial z'}}{\frac{\partial h}{\partial p'}} \right),$$

$$\frac{\partial h}{\partial y'} + k \frac{\partial h}{\partial z} = \frac{\partial h}{\partial p'} \mathrm{K}\left(x', y', z', p', -\frac{\frac{\partial h}{\partial x'} + p' \frac{\partial h}{\partial z'}}{\frac{\partial h}{\partial p'}} \right).$$

M. Gomes Teixeira avait étudié des transformations analogues à celles que nous venons de considérer, mais en se bornant au cas particulier où les deux premières équations qui définissent la transformation se réduisent à

$$x' = x, \qquad y' = y;$$

pour que cela soit possible, il faut que le coefficient de λ dans l'équation qui détermine cette quantité soit nul, on trouve ainsi une relation entre m et M. Quant à l'équation qui détermine z', G est alors indépendant de r'; inversement, si G ne contient pas r', cette équation est réductible à une équation de Monge-Ampère par une transformation de M. Gomes Teixeira.

Pour résoudre le problème que nous avons étudié dans ce paragraphe, il n'est pas nécessaire d'intégrer complètement l'équation qui donne H, mais il suffit d'en déterminer une intégrale particulière.

Dans l'équation de Monge-Ampère proposée, nous avons supposé que le coefficient de r était l'unité pour simplifier un peu les calculs, mais cette hypothèse n'a rien d'essentiel. Nous ne développerons pas les calculs dans le cas d'une équation de la forme

$$s + g(x, y, z, p, q) = 0,$$

il n'y a qu'à opérer comme dans le cas général : ici, des deux systèmes de caractéristiques on peut déduire une transformation (B_1). On verra en particulier que, pour qu'une transformation de M. Gomes Teixeira soit applicable à l'équation précédente, il faut et il suffit que g soit linéaire par rapport à p ou à q.

16. L'un des systèmes de caractéristiques de l'équation de Monge-Ampère

$$r + ms + M = o$$

admet l'invariant du premier ordre y ; nous allons considérer maintenant le cas où le même système de caractéristiques admet également un invariant du deuxième ordre. D'après ce que nous avons démontré plus haut (nº 14), l'un des systèmes de caractéristiques de la transformée possédera deux invariants du premier ordre dont l'un sera y'; cette transformée sera intégrable par la méthode de Monge et, devant être linéaire par rapport à s' et à q', elle sera nécessairement de la forme suivante :

$$\frac{d}{dx'}[q'\rho(x', y', z', p') + \sigma(x', y', z', p')] = o. \tag{38}$$

Nous allons d'abord montrer que la transformation qui permet de passer de l'équation de Monge-Ampère primitive à l'équation (38) ne diffère d'une transformation de M. Teixeira que par des transformations (T) et (T'). Définissons une transformation (T') par les équations

$$\begin{aligned}
X' &= \xi(x', y', z', p'),\\
Y' &= y',\\
Z' &= \zeta(x', y', z', p'),\\
P' &= \frac{\dfrac{\partial\zeta}{\partial p'}}{\dfrac{\partial\xi}{\partial p'}},\\
Q' &= q'\rho(x', y', z', p') + \frac{\partial\zeta}{\partial y'} - \frac{\dfrac{\partial\zeta}{\partial p'}}{\dfrac{\partial\xi}{\partial p'}}\frac{\partial\xi}{\partial y'},
\end{aligned}$$

ζ satisfaisant à l'équation

$$\rho \frac{\partial \zeta}{\partial z'} - \rho^2 + [\rho, \zeta] = 0$$

et ξ étant une intégrale du système complet

$$\frac{\partial \xi}{\partial x'} - \frac{\frac{\partial \zeta}{\partial x'} + p'\rho}{\frac{\partial \zeta}{\partial p'}} \frac{\partial \xi}{\partial p'} = 0,$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial z'} - \frac{\frac{\partial \zeta}{\partial z'} - \rho}{\frac{\partial \zeta}{\partial p'}} \frac{\partial \xi}{\partial p'} = 0;$$

l'équation (38) devient ainsi

$$(38)' \qquad \frac{d}{dX'}[Q' + \Theta(X', Y', Z', P')] = 0$$

et ne contient plus Q'. Dans ces conditions, la transformation (B_1), qui changera l'équation $(38)'$ en l'équation proposée ou, du moins, en une équation identique à la proposée à une transformation de contact près, sera une transformation de M. Teixeira que nous pouvons écrire en appelant x, y au lieu de X', Y' les variables indépendantes qui ne changent pas.

$$z = P', \qquad q + p\frac{\partial \Theta}{\partial P'} + \frac{\partial \Theta}{\partial x} + z\frac{\partial \Theta}{\partial Z'} = 0,$$

z est définie par une équation de Monge-Ampère dont l'un des systèmes de caractéristiques possède un invariant du premier ordre et un invariant du second ordre, et lorsque la fonction Θ prend toutes les formes possibles, on obtient toutes les équations de Monge-Ampère qui jouissent de cette propriété.

TROISIÈME PARTIE.

17. Lorsque deux équations aux dérivées partielles du second ordre se ramènent l'une à l'autre par une transformation de Bäcklund de première espèce et que l'on peut, par conséquent, étant donnée l'intégrale générale de l'une de ces équations, calculer sans intégration l'intégrale générale de l'autre, il est bien évident que, si une équation admet une intégrale générale explicite, il en est de même de l'autre; plus généralement, si l'une des deux équations admet une intégrale générale de première espèce, l'autre jouit de la même propriété. Lorsque l'on considère les transformations (B_2) et (B_3), on ne voit pas aussi facilement comment les choses se passent : nous ne considérerons pas ici le cas général; nous montrerons seulement que, si une transformation de Bäcklund fait correspondre à chaque intégrale d'une équation (ε) une infinité d'intégrales d'une équation (ε'), et si (ε) admet une intégrale générale explicite, l'équation (ε') est de première espèce.

Pour cela nous démontrerons la proposition suivante dont la propriété énoncée découle évidemment.

Si l'équation aux différentielles totales

$$(39)\qquad \begin{aligned} du = {} & \varphi(\alpha, \beta, A, A', \ldots, A^{(m)}, B, B', \ldots, B^{(n)}, u)\, d\alpha \\ & + \psi(\alpha, \beta, A, A', \ldots, A^{(m)}, B, B', \ldots, B^{(n)}, u)\, d\beta, \end{aligned}$$

où A désigne une fonction de α et B une fonction de β, est complètement intégrable quelles que soient les fonctions A et B, on peut donner à cette équation la forme suivante :

$$(40)\qquad \begin{aligned} & R(\alpha, \beta, A, A', \ldots, A^{(m-1)}, B, B', \ldots, B^{(n-1)}, u) \\ & \quad = \int \Phi(\alpha, A, A', \ldots, A^{(m)})\, d\alpha + \int \Psi(\beta, B, B', \ldots, B^{(n)})\, d\beta, \end{aligned}$$

M. Goursat a déjà démontré ce théorème dans le cas où φ et ψ ne contiennent pas u (¹); nous allons étudier le cas général.

(¹) *Bulletin de la Société mathématique*, t. XXV; 1897. *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre*, t. II, p. 233.

Par hypothèse, l'égalité

$$(41)\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial\beta}+\frac{\partial\varphi}{\partial B}B'+\ldots+\frac{\partial\varphi}{\partial B^{(n)}}B^{(n+1)}+\frac{\partial\varphi}{\partial u}\psi$$
$$=\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}+\frac{\partial\psi}{\partial A}A'+\ldots+\frac{\partial\psi}{\partial A^{(m)}}A^{(m+1)}+\frac{\partial\psi}{\partial u}\varphi,$$

qui exprime que l'équation (39) est complètement intégrable, est identiquement vérifiée si l'on regarde α, A, A', ..., $A^{(m+1)}$, β, B, B', ..., $B^{(n+1)}$ comme des variables indépendantes : il en résulte immédiatement que φ ne dépend pas de $B^{(n)}$ et que ψ ne dépend pas de $A^{(m)}$.

Désignons, pour abréger, par φ', φ'' les deux premières dérivées de φ par rapport à $A^{(m)}$, et de même par ψ', ψ'' les deux premières dérivées de ψ par rapport à $B^{(n)}$; nous emploierons encore cette notation pour d'autres fonctions, que nous aurons à considérer dans un instant, qui ne dépendent pas simultanément de $A^{(m)}$ et de $B^{(n)}$.

Cela posé, en dérivant les deux termes de l'égalité (41) deux fois par rapport à $A^{(m)}$ et deux fois par rapport à $B^{(n)}$, il vient

$$\psi''\frac{\partial\varphi''}{\partial u}=\varphi''\frac{\partial\psi''}{\partial u}.$$

Si aucune des deux quantités φ'', ψ'' n'est nulle, on peut écrire, en appelant N une fonction convenablement choisie de α, β, A, A', ..., $A^{(m-1)}$, B, B', ..., $B^{(n-1)}$, u,

$$\frac{\dfrac{\partial\varphi''}{\partial u}}{\varphi''}=\frac{\dfrac{\partial\psi''}{\partial u}}{\psi''}=\frac{\dfrac{\partial N}{\partial u}}{N},$$

ou, en intégrant,

$$\begin{aligned}\varphi=\;&A^{(m)}\lambda(\alpha,\beta,A,A',\ldots,A^{(m-1)},B,B',\ldots,B^{(n-1)},u)\\&+\rho(\alpha,\beta,A,A',\ldots,A^{(m-1)},B,B',\ldots,B^{(n-1)},u)\\&+f(\alpha,\beta,A,A',\ldots,A^{(m)},B,B',\ldots,B^{(n-1)})\,N,\\\psi=\;&B^{(n)}\mu(\alpha,\beta,A,A',\ldots,A^{(m-1)},B,B',\ldots,B^{(n-1)},u)\\&+\sigma(\alpha,\beta,A,A',\ldots,A^{(m-1)},B,B',\ldots,B^{(n-1)},u)\\&+g(\alpha,\beta,A,A',\ldots,A^{(m-1)},B,B',\ldots,B^{(n)})\,N.\end{aligned}$$

Définissons une nouvelle variable v par l'équation

$$\frac{du}{N}=dv;$$

l'équation (39) devient

$$(39)' \quad \begin{aligned} dv = [&A^{(m)}\lambda_0(\alpha, \beta, A, A, \ldots, A^{(m-1)}, B, B', \ldots, B^{(n-1)}, v) \\ &+ \rho_0(\alpha, \beta, A, A', \ldots, A^{(m-1)}, B, B', \ldots, B^{(n-1)}, v) \\ &+ f(\alpha, \beta, A, A', \ldots, A^{(m)}, B, B', \ldots, B^{(n-1)})]\, d\alpha \\ + [&B^{(n)}\mu_0(\alpha, \beta, A, A', \ldots, A^{(m-1)}, B, B', \ldots, B^{(n-1)}, v) \\ &+ \sigma_0(\alpha, \beta, A, A', \ldots, A^{(m-1)}, B, B', \ldots, B^{(n-1)}, v) \\ &+ g(\alpha, \beta, A, A', \ldots, A^{(m-1)}, B, B', \ldots, B^{(n)})]\, d\beta, \end{aligned}$$

λ_0, ρ_0, μ_0, σ_0 sont des fonctions dont le calcul explicite n'offre aucune difficulté; je n'indiquerai pas leur expression non plus que celle des nouvelles fonctions que nous considérerons dans le cours de cette démonstration; il nous suffit de savoir quelles sont les quantités qui figurent dans chacune de ces fonctions, ces quantités sont indiquées entre parenthèses.

En dérivant deux fois par rapport à $A^{(m)}$ et une fois par rapport à $B^{(n)}$ la condition d'intégrabilité de l'équation précédente, on trouve

$$\frac{\partial f''}{\partial B^{(n-1)}} - \frac{\partial \mu_0}{\partial v} f'' = 0;$$

f'' n'étant pas nulle, on en déduit que μ_0 est linéaire par rapport à v, il doit naturellement en être de même pour λ_0, et l'on peut écrire

$$\begin{aligned} dv = [&v A^{(m)}\omega(\alpha, \beta, A, A', \ldots, A^{(m-1)}, B, B', \ldots, B^{(n-1)}) \\ &+ \rho_0(\alpha, \beta, A, A', \ldots, A^{(m-1)}, B, B', \ldots, B^{(n-1)}, v) \\ &+ f_0(\alpha, \beta, A, A', \ldots, A^{(m)}, B, B', \ldots, B^{(n-1)})]\, d\alpha \\ + [&v B^{(n)}\varpi(\alpha, \beta, A, A', \ldots, A^{(m-1)}, B, B', \ldots, B^{(n-1)}) \\ &+ \sigma_0(\alpha, \beta, A, A', \ldots, A^{(m-1)}, B, B', \ldots, B^{(n-1)}, v) \\ &+ g_0(\alpha, \beta, A, A', \ldots, A^{(m-1)}, B, B', \ldots, B^{(n)})]\, d\beta. \end{aligned}$$

Cette équation est complètement intégrable; en dérivant les deux membres de l'égalité qui exprime cette propriété par rapport à $A^{(m)}$ et à $B^{(n)}$, il vient

$$(42) \qquad v\frac{\partial\omega}{\partial B^{(n-1)}} + \frac{\partial f'_0}{\partial B^{(n-1)}} + \omega g'_0 = v\frac{\partial\varpi}{\partial A^{(m-1)}} + \frac{\partial g'_0}{\partial A^{(m-1)}} + \varpi f'_0.$$

Pour que cette condition soit vérifiée, il faut que l'on ait d'abord

$$\frac{\partial\omega}{\partial B^{(n-1)}} = \frac{\partial\varpi}{\partial A^{(m-1)}},$$

M désignant une fonction convenablement choisie de α, β, A, A′, ..., $A^{(m-1)}$, B, B′, ..., $B^{(n-1)}$, on aura donc

$$\omega = \frac{1}{M}\frac{\partial M}{\partial A^{(m-1)}}, \qquad \varpi = \frac{1}{M}\frac{\partial M}{\partial B^{(n-1)}},$$

c'est-à-dire que l'équation (39)′ s'écrit

$$dv - \frac{v}{M}\frac{\partial M}{\partial A^{(m-1)}} dA^{(m-1)} - \frac{v}{M}\frac{\partial M}{\partial B^{(n-1)}} dB^{(n-1)} = (\rho_0 + f_0)\,d\alpha + (\sigma_0 + g_0)\,d\beta;$$

en posant

$$\frac{v}{M} = w_1,$$

on trouve, après un calcul facile,

$$\begin{aligned} dw_1 = {} & [\rho_1(\alpha, \beta, A, A', \ldots, A^{(m-1)}, B, B', \ldots, B^{(n-1)}, w_1) \\ & \quad + f_1(\alpha, \beta, A, A', \ldots, A^{(m)}, B, B', \ldots, B^{(n-1)})]\,d\alpha \\ & + [\sigma_1(\alpha, \beta, A, A', \ldots, A^{(m-1)}, B, B', \ldots, B^{(n-1)}, w_1) \\ & \quad + g_1(\alpha, \beta, A, A', \ldots, A^{(m-1)}, B, B', \ldots, B^{(n)})]\,d\beta. \end{aligned}$$

La condition d'intégrabilité de cette nouvelle équation, différentiée deux fois par rapport à $A^{(m)}$, donne

$$\frac{df_1''}{d\beta} = \frac{\partial \sigma_1}{\partial w_1} f_1'';$$

σ_1 et ρ_1 sont donc linéaires par rapport à w_1 et nous pouvons remplacer l'équation qui vient d'être écrite par la suivante :

$$\begin{aligned} dw_1 = {} & [w_1\theta_1(\alpha, \beta, A, A', \ldots, A^{(m-1)}, B, B', \ldots, B^{(n-1)}) \\ & \quad + h_1(\alpha, \beta, A, A', \ldots, A^{(m)}, B, B', \ldots, B^{(n-1)})]\,d\alpha \\ & + [w_1\chi_1(\alpha, \beta, A, A', \ldots, A^{(m-1)}, B, B', \ldots, B^{(n-1)}) \\ & \quad + k_1(\alpha, \beta, A, A', \ldots, A^{(m-1)}, B, B', \ldots, B^{(n)})]\,d\beta, \end{aligned}$$

qui est aussi complètement intégrable. Dans θ_1 et χ_1 figurent A et ses dérivées jusqu'à l'ordre $m-1$ seulement, B et ses dérivées jusqu'à l'ordre $n-1$ seulement, w_1 est une fonction de u, α, β, A, A′, ..., $A^{(m-1)}$, B, B′, ..., $B^{(n-1)}$. D'une manière plus générale, supposons que l'on ait ramené l'intégration de la proposée à l'intégration d'une équation telle que

$$(43)\qquad \begin{aligned} d\varpi_i = & \,[\varpi_i\theta_i(\alpha,\beta,A,A',\ldots,A^{(m-i)},B,B',\ldots,B^{(n-i)}) \\ & + h_i(\alpha,\beta,A,A',\ldots,A^{(m)},\quad B,B',\ldots,B^{(n-1)})]\,d\alpha \\ & + [\varpi_i\chi_i(\alpha,\beta,A,A',\ldots,A^{(m-i)},B,B',\ldots,B^{(n-i)}) \\ & + k_i(\alpha,\beta,A,A',\ldots,A^{(m-1)},B,B',\ldots,B^{(n)})\,]\,d\beta, \end{aligned}$$

i désignant un nombre entier; θ_i et χ_i ne dépendent pas des dérivées de A d'ordre supérieur à $m-i$ ni des dérivées de B d'ordre supérieur à $n-i$; ϖ_i s'exprime à l'aide de $u,\alpha,\beta,A,A',\ldots,A^{(m-1)},B,B',\ldots,B^{(n-1)}$. Je dis que l'on peut substituer à l'équation (43) une équation de forme toute semblable mais dans laquelle i est remplacé par $i+1$.

Par hypothèse (43) est complètement intégrable; en différentiant la condition d'intégrabilité deux fois par rapport à $A^{(m)}$, il vient

$$\frac{dh^i}{d\beta} = \chi_i h_i'';$$

on en conclut que h_i'' ne contient pas les dérivées de B d'ordre supérieur ou égal à $n-i$, car une au moins des dérivées d'ordre supérieur à $n-i$ figurerait dans χ_i, ce que nous ne supposons pas ; de plus, χ_i est linéaire par rapport à $B^{(n-i)}$. Posons

$$\theta_i = A^{(m-i)}\xi + \zeta,$$
$$\chi_i = B^{(n-i)}\eta + \varepsilon;$$

l'équation (43) devient

$$(44)\qquad d\varpi_i = \varpi_i\xi\,dA^{(m-i-1)} + \varpi_i\eta\,dB^{(n-i-1)} + (\zeta\varpi_i + h_i)\,d\alpha + (\varepsilon\varpi_i + k_i)\,d\beta;$$

en outre, en écrivant la condition d'intégrabilité, on aperçoit aussitôt que l'on peut poser

$$\xi = \frac{\partial K}{\partial A^{(m-i-1)}}, \qquad \eta = \frac{\partial K}{\partial B^{(n-i-1)}},$$

K désignant une fonction de $\alpha,\beta,A,A',\ldots,A^{(m-i-1)},B,B',\ldots,B^{(n-i-1)}$; ζ et ε ne contiennent pas non plus les dérivées $A^{(m-i)}$ et $B^{(n-i)}$.

En opérant comme plus haut, c'est-à-dire en prenant pour nouvelle variable

$$\varpi_{i+1} = \frac{\varpi_i}{K},$$

on trouve une équation

$$d\varpi_{i+1} = (\varpi_{i+1}\theta_{i+1} + h_{i+1})\,d\alpha + (\varpi_{i+1}\chi_{i+1} + k_{i+1})\,d\beta,$$

de la forme annoncée. En calculant les fonctions $\theta_{i+1}, \chi_{i+1}, h_{i+1}, k_{i+1}$, on vérifie que θ_{i+1} et χ_{i+1} ne dépendent ni des dérivées de A d'ordre supérieur à $m-i-1$, ni des dérivées de B d'ordre supérieur à $n-i-1$. En opérant ainsi de proche en proche [1] on arrive à une équation

$$\begin{aligned} dw = {} & \mathrm{H}(\alpha, \beta, \mathrm{A}, \mathrm{A}', \ldots, \mathrm{A}^{(m)}, \quad \mathrm{B}, \mathrm{B}', \ldots, \mathrm{B}^{(n-1)})\, d\alpha \\ & + \mathrm{L}(\alpha, \beta, \mathrm{A}, \mathrm{A}', \ldots, \mathrm{A}^{(m-1)}, \mathrm{B}, \mathrm{B}', \ldots, \mathrm{B}^{(n)} \quad)\, d\beta, \end{aligned}$$

w désignant une fonction de $\alpha, \beta, \mathrm{A}, \mathrm{A}', \ldots, \mathrm{A}^{(m-1)}, \mathrm{B}, \mathrm{B}', \ldots, \mathrm{B}^{(n-1)}, u$.

D'après le résultat dû à M. Goursat, cette dernière équation peut être mise sous la forme

$$\begin{aligned} w = {} & \mathrm{R}_1(\alpha, \beta, \mathrm{A}, \mathrm{A}', \ldots, \mathrm{A}^{(m-1)}, \mathrm{B}, \mathrm{B}', \ldots, \mathrm{B}^{(n-1)}) + \int \Phi(\alpha, \mathrm{A}, \mathrm{A}', \ldots, \mathrm{A}^{(m)})\, d\alpha \\ & + \int \Psi(\beta, \mathrm{B}, \mathrm{B}', \ldots, \mathrm{B}^{(n)})\, d\beta. \end{aligned}$$

Si l'on remplace w par son expression, on trouve que l'équation (39) peut bien être mise sous la forme (40) : c'est le résultat que nous voulions démontrer.

Nous avons négligé le cas où l'une des quantités φ'', ψ'' est nulle : il est très aisé de voir que, si ψ'', par exemple, est nulle, l'équation (39) peut être ramenée à une équation analogue dans laquelle seulement n est remplacé par $n-1$. Soit

$$du = \varphi\, d\alpha + (\mathrm{B}^{(n)}\psi_0 + \psi_1)\, d\beta \tag{45}$$

l'équation que nous voulons étudier; nous l'écrirons de la manière suivante

$$du = \varphi\, d\alpha + \psi_0\, d\mathrm{B}^{(n-1)} + \psi_1\, d\beta. \tag{45'}$$

On peut trouver deux fonctions χ et π de $\alpha, \beta, \mathrm{A}, \ldots, \mathrm{A}^{(m-1)}, \mathrm{B}, \ldots, \mathrm{B}^{(n-1)}$ telles que l'on ait

$$du - \psi_0\, d\mathrm{B}^{(n-1)} = \pi\left(\frac{\partial\chi}{\partial u}\, du + \frac{\partial\chi}{\partial \mathrm{B}^{(n-1)}}\, d\mathrm{B}^{(n-1)}\right),$$

---

[1] La considération de la condition d'intégrabilité indique les modifications, du reste peu importantes, qu'il faut apporter aux raisonnements précédents quand l'un des nombres $m-i$, $n-i$ est nul ou que tous deux le sont.

c'est-à-dire telles que l'on ait

$$du - \psi_0 dB^{(n-1)} = \pi \Big[d\chi - \left(\frac{\partial \chi}{\partial \alpha} + \frac{\partial \chi}{\partial A} A' + \ldots + \frac{\partial \chi}{\partial A^{(m-1)}} A^{(m)} \right) d\alpha$$
$$- \left(\frac{\partial \chi}{\partial \beta} + \frac{\partial \chi}{\partial B} B' + \ldots + \frac{\partial \chi}{\partial B^{(n-2)}} B^{(n-1)} \right) d\beta \Big],$$

et si nous prenons χ pour nouvelle variable nous remplacerons l'équation (45)' par

$$d\chi = \lambda\, d\alpha + \mu\, d\beta,$$

λ, μ étant des fonctions de $\alpha, \beta, A, A', \ldots, A^{(m)}, B, B', \ldots, B^{(n-1)}, \chi$; si le produit $\frac{\partial^2 \lambda}{(\partial A^{(m)})^2} \frac{\partial^2 \mu}{(\partial B^{(n-1)})^2}$ est nul, on continuera de la même manière, sinon on appliquera le procédé de réduction que nous avons exposé d'abord.

Il n'est pas sans intérêt de remarquer que la proposition précédente n'est pas seulement utile pour la théorie des transformations de Bäcklund, mais encore dans d'autres questions de la théorie des équations aux dérivées partielles. Par exemple, il peut très bien arriver que l'application de la méthode de M. Darboux conduise à l'intégration d'une équation telle que (39) que l'on saura simplifier comme il vient d'être expliqué.

Faisons encore une remarque : imaginons qu'une équation linéaire en r, s, t admette une intégrale générale explicite qui s'exprime à l'aide de deux variables auxiliaires α, β, d'une fonction A de α et de ses dérivées jusqu'à l'ordre m, d'une fonction B de β et de ses dérivées jusqu'à l'ordre n, ou d'une manière plus précise que x, y, z, p, q s'expriment en fonction de ces quantités [1]. Si une transformation de Bäcklund fait correspondre à chaque intégrale de (ε) une infinité d'intégrales d'une autre équation (ε'), pour connaître l'expression des intégrales de (ε') il faudra calculer la quantité que nous avons appelée ζ (n° 2), et dans l'équation (3)'' on voit que $A^{(m+1)}$ et $B^{(n+1)}$ figurent linéairement. Lorsque l'on aura simplifié l'expression de ζ, $A^{(m+1)}$ et

(1) Il n'y a pas lieu de considérer séparément les expressions de x, y, z puisque, pour nous, une équation aux dérivées partielles n'est définie qu'à une transformation de contact près.

$B^{(n+1)}$ n'y figureront donc plus. Il nous a été commode de supposer que (ε) était une équation linéaire en r, s, t, mais il apparaît immédiatement que, si (ε) renferme un terme en $rt - s^2$, cette proposition est encore vraie.

18. Nous avons montré (n° 14) que, si une transformation de Bäcklund fait correspondre à une intégrale d'une équation (27) une seule intégrale d'une équation (28), à chaque invariant de l'un des systèmes de caractéristiques de (28) correspond un invariant de l'un des systèmes de caractéristiques de (27): à un invariant de (C′) d'ordre n correspond un invariant de (C) d'ordre au plus égal à n; à un invariant de (Γ′) d'ordre n correspond un invariant de (Γ) d'ordre $n+1$. Les raisonnements qui conduisent à ces résultats ne supposent pas que la transformation considérée soit une transformation (B_1); ils subsistent encore si à une intégrale de (28) correspondent ∞^1 intégrales de (27).

Nous allons maintenant supposer qu'à chaque intégrale de l'équation de Monge-Ampère,

$$r + (m + \mu) s + m\mu t + M = 0, \tag{46}$$

une transformation de Bäcklund fasse correspondre une infinité d'intégrales de l'équation

$$r' + G(x', y', z', p', q', s', t') = 0, \tag{47}$$

et rechercher ce que deviennent, par cette transformation, les invariants des systèmes de caractéristiques de (47). Les résultats qui vont être démontrés sont beaucoup moins précis que ceux qui ont été obtenus dans l'étude des transformations (B_1); j'essaierai du moins d'indiquer quels sont les différents cas qui peuvent se présenter.

Étant donnée une fonction quelconque F′ de x', y', z', ..., $p'_{1,n-1}$, $p'_{0,n}$, en remplaçant ces quantités par leurs valeurs (n° 3), on trouve une certaine fonction F de x, y, z, ..., $p_{1,n-1}$, $p_{0,n}$, z'. Il est très aisé de voir que cette dernière fonction dépend effectivement des dérivées de z d'ordre n, si la transformation considérée est de troisième espèce et si n est au moins égal à 2. En effet, s'il en était autrement, on aurait une relation de la forme

$$F'(x', y', z', \ldots, p'_{1,n-1}, p'_{0,n}) = F(x, y, z, \ldots, p_{1,n-2}, p_{0,n-1}, z'),$$

et, en remplaçant dans F $x, y, \ldots, p_{1,n-2}, p_{0,n-1}$ par leurs valeurs en fonction de z, x', y', z' et des dérivées de z', on trouverait une relation telle que

$$F'(x', y', z', \ldots, p'_{1,n-1}, p'_{0,n}) = F_1(x', y', z', \ldots, p'_{1,n-2}, p'_{0,n-1}, z).$$

Il est impossible que F_1 contienne z, puisqu'à une intégrale de (47) ne correspondrait qu'une intégrale de (46) déterminée par l'équation précédente et les équations de la transformation de Bäcklund qui ne serait donc pas de troisième espèce; d'autre part, si F_1 ne dépendait pas de z, il y aurait une relation entre x', y', z' et les dérivées de z' dont le premier indice est 0 ou 1, ce qui est également impossible, puisque l'équation (47) est résolue par rapport à r'. Nous avons vu (n° 9) que, si nous avons une transformation de Bäcklund de seconde espèce il est possible qu'une fonction telle que F′ s'exprime en fonction de x, y, z, et des dérivées de z jusqu'à l'ordre $n-1$ seulement.

Cette remarque étant faite, supposons d'abord qu'il existe une équation

$$F_1(x', y', z', \ldots, p'_{1,n-1}, p'_{0,n}) = 0, \tag{48}$$

qui forme avec (47) un système en involution. En remplaçant dans le premier membre de cette équation x', y' et les dérivées de z' par leurs valeurs en fonction de z', x, y, z, et des dérivées de z, on trouve une équation

$$F_0(x, y, z, \ldots, p_{1,n-1}, p_{0,n}, z') = 0, \tag{49}$$

qui est vérifiée si l'on remplace $x, y, z, \ldots, p_{1,n-1}, p_{0,n}, z'$ par les expressions correspondant à deux intégrales transformées l'une de l'autre, z' satisfaisant à (48).

Si F_0 ne dépend pas de z', l'équation (49) correspond évidemment à l'équation (48) et forme avec (46) un système en involution. Si, au contraire, la variable z' figure dans F_0, adjoignons à l'équation (49) sa dérivée par rapport à une des deux variables indépendantes, par rapport à y par exemple, qui s'écrit

$$\frac{dF_0}{dy} = \frac{\partial F_0}{\partial y} + \frac{\partial F_0}{\partial z} + \ldots + p_{1,n}\frac{\partial F_0}{\partial p_{1,n-1}} + p_{0,n+1}\frac{\partial F_0}{\partial p_{0,n}} + (C + \alpha s + \beta t)\frac{\partial F_0}{\partial z'} = 0,$$

en conservant les notations déjà employées (n° 1).

Entre l'équation (49) et l'équation dérivée nous pouvons éliminer z', et il reste ainsi une équation du $(n+1)^{\text{ième}}$ ordre qui forme avec (46) un système en involution. Nous pouvons résumer en disant qu'à une équation d'ordre n formant avec (47) un système en involution correspond une équation d'ordre au plus égal à $n+1$ formant avec (46) un système en involution.

Supposons maintenant que l'un des systèmes de caractéristiques de (47) admette un invariant du $n^{\text{ième}}$ ordre Φ_1, c'est-à-dire que l'équation

$$\Phi_1(x', y', z', \ldots, p'_{1,n-1}, p'_{0,n}) = \mathrm{K} \tag{50}$$

admette, quelle que soit la constante K, une infinité d'intégrales dépendant d'une infinité de constantes arbitraires qui satisfont en même temps à (47). Nous opérerons comme nous venons de faire dans l'étude de la question précédente. Remplaçons $x', y', p', q', \ldots, p'_{1,n-1}, p'_{0,n}$ par leurs valeurs; nous trouvons une fonction Φ_0 de $z', x, y, z, \ldots, p_{1,n-1}, p_{0,n}$ telle que l'équation

$$\Phi_0(x, y, z, \ldots, p_{1,n-1}, p_{0,n}, z') = \mathrm{K}, \tag{51}$$

est vérifiée par deux intégrales correspondantes des équations (46) et (47) à condition que z' satisfasse également à l'équation (50).

Comme tout à l'heure il faut distinguer plusieurs cas. Si le premier membre de l'équation (51) ne dépend pas de z', on a un invariant du $n^{\text{ième}}$ ordre ou d'ordre moindre qui correspond à l'invariant Φ_1; si, au contraire, z' figure dans Φ_0, dérivons l'équation (51) par rapport à y : il vient

$$\frac{d\Phi_0}{dy} = 0. \tag{52}$$

Il peut arriver que la fonction $\frac{d\Phi_0}{dy}$ ne dépende pas de z'; l'équation (52) forme alors un système en involution avec (46); quelle que soit la valeur de K, à toutes les intégrales communes aux équations (47) et (50) correspondent des intégrales qui satisfont simultanément aux équations (46) et (52). Enfin, si $\frac{d\Phi_0}{dy}$ contient z', on tirera cette quantité de l'équation (52), on portera dans Φ_0, et l'on trouvera une fonction

Ψ_0 de $x, y, z, \ldots, p_{1,n}, p_{0,n+1}$ telle que l'équation

$$\Psi_0 = K$$

forme avec (46) un système en involution pour toutes les valeurs de K.

En définitive, s'il existe un invariant d'ordre n pour l'un des systèmes de caractéristiques de (47), le système correspondant de caractéristiques de (46) admet un invariant d'ordre inférieur ou égal à $n+1$, ou il existe une équation unique d'ordre $n+1$ au plus, qui forme avec (46) un système en involution.

Nous venons de trouver une limite supérieure pour l'ordre de l'invariant ou de l'équation qui correspond à l'invariant connu Φ_1; la remarque faite au commencement de ce paragraphe va nous permettre de donner quelques indications sur la limite inférieure. Supposons que la transformation considérée soit une transformation (B_3) : Φ_0 dépend effectivement des dérivées de z d'ordre n; à Φ_1 correspond soit un invariant d'ordre n ou $n+1$, soit une équation unique d'ordre $n+1$. Si la transformation que nous considérons est une transformation (B_2) et si Φ_0 contient les dérivées d'ordre n, il n'y a qu'à répéter ce qui vient d'être dit, mais il peut se faire que ces dérivées ne figurent pas dans Φ_0; lorsqu'il en est ainsi, à l'invariant Φ_1 correspond soit un invariant d'ordre $n-1$ ou n, soit une équation d'ordre n formant avec (46) un système en involution.

On voit aisément qu'il peut y avoir exception si n est égal à un ou à deux, et dans ces cas seulement. En effet, si Φ_0 dépend des variables x, y, z, p, q, z' et non des dérivées de z d'ordre supérieur, on a

$$\frac{d\Phi_0}{dy} = \frac{\partial\Phi_0}{\partial y} + q\frac{\partial\Phi_0}{\partial z} + s\frac{\partial\Phi_0}{\partial p} + t\frac{\partial\Phi_0}{\partial q} + (C + \alpha s + \beta t)\frac{\partial\Phi_0}{\partial z'} = 0;$$

il est possible que, en réduisant, on trouve une équation indépendante de s et de t.

Nous allons maintenant examiner le cas où l'un des systèmes de caractéristiques de l'équation (47) admet deux invariants distincts d'ordre m et n $(m \leqq n)$; soient u_1 l'invariant d'ordre m et v_1 l'invariant d'ordre n. Étant donnée une intégrale quelconque de l'équation (47), il existera une fonction f telle que cette intégrale satisfasse en même temps à l'équation

$$v_1 = f(u_1); \tag{53}$$

en outre, étant donnée une équation de la forme précédente et quelle que soit la fonction f, cette équation admet une infinité d'intégrales dépendant d'une infinité de constantes arbitraires qui satisfont également à l'équation (47). A chaque équation telle que (53) nous ferons correspondre, en procédant comme nous avons déjà fait, une équation d'ordre $n+1$ ou d'ordre moindre qui forme avec (46) un système en involution. D'ailleurs, étant donnée une intégrale quelconque de (46), il existe une équation d'ordre au plus égal à $n+1$ qui admet cette intégrale et qui forme, avec (46), un système en involution. En effet, considérons une intégrale de (47) qui corresponde à l'intégrale donnée de (46); nous pouvons choisir la fonction f de telle sorte que l'équation (53) possède cette intégrale et, en transformant cette équation, on trouve une équation d'ordre inférieur ou égal à $n+1$ qui admet, en même temps que l'intégrale donnée, une infinité d'intégrales dépendant d'une infinité de constantes arbitraires et satisfaisant à (46). Il résulte de là que l'un des systèmes de caractéristiques de (46) possède deux invariants d'ordre au plus égal à $n+1$.

Au fond, dans ce qui précède, nous avons simplement démontré que les invariants des systèmes de caractéristiques de l'équation (47) peuvent se transformer de plusieurs manières différentes : il n'est pas inutile d'indiquer quelques exemples qui montrent que ces différentes espèces de transformations se présentent réellement.

Considérons l'équation très simple

$$q'r' - p's' + f(x, y, p', q') = 0; \tag{54}$$

l'un des systèmes de caractéristiques (Γ') admet l'invariant du premier ordre y et l'autre (C') l'invariant z'. Si l'on conserve les variables indépendantes, la transformation

$$z = p', \qquad q'p - zq + f(x, y, z, q') = 0 \tag{55}$$

remplace l'équation (54) par une autre équation de Monge-Ampère. Si l'on imagine les équations (55) résolues par rapport à p' et q'

$$p' = z, \qquad q' = \psi(x, y, z, p, q), \tag{55$'$}$$

l'équation (ε) qui définit z est identique à la condition d'intégrabilité de

$$(56) \qquad dz' - z\,dx - \psi(x, y, z, p, q)\,dy = 0.$$

L'invariant y, qui appartient au système (Γ'), appartient également au système correspondant (Γ) de caractéristiques de (ε), mais à l'invariant z' du système (C') correspond l'équation

$$\psi(x, y, z, p, q) = 0,$$

ou, si l'on aime mieux, l'équation

$$z = 0$$

qui forme avec (ε) un système en involution.

Considérons maintenant l'équation

$$(57) \qquad r'q' - s'p' = p'^3 e^x;$$

le système (C') de caractéristiques admet l'invariant z' et l'invariant du second ordre

$$\mathrm{I} = \frac{2r' + p'}{p'^3};$$

il admet, par conséquent, une suite d'invariants $\dfrac{d\mathrm{I}}{dz'}, \dfrac{d\left(\dfrac{d\mathrm{I}}{dz'}\right)}{dz'}, \ldots$. A l'invariant z' correspond, quand on applique la transformation (55) à l'équation précédente, une équation unique, mais à l'invariant I correspond un invariant qui est du premier ordre; l'équation (56) montre, en effet, que p' et r' sont respectivement égaux à z et à p; de même, à $\dfrac{d\mathrm{I}}{dz'}$ et à tous les invariants qui suivent correspondent des invariants. Le second système de caractéristiques admet un invariant du premier ordre, un du second ordre, et ainsi de suite; la transformation (55)$'$ leur fait correspondre des invariants du même ordre.

Nous n'avons considéré que des transformations (B_2), mais il est très aisé de trouver des transformations (B_3) qui transforment les invariants comme nous l'avons indiqué dans la théorie générale. Imaginons que, dans l'équation (54), la fonction f ne dépende pas de y, c'est-à-dire que l'équation (54) reste invariante pour une translation parallèle à Oy, ou encore que cette équation admette une transformation infinitésimale de contact dont la fonction caractéristique soit q'. Nous avons déjà expliqué qu'il existe une équation de Monge-Ampère (ε_1) transformée de (54), les équations de la transformation ne contenant pas y, qui correspond à (ε) par une transformation (B_3). On trouve, en particulier, que l'un des systèmes de caractéristiques de (ε_1) admet un invariant du premier ordre transformé de z' auquel correspond l'équation unique $z = 0$.

Il importe encore de faire la remarque suivante : en général, le système (Γ) n'admet aucun invariant; cependant le système (Γ') en admet un qui est z'; par conséquent, quand on étudie une transformation de Bäcklund qui n'est pas une transformation (B_1), on n'est pas assuré d'avoir trouvé tous les invariants d'un système de caractéristiques de l'une des équations quand on a seulement cherché les invariants qui sont transformés des invariants du système correspondant de caractéristiques de la deuxième équation.

19. Je terminerai ce Travail par l'étude d'une transformation de Bäcklund intéressante (¹). J'ai déjà rappelé les résultats obtenus par Lie, par M. Bäcklund et par M. Darboux dans l'étude des transformations des surfaces à courbure constante; un système de deux éléments du premier ordre (x, y, z, p, q), (x', y', z', p', q') admet quatre invariants relativement au groupe des mouvements dans l'espace; en égalant ces invariants à des constantes, on obtient les équations de la transformation étudiée par M. Darboux, qui s'applique à des surfaces parallèles à des surfaces à courbure totale constante.

Nous allons montrer qu'il existe une transformation analogue dans la Géométrie non-euclidienne; nous emploierons pour cela une méthode toute semblable à celle de M. Darboux, ce qui nous fournira l'occasion de rappeler la manière élégante dont ce géomètre a démontré les théorèmes trouvés par M. Bäcklund (n° 1).

Étant donnée une quadrique (S), que nous appellerons *quadrique fondamentale* et dont nous supposerons l'équation réduite à la forme

---

(¹) *Bulletin des Sciences mathématiques*, t. XXIV, p. 284; 1900.

simple

$$x^2+y^2+z^2+1=0,$$

en égalant à des constantes les quatre invariants d'un système de deux éléments (x, y, z, p, q), (x', y', z', p', q') relativement au groupe des transformations projectives qui laissent la quadrique (S) invariante, nous trouvons un système de quatre équations

$$(58)\quad \left\{\begin{aligned}
F_1 &= \frac{[xx'+yy'+zz'+1]^2}{[x^2+y^2+z^2+1][x'^2+y'^2+z'^2+1]}=k^2,\\
F_2 &= \frac{[p(x-x')+q(y-y')-(z-z')]^2}{[p^2+q^2+(px+qy-z)^2+1][x'^2+y'^2+z'^2+1]}=m^2,\\
F_3 &= \frac{[p'(x'-x)+q'(y'-y)-(z'-z)]^2}{[x^2+y^2+z^2+1][p'^2+q'^2+(p'x'+q'y'-z')^2+1]}=n^2,\\
F_4 &= \frac{[pp'+qq'+(px+qy-z)(p'x'+q'y'-z')+1]^2}{[p^2+q^2+(px+qy-z)^2+1][p'^2+q'^2+(p'x'+q'y'-z')^2+1]}=l^2,
\end{aligned}\right.$$

qui définissent la transformation que nous allons étudier, k, m, n, l désignant des constantes.

En différentiant le système précédent, on trouve

$$\frac{dF_i}{dx}dx+\frac{dF_i}{dy}dy+\left(\frac{dF_i}{dx'}\right)dx'+\left(\frac{dF_i}{dy'}\right)dy'+\frac{\partial F_i}{\partial p'}dp'+\frac{\partial F_i}{\partial q'}dq'=0$$
$$(i=1, 2, 3, 4).$$

Si l'on résout les équations précédentes par rapport à dp', dq', dx, dy, il vient, en appelant H, K, L, M, N certaines fonctions de $x, y, z, p, q, x', y', z', p', q'$,

$$H\,dp'=K\,dx'+L\,dy',$$
$$H\,dq'=M\,dx'+N\,dy',$$

et les éléments (x', y', z', p', q') engendrent une surface si l'on a

$$L=M.$$

On pourrait voir que, dans le cas particulier qui nous occupe, la condition précédente se réduit à une équation de Monge-Ampère qui détermine z; mais le calcul serait un peu long et il vaut mieux procéder autrement. Considérons l'élément $x=y=z=p=q=0$; en effectuant les calculs qui viennent d'être indiqués, on trouve que les valeurs de r, s, t qui correspondent à cet élément doivent satisfaire à l'équation

$$(1 - n^2 - k^2)(rt - s^2) - (nl + km)(r + t) + 1 - m^2 - l^2 = 0.$$

Le groupe considéré admet deux invariants différentiels du second ordre

$$\mathrm{I} = \frac{[x^2 + y^2 + z^2 + 1]^2}{[p^2 + q^2 + (px + qy - z)^2 + 1]}(rt - s^2),$$

$$\begin{aligned}\mathrm{J} = {} & \frac{[x^2 + y^2 + z^2 + 1]^{\frac{1}{2}}}{[p^2 + q^2 + (px + qy - z)^2 + 1]^{\frac{3}{2}}} \\ & \times \{[(1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t][x^2 + y^2 + z^2 + 1] \\ & \quad - (y + qz)^2 r + 2(y + qz)(x + pz)s - (x + pz)^2 t\},\end{aligned}$$

et, si l'on annule x, y, z, p, q, les valeurs de ces deux invariants sont $rt - s^2$ et $r + t$.

D'autre part, il existe toujours une infinité de transformations du groupe considéré qui permettent de ramener à l'élément origine un élément quelconque (x, y, z, p, q), à condition que le point (x, y, z) n'appartienne pas à la quadrique fondamentale : la transformation définie par le système (58) s'applique donc aux surfaces intégrales de l'équation

$$(59) \qquad (1 - n^2 - k^2)\mathrm{I} - (nl + km)\mathrm{J} + (1 - m^2 - l^2) = 0;$$

quant aux surfaces transformées, elles satisfont à l'équation

$$(1 - m^2 - k^2)\mathrm{I}' - (ml + nk)\mathrm{J}' + (1 - n^2 - l^2) = 0,$$

I′ et J′ se déduisant respectivement de I et J en accentuant toutes les lettres qui y figurent.

Appelons D la droite perpendiculaire au point $M(x, y, z)$ sur le plan (p, q), c'est-à-dire la droite qui passe par M et par le pôle du plan par rapport à la quadrique (S); appelons de même D′ la perpendiculaire au point $M'(x', y', z')$ sur le plan (p', q'). Appelons encore Δ la droite conjuguée de D et Δ' la droite conjuguée de D′, et supposons tracée une des droites qui rencontrent D, D′, Δ, Δ', N et N′ étant les points d'intersection de cette droite avec D et D′. Les points N, N′ ainsi déterminés appartiennent au système invariable défini par les deux points M, M′ et par les deux plans qui passent respectivement par ces points. Si le point M décrit une surface tangente au plan (p, q), le point N décrira une surface dont le plan tangent contiendra la droite Δ. En effet, soient A, B les points d'intersection de D avec (S); supposons que la droite D se déplace infiniment peu et vienne en D_1, les points A, B, M, N viendront en A_1, B_1, M_1, N_1 et les points A_1, B_1 seront respectivement dans les plans définis par Δ et par les points A, B, M; comme le rapport anharmonique (A, B, M, N) est égal au rapport (A_1, B_1, M_1, N_1), le point N_1 sera dans le plan qui passe par Δ et par N.

Il est inutile d'écrire les équations de la transformation de contact qui permet de remplacer chaque élément du premier ordre par un autre élément, comme nous venons de l'expliquer; nous remarquerons seulement que cette transformation est tout à fait analogue à la dilatation. Lorsque les points M, M' sont ainsi remplacés par les points N et N', dans les équations (58) [1] les constantes m et n se réduisent à zéro puisque la droite N, N' est la droite d'intersection des plans tangents aux surfaces décrites par ces points. Les surfaces décrites par le point N, par exemple, satisfont à l'équation

$$rt - s^2 + c\frac{[p^2 + q^2 + (px + qy - z)^2 + 1]^2}{[x^2 + y^2 + z^2 + 1]^2} = 0, \tag{60}$$

c désignant une constante. Les intégrales de cette équation sont des surfaces à courbure totale constante de la Géométrie non-euclidienne.

20. Il serait peut-être intéressant d'étudier les transformations de ces surfaces d'une manière détaillée, comme on a fait dans le cas de la Géométrie euclidienne; nous n'entrerons pas ici dans l'examen des questions qui se posent à ce sujet, et nous nous bornerons à montrer que la théorie qui précède est susceptible d'application à la Géométrie ordinaire.

Désignons par ρ', ρ'' les rayons de courbure principaux d'une surface, r le rayon vecteur et d la distance de l'origine au plan tangent; les intégrales de (60) satisfont à la relation

$$\rho'\rho''(1 + d^2)^2 + \frac{1}{c}(1 + r^2)^2 = 0.$$

---

[1] Nous désignons maintenant par $x, y, z, p, q, x', y', z', p', q'$ les coordonnées des éléments transformés.

Cette équation appartient à un type d'équations considérées par M. Weingarten : il résulte des travaux de ce géomètre que l'intégration de l'équation précédente équivaut à la recherche des surfaces qui admettent l'élément linéaire

$$\frac{\lambda^2}{c^2}\frac{du^2}{(1+u^2)^4}+\frac{2\lambda^2}{c}\frac{u\,du}{(1+u^2)^2}\frac{dv}{(1+2v)^2}+\frac{2\lambda^2 v\,dv^2}{(1+2v)^4},$$

λ désignant une constante quelconque (¹).

Cet élément linéaire convient au paraboloïde

$$2i\lambda z = cx^2 + y^2.$$

On peut toujours choisir λ et c de telle sorte que le paraboloïde précédent soit égal à un paraboloïde quelconque. En particulier, si l'on donne à c la valeur un, on a un paraboloïde de révolution, l'équation (60) est intégrable par la méthode de Monge; cette équation a été intégrée par Lie (²), qui l'a étudiée sous une forme un peu différente; on mettra facilement l'équation (60) sous cette forme en supposant effectuée une transformation homographique telle que la quadrique fondamentale ait pour équation

$$z = xy.$$

(¹) WEINGARTEN, *Sur la déformation des surfaces* (*Acta Mathematica*, t. XX, p. 159; 1895). — *Voir* également DARBOUX, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, t. IV, p. 317.

(²) *Beiträge zur allgemeinen Transformationstheorie* (*Leipziger Berichte*, t. XLVII, p. 494; 1895).