

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

R. ALEZAIS

Sur une classe de fonctions hyperfuchsiennes et sur certaines substitutions linéaires qui s'y rapportent

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 19 (1902), p. 261-323

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1902_3_19_261_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1902, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR UNE CLASSE
DE
FONCTIONS HYPERFUCHSIENNES

ET SUR

CERTAINES SUBSTITUTIONS LINÉAIRES QUI S'Y RAPPORTENT,

PAR M. R. ALEZAIS.



1. M. Picard, dans les premiers Volumes des *Acta mathematica* (t. I, II et V), a fait connaître des fonctions à deux variables analogues aux fonctions fuchsiennes et qu'il a nommées *fonctions hyperfuchsiennes*. Son attention s'est portée surtout sur une classe particulière de ces fonctions qui présentent la plus grande analogie avec la fonction modulaire. Guidé par lui, j'ai ajouté à cette théorie quelques compléments qui ont fait l'objet de ma Thèse (¹); je me propose de les résumer ici.

I.

2. Considérons la courbe algébrique

$$(1) \quad f(t, z) = z^3 - (t - \alpha)(t - \beta)(t - \gamma)(t - \delta) = 0,$$

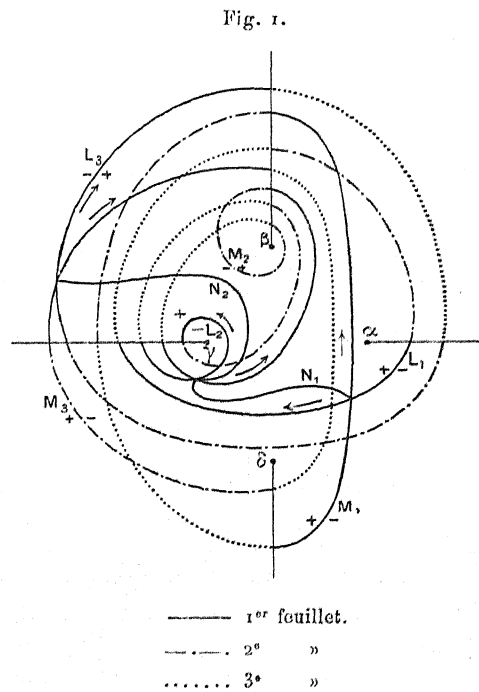
où $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont des paramètres indépendants de z et de t . Elle est d'ordre 4 et n'a pas de point double; elle est donc de genre 3. Elle admet 5 points critiques $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ et l'infini. A cette courbe appartiennent trois intégrales distinctes de première espèce

$$W = \int_{t_0}^t \frac{dt}{z}, \quad \Omega = \int_{t_0}^t \frac{dt}{z^2}, \quad U = \int_{t_0}^t \frac{t dt}{z^2}.$$

(¹) *Sur une classe de fonctions hyperfuchsiennes*. Chez Gauthier-Villars, 1901.

Je les appellerai les *intégrales primitives de première espèce*. Pour trouver un système de périodes distinctes de ces intégrales, il est avantageux d'introduire une surface de Riemann. On sait que les valeurs des intégrales prises dans un sens convenable le long des contours fermés des rétrosections qui rendent la surface simplement connexe constituent un système de périodes distinctes de ces intégrales.

3. Soit donc une surface de Riemann à trois feuillets reliés par quatre lignes de passage allant respectivement des points $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ jusqu'à l'infini et supposons qu'autour de chacun de ces points l'ordre d'échange des feuillets soit 1, 2, 3, 1 quand on tourne autour du point dans le sens direct.



Trois rétrosections sont nécessaires pour rendre cette surface simplement connexe; on peut les choisir comme l'indique la figure 1. Les courbes L sont les courbes de première espèce; les courbes M , celles de seconde espèce; les courbes N rejoignent entre elles les rétrosec-

tions. Pour chaque courbe L, les bords positif et négatif sont choisis arbitrairement. Pour chaque courbe M, le bord positif est celui qui se trouve à la droite d'un mobile allant, le long de cette courbe, du bord négatif au bord positif de la courbe L correspondante. Ces conventions faites, on sait qu'une période de $\left\{ \begin{array}{l} \text{première} \\ \text{seconde} \end{array} \right.$ espèce est la valeur d'une des intégrales prise le long d'une courbe de $\left\{ \begin{array}{l} \text{seconde} \\ \text{première} \end{array} \right.$ espèce parcourue de manière à *traverser* la courbe de $\left\{ \begin{array}{l} \text{première} \\ \text{seconde} \end{array} \right.$ espèce correspondante de son bord négatif à son bord positif.

Les signes étant choisis comme l'indique la figure, je désignerai les périodes des trois intégrales de la manière suivante :

$$(A) \quad \begin{array}{c} \text{Périodes} \\ \hline \begin{array}{cc} \text{de première} & \text{de seconde} \\ \text{espèce.} & \text{espèce.} \end{array} \\ \hline \begin{array}{l} \Omega \\ U \\ W \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} \alpha_1 & \alpha_3 & \alpha_5 & \alpha_2 & \alpha_4 & \alpha_6 \\ b_1 & b_3 & b_5 & b_2 & b_4 & b_6 \\ \Lambda_1 & \Lambda_3 & \Lambda_5 & \Lambda_2 & \Lambda_4 & \Lambda_6 \end{array} \right]. \end{array}$$

4. On voit facilement que chacune des courbes des rétrosections peut se transformer en trois lacets aboutissant à des points critiques et issus du point arbitrairement choisi que j'ai désigné par ι_0 , ou, plus exactement, des trois points superposés sur la surface de Riemann qui correspondent à une même valeur de ι , $\iota = \iota_0$.

Soient z_1, z_2, z_3 les trois déterminations de z dans l'ordre où elles se succèdent quand ι tourne dans le sens direct autour d'un seul des points critiques à distance finie, et, z_i étant la détermination initiale, convenons de représenter, par les symboles contenus dans le Tableau suivant, les valeurs des intégrales prises dans le sens direct le long des lacets :

$$(B) \quad \begin{array}{c} \alpha \quad \beta \quad \gamma \quad \delta \quad \infty \\ \hline \begin{array}{l} W \\ \Omega \\ U \end{array} \left| \begin{array}{ccccc} \alpha_i & \beta_i & \gamma_i & \delta_i & \infty_i \\ \alpha'_i & \beta'_i & \gamma'_i & \delta'_i & \infty'_i \\ \alpha''_i & \beta''_i & \gamma''_i & \delta''_i & \infty''_i \end{array} \right. \end{array}$$

On trouve immédiatement, en tenant compte du sens dans lequel chaque courbe est décrite et des feuilletts sur lesquels elle est placée :

$$3) \quad \begin{cases} \Lambda_1 = \beta_1 + \gamma_2 + \delta_3, & a_1 = \beta'_1 + \gamma'_2 + \delta'_3, & b_1 = \beta''_1 + \gamma''_2 + \delta''_3, \\ \Lambda_2 = -(\alpha_1 + \beta_2 + \gamma_3), & a_2 = -(\alpha'_1 + \beta'_2 + \gamma'_3), & b_2 = -(\alpha''_1 + \beta''_2 + \gamma''_3), \\ \Lambda_3 = \beta_1 + \beta_2 + \gamma_3, & a_3 = \beta'_1 + \beta'_2 + \gamma'_3, & b_3 = \beta''_1 + \beta''_2 + \gamma''_3, \\ \Lambda_4 = \gamma_1 + \beta_2 + \gamma_3, & a_4 = \gamma'_1 + \beta'_2 + \gamma'_3, & b_4 = \gamma''_1 + \beta''_2 + \gamma''_3, \\ \Lambda_5 = -(\gamma_1 + \delta_2 + \beta_3), & a_5 = -(\gamma'_1 + \delta'_2 + \beta'_3), & b_5 = -(\gamma''_1 + \delta''_2 + \beta''_3), \\ \Lambda_6 = -(\gamma_1 + \alpha_2 + \beta_3), & a_6 = -(\gamma'_1 + \alpha'_2 + \beta'_3), & b_6 = -(\gamma''_1 + \alpha''_2 + \beta''_3). \end{cases}$$

5. Toutes ces périodes ne sont pas indépendantes. Posons

$$\lambda = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2},$$

et soit σ une des lettres $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ou ε ; on a

$$(4) \quad \begin{cases} \sigma_2 = \lambda^2 \sigma_1, & \sigma_3 = \lambda \sigma_1, \\ \sigma'_2 = \lambda \sigma'_1, & \sigma'_3 = \lambda^2 \sigma'_1, \\ \sigma''_2 = \lambda \sigma''_1, & \sigma''_3 = \lambda^2 \sigma''_1; \end{cases}$$

il en résulte

$$(5) \quad \begin{cases} \Lambda_4 + \lambda \Lambda_3 = 0, & \Lambda_5 + \lambda \Lambda_1 = 0, & \Lambda_6 - \lambda^2 \Lambda_2 = 0, \\ \alpha_4 + \lambda^2 \alpha_3 = 0, & \alpha_5 + \lambda^2 \alpha_1 = 0, & \alpha_6 - \lambda \alpha_2 = 0, \\ b_4 + \lambda^2 b_3 = 0, & b_5 + \lambda^2 b_1 = 0, & b_6 - \lambda b_2 = 0. \end{cases}$$

A ces relations, propres au cas actuel, il faut ajouter celles que fournit le théorème général suivant. On a

$$\int_C P dQ = \sum_{i=1,2,3} (\omega_i \eta'_i - \eta_i \omega'_i) = 0,$$

P et Q étant deux intégrales quelconques de première espèce; ω_i, ω'_i les périodes de première et de seconde espèce de P; η_i, η'_i celles de Q; enfin C désignant le contour de la surface de Riemann rendue simplement connexe.

En appliquant ce théorème d'abord aux intégrales Ω et W, puis aux intégrales U et W, on a

$$\begin{aligned} a_1 \Lambda_2 - a_2 \Lambda_1 + a_3 \Lambda_4 - a_4 \Lambda_3 + a_5 \Lambda_6 - a_6 \Lambda_5 &= 0, \\ b_1 \Lambda_2 - b_2 \Lambda_1 + b_3 \Lambda_4 - b_4 \Lambda_3 + b_5 \Lambda_6 - b_6 \Lambda_5 &= 0, \end{aligned}$$

et, en tenant compte des relations (5), il vient

$$\begin{aligned} a_1 \Lambda_2 + \lambda^2 a_2 \Lambda_1 - \lambda a_3 \Lambda_3 &= 0, \\ b_1 \Lambda_2 + \lambda^2 b_2 \Lambda_1 - \lambda b_3 \Lambda_3 &= 0. \end{aligned}$$

On en tire

$$\frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{a_1 b_3 - a_3 b_1} = \frac{\lambda^2 \Lambda_3}{\Lambda_1}, \quad \frac{a_2 b_3 - a_3 b_2}{a_1 b_3 - a_3 b_1} = -\frac{\lambda \Lambda_2}{\Lambda_1},$$

D'ailleurs, en vertu des relations (5), le Tableau (A) devient

$$(A') \quad \begin{matrix} \Omega \\ U \\ W \end{matrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & -\lambda^2 a_1 & a_2 & -\lambda^2 a_3 & \lambda a_2 \\ b_1 & b_3 & -\lambda^2 b_1 & b_2 & -\lambda^2 b_3 & \lambda b_2 \\ \Lambda_1 & \Lambda_3 & -\lambda \Lambda_1 & \Lambda_2 & -\lambda \Lambda_3 & \lambda^2 \Lambda_2 \end{bmatrix}.$$

6. Considérons les intégrales

$$(6) \quad \begin{cases} U^{(1)} = h_1 \Omega + k_1 U + l_1 W, \\ U^{(2)} = h_2 \Omega + k_2 U + l_2 W, \\ U^{(3)} = h_3 \Omega + k_3 U + l_3 W. \end{cases}$$

Pour qu'elles soient normales, il suffit de poser

$$(7) \quad \begin{cases} h_1 = \frac{(\lambda - 1)(\lambda^2 b_3 \Lambda_1 - b_1 \Lambda_3)}{3(a_1 b_3 - a_3 b_1) \Lambda_1}, & k_1 = \frac{(\lambda - 1)(a_1 \Lambda_3 - \lambda^2 a_3 \Lambda_1)}{3(a_1 b_3 - a_3 b_1) \Lambda_1}, & l_1 = \frac{1 - \lambda}{3 \Lambda_1}, \\ h_2 = \frac{-b_1}{a_1 b_3 - a_3 b_1}, & k_2 = \frac{a_1}{a_1 b_3 - a_3 b_1}, & l_2 = 0, \\ h_3 = \frac{(\lambda - \lambda^2)(b_1 \Lambda_3 - b_3 \Lambda_1)}{3(a_1 b_3 - a_3 b_1) \Lambda_1}, & k_3 = \frac{(\lambda - \lambda^2)(a_3 \Lambda_1 - a_1 \Lambda_3)}{3(a_1 b_3 - a_3 b_1) \Lambda_1}, & l_3 = \frac{\lambda - \lambda^2}{3 \Lambda_1}. \end{cases}$$

On trouve, en effet, que les coefficients h, k, l étant ainsi déterminés, les intégrales $U^{(1)}, U^{(2)}, U^{(3)}$ admettent pour périodes

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1 - \lambda^2}{3} \frac{\Lambda_3^2}{\Lambda_1^2} + \frac{2(1 - \lambda)}{3} \frac{\Lambda_2}{\Lambda_1} & \lambda^2 \frac{\Lambda_3}{\Lambda_1} & \frac{\lambda - 1}{3} \frac{\Lambda_3^2}{\Lambda_1^2} + \frac{\lambda - 1}{3} \frac{\Lambda_2}{\Lambda_1} \\ 0 & 1 & 0 & \lambda^2 \frac{\Lambda_3}{\Lambda_1} & -\lambda^2 & \frac{\Lambda_3}{\Lambda_1} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{\lambda - 1}{3} \frac{\Lambda_3^2}{\Lambda_1^2} + \frac{\lambda - 1}{3} \frac{\Lambda_2}{\Lambda_1} & \frac{\Lambda_3}{\Lambda_1} & \frac{\lambda^2 - \lambda}{3} \frac{\Lambda_3^2}{\Lambda_1^2} + \frac{2(1 - \lambda)}{3} \frac{\Lambda_2}{\Lambda_1} \end{bmatrix}.$$

On voit que les périodes de seconde espèce ne dépendent que de

deux rapports; en posant

$$(8) \quad \frac{A_3}{A_1} = u, \quad \frac{A_2}{A_1} = -\lambda v,$$

on peut les écrire

$$(C) \quad \begin{bmatrix} \frac{1-\lambda^2}{3}u^2 + \frac{2(\lambda^2-\lambda)}{3}v & \lambda^2 u & \frac{\lambda-1}{3}u^2 + \frac{\lambda-\lambda^2}{3}v \\ \lambda^2 u & -\lambda^2 & u \\ \frac{\lambda-1}{3}u^2 + \frac{\lambda-\lambda^2}{3}v & u & \frac{\lambda^2-\lambda}{3}(u^2+2v) \end{bmatrix}.$$

7. Écrivons

$$u = u' + iu'', \quad v = v' + iv'',$$

en supposant u' , u'' , v' , v'' réels et séparons, dans les éléments du Tableau précédent, les parties réelles des parties imaginaires. On sait qu'il faut et suffit, pour la convergence des séries θ construites avec les quantités (C) pour périodes, que la forme quadratique ayant pour coefficients leurs parties imaginaires soit définie et positive. En exprimant qu'il en est ainsi, on trouve la condition unique

$$(9) \quad u'^2 + u''^2 + 2v' < 0.$$

Cette condition peut s'écrire sous une autre forme; considérons u et v comme des quantités complexes aux unités 1 et λ , et soient u_1 et v_1 les quantités conjuguées obtenues en changeant λ en λ^2 ; on a

$$u'^2 + u''^2 + 2v' = uu_1 + v + v_1,$$

et par suite, en introduisant une troisième variable complexe d'homogénéité ϖ et sa conjuguée ϖ_1 , on voit que la condition de convergence peut s'écrire

$$(10) \quad F = uu_1 + v\varpi_1 + v_1\varpi < 0.$$

8. Les quantités A_1 , A_2 , A_3 et, par suite, les deux rapports

$$u = \frac{A_3}{A_1}, \quad v = -\lambda^2 \frac{A_2}{A_1},$$

ne dépendent que des quantités α_i , β_i , γ_i , δ_i , c'est-à-dire des valeurs

des intégrales primitives prises le long des lacets; ces valeurs ne dépendent elles-mêmes que des points critiques $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Mais, de plus, il est facile de voir que u et v ne sont fonctions que de deux variables seulement. En effet, en posant

$$(11) \quad z = (\beta - \alpha)^{\frac{1}{2}} z', \quad t = \alpha + (\beta - \alpha) t', \quad \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = x, \quad \frac{\delta - \alpha}{\beta - \alpha} = y,$$

l'équation (1) devient, après suppression des accents,

$$(12) \quad z^3 - t(t-1)(t-x)(t-y) = 0.$$

Sur cette nouvelle courbe, on peut répéter tous les calculs qui viennent d'être faits sur la courbe (1); il suffit de remplacer $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ respectivement par $0, 1, x, y$, et ainsi u et v apparaissent comme fonctions des deux variables x et y . Inversement, x et y sont fonctions de u et v . Je vais chercher d'abord à les exprimer explicitement en fonctions de ces variables.

II.

9. M. Picard a montré que, en appliquant la formule d'inversion des intégrales abéliennes de Riemann, on peut exprimer x et y au moyen de fonctions θ ayant pour périodes les éléments du Tableau (C) et dont les arguments ne dépendent que de u et de v . Cette formule (voir BRLOT, *Théorie des fonctions abéliennes*, p. 157) peut s'écrire

$$\prod_{k=1}^p \left[1 + \mu \frac{\psi(t_k, z_k)}{\varphi(t_k, z_k)} \right] = \frac{1}{E} \prod_{h=1}^{mn} \frac{\theta[u_i - U^{(i)}(\xi_h, \eta_h) - C_i]}{\theta[u_i - U^{(i)}(\xi_h, \eta_h) - C_i]}.$$

On suppose les variables t et z reliées par l'équation d'une courbe

$$f(t, z) = 0$$

de degré n et de genre p ; $\varphi(t, z) = 0, \psi(t, z) = 0$ sont deux courbes quelconques de degré m ; (ξ_h, η_h) , pour $h = 1, 2, \dots, mn$, sont les points d'intersection de $f = 0$ et de $\varphi = 0$; (ξ'_h, η'_h) , pour les mêmes valeurs de h , sont ceux de $f = 0$ et de $\varphi + \mu\psi = 0$, où μ est un coefficient numérique.

La fonction θ qui figure dans le second membre est la fonction à p arguments dont le $i^{\text{ième}}$ seul est écrit; les quantités

$$U^{(i)}(t, z) \quad (i = 1, 2, \dots, p)$$

sont les intégrales normales de première espèce prises toutes à partir d'une même limite inférieure; $U^{(i)}(\xi_h, \eta_h)$ est l'une des valeurs (choisie arbitrairement) que $U^{(i)}(t, z)$ prend au point (ξ_h, η_h) ; $U^{(i)}(\xi'_h, \eta'_h)$ est celle de ses valeurs au point (ξ'_h, η'_h) qui se déduit de la valeur choisie pour $U^{(i)}(\xi_h, \eta_h)$ quand on fait varier μ d'une manière continue à partir de zéro.

Les quantités $U^{(i)}(\xi'_h, \eta'_h)$ étant ainsi déterminées, on sait que l'on a, d'après le théorème d'Abel, pour $i = 1, 2, \dots, p$,

$$\sum_{h=1}^{mn} [U^{(i)}(\xi'_h, \eta'_h) - U^{(i)}(\xi_h, \eta_h)] = 0.$$

On désigne par $(t_1, z_1), (t_2, z_2), \dots, (t_p, z_p)$ p points arbitrairement choisis et l'on suppose

$$u_i = U^{(i)}(t_1, z_1) + U^{(i)}(t_2, z_2) + \dots + U^{(i)}(t_p, z_p) \quad (i = 1, 2, \dots, p);$$

ces relations ne définissent les quantités u_1, \dots, u_p qu'à une période près que l'on peut choisir arbitrairement sans modifier le second membre de la formule; C_1, \dots, C_p sont des quantités que l'on ne connaît pas exactement dans le cas général; on sait seulement que la somme des valeurs que prennent $U^{(1)}, U^{(2)}, \dots, U^{(p)}$ aux points de rencontre de $f = 0$ et d'une adjointe d'ordre $n - 3$ ne diffère de $2C_1, 2C_2, \dots, 2C_p$ que par une période; enfin E est une quantité indépendante de t_1, \dots, t_p que l'on détermine en donnant à ces variables un système particulier de valeurs.

10. Supposons en particulier que la courbe $f(t, z) = 0$ soit la courbe (12); nous aurons $n = 4, p = 3$; pour $\varphi = 0$ et $\varphi + \mu\psi = 0$, nous pouvons prendre les droites $t = 0, t - 1 = 0$; cela revient à prendre pour $\psi = 0$ la droite de l'infini. Les points (ξ_h, η_h) sont alors au nombre de quatre, ainsi que les points (ξ'_h, η'_h) , mais ces deux groupes de points ont en commun le point de l'infini, et le facteur

correspondant disparaît haut et bas dans le produit du second membre; les trois autres points (ξ_h, η_h) sont confondus avec $(0, 0)$ et les trois autres points (ξ'_h, η'_h) avec $(1, 0)$; nous avons donc

$$(13) \quad \left(1 - \frac{1}{t_1}\right) \left(1 - \frac{1}{t_2}\right) \left(1 - \frac{1}{t_3}\right) = \frac{e^{2\pi i K} \theta^3 [u_i - U^{(i)}(1, 0) - C_i]}{E \theta^3 [u_i - U^{(i)}(0, 0) - C_i]}$$

avec

$$(14) \quad u_i = U^{(i)}(t_1, z_1) + U^{(i)}(t_2, z_2) + U^{(i)}(t_3, z_3).$$

La courbe (12) n'ayant pas de point double, toute droite est une adjointe d'ordre $n - 3$; prenons la droite de l'infini, elle a avec la courbe un contact du troisième ordre. Nous aurons

$$(15) \quad C_i = 2U^{(i)}(\infty, \infty) - \frac{P_i}{2} \quad (i = 1, 2, 3),$$

en désignant par p_1, p_2, p_3 une période convenablement choisie.

Enfin, le facteur $e^{2\pi i K}$ se calcule de la manière suivante : D'après la théorie générale que je viens de rappeler, nous avons pour chaque valeur de i trois quantités $U^{(i)}(1, 0)$ qui sont les valeurs de $U^{(i)}(t, z)$ aux points d'intersection de $f(t, z) = 0$ et de $t + \mu = 0$ quand μ , variant d'une manière continue à partir de zéro, a pris la valeur -1 .

Ces valeurs de $U^{(i)}(1, 0)$ diffèrent en général les unes des autres par des périodes; le facteur $e^{2\pi i K}$ est celui qui s'introduit quand on débarasse les arguments des fonctions θ de ces périodes. $U^{(i)}(1, 0)$ désignant une quelconque des valeurs de l'intégrale $U^{(i)}$ au point $(1, 0)$, supposons que les trois valeurs déduites, comme nous l'avons dit, par continuité soient

$$U^{(i)}(1, 0) + p'_i, \quad U^{(i)}(1, 0) + p''_i, \quad U^{(i)}(1, 0) + p'''_i \quad (i = 1, 2, 3),$$

où

$$p'_1, p'_2, p'_3, \quad p''_1, p''_2, p''_3, \quad p'''_1, p'''_2, p'''_3$$

sont trois périodes. En se reportant à la formule qui permet de débarasser les arguments d'une fonction θ d'une période, on voit facilement que le facteur $e^{2\pi i K}$ sera le même que si une seule des trois fonctions θ du numérateur contenait la période

$$P_1 = p'_1 + p''_1 + p'''_1, \quad P_2 = p'_2 + p''_2 + p'''_2, \quad P_3 = p'_3 + p''_3 + p'''_3.$$

Cette dernière période se déduit immédiatement du théorème d'Abel qui donne ($i = 1, 2, 3$)

$$3U^{(i)}(1, 0) + P_i - 3U^{(i)}(0, 0) = 0$$

ou, si l'on veut,

$$(16) \quad 3[u_i - U^{(i)}(1, 0) - C_i] - P_i - 3[u_i - U^{(i)}(0, 0) - C_i] = 0.$$

11. Faisons, dans la formule (13), $t_1 = t_2 = t_3 = \infty$; le premier membre se réduira à 1 et l'on en déduira la valeur de E; puis, en faisant successivement $t_1 = x$, $t_2 = t_3 = \infty$ et $t_1 = y$, $t_2 = t_3 = \infty$, nous obtiendrons les expressions de $1 - \frac{1}{x}$ et de $1 - \frac{1}{y}$. Dans ces expressions et dans celle de E, les arguments de la fonction θ , débarrassés de la période P_1, P_2, P_3 et de la demi-période $\frac{P_1}{2}, \frac{P_2}{2}, \frac{P_3}{2}$, seront des sommes de valeurs des intégrales normales $U^{(i)}$ prises d'un point critique à un autre point critique; je désignerai ces sommes de valeurs par $N_k[U^{(i)}]$ pour les numérateurs et par $D_k[U^{(i)}]$ pour les dénominateurs; d'autre part, grâce aux calculs faits plus haut, il sera facile de montrer que ces dernières quantités ne dépendent que de u et de v et d'obtenir leurs valeurs. Il en résulte que les arguments complets ne dépendent que de u et de v ; je désignerai par $x_i^{(k)}(u, v)$ ces arguments débarrassés seulement de la période P_1, P_2, P_3 . En définitive, j'écrirai

$$(17) \quad \left\{ \begin{aligned} E &= e^{2\pi i K_1} \frac{\theta^3 \left\{ N_1[U^{(1)}] + \frac{P_1}{2} \right\}}{\theta^3 \left\{ D_1[U^{(1)}] + \frac{P_1}{2} \right\}} = e^{2\pi i K_1} \frac{\theta^3 [x_1^{(2)}(u, v)]}{\theta^3 [x_1^{(1)}(u, v)]}, \\ 1 - \frac{1}{x} &= \frac{e^{2\pi i K_2}}{E} \frac{\theta^3 \left\{ N_2[U^{(1)}] + \frac{P_2}{2} \right\}}{\theta^3 \left\{ D_2[U^{(1)}] + \frac{P_2}{2} \right\}} = \frac{e^{2\pi i K_2}}{E} \frac{\theta^3 [x_1^{(3)}(u, v)]}{\theta^3 [x_1^{(1)}(u, v)]}, \\ 1 - \frac{1}{y} &= \frac{e^{2\pi i K_3}}{E} \frac{\theta^3 \left\{ N_3[U^{(1)}] + \frac{P_3}{2} \right\}}{\theta^3 \left\{ D_3[U^{(1)}] + \frac{P_3}{2} \right\}} = \frac{e^{2\pi i K_3}}{E} \frac{\theta^3 [x_1^{(6)}(u, v)]}{\theta^3 [x_1^{(1)}(u, v)]}. \end{aligned} \right.$$

12. Remplaçons, dans le Tableau (B), $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ par $0, 1, x, y$ et, d'autre part, désignons par $W_{i_0}^\tau, \Omega_{i_0}^\tau, U_{i_0}^\tau$ les valeurs des intégrales

prises du point initial au point critique qui correspond à $t = \tau$; nous aurons, en tenant compte des relations (4),

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_i = \lambda^{i-1}(1-\lambda^2)W_{i_0}^0, \\ \alpha'_i = \lambda^{i-1}(1-\lambda)\Omega_{i_0}^0, \\ \alpha''_i = \lambda^{i-1}(1-\lambda)U_{i_0}^0, \\ \beta_i = \lambda^{i-1}(1-\lambda^2)W_{i_0}^1, \\ \beta'_i = \lambda^{i-1}(1-\lambda)\Omega_{i_0}^1, \\ \beta''_i = \lambda^{i-1}(1-\lambda)U_{i_0}^1, \\ \gamma_i = \lambda^{i-1}(1-\lambda^2)W_{i_0}^x, \\ \gamma'_i = \lambda^{i-1}(1-\lambda)\Omega_{i_0}^x, \\ \gamma''_i = \lambda^{i-1}(1-\lambda)U_{i_0}^x, \\ \delta_i = \lambda^{i-1}(1-\lambda^2)W_{i_0}^y, \\ \delta'_i = \lambda^{i-1}(1-\lambda)\Omega_{i_0}^y, \\ \delta''_i = \lambda^{i-1}(1-\lambda)U_{i_0}^y, \\ \varepsilon_i = \lambda^{i-1}(1-\lambda)W_{i_0}^\infty, \\ \varepsilon'_i = \lambda^{i-1}(1-\lambda^2)\Omega_{i_0}^\infty, \\ \varepsilon''_i = \lambda^{i-1}(1-\lambda^2)U_{i_0}^\infty. \end{array} \right.$$

On en déduit, en vertu des relations (3),

$$\left\{ \begin{array}{lll} \Omega_1^z = \frac{1-\lambda^2}{3}(\lambda a_1 - a_2 - a_3), & U_1^z = \frac{1-\lambda^2}{3}(\lambda b_1 - b_2 - b_3), & W_1^z = \frac{1-\lambda}{3}(\lambda^2 A_1 - A_2 - A_3), \\ \Omega_0^z = \frac{\lambda-1}{3}a_1, & U_0^z = \frac{\lambda-1}{3}b_1, & W_0^z = \frac{\lambda^2-1}{3}A_1, \\ \Omega_1^c = \frac{\lambda-1}{3}a_3, & U_1^c = \frac{\lambda-1}{3}b_3, & W_1^c = \frac{\lambda^2-1}{3}A_3, \\ \Omega_0^c = \frac{1-\lambda^2}{3}(a_2 - \lambda^2 a_3), & U_0^c = \frac{1-\lambda^2}{3}(b_2 - \lambda^2 b_3), & W_0^c = \frac{1-\lambda}{3}(A_2 - \lambda A_3), \\ \Omega_1^y = \frac{1-\lambda^2}{3}(\lambda a_1 - a_3), & U_1^y = \frac{1-\lambda^2}{3}(\lambda b_1 - b_3), & W_1^y = \frac{1-\lambda}{3}(\lambda^2 A_1 - A_3), \\ \Omega_0^y = \frac{1-\lambda^2}{3}(\lambda a_1 + a_2), & U_0^y = \frac{1-\lambda^2}{3}(\lambda b_1 + b_2), & W_0^y = \frac{1-\lambda}{3}(\lambda^2 A_1 + A_2). \end{array} \right.$$

D'autre part, les relations (6) donnent

$$(20) \quad \left\{ \begin{array}{l} N_k[U^{(i)}] = h_i N_k[\Omega] + k_i N_k[U] + l_i N_k[W], \\ D_k[U^{(i)}] = h_i D_k[\Omega] + k_i D_k[U] + l_i D_k[W]. \end{array} \right.$$

Enfin, en tenant compte de l'équation (15) et des valeurs qu'il faut donner à t_1 , t_2 , t_3 pour obtenir E , $E\left(1 - \frac{1}{x}\right)$ et $E\left(1 - \frac{1}{y}\right)$, on trouve

$$(21) \quad \begin{cases} N_1[U^{(i)}] = [U^{(i)}]_1^c, & D_1[U^{(i)}] = [U^{(i)}]_6^c, \\ N_2[U^{(i)}] = [U^{(i)}]_1^c, & D_2[U^{(i)}] = [U^{(i)}]_6^c, \\ N_3[U^{(i)}] = [U^{(i)}]_1^c, & D_3[U^{(i)}] = [U^{(i)}]_6^c. \end{cases}$$

En combinant les relations (19), (20), (21) et (7), on a, en définitive,

$$(22) \quad \begin{cases} N_1[U^{(1)}] = \frac{1}{3}[\lambda^2 u^2 + (\lambda - \lambda^2)v - \lambda^2 u - 2], & D_1[U^{(1)}] = -\frac{2}{3}, \\ N_1[U^{(2)}] = \frac{1}{3}(\lambda - \lambda^2)(u + \lambda), & D_1[U^{(2)}] = 0, \\ N_1[U^{(3)}] = \frac{1}{3}(u^2 - u + 1), & D_1[U^{(3)}] = \frac{1}{3}, \end{cases}$$

$$(23) \quad \begin{cases} N_2[U^{(1)}] = \frac{\lambda^2 u}{3}, & D_2[U^{(1)}] = \frac{1}{3}[-\lambda^2 u^2 + (\lambda^2 - \lambda)v + 2\lambda^2 u], \\ N_2[U^{(2)}] = \frac{\lambda - 1}{3}, & D_2[U^{(2)}] = \frac{1}{3}(\lambda^2 - \lambda)(u - 1), \\ N_2[U^{(3)}] = \frac{u}{3}, & D_2[U^{(3)}] = \frac{1}{3}(-u^2 + 2u), \end{cases}$$

$$(24) \quad \begin{cases} N_3[U^{(1)}] = -\frac{\lambda^2 u}{3} - \frac{2}{3}, & D_3[U^{(1)}] = \frac{1}{3}[-\lambda^2 u^2 + (\lambda^2 - \lambda)v - 2], \\ N_3[U^{(2)}] = \frac{\lambda^2 - 1}{3}, & D_3[U^{(2)}] = \frac{1}{3}(\lambda^2 - \lambda)u, \\ N_3[U^{(3)}] = -\frac{u}{3} + \frac{1}{3}, & D_3[U^{(3)}] = \frac{1}{3}(-u^2 + 1). \end{cases}$$

13. Ces expressions sont des tiers de période; en effet, si l'on désigne les périodes normales de $U^{(1)}$, $U^{(2)}$, $U^{(3)}$ de la manière suivante :

$$\begin{matrix} U^{(1)} \\ U^{(2)} \\ U^{(3)} \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ 0 & 1 & 0 & \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ 0 & 0 & 1 & \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{bmatrix},$$

on vérifie facilement que l'on a

$$N_1[U^{(1)}] = -\frac{1}{3} [2\tau_{11} + \tau_{12} + \tau_{13} + 2], \quad D_1[U^{(1)}] = -\frac{2}{3},$$

$$N_1[U^{(2)}] = -\frac{1}{3} [2\tau_{21} + \tau_{22} + \tau_{23} + 1], \quad D_1[U^{(2)}] = 0,$$

$$N_1[U^{(3)}] = -\frac{1}{3} [2\tau_{31} + \tau_{32} + \tau_{33} - 1], \quad D_1[U^{(3)}] = \frac{1}{3},$$

$$N_2[U^{(1)}] = \frac{1}{3} \tau_{12}, \quad D_2[U^{(1)}] = \frac{1}{3} [2\tau_{11} + 2\tau_{12} + \tau_{13}],$$

$$N_2[U^{(2)}] = \frac{1}{3} [\tau_{22} - 2], \quad D_2[U^{(2)}] = \frac{1}{3} [2\tau_{21} + 2\tau_{22} + \tau_{23} - 1],$$

$$N_2[U^{(3)}] = \frac{1}{3} \tau_{32}, \quad D_2[U^{(3)}] = \frac{1}{3} [2\tau_{31} + 2\tau_{32} + \tau_{33}],$$

$$N_3[U^{(1)}] = -\frac{1}{3} [\tau_{12} + 2], \quad D_3[U^{(1)}] = \frac{1}{3} [2\tau_{11} + \tau_{13} - 2],$$

$$N_3[U^{(2)}] = -\frac{1}{3} [\tau_{22} + 1], \quad D_3[U^{(2)}] = \frac{1}{3} [2\tau_{21} + \tau_{23}],$$

$$N_3[U^{(3)}] = -\frac{1}{3} [\tau_{32} - 1], \quad D_3[U^{(3)}] = \frac{1}{3} [2\tau_{31} + \tau_{33} + 1].$$

14. Les relations (16) qui fournissent la période P_1, P_2, P_3 peuvent s'écrire (pour $i = 1, 2, 3$)

$$2N_k[U^{(i)}] - P_i - 3D_k[U^{(i)}] = 0,$$

à des entiers près, que l'on peut négliger; on en déduit, quel que soit k ,

$$P_1 = \lambda^2 u^2 + (\lambda - \lambda^2) u - \lambda^2 u = -2\tau_{11} - \tau_{12} - \tau_{13},$$

$$P_2 = (\lambda - \lambda^2)(u + \lambda) = -2\tau_{21} - \tau_{22} - \tau_{23},$$

$$P_3 = u^2 - u = -2\tau_{31} - \tau_{32} - \tau_{33}.$$

Il suffit de calculer les facteurs

$$e^{2\pi i E} = e^{2\pi i(K_2 - K_1)}, \quad e^{2\pi i E''} = e^{2\pi i(K_3 - K_1)},$$

qui figurent dans les expressions définitives de $1 - \frac{1}{x}$ et de $1 - \frac{1}{y}$ quand on y a remplacé E par sa valeur.

On les obtient, ainsi que je l'ai dit, en débarrassant de la période P_1, P_2, P_3 les expressions

$$\frac{\theta\left\{N_2[U^{(i)}] - P_i + \frac{P_i}{2}\right\}}{\theta\left\{N_1[U^{(i)}] - P_i + \frac{P_i}{2}\right\}}, \quad \frac{\theta\left\{N_3[U^{(i)}] - P_i + \frac{P_i}{2}\right\}}{\theta\left\{N_1[U^{(i)}] - P_i + \frac{P_i}{2}\right\}}.$$

On trouve ainsi

$$(25) \quad \begin{cases} E' = \frac{\lambda^2 - \lambda}{3} (u^2 - 3u - 2v + 1), \\ E'' = \frac{\lambda^2 - \lambda}{3} (u^2 - u - 2v). \end{cases}$$

15. Pour achever de déterminer les expressions de $1 - \frac{1}{x}$ et de $1 - \frac{1}{y}$, il ne reste plus qu'à déterminer la demi-période $\frac{P_1}{2}, \frac{P_2}{2}, \frac{P_3}{2}$. Remarquons d'abord que, cette demi-période figurant dans tous les arguments, on n'introduira aucun facteur exponentiel en les en débarrassant, mais la fonction θ , qui est supposée à caractéristique nulle, sera transformée en une fonction θ dont la caractéristique correspondra à celle de la demi-période. Des considérations développées par Briot dans sa *Théorie des fonctions abéliennes*, p. 149 et 150 [et qui s'appliquent ici, car la droite de l'infini dont je me suis servi pour déterminer C_1, C_2, C_3 peut être considérée comme touchant en deux points la courbe $f(t, z) = 0$], permettent seulement de prévoir que cette caractéristique sera impaire. Je suis arrivé à la déterminer de la manière suivante : Nous allons voir que x et y ne changent pas quand on effectue sur u et v certaines substitutions; chacune de ces substitutions correspond à une transformation linéaire des fonctions θ ; on sait ce que deviennent les fonctions θ quand on effectue sur elles une pareille transformation; j'ai écrit que $1 - \frac{1}{x}$ et $1 - \frac{1}{y}$ restaient invariants. J'ai trouvé ainsi que la caractéristique en question est

Je désigne par \mathfrak{S}_1 la fonction θ ayant cette caractéristique. Il en résulte

$$(26) \quad \begin{cases} 1 - \frac{1}{x} = e^{2\pi i E'} \frac{\mathfrak{S}_1^3 \{D_1[U^{(i)}]\} \mathfrak{S}_1^3 \{N_2[U^{(i)}]\}}{\mathfrak{S}_1^3 \{N_1[U^{(i)}]\} \mathfrak{S}_1^3 \{D_2[U^{(i)}]\}}, \\ 1 - \frac{1}{y} = e^{2\pi i E''} \frac{\mathfrak{S}_1^3 \{D_1[U^{(i)}]\} \mathfrak{S}_1^3 \{N_3[U^{(i)}]\}}{\mathfrak{S}_1^3 \{N_1[U^{(i)}]\} \mathfrak{S}_1^3 \{D_3[U^{(i)}]\}}. \end{cases}$$

III.

16. Reprenons la courbe fondamentale sous la forme (1) en laissant indéterminés les quatre points critiques à distance finie. Si l'un d'eux décrit une courbe fermée autour d'un autre de ces points, les valeurs des périodes sont modifiées, quoique les points critiques soient, après le déplacement, les mêmes qu'auparavant. Je vais m'occuper maintenant de ces transformations des périodes (et par suite de u et de v) qui laissent invariants $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ (et par suite x et y).

Pour plus de netteté, je considérerai $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ comme des points fixes dans le plan et je désignerai les points critiques de la courbe (1) par A, B, C, D; ces points critiques seront susceptibles de se mouvoir dans le plan, mais ils seront assujettis à coïncider initialement avec $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ et à ne décrire que des courbes fermées.

Quand un point critique se déplace, il entraîne avec lui la ligne de passage correspondante; il importe de déterminer la manière dont on fait mouvoir cette ligne. L'hypothèse que je fais revient à supposer qu'elle se meut parallèlement à elle-même. Si, pour mieux se figurer les résultats, on veut la rendre parallèle à toute autre ligne de passage rencontrée par le point critique en mouvement, il faudra imaginer qu'après avoir tourné dans un sens pendant la première partie du parcours de ce point, elle tourne dans l'autre sens pendant le reste du parcours. Si l'on supposait que la ligne décrive un tour complet dans un sens ou dans l'autre, les courbes passeraient d'un feuillet à un autre et, en conséquence, les valeurs de l'intégrale seraient multipliées par une puissance de λ . Nous verrons plus loin l'importance de cette remarque.

17. Il est facile de prévoir quelle sera la forme des expressions qui vont se substituer à u et v quand un point critique aura décrit un contour fermé autour d'un autre de ces points. En effet, si nous supposons que le point qui se déplace entraîne avec lui les rétrosections supposées extensibles et déformables, de manière à ne pas les traverser et de manière qu'elles ne se coupent pas les unes les autres, ces rétrosections, après comme avant, rendront la surface de Riemann simplement connexe; comme d'ailleurs les points critiques n'auront pas changé, nous serons en présence d'une transformation linéaire des périodes. Par suite, les quantités A'_1, A'_2, \dots, A'_6 , qui se substitueront à A_1, A_2, \dots, A_6 , seront des fonctions linéaires à coefficients entiers et réels de ces dernières quantités. Si maintenant nous éliminons A_4, A_5, A_6 au moyen des relations (5), A'_1, A'_2, A'_3 deviendront des fonctions linéaires de A_1, A_2, A_3 dans lesquelles les coefficients seront de la forme $a + b\lambda$, a et b étant des entiers. Enfin, en prenant les rapports deux à deux de A'_1, A'_2, A'_3 , on aura

$$u' = \frac{M_3 + P_2 v + R_3 u}{M_1 + P_1 v + R_1 u}, \quad v' = \frac{M_2 + P_2 v + R_2 u}{M_1 + P_1 v + R_1 u},$$

où les coefficients M, P, R sont des entiers complexes aux unités principales τ et λ .

Il sera avantageux de représenter la substitution par ses coefficients groupés en Tableau; j'écrirai

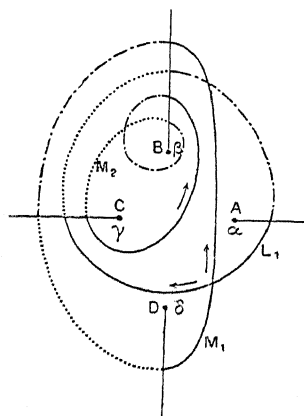
$$S = \begin{pmatrix} M_1 & P_1 & R_1 \\ M_2 & P_2 & R_2 \\ M_3 & P_3 & R_3 \end{pmatrix}.$$

S_i et S_j étant deux substitutions ainsi représentées, j'ai adopté, pour effectuer le produit $S_i S_j$, la règle suivante: L'élément de la $k^{\text{ième}}$ ligne et de la $l^{\text{ième}}$ colonne de $S_i S_j$ s'obtient en combinant les éléments de la $k^{\text{ième}}$ ligne de S_i avec ceux de la $l^{\text{ième}}$ colonne de S_j .

18. Il suffit, après chaque déplacement des points A, B, C, D , de calculer les nouvelles valeurs des trois périodes A_1, A_2, A_3 , dont dépendent immédiatement u et v ; il suffit donc d'étudier les défor-

mations des trois courbes M_1 , L_1 , M_2 de la figure 1. Les formes initiales de ces courbes sont représentées à part sur la figure 2.

Fig. 2.



Le calcul des périodes relatives à l'état final se fait immédiatement, comme pour l'état initial, en fonction des α_i , β_i , γ_i , δ_i en considérant les lignes de passage traversées par la courbe; il n'y a plus ensuite qu'à identifier la valeur trouvée avec une combinaison linéaire des valeurs primitives des trois périodes, c'est-à-dire l'expression suivante :

$$m\Lambda_1 + n\Lambda_2 + p\Lambda_3 = m(\beta_1 + \gamma_2 + \delta_3) - n(\alpha_1 + \beta_2 + \gamma_3) + p(\beta_1 + \beta_2 + \gamma_3).$$

Cette expression, en vertu des relations (4), peut s'écrire

$$-n\alpha_1 + (m - n\lambda^2 - p\lambda)\beta_1 + (m\lambda^2 - n\lambda + p\lambda)\gamma_1 + m\lambda\delta_1.$$

L'identification fournit quatre équations. Dans chaque cas elles se réduisent à trois, qui donnent sans ambiguïté m , n , p .

Je ne développerai pas le calcul des substitutions fondamentales; ce calcul se trouve dans ma Thèse et avait déjà été effectué par M. Picard. Je me contenterai de faire ici quelques remarques.

19. M. Picard, dont le but était de trouver le groupe des fonctions x et y , a pris pour point de départ la courbe (12); il a montré que les substitutions fondamentales sont au nombre de cinq, soit S_1 ,

S_2, \dots, S_5 . Elles s'obtiennent en faisant tourner x autour de 1 , x autour de γ (ou, ce qui revient au même, γ autour de x), γ autour de 1 , γ autour de 0 , x autour de 0 . Prenons maintenant pour point de départ la courbe (1); en raisonnant comme l'a fait M. Picard, il est facile de voir que, pour obtenir toutes les substitutions fondamentales, il suffit de faire tourner séparément chaque point critique autour de chacun des autres et que, A et B étant deux quelconques des points critiques et α et β étant les points fixes avec lesquels ils coïncident initialement, la rotation de A autour de β donne la même substitution que la rotation de B autour de α . Mais il semble qu'aux cinq substitutions de M. Picard, à savoir aux substitutions S_1, \dots, S_5 provenant des rotations de C autour de β , de C autour de δ , de D autour de β , de D autour de α , de C autour de α , il faut ajouter la substitution S_6 obtenue en faisant tourner A autour de β . Au point de vue géométrique, il n'existe aucune différence entre ces six substitutions; pour aucune d'elles on ne peut imaginer une combinaison des circuits des autres qui soit géométriquement équivalente à son circuit. Toutefois, il n'en résulte pas que S_6 soit une substitution fondamentale, car il peut néanmoins se faire qu'il existe une combinaison des autres substitutions qui donne mêmes périodes que S_6 . C'est ce qui doit avoir lieu si S_6 appartient au groupe de x et γ , puisque ce groupe n'admet pour substitutions fondamentales que S_1, \dots, S_5 . L'analogie avec le groupe modulaire porte à croire qu'il en est ainsi. Soient A, B, x les trois points critiques de l'intégrale elliptique

$$\int \frac{dz}{\sqrt{t(t-1)(t-x)}},$$

A et B coïncidant initialement avec 0 et 1 ; le groupe de x considéré comme fonction du rapport des périodes n'admet que deux substitutions fondamentales; elles s'obtiennent en faisant tourner x autour de 0 et autour de 1 ; soient S_1 et S_2 ces deux substitutions. Quant à la substitution S_3 , obtenue en faisant tourner A autour de 1 ou B autour de 0 , son circuit n'est pas géométriquement équivalent à une combinaison des circuits des deux premières, et cependant une combinaison de S_1 et de S_2 donne les mêmes périodes que S_3 ; on a

$$S_1 S_2 S_3 = -1, \quad S_3 = -S_2^{-1} S_1^{-1}.$$

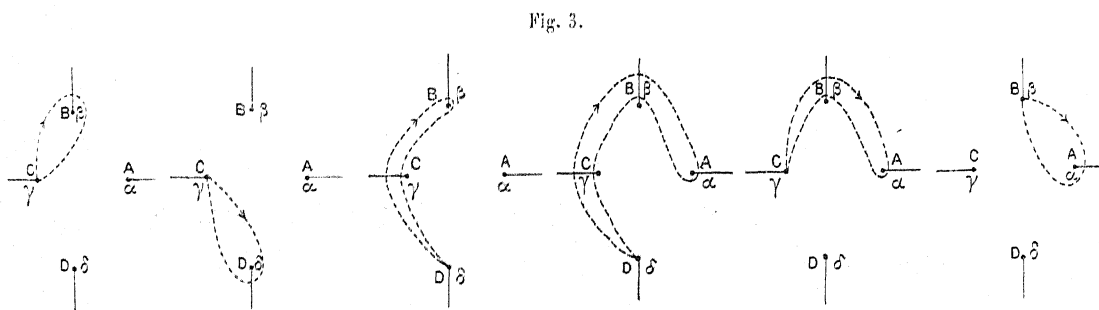
J'ai pu établir que S_6 appartient en réalité au groupe de x et y . Cette substitution, ainsi que les autres, correspond à une transformation linéaire des fonctions θ . En effectuant cette transformation dans les expressions (26) de $1 - \frac{1}{x}$ et de $1 - \frac{1}{y}$, j'ai pu constater leur invariance. Toutefois, il m'a été impossible de trouver l'expression de S_6 en fonction de S_1, S_2, \dots, S_5 et, par suite, tout en réservant la question théorique ainsi que je viens de le faire, j'ai trouvé commode de traiter pratiquement S_6 comme une substitution fondamentale.

20. Dire qu'aucune des six substitutions ne peut s'exprimer en fonction des autres ne signifie pas qu'il n'y ait aucune relation entre elles.

On sait, par exemple, qu'entre les deux substitutions fondamentales T_1 et T_2 du groupe modulaire on a la relation

$$(T_1 T_2)^2 = 1.$$

On peut trouver des relations analogues entre nos substitutions S_1, \dots, S_6 , en considérant les chemins suivis par les points mobiles dans leurs rotations. Ces chemins sont représentés sur la figure 3 dans le cas des six substitutions.

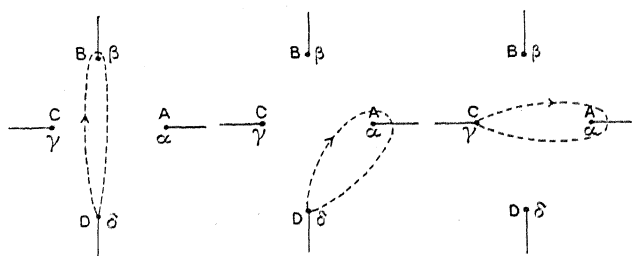


Remarquons d'abord que, dans les six cas, le point décrit son contour dans le sens rétrograde; comme les six substitutions ont pour période 3, en faisant mouvoir le point dans le sens direct on obtiendrait les substitutions

$$S_i^2 = S_i^{-1}.$$

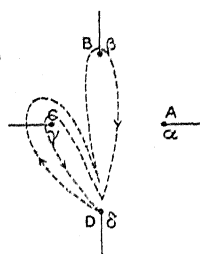
On voit, en second lieu, que, pour S_3 , D, dans son mouvement, coupe deux fois la ligne de passage de γ ; pour S_4 , il coupe deux fois cette même ligne et deux fois celle de β ; enfin, pour S_5 , C coupe deux fois la ligne de passage de β . J'ai calculé aussi les substitutions S'_3 , S'_4 , S'_5 qui correspondent aux chemins représentés sur la figure 4. Ces nouvelles substitutions, comme les anciennes, ont 3 pour période.

Fig. 4.



Ceci posé, je remarque que le circuit de S_3 peut se déformer comme l'indique la figure 5.

Fig. 5.



Il en résulte immédiatement (en se rappelant que D tournant autour de γ donne même substitution que C tournant autour de δ)

$$S_2 S'_3 S_2^2 = S_3, \quad S'_3 = S_2^2 S_3 S_2.$$

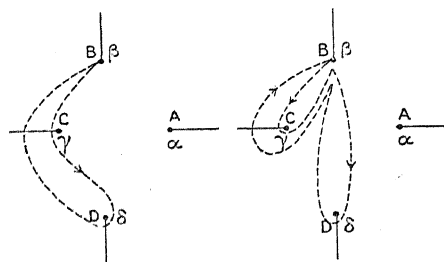
Mais B tournant autour de δ donne même substitution que D tournant autour de β ; par suite, le contour de S_3 (*fig. 3*) peut être remplacé par celui que représente la première figure 6; celui-ci peut être déformé comme l'indique la seconde figure 6; il en résulte

$$S_3 = S_1^2 S'_3 S_1, \quad S'_3 = S_1 S_3 S_1.$$

En égalant les deux valeurs de S_3 et les deux valeurs de S'_3 , on trouve

$$S_2 S'_3 S_2^2 = S_1^2 S'_3 S_1, \quad S_2^2 S_3 S_2 = S_1 S_3 S_1^2.$$

Fig. 6.

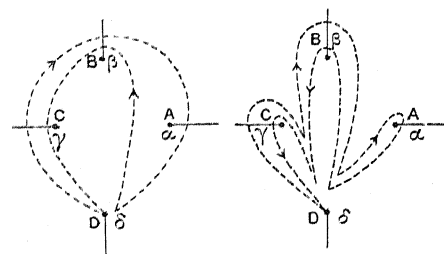


On trouve de même

$$S_1 S'_6 S_1^2 = S_6^2 S'_6 S_6, \quad S_1^2 S_6 S_1 = S_6 S_6 S_6^2.$$

21. Quant aux substitutions S_4 et S'_4 , je remarque que l'on peut déformer le contour de S_4 des deux manières indiquées par les figures 7.

Fig. 7.



D'après la première de ces figures, si nous désignons par Σ_1 la substitution qui provient d'une rotation rétrograde de D autour des deux points γ et β et par Σ_2 celle qui provient d'une rotation rétrograde de D autour de γ , β et α , nous avons

$$S_4 = \Sigma_2 \Sigma_1^{-1}.$$

D'après la seconde figure, on a

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= S_2 S'_3, & \Sigma_2 &= S_2 S'_3 S'_4, \\ S_4 &= S_2 S'_3 S'_4 S_3^2 S_2^2. \end{aligned}$$

On trouve

$$\Sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda^2 - \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \Sigma_2 = \begin{pmatrix} \lambda & \lambda^2 - 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

d'où, pour n entier positif ou négatif,

$$\Sigma_1^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n(\lambda^2 - \lambda) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^n \end{pmatrix}, \quad \Sigma_2^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1}(\lambda^2 - 1) & 0 \\ 0 & \lambda^n & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^n \end{pmatrix}.$$

La substitution

$$S_1 \Sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda^2 - \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

montre que x et y sont des fonctions périodiques; elles ne changent pas quand, u restant constant, v augmente de $\lambda^2 - \lambda$. Cette propriété a été utilisée par M. Picard (*Acta mathematica*, t. V, p. 171).

IV.

22. Nous avons vu que les fonctions θ qui figurent dans les expressions des fonctions x et y ne sont définies que pour les valeurs des variables u, v, w qui rendent négative la forme

$$F = uu_1 + vv_1 + w_1w.$$

M. Picard a montré que les substitutions S dont nous venons de nous occuper, prises sous forme homogène, transforment F en elle-même. Il est naturel de se demander si le groupe de ces substitutions, ou groupe S , coïncide avec le groupe des substitutions semblables de F , ou s'il ne forme qu'un sous-groupe de ce groupe. L'analogie avec la fonction modulaire elliptique porte à croire qu'il n'est qu'un sous-groupe; de plus, elle suggère une méthode d'investigation. La forme F est transformée en elle-même par les substitutions qui proviennent de déplacements des points critiques où l'on a, après comme

avant, $A = \alpha$, $B = \beta$, $C = \gamma$, $D = \delta$; elle doit être également transformée en elle-même par les substitutions provenant de déplacements à la fin desquels A, B, C, D coïncident avec $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ dans un autre ordre. En d'autres termes, les substitutions que subissent u, v, w quand les points critiques s'échangent entre eux doivent transformer F en elle-même. C'est ce que nous allons constater en calculant ces substitutions.

23. Si nous convenons d'écrire les quatre lettres A, B, C, D dans l'ordre dans lequel les points correspondants coïncident avec $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, il s'agit d'effectuer sur $ABCD$ toutes les permutations possibles; mais on sait que l'on peut passer d'une de ces permutations à une autre quelconque en combinant trois transpositions de deux lettres. Notre groupe aura donc trois substitutions fondamentales; je choisirai celles qui échangent B et C , C et D , D et A .

Dans chaque cas, je suppose que les deux points critiques échangent leurs positions en sens rétrograde, c'est-à-dire qu'ils suivent des chemins formant ensemble un contour fermé et qu'ils le parcourent en sens rétrograde. Pour mieux préciser les résultats, je fais décrire à l'une des lignes de passage une aire tout entière extérieure à ce contour fermé, et je suppose que l'autre ligne de passage se mouvant en sens contraire décrit cette même aire extérieure et l'aire intérieure.

24. *Échange de B et C.* — Le résultat de cet échange est représenté par la seconde des figures 8. On en déduit

$$\begin{aligned} \Lambda'_1 &= \Lambda_1, \\ \Lambda'_2 &= \Lambda_2, \\ \Lambda'_3 &= \beta_2 + \gamma_3 + \gamma_1 = -\beta_3 - \beta_1 - \gamma_2 = -\lambda \Lambda_3. \end{aligned}$$

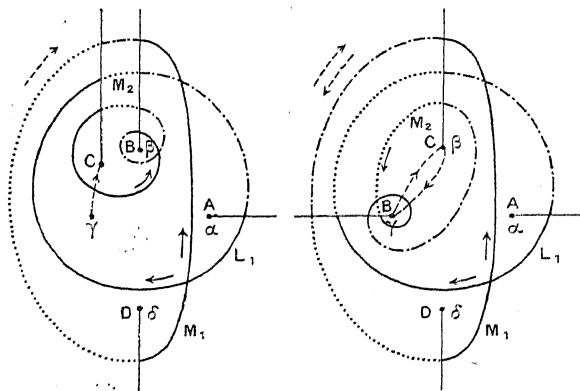
On a donc

$$\begin{cases} v' = v, \\ u' = -\lambda u, \end{cases} \quad T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{bmatrix}.$$

On voit facilement que cette substitution a pour période 6 : $T_1^6 = 1$;

par suite $T_1^5 = T_1^{-1}$ s'obtient en échangeant les deux points B et C dans le sens direct.

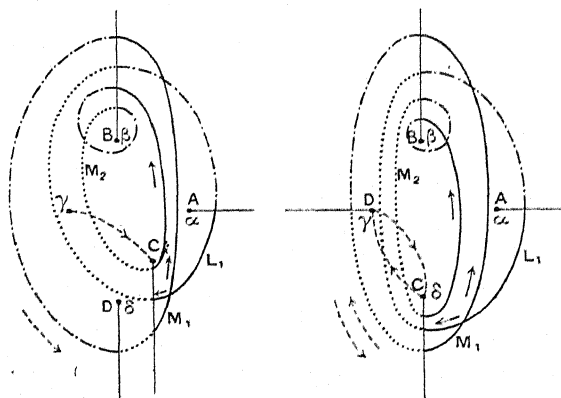
Fig. 8.



25. *Échange de C et D.* — Il est représenté par la seconde figure 9, qui donne

$$\begin{aligned} \Lambda'_1 &= \Lambda_1, \\ \Lambda'_2 &= -\delta_3 - \beta_2 - \alpha_1 = -\Lambda_1 + \Lambda_2 - \lambda^2 \Lambda_3, \\ \Lambda'_3 &= \beta_1 + \beta_2 + \delta_3 = \Lambda_1 - \lambda \Lambda_3. \end{aligned}$$

Fig. 9.



D'où

$$\begin{cases} -\lambda^2 \frac{\Lambda'_2}{\Lambda_1} = \lambda^2 + \varphi + \lambda u, \\ \frac{\Lambda'_3}{\Lambda_1} = 1 - \lambda u; \end{cases} \quad T_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda^2 & 1 & \lambda \\ 1 & 0 & -\lambda \end{bmatrix}.$$

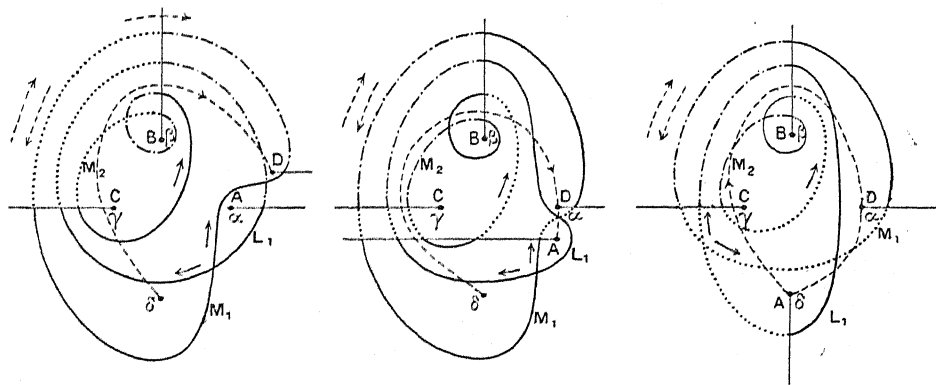
Cette substitution a aussi pour période 6.

26. *Échange de A et D.* — On obtient une substitution très simple en supposant que le contour formé des chemins décrits par les deux points contient à son intérieur les points γ et β . La troisième des figures 10 réalise ce cas; on en déduit

$$\begin{aligned} \Lambda'_1 &= \alpha_3 + \beta_1 + \gamma_2 = -\lambda \Lambda_2, & \frac{\Lambda'_1}{\Lambda_1} &= \lambda^2 \nu, \\ \Lambda'_2 &= -\gamma_2 - \beta_1 - \delta_3 = -\Lambda_1, & -\lambda^2 \frac{\Lambda'_2}{\Lambda_1} &= \lambda^2, \\ \Lambda'_3 &= \beta_3 + \beta_1 + \gamma_2 = \lambda \Lambda_3, & \frac{\Lambda'_3}{\Lambda_1} &= \lambda u. \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \nu' = \frac{\lambda^2}{\lambda^2 \nu} = \frac{1}{\nu}, \\ u' = \frac{\lambda u}{\lambda^2 \nu} = \frac{\lambda^2 u}{\nu}, \end{cases} \quad \Theta = \begin{bmatrix} 0 & \lambda^2 & 0 \\ \lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Fig. 10.



Cette substitution, comme les deux précédentes, a 6 pour période.

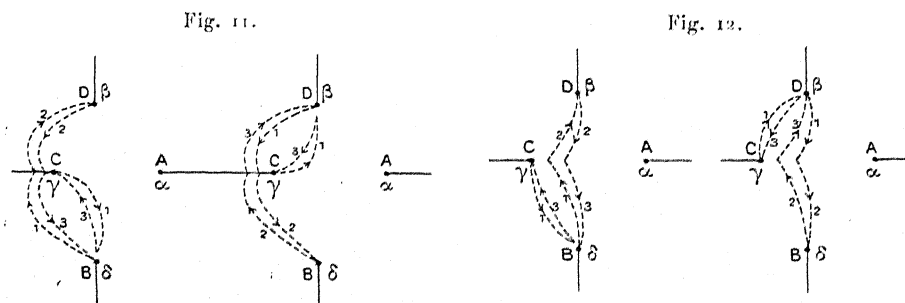
Il est facile de constater que T_1 , T_2 et Θ prises sous forme homogène transforment F en elle-même.

27. On a $T_1^2 = S_1$, $T_2^2 = S_2$; il est facile de construire des substitutions, combinaisons de T_1 , T_2 , Θ et ayant pour carrés les autres substitutions S étudiées plus haut. Il suffit pour cela de déformer la courbe relative à chacune de ces substitutions S en la faisant passer par les

points critiques près desquels ou autour desquels elle passait, de manière à la décomposer en segments réunissant β et γ ou γ et δ ou δ et α . En introduisant de plus des segments auxiliaires décrits par les points critiques intermédiaires et formant ensemble des contours fermés qui ramènent ces points à leurs positions initiales, on peut toujours supposer que, pendant qu'un point critique va d'un premier point fixe à un second, le point critique qui était au second point fixe se transporte au premier; on obtient ainsi une succession des trois substitutions T_1, T_2, Θ qui a pour effet d'échanger les deux points mobiles extrêmes.

Si l'on effectue deux fois de suite les mêmes constructions, ce qui revient à prendre le carré de la substitution, les deux points critiques reprennent leurs positions initiales, chacun ayant effectué une rotation autour du point fixe de l'autre. Ce déplacement simultané correspond à la même substitution que si l'un seulement des deux points avait tourné autour du point fixe de l'autre. Je désignerai par T_i la substitution qui a pour carré S_i . Ces substitutions T ont 6 pour périodes; j'ai réuni plus loin leurs valeurs et celles de leurs puissances.

28. *Substitution T_3 et T'_3 .* — Les figures 11 représentent deux manières de déformer le contour de S_3 (troisième des figures 3), et les



figures 12 représentent deux manières de déformer le contour de S'_3 (première figure 4). Dans ces figures et dans celles qui suivent, les numéros indiquent les segments qui doivent être parcourus ensemble pour obtenir la série des substitutions T_1, T_2, Θ qui reproduit la sub-

stitution considérée. On en déduit

$$\begin{aligned} T_3 &= T_2 T_1 T_1^5 = T_1^5 T_2 T_1, & T'_3 &= T_2^5 T_1 T_2 = T_1 T_2 T_1^5. \\ S_3 &= T_3^2 = T_2 T_1^2 T_1^5 = T_1^5 T_2^2 T_1, & S'_3 &= T_3'^2 = T_2^5 T_1^2 T_2 = T_1 T_2^2 T_1^5. \end{aligned}$$

On a aussi

$$\Sigma_1 = S_2 S'_3 = T_2 T_1^2 T_2.$$

29. *Substitutions* T_4 et T'_4 . — Pour évaluer T'_4 en fonction de T_1 , T_2 , Θ , je déforme le contour relatif à Θ (première figure 13) comme le montre la seconde figure 13. Quant au contour de S_4 (quatrième figure 3) on peut le déformer comme l'indique la figure 14.

Fig. 13.

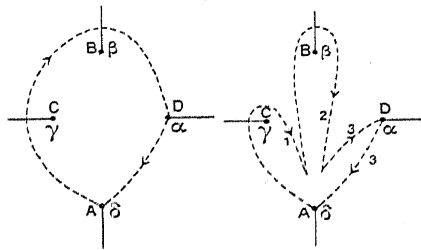
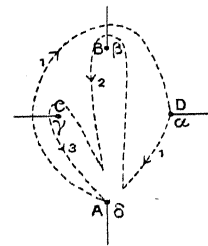


Fig. 14.



On a

$$\Theta = S_2 S'_3 T'_4, \quad T_4 = \Theta S_3^2 S_2^2,$$

d'où

$$\begin{aligned} T'_4 &= T_3'^4 T_2^5 \Theta = T_2^5 T_1^4 T_2^5 \Theta, & T_4 &= \Theta T'_4 \Theta^5 = \Theta T_2^5 T_1^4 T_2^5, \\ S'_4 &= T_4'^2 = (T_2^5 T_1^4 T_2^5 \Theta)^2, & S_4 &= T_4^2 = (\Theta T_2^5 T_1^4 T_2^5)^2. \end{aligned}$$

On a aussi

$$\Sigma_2 = S_4 \Sigma_1 = \Theta T_2^5 T_1^4 T_2^5 \Theta.$$

30. *Substitutions* T_5 et T'_5 . — Le contour de S'_5 (troisième figure 4) donne les deux figures 15 et le contour de S_5 (cinquième figure 3)

Fig. 15.

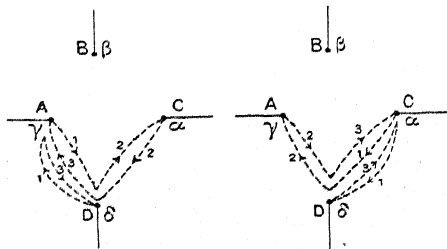
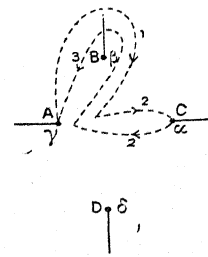


Fig. 16.



donne la figure 16. On en déduit

$$T'_5 = T_2 T'_4 T_2^5 = T_4'^5 T_2 T_4',$$

c'est-à-dire

$$T'_5 = T_1^4 T_2^5 \Theta T_2^5 = \Theta^5 T_2 T_1^2 T_2 T_1^4 T_2^5 \Theta,$$

$$S'_5 = T_5'^2 = (T_1^4 T_2^5 \Theta T_2^5)^2 = \Theta^5 T_2^2 T_1^2 T_2^2 T_1^4 T_2^5 \Theta;$$

puis

$$T_5 = S_1 T'_5 S_1^2 = T_2^5 \Theta T_2^5 T_1^4,$$

$$S_5 = T_5^2 = (T_2^5 \Theta T_2^5 T_1^4)^2.$$

31. *Substitution S₆*. — Le contour de T'₅ peut encore se déformer comme l'indiquent les figures 17. On en déduit

$$T'_5 = T_1^5 T_6 T_1 = T_6 T_1 T_6^5.$$

Fig. 17.

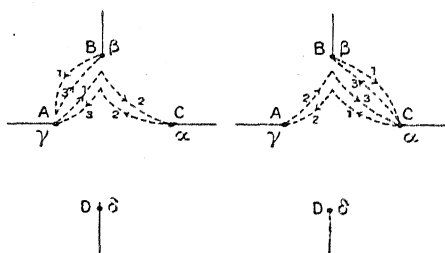
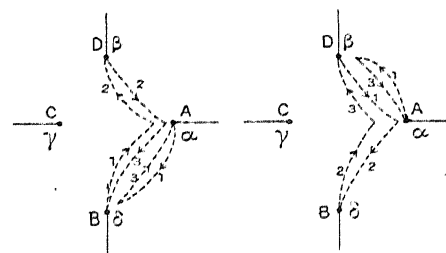


Fig. 18.



La première de ces relations donne

$$T_6 = T_1 T'_5 T_1^5 = T_1^5 T_2^5 \Theta T_2^5 T_1^5,$$

$$S_6 = T_6^2 = T_1^5 T_2^5 \Theta T_2^5 T_1^5 T_2^5 \Theta T_2^5 T_1^5.$$

32. Des différentes manières de déformer un même contour résultent des identités entre les substitutions T₁, T₂, Θ; en ajoutant aux déformations déjà considérées celles représentées par les figures 18, on voit que ces identités se ramènent à quatre que l'on peut écrire

$$T_1 T_2 T_1 = T_2 T_1 T_2, \quad T_2 T'_4 T_2 = T'_4 T_2 T'_4,$$

$$T_1 T_6 T_1 = T_6 T_1 T_6, \quad T_6 T'_4 T_6 = T'_4 T_6 T'_4.$$

Ou, en éliminant T'₄ et T₆,

$$T_1 T_2 T_1 = T_2 T_1 T_2,$$

$$(T_1^4 T_2^5 \Theta)^2 = T_2 (T_1^4 T_2^5 \Theta) T_2,$$

$$T_2^5 \Theta T_2^5 = T_1^5 (T_2^5 \Theta T_2^5) T_1^5 (T_2^5 \Theta T_2^5) T_1^5,$$

$$T_1^5 T_2^5 \Theta T_2^5 T_1^5 (T_2^5 T_1^4 T_2^5 \Theta) T_1^5 T_2^5 \Theta T_2^5 T_1^5 = T_2^5 T_1^4 T_2^5 \Theta (T_1^5 T_2^5 \Theta T_2^5 T_1^5) T_2^5 T_1^4 T_2^5 \Theta.$$

On pourrait en obtenir d'autres. On a, en particulier, quels que soient les entiers α et β,

$$T_1^\alpha \Theta^\beta = \Theta^\beta T_1^\alpha.$$

33. Voici les valeurs des substitutions T et de leurs puissances :

$$\begin{aligned}
 T_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}, & T_1^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}, & T_1^3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}, & T_1^4 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}, & T_1^5 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}, & T_1^6 &= 1, \\
 T_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda^2 & 1 & \lambda \\ 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}, & T_2^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda^2-1 & 1 & \lambda-\lambda^2 \\ 1-\lambda & 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}, & T_2^3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -2\lambda^2 \\ -2\lambda & 0 & -1 \end{pmatrix}, & T_2^4 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda^2-1 & 1 & \lambda-\lambda^2 \\ 1-\lambda & 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}, & T_2^5 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda^2-1 & 1 & \lambda-\lambda^2 \\ 1-\lambda & 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}, & T_2^6 &= 1, \\
 \Theta &= \begin{pmatrix} 0 & \lambda^2 & 0 \\ \lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, & \Theta^2 &= \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}, & \Theta^3 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & \Theta^4 &= \begin{pmatrix} \lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, & \Theta^5 &= \begin{pmatrix} 0 & \lambda & 0 \\ \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}, & \Theta^6 &= 1, \\
 T_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda^2 & 1 & -\lambda^2 \\ -\lambda^2 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}, & T_3^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda^2-1 & 1 & 1-\lambda^2 \\ 1-\lambda^2 & 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}, & T_3^3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, & T_3^4 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda^2-1 & 1 & 1-\lambda^2 \\ 1-\lambda & 0 & \lambda \end{pmatrix}, & T_3^5 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda^2-1 & 1 & 1-\lambda^2 \\ 1-\lambda & 0 & \lambda \end{pmatrix}, & T_3^6 &= 1, \\
 T_4 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda^2 & 1 & -1 \\ -\lambda & 0 & -\lambda \end{pmatrix}, & T_4^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda^2-1 & 1 & \lambda-1 \\ \lambda^2-\lambda & 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}, & T_4^3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2\lambda^2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, & T_4^4 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda^2-1 & 1 & \lambda-1 \\ \lambda^2-1 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, & T_4^5 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda^2-1 & 1 & \lambda-1 \\ \lambda^2-1 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, & T_4^6 &= 1, \\
 T_5 &= \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & \lambda^2 & 0 \\ \lambda^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, & T_5^2 &= \begin{pmatrix} -2\lambda & \lambda^2-1 & 0 \\ \lambda^2-1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & T_5^3 &= \begin{pmatrix} \lambda^2-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & \lambda-2\lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & T_5^4 &= \begin{pmatrix} \lambda^2 & \lambda-1 & 0 \\ \lambda-1 & -2\lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & T_5^5 &= \begin{pmatrix} 0 & \lambda & 0 \\ \lambda & 1-\lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & T_5^6 &= 1, \\
 T_6 &= \begin{pmatrix} 1 & \lambda^2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & -\lambda \end{pmatrix}, & T_6^2 &= \begin{pmatrix} 1 & \lambda^2-1 & 1-\lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda-\lambda^2 & \lambda^2 \end{pmatrix}, & T_6^3 &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2\lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2\lambda^2 & -1 \end{pmatrix}, & T_6^4 &= \begin{pmatrix} 1 & \lambda^2-1 & 1-\lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda-\lambda^2 & \lambda^2 \end{pmatrix}, & T_6^5 &= \begin{pmatrix} 1 & \lambda^2-1 & 1-\lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda-\lambda^2 & \lambda^2 \end{pmatrix}, & T_6^6 &= 1, \\
 T_7 &= \begin{pmatrix} 1 & \lambda^2 & \lambda^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda^2 & -\lambda \end{pmatrix}, & T_7^2 &= \begin{pmatrix} 1 & \lambda^2-1 & \lambda^2-1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda^2-1 & \lambda^2 \end{pmatrix}, & T_7^3 &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}, & T_7^4 &= \begin{pmatrix} 1 & \lambda^2-1 & \lambda^2-1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda^2-1 & \lambda^2 \end{pmatrix}, & T_7^5 &= \begin{pmatrix} 1 & \lambda^2-1 & \lambda^2-1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda^2-1 & \lambda^2 \end{pmatrix}, & T_7^6 &= 1, \\
 T_8 &= \begin{pmatrix} 1 & \lambda^2 & -\lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & -\lambda \end{pmatrix}, & T_8^2 &= \begin{pmatrix} 1 & \lambda^2-1 & \lambda^2-\lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & \lambda^2 \end{pmatrix}, & T_8^3 &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2\lambda^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2\lambda & -1 \end{pmatrix}, & T_8^4 &= \begin{pmatrix} 1 & \lambda^2-1 & \lambda^2-\lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & \lambda^2 \end{pmatrix}, & T_8^5 &= \begin{pmatrix} 1 & \lambda^2-1 & \lambda^2-\lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & \lambda^2 \end{pmatrix}, & T_8^6 &= 1.
 \end{aligned}$$

V.

34. Il est évident géométriquement que le groupe S est un sous-groupe du groupe engendré par T_1, T_2, Θ ou groupe T. En effet, comme les substitutions $S_i (i = 1, 2, \dots, 6)$ proviennent de déplacements des points critiques tels que les positions finales de ces points sont identiques à leurs positions initiales, il en est de même pour toutes les substitutions du groupe qu'elles engendrent; or, ce n'est pas le cas pour les substitutions T_1, T_2, Θ . Il est clair d'ailleurs que le groupe T contient le groupe S.

A ces conditions géométriques correspond un fait analytique qui distingue les substitutions S des autres substitutions du groupe T. Les substitutions S_i sont de la forme

$$\begin{bmatrix} 1 + m_1(1 - \lambda) & m_2(1 - \lambda) & m_3(1 - \lambda) \\ n_1(1 - \lambda) & 1 + n_2(1 - \lambda) & n_3(1 - \lambda) \\ p_1(1 - \lambda) & p_2(1 - \lambda) & 1 + p_3(1 - \lambda) \end{bmatrix},$$

où les m, n, p sont des entiers complexes. En d'autres termes, les substitutions S_i sont congrues à la substitution unité, selon le module $1 - \lambda$. On voit, en effet, que, dans chacune des substitutions S, les éléments de la diagonale sont, ou bien 1, ou bien une des quantités

$$\lambda = 1 - (1 - \lambda), \quad \lambda^2 = 1 + \lambda^2(1 - \lambda), \quad -2\lambda = 1 - \lambda(1 - \lambda),$$

les éléments hors de la diagonale sont, ou bien 0, ou bien une des quantités

$$\pm(1 - \lambda), \quad \pm(\lambda^2 - 1) = \pm\lambda^2(1 - \lambda), \quad \pm(\lambda - \lambda^2) = \pm\lambda(1 - \lambda).$$

D'ailleurs, il est facile de voir que, si deux substitutions vérifient ces conditions, il en est de même de leur produit; ces conditions caractérisent donc bien le groupe S. Enfin, elles ne sont pas réalisées pour les substitutions T; en effet, dans T_1 , le dernier élément de la diagonale est congru à -1 , car on a

$$-1 = -1 + (1 - \lambda);$$

et les autres substitutions T contiennent toutes des éléments hors de la diagonale qui ne sont pas multiples de $1 - \lambda$.

35. Le groupe S est donc un sous-groupe à congruences du groupe T; il en résulte, d'après un raisonnement connu, que c'est un sous-groupe invariant; on peut, par suite, diviser le groupe T en classes dont le groupe S formera la première, les substitutions d'une même classe étant congrues entre elles (mod $1 - \lambda$); il suffit, pour cela, de trouver un système complet de substitutions T non congrues entre elles et de multiplier successivement par ces substitutions celles du groupe S.

Je remarque d'abord que le nombre des classes de nombres incongrus (mod $1 - \lambda$) est égal à norme de $(1 - \lambda) = 3$; je prendrai pour représentants de ces classes $-1, 0, 1$. Chacun des 9 éléments de la substitution pouvant être congru à chacun de ces trois nombres, on a 3^3 substitutions incongrues entre elles (mod $1 - \lambda$). Je vais étudier : 1° celles qui correspondent à des échanges des points critiques entre eux et qui, par suite, appartiennent au groupe T; 2° celles qui sont compatibles avec les conditions qui expriment que la substitution, supposée homogène, transforme en elle-même la forme F. Je serai ainsi amené à déterminer si le groupe T coïncide avec celui des substitutions semblables de cette forme ou s'il n'en est lui-même qu'un sous-groupe.

36. Le groupe T contient, au maximum, autant de substitutions incongrues selon le module $1 - \lambda$ qu'il y a de permutations des quatre lettres A, B, C, D, c'est-à-dire 24. En effet, les divers chemins que l'on peut faire suivre aux points critiques pour passer d'une permutation P_i à une autre permutation P_j peuvent se ramener à l'un d'eux précédé et suivi d'une série de lacets; les substitutions correspondantes se déduisent donc de l'une d'elles en la multipliant à droite et à gauche par des substitutions du groupe S. Toutes les substitutions qui font passer d'une permutation déterminée P_i à une autre P_j appartiennent donc bien à la même classe. Il suffit de construire des substitutions permettant de passer de la permutation ABCD à chacune des autres et de constater qu'elles sont incongrues entre elles pour s'as-

surer que le groupe T contient bien en réalité vingt-quatre classes incongrues, selon le module $1 - \lambda$.

Voici d'abord la liste de ces substitutions ; j'ai ajouté, en regard de chacune d'elles, les transformations correspondantes de x et de y . Nous avons vu que, par le changement de variable (11), on passe de la relation (1) à la relation (12). Je pose maintenant, en considérant A, B, C, D comme les points critiques mobiles d'abord en coïncidence avec $\alpha, \beta, \gamma, \delta$,

$$\frac{C - A}{B + A} = x, \quad \frac{D - A}{B - A} = y,$$

et j'écris

$$x_i = \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}, \quad y_i = \frac{\delta - \alpha}{\beta - \alpha} \quad (i = 1, 2, \dots, 24).$$

$$z_3 = t(t-1)(t-x_i)(t-y_i)$$

Quand A, B, C, D échangent leurs positions, x_i et y_i deviennent des fonctions linéaires de x et y ; je les ai inscrites dans le Tableau suivant :

ABCD	1	$x_1 = \frac{C - A}{B - A} = x,$	$y_1 = \frac{D - A}{B - A} = y;$
ACBD	T_1	$x_2 = \frac{B - A}{C - A} = \frac{1}{x},$	$y_2 = \frac{D - A}{C - A} = \frac{y}{x};$
DBCA	Θ	$x_3 = \frac{C - D}{B - D} = \frac{y - x}{y - 1},$	$y_3 = \frac{A - D}{B - D} = \frac{y}{y - 1};$
DCBA	$T_1 \Theta$	$x_4 = \frac{B - D}{C - D} = \frac{y - 1}{y - x},$	$y_4 = \frac{A - D}{C - D} = \frac{y}{y - x};$
ABDC	T_2	$x_5 = \frac{D - A}{B - A} = y,$	$y_5 = \frac{C - A}{B - A} = x;$
ACDB	$T_1 T_2$	$x_6 = \frac{D - A}{C - A} = \frac{y}{x},$	$y_6 = \frac{B - A}{C - A} = \frac{1}{x};$
DBAC	ΘT_2	$x_7 = \frac{A - D}{B - D} = \frac{y}{y - 1},$	$y_7 = \frac{C - D}{B - D} = \frac{y - x}{y - 1};$
DCAB	$T_1 \Theta T_2$	$x_8 = \frac{A - D}{C - D} = \frac{y}{y - x},$	$y_8 = \frac{B - D}{C - D} = \frac{y - 1}{y - x};$
ADBC	$T_2 T_1$	$x_9 = \frac{B - A}{D - A} = \frac{1}{y},$	$y_9 = \frac{C - A}{D - A} = \frac{x}{y};$

ADCB	$T_1 T_2 T_1$	$x_{10} = \frac{C-A}{D-A} = \frac{x}{y},$	$y_{10} = \frac{B-A}{D-A} = \frac{1}{y};$
DABC	$\Theta T_2 T_1$	$x_{11} = \frac{B-D}{A-D} = \frac{y-1}{y},$	$y_{11} = \frac{C-D}{A-D} = \frac{y-x}{y};$
DACB	$T_1 \Theta T_2 T_1$	$x_{12} = \frac{C-D}{A-D} = \frac{y-x}{y},$	$y_{12} = \frac{B-D}{A-D} = \frac{y-1}{y};$
CBDA	$T_2 \Theta$	$x_{13} = \frac{D-C}{B-C} = \frac{x-y}{x-1},$	$y_{13} = \frac{A-C}{B-C} = \frac{x}{x-1};$
BCDA	$T_1 T_2 \Theta$	$x_{14} = \frac{D-B}{C-B} = \frac{1-y}{1-x},$	$y_{14} = \frac{A-B}{C-B} = \frac{1}{1-x};$
CBAD	$\Theta T_2 \Theta$	$x_{15} = \frac{A-C}{B-C} = \frac{x}{x-1},$	$y_{15} = \frac{D-C}{B-C} = \frac{x-y}{x-1};$
BCAD	$T_1 \Theta T_2 \Theta$	$x_{16} = \frac{A-B}{C-B} = \frac{1}{1-x},$	$y_{16} = \frac{D-B}{C-B} = \frac{1-y}{1-x};$
CDBA	$T_2 \Theta T_1$	$x_{17} = \frac{B-C}{D-C} = \frac{x-1}{x-y},$	$y_{17} = \frac{A-C}{D-C} = \frac{x}{x-y};$
BDCA	$T_1 T_2 \Theta T_1$	$x_{18} = \frac{C-B}{D-B} = \frac{1-x}{1-y},$	$y_{18} = \frac{A-B}{D-B} = \frac{1}{1-y};$
CABD	$\Theta T_2 \Theta T_1$	$x_{19} = \frac{B-C}{A-C} = \frac{x-1}{x},$	$y_{19} = \frac{D-C}{A-C} = \frac{x-y}{x};$
BADC	$T_1 \Theta T_2 \Theta T_1$	$x_{20} = \frac{C-B}{A-B} = 1-x,$	$y_{20} = \frac{D-B}{A-B} = 1-y;$
BDAC	$T_2 \Theta T_1 T_2 \Theta$	$x_{21} = \frac{A-B}{D-B} = \frac{1}{1-y},$	$y_{21} = \frac{C-B}{D-B} = \frac{1-x}{1-y};$
CDAB	$T_1 T_2 \Theta T_1 T_2 \Theta$	$x_{22} = \frac{A-C}{D-C} = \frac{x}{x-y},$	$y_{22} = \frac{B-C}{D-C} = \frac{x-1}{x-y};$
BADC	$\Theta T_2 \Theta T_1 T_2 \Theta$	$x_{23} = \frac{D-B}{A-B} = 1-y,$	$y_{23} = \frac{C-B}{A-B} = 1-x;$
CADB	$T_1 \Theta T_2 \Theta T_1 T_2 \Theta$	$x_{24} = \frac{D-C}{A-C} = \frac{x-y}{x},$	$y_{24} = \frac{B-C}{A-C} = \frac{x-1}{x}.$

Disposons ces substitutions en Tableau de la manière suivante :

$$(I) \left\{ \begin{array}{cccccc} 1, & T_2, & T_2 T_1, & T_2 \Theta, & T_2 \Theta T_1, & T_2 \Theta T_1 T_2 \Theta, \\ T_1, & T_1 T_2, & T_1 T_2 T_1, & T_1 T_2 \Theta, & T_1 T_2 \Theta T_1, & T_1 T_2 \Theta T_1 T_2 \Theta, \\ \Theta, & \Theta T_2, & \Theta T_2 T_1, & \Theta T_2 \Theta, & \Theta T_2 \Theta T_1, & \Theta T_2 \Theta T_1 T_2 \Theta, \\ T_1 \Theta, & T_1 \Theta T_2, & T_1 \Theta T_2 T_1, & T_1 \Theta T_2 \Theta, & T_1 \Theta T_2 \Theta T_1, & T_1 \Theta T_2 \Theta T_1 T_2 \Theta, \end{array} \right.$$

et considérons les substitutions

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ \varepsilon & 0 & -\varepsilon \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ \varepsilon & 0 & \varepsilon \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & \varepsilon & -\varepsilon \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ \varepsilon & -\varepsilon & 0 \end{pmatrix}.$$

Avec $\varepsilon = 1$, ces dernières substitutions sont congrues respectivement à celles de la première ligne du Tableau (I); avec $\varepsilon = -1$, elles sont congrues à celles de la seconde ligne; enfin, celles qu'on en déduit en intervertissant les deux premières lignes sont, pour $\varepsilon = 1$ et $\varepsilon = -1$, congrues à celles de la troisième et de la quatrième lignes. Les vingt-quatre substitutions sont donc bien incongrues entre elles.

37. Remarquons, avant d'aborder la seconde question, que les vingt-quatre quantités x_i sont, à l'ordre près, identiques aux vingt-quatre quantités y_i . Toute fonction symétrique de ces vingt-quatre quantités est une fonction hyperfuchsienne des variables u et v admettant pour groupe de substitutions le groupe T. Si, comme dans le cas de la fonction modulaire, on forme le produit des transformées de $1 + x$ par toutes les substitutions, on trouve la fonction invariante suivante

$$(4J_{1,x} - 1)(4J_{1,y} - 1)(4J_{x,y} - 1)(4J_{y-1,y-x} - 1),$$

en désignant par

$$J_{\lambda,\mu} = \frac{(\lambda^2 - \lambda\mu + \mu^2)^2}{\lambda^2\mu^2(\lambda - \mu)^2}$$

l'invariant elliptique écrit sous forme homogène. On vérifie, de plus, que les quatre fonctions $J_{y-1,y-x}$, $J_{x,y}$, $J_{1,y}$, $J_{1,x}$ sont permutées entre elles par les substitutions T_1 , T_2 , Θ (et, par suite, par toutes celles du groupe T) comme les quatre lettres A, B, C, D; ainsi toute fonction symétrique de ces quatre quantités comme

$$J_1 = J_{y-1,y-x} J_{x,y} J_{1,y} J_{1,x},$$

$$J_2 = J_{y-1,y-x} + J_{x,y} + J_{1,y} + J_{1,x}$$

est une fonction hyperfuchsienne ayant T pour groupe.

38. Il me reste à déterminer quelles sont, parmi les 3^e classes de substitutions incongrues (mod $\tau - \lambda$), celles qui transforment F en elle-même.

Le Tableau des coefficients de la substitution étant

$$\begin{pmatrix} M_1 & P_1 & R_1 \\ M_2 & P_2 & R_2 \\ M_3 & P_3 & R_3 \end{pmatrix}$$

et μ, ϖ, ρ désignant les quantités conjuguées de M, P, R, on peut écrire de deux manières différentes les conditions qui expriment que cette substitution est une substitution semblable de F; le premier groupe de conditions s'obtient en écrivant que la substitution transforme F en elle-même; le second groupe s'obtient en écrivant que la substitution inverse transforme F en elle-même

(1) $M_1\varpi_2 + P_1\mu_2 + R_1\rho_2 = 1,$	(1) $M_1\varpi_2 + M_2\varpi_1 + M_3\varpi_3 = 1,$
(2) $M_3\varpi_3 + P_3\mu_3 + R_3\rho_3 = 1,$	(2) $R_1\rho_2 + R_2\rho_1 + R_3\rho_3 = 1,$
(3) $M_1\varpi_1 + P_1\mu_1 + R_1\rho_1 = 0,$	(3) $M_1\mu_2 + M_2\mu_1 + M_3\mu_3 = 0,$
(4) $M_2\varpi_2 + P_2\mu_2 + R_2\rho_2 = 0,$	(4) $P_1\varpi_2 + P_2\varpi_1 + P_3\varpi_3 = 0,$
(5) $M_1\varpi_3 + P_1\mu_3 + R_1\rho_3 = 0,$	(5) $R_1\mu_2 + R_2\mu_1 + R_3\mu_3 = 0,$
(6) $M_2\varpi_3 + P_2\mu_3 + R_2\rho_3 = 0,$	(6) $R_1\varpi_2 + R_2\varpi_1 + R_3\varpi_3 = 0.$

39. Si, dans le Tableau des coefficients, on échange les lignes et les colonnes, puis que l'on exprime que la nouvelle substitution ainsi obtenue transforme F en elle-même, on trouve les conditions du second groupe. Il en résulte que toute propriété déduite du premier groupe d'équations pour les lignes appartient aux colonnes en vertu du second groupe d'équations.

40. Supposons, dans toutes ces équations, chaque élément remplacé par celui des nombres $-1, 0, 1$ auquel il est congru (mod $\tau - \lambda$) et voyons dans quels cas ces équations, envisagées comme des congruences selon ce module, seront satisfaites.

On voit facilement que deux quantités conjuguées l'une de l'autre

appartiennent à la même classe (mod $1 - \lambda$). Ceci posé, on obtient immédiatement les résultats suivants.

41. Considérons d'abord les trois éléments d'une même ligne ou d'une même colonne :

1° Pour toute ligne ou colonne, les trois éléments ne peuvent être nuls à la fois, car s'ils l'étaient, (1) ou (2) ne pourrait être vérifiée;

2° Pour chacune des deux premières lignes ou colonnes, si le troisième élément est nul, l'un des deux premiers l'est aussi; sans cela (3) ou (4) ne pourrait être vérifiée;

3° Pour chacune des deux premières lignes ou colonnes, si le troisième élément n'est pas nul, il faut, en vertu de (3) ou (4), que les deux premiers ne le soient pas non plus, car autrement les premiers membres de ces relations seraient congrus à 1; il faut, de plus, qu'ils soient tous deux congrus à 1 ou tous deux congrus à -1 , car, sans cela, les premiers membres seraient congrus à -1 .

En conséquence, les deux premières lignes ou colonnes appartiennent à l'un des types suivants, où ε et ε' égalent ± 1 indépendamment l'un de l'autre :

$$[\varepsilon \ 0 \ 0], \quad [0 \ \varepsilon \ 0], \quad [\varepsilon \ \varepsilon \ \varepsilon'].$$

42. Pour que deux lignes ou deux colonnes vérifiant ces conditions puissent former ensemble les deux premières lignes ou colonnes d'une même substitution, il faut encore :

1° Que les deux ne soient pas identiques et que l'on ne passe pas de l'une à l'autre en changeant tous les signes, car, dans ces deux cas, le premier membre de (1) serait congru à zéro;

2° Que si l'un des deux premiers éléments de l'une des deux lignes ou colonnes est nul, l'élément correspondant de l'autre ligne ou colonne ne le soit pas. En effet, l'un des deux premiers éléments étant nul, le troisième l'est aussi; s'il en était ainsi pour les deux premières lignes ou colonnes, et si les deux avaient les mêmes éléments nuls, le premier membre de (1) serait congru à zéro;

3° Que ceux des éléments du premier mineur $\begin{bmatrix} M_1 & P_1 \\ M_2 & P_2 \end{bmatrix}$ qui ne sont pas nuls aient le même signe. En effet, les seules combinaisons pos-

sibles sont, en vertu de ce qui précède, à l'ordre près des lignes,

$$\begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon' & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ \varepsilon' & \varepsilon' & \varepsilon'' \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon & 0 \\ \varepsilon' & \varepsilon' & \varepsilon'' \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon'' \\ \varepsilon' & \varepsilon' & -\varepsilon\varepsilon'\varepsilon'' \end{pmatrix}.$$

Si l'on n'avait pas $\varepsilon' = \varepsilon$, le premier membre de (1) serait congru à -1 .

Remarquons que, dans le dernier Tableau, avec $\varepsilon = \varepsilon'$, changer le signe de ε'' revient à échanger les deux lignes. Les seules combinaisons possibles sont donc, à l'ordre près des lignes,

$$\begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon' \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon & 0 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon' \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon \end{pmatrix}.$$

Et comme ceci vaut, pour les colonnes comme pour les lignes de la substitution, on est ramené, à l'ordre près des deux premières lignes et des deux premières colonnes, aux trois Tableaux suivants :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & R_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon' \\ \varepsilon'' & 0 & R_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon \\ \varepsilon & -\varepsilon & R_3 \end{pmatrix}.$$

43. Il reste à déterminer R_3 . Or :

1° En vertu de (2), si l'un au moins des deux premiers éléments de la troisième ligne ou colonne est nul, il faut que R_3 ne le soit pas; si les deux premiers éléments sont différents de zéro, comme ils sont alors de signes contraires, il faut que R_3 soit nul; ainsi, pour le premier Tableau, $R_3 = \varepsilon'$; pour le deuxième, $R_3 = \varepsilon''$; pour le troisième, $R_3 = 0$.

2° En vertu de (5) ou (6) dans le cas du deuxième Tableau, c'est-à-dire quand une, et une seule, des deux premières lignes ou colonnes n'a aucun élément nul, il faut que, si les trois éléments de cette ligne ou colonne sont de même signe, les deux éléments non nuls de la troisième ligne ou colonne ne le soient pas, et *vice versa*; il faut donc que l'on ait $\varepsilon'' = -\varepsilon\varepsilon'\varepsilon''$.

On est finalement conduit aux trois Tableaux suivants, dans lesquels on peut permuter, soit les deux premières lignes, soit les deux

premières colonnes,

$$\begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon' \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon' \\ \varepsilon'' & 0 & -\varepsilon\varepsilon'\varepsilon'' \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon \\ \varepsilon & -\varepsilon & 0 \end{pmatrix}.$$

44. Le premier de ces Tableaux contient deux ε indépendants, mais l'échange de ses deux premières lignes produit le même effet que l'échange de ses deux premières colonnes; le dernier ne contient qu'un seul ε indépendant; chacun de ces Tableaux fournit huit classes de substitutions; celui du milieu contient trois ε indépendants, il fournit trente-deux classes de substitutions. Il y a donc au plus quarante-huit classes de substitutions pouvant transformer F en elle-même. Pour vingt-quatre de ces classes, $\varepsilon = 1$; ces vingt-quatre classes sont celles du groupe T, et, par suite, elles contiennent effectivement des substitutions semblables de F; les vingt-quatre autres se déduisent des premières en changeant tous les signes, ce qui ne peut empêcher les conditions écrites plus haut d'être vérifiées. On voit facilement que les substitutions pour lesquelles $\varepsilon = 1$ forment un sous-groupe invariant du groupe total.

En résumé, on est conduit au résultat suivant : le groupe S est un sous-groupe invariant d'indice 24 du groupe T qui est lui-même un sous-groupe invariant d'indice 2 du groupe total des substitutions semblables de F.

VI.

45. Nous avons vu que les substitutions S correspondent à des transformations linéaires des fonctions θ et que, une fois les résultats de ces transformations obtenus, on peut s'en servir pour achever la détermination des expressions de x et de y et pour montrer que la substitution S_6 laisse invariantes ces deux fonctions. Il me reste à parler de ces transformations. Voici d'abord d'une manière générale l'énoncé du problème de la transformation linéaire et les formules qui le résolvent.

46. La fonction θ à p variables est définie par la relation suivante :

$$\theta_N(x) = \theta\left(x; \tau, \frac{q}{2}, \frac{q'}{2}\right) = \sum e^{\pi i x(2n+q') + \frac{\pi i}{4} \tau(2n+q)^2 + \frac{\pi i}{2} q(2n+q')}.$$

Dans cette formule, x, n, q, q' sont des lettres multiples à p éléments ⁽¹⁾ : x représente les arguments; q et q' sont des entiers que nous supposons 0 ou 1 et dont les moitiés constituent la caractéristique de la fonction; cette caractéristique est désignée d'une manière abrégée par N. Les symboles de sommation sont représentés par n , et Σ indique une sommation portant sur tous les termes obtenus en donnant aux p quantités n tous les systèmes de valeurs entières. τ est la matrice symétrique des périodes normales de seconde espèce de la fonction. Si l'on pose $\tau = \tau' + i\tau''$ (τ' et τ'' réels), il faut et il suffit pour la convergence que $\tau''n^2$ soit une forme définie et positive.

47. Supposons donnés, avec une courbe algébrique de genre p , un système quelconque d'intégrales distinctes de première espèce $\Omega_i (i = 1, 2, \dots, p)$ et une surface de Riemann à p feuilletts. Traçons sur cette surface un premier système de rétrosections qui la rende simplement connexe et prenons les valeurs des intégrales le long de ces courbes; nous obtiendrons un système de périodes des intégrales; représentons-les par les éléments des matrices ω et ω' . En partant de ces périodes, on peut construire un système d'intégrales normales de première espèce $U^{(i)}$; soit τ la matrice des périodes normales de seconde espèce de ces intégrales.

Passons du système de rétrosections considéré à un autre système de rétrosections rendant encore la surface simplement connexe; soient $[\omega], [\omega']$ les matrices des périodes des intégrales $[\Omega_i]$ déduites

(1) J'appelle *lettre multiple (row letter)* un symbole unique x tenant lieu de p symboles $x_1, \dots, x_p, \dots, x$ et n étant deux lettres multiples à p éléments, xn représente l'expression $x_1n_1 + \dots + x_pn_p$. Si τ est une matrice ou tableau de p^2 éléments $\tau_{11}, \tau_{12}, \dots, \tau_{pp}$ symétrique par rapport à la diagonale, τn^2 représente la forme quadratique

$$\tau_{11}n_1^2 + \dots + \tau_{pp}n_p^2 + 2\tau_{12}n_1n_2 + \dots$$

Pour plus de détails sur les notations abrégées, voir BAKER, *On abelian functions*, p. 666, ou ma Thèse, p. 90.

de ces nouvelles courbes; avec ce nouveau système de périodes, construisons des intégrales normales $[U^{(i)}]$ et soit τ' la matrice des périodes normales de seconde espèce de ces intégrales. Nous aurons, d'une part,

$$(27) \quad [\omega] = \omega\alpha + \omega'\alpha', \quad [\omega'] = \omega\beta + \omega'\beta'$$

et, d'autre part,

$$(28) \quad (\alpha + \tau\alpha')\tau' = \beta + \tau\beta',$$

et, dans ces deux groupes de relations, $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ représentent les mêmes matrices à p^2 éléments entiers vérifiant les deux groupes suivants de relations dont l'un est conséquence de l'autre

$$(29) \quad \begin{cases} \bar{\alpha}\alpha' - \bar{\alpha}'\alpha = \bar{\beta}\beta' - \bar{\beta}'\beta = 0, & \bar{\alpha}\beta' - \bar{\alpha}'\beta = \bar{\beta}'\alpha - \bar{\beta}\alpha' = 1; \\ \alpha\bar{\beta} - \beta\bar{\alpha} = \alpha'\bar{\beta}' - \beta'\bar{\alpha}' = 0, & \alpha\bar{\beta}' - \beta\bar{\alpha}' = \beta'\bar{\alpha} - \alpha'\bar{\beta} = 1 \end{cases}$$

(α étant une matrice carrée quelconque, $\bar{\alpha}$ désigne la matrice transposée, c'est-à-dire déduite de α en échangeant les lignes et les colonnes).

48. Ceci posé, construisons des fonctions θ en leur donnant pour périodes, d'une part les τ , d'autre part les τ' ; il existe entre ces deux fonctions la relation suivante, qui est appelée *formule de transformation linéaire des fonctions θ* ,

$$\theta\left(x'; \tau, \frac{q}{2}, \frac{q'}{2}\right) e^{\pi i \tau x'^2} = T \theta\left(x; \tau', \frac{k}{2}, \frac{k'}{2}\right)$$

ou

$$(30) \quad \theta_N(x') e^{\pi i \tau x'^2} = T \theta'_N(x),$$

et l'on a

$$(31) \quad \begin{cases} x' = (\alpha + \tau\alpha')x, & \varphi = \bar{\alpha}'(\alpha + \tau\alpha'), \\ k = \bar{\beta}'q - \bar{\beta}q' + d(\bar{\beta}\beta'), & k' = -\bar{\alpha}'q + \bar{\alpha}q' - d(\bar{\alpha}\alpha') \end{cases}$$

[α étant une matrice quelconque, $d(\alpha)$ désigne la lettre multiple ayant pour éléments ceux de la diagonale de α].

49. Si l'on augmente k_i de $2m$ (m entier), la fonction θ est reproduite multipliée par $e^{m\pi ik_i}$, et si l'on augmente k_i d'un entier pair, la fonction θ ne change pas; il en résulte qu'il suffit de calculer les quantités k selon le module 4 et les quantités k' selon le module 2. Si l'on réduit la caractéristique k, k' , il s'introduit un facteur $\eta = \pm 1$.

50. Pour définir la valeur de T , il faut distinguer trois cas.

Premier cas : $\alpha' = 0$ (c'est-à-dire tous les éléments de la matrice α' nuls). — On a alors

$$(32) \quad T = e^{\frac{\pi i E}{4}}$$

en posant

$$(33) \quad E = \alpha' \bar{\beta}' q^2 - 2\beta' \bar{\alpha}' q q' + \alpha \bar{\beta} q'^2 + 2\alpha' d(\bar{\beta} \beta') q - 2\alpha d(\bar{\beta} \beta') q'.$$

51. *Deuxième cas* : $\alpha' \neq 0, |\alpha'| \neq 0$ (α étant une matrice carrée, $|\alpha|$ désigne son déterminant). — On a, dans ce cas,

$$(34) \quad T = e^{\frac{\pi i (E + E')}{4}} K \sum_{\rho} e^{-\pi i \chi(\rho)},$$

où E a même valeur que dans le premier cas et où, de plus,

$$(35) \quad E' = 2d(\bar{\alpha} \alpha') d(\bar{\beta} \beta') - \alpha'^{-1} \beta' [d(\bar{\alpha} \alpha')]^2$$

(α étant une matrice dont le déterminant n'est pas nul, α^{-1} désigne la matrice inverse, c'est-à-dire telle que $\alpha \alpha^{-1}$ a tous les éléments de la diagonale égaux à 1 et tous les autres nuls; on écrit $\alpha \alpha^{-1} = 1$).

$$(36) \quad \left\{ \begin{array}{l} \chi(\rho) = \alpha \alpha'^{-1} \rho^2 + \bar{\alpha}'^{-1} d(\bar{\alpha} \alpha') \rho, \\ K = \frac{1}{|\alpha'|^{p-\frac{1}{2}}} \sqrt{\frac{i^p}{|\alpha + \tau \alpha'|}} = \frac{1}{|\alpha'|^{p-1}} \sqrt{\frac{i^p}{|\varphi|}}; \end{array} \right.$$

enfin, \sum_{ρ} indique une somme multiple de Gauss que l'on obtient en faisant parcourir à chacun des p éléments de la lettre ρ un système complet de restes suivant le module $|\alpha'|$.

52. *Troisième cas* : $\alpha' \neq 0, |\alpha'| = 0$. — Dans ce cas, il existe un entier $p' < p$, tel qu'un au moins des mineurs à p'^2 éléments de $|\alpha'|$



n'est pas nul et que tous les mineurs à $(p' + 1)^2$ éléments de ce déterminant sont nuls. On peut trouver deux matrices à p^2 éléments, g et h vérifiant les conditions suivantes :

Leurs déterminants sont égaux à ± 1 ; soient $|g| = \varepsilon$, $|h| = \varepsilon'$.

En second lieu, $\alpha' \bar{h}$ a ses $p - p'$ dernières colonnes formées de zéros, de sorte que les matrices symétriques $h \bar{\alpha}' \alpha \bar{h}$, $h \bar{\alpha}' \tau \alpha' \bar{h}$ ont leurs $p - p'$ dernières lignes et colonnes formées de zéros.

En troisième lieu, la matrice

$$a = \bar{g} \alpha' \bar{h}$$

a ses $p - p'$ dernières lignes et colonnes formées de zéros, mais

$$a_1 = \bar{g} \alpha' | \bar{h},$$

c'est-à-dire la matrice a réduite aux éléments communs à ses p' premières lignes et colonnes a son déterminant différent de zéro (α étant une matrice à p^2 éléments, α désigne la matrice rectangulaire formée des p' premières lignes de α , $| \alpha$ désigne la matrice rectangulaire formée des p' premières colonnes de α).

Soit

$$b = g^{-1} \alpha \bar{h}.$$

Cette matrice jouit des deux propriétés suivantes :

D'abord les $p - p'$ derniers éléments de ses p' premières lignes sont nuls, d'où il résulte

$$|b| = |b_1| |b_2|,$$

b_1 étant la matrice formée des éléments communs aux p' premières lignes et colonnes de b , b_2 la matrice formée des éléments communs aux $p - p'$ dernières lignes et colonnes de b .

En second lieu, on a $|b_2| \neq 0$.

Ceci posé, on a

$$(37) \quad T = e^{\frac{\pi i (E + E')}{4}} K \sum_{\rho} e^{-\pi i \chi(\rho)}.$$

E a même valeur que dans les cas précédents; on a

$$(38) \quad E' = 2 d(\bar{\alpha} \alpha') d(\bar{\beta} \beta') - | \bar{h} \alpha^{-1} \bar{g} \beta' [d(\bar{\alpha} \alpha')]^2.$$

$\underline{\rho}$ désignant une lettre multiple à p' éléments, on a

$$(39) \quad \chi(\underline{\rho}) = b_1 \alpha_1^{-1} \underline{\rho}^2 + \bar{\alpha}_1^{-1} \underline{h} d(\bar{\alpha} \alpha') \underline{\rho},$$

$\sum_{\underline{\rho}}$ désigne une p' upl^e somme de Gauss; enfin

$$(40) \quad K = \frac{1}{|\alpha_1|^{p'-\frac{1}{2}}} \sqrt{\frac{\varepsilon \varepsilon' |b_2| i^{p'}}{|\alpha + \tau \alpha'|}} = \frac{1}{|\alpha_1|^{p'-1}} \sqrt{\frac{i^{p'}}{|\varphi_{p'}|}},$$

en désignant par $\varphi_{p'}$ la matrice

$$(41) \quad \varphi_{p'} = \bar{\alpha}_1 \underline{g}^{-1} (\alpha + \tau \alpha') \underline{h}$$

qui n'a que p'^2 éléments.

53. Dans le deuxième et le troisième cas, il reste à préciser le signe de K . Dans ce but, on décompose en somme de carrés la forme $\varphi \varepsilon^2$ ou $\varphi_{p'} \varepsilon^2$. Soit, par exemple, en posant avec $i < p$,

$$\varphi_i = \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \dots & \varphi_{1i} \\ \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{i1} & \dots & \varphi_{ii} \end{pmatrix},$$

$$\varphi \varepsilon^2 = \varphi_{11} \varepsilon_1^2 + \frac{|\varphi_2|}{|\varphi_{11}|} \varepsilon_2^2 + \frac{|\varphi_3|}{|\varphi_2|} \varepsilon_3^2 + \dots + \frac{|\varphi|}{|\varphi_{p-1}|} \varepsilon_p^2;$$

on écrit

$$\sqrt{\frac{i^{p'}}{|\varphi|}} = \sqrt{\frac{i}{\varphi_{11}}} \sqrt{\frac{i \varphi_{11}}{|\varphi_2|}} \sqrt{\frac{i |\varphi_2|}{|\varphi_3|}} \dots \sqrt{\frac{i |\varphi_{p-1}|}{|\varphi|}}.$$

Il se trouve que, dans le second membre, les quantités sous radical ont leurs parties réelles positives; on choisit les radicaux de manière que chaque facteur ait aussi sa partie réelle positive. S'il n'y a qu'un ou deux radicaux, il en résulte que le premier membre doit avoir sa partie réelle positive.

54. On voit que T est le quotient d'une racine de l'unité (d'ordre 8 ou $8|\alpha'|$ ou $8|\alpha_1|$) par la racine carrée de $|\alpha + \tau \alpha'|$ que je désignerai par μ ; μ^2 est le dénominateur commun des expressions des τ' en fonctions des τ ; μ est donc le dénominateur commun des expressions

de u' et v' en fonction de u et v . J'écrirai

$$T = \frac{A}{\mu}.$$

D'autre part, le seul facteur de T qui dépend des caractéristiques est $e^{\frac{\pi i E}{4}}$; j'écrirai

$$T = e^{\frac{\pi i E}{4}} H,$$

ou encore, en supposant la nouvelle caractéristique réduite,

$$T = \eta e^{\frac{\pi i E}{4}} H.$$

VII.

55. Appliquons ces formules générales à notre cas particulier. Nos intégrales primitives Ω , U , W constituent un des systèmes que je viens de désigner par Ω_i ($i = 1, \dots, p$); posons

$$\Omega = \Omega_1, \quad U = \Omega_2, \quad W = \Omega_3.$$

Les périodes fournies par le premier système de rétrosections (*fig. 1*) sont les quantités

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ b_1 & b_3 & b_5 \\ \Lambda_1 & \Lambda_3 & \Lambda_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \omega_{13} \\ \omega_{21} & \omega_{22} & \omega_{23} \\ \omega_{31} & \omega_{32} & \omega_{33} \end{pmatrix} = \omega,$$

$$\begin{pmatrix} a_2 & a_4 & a_6 \\ b_2 & b_4 & b_6 \\ \Lambda_2 & \Lambda_4 & \Lambda_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega'_{11} & \omega'_{12} & \omega'_{13} \\ \omega'_{21} & \omega'_{22} & \omega'_{23} \\ \omega'_{31} & \omega'_{32} & \omega'_{33} \end{pmatrix} = \omega'.$$

Soient

$$\begin{pmatrix} a'_1 & a'_3 & a'_5 \\ b'_1 & b'_3 & b'_5 \\ \Lambda'_1 & \Lambda'_3 & \Lambda'_5 \end{pmatrix} = [\omega], \quad \begin{pmatrix} a'_2 & a'_4 & a'_6 \\ b'_2 & b'_4 & b'_6 \\ \Lambda'_2 & \Lambda'_4 & \Lambda'_6 \end{pmatrix} = [\omega']$$

les périodes déduites d'un second système de rétrosections, c'est-

à-dire des rétrosections après qu'un point critique a effectué une rotation autour d'un autre de ces points. Supposons ces nouvelles périodes déterminées, il suffira de les porter ainsi que les anciennes dans les relations (27) et d'identifier ces relations pour déterminer les coefficients $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$. Il est même facile de voir qu'il suffit d'identifier celles de ces relations qui contiennent les périodes d'une des intégrales, par exemple W; les autres équations ne fourniraient que des vérifications. Par suite, il suffit de calculer les A' ; or ces quantités se déduisent facilement du Tableau des coefficients de la substitution et des équations (5). Ainsi, on a

$$S_1 = T_1^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}.$$

Il en résulte

$$v' = v, \quad u' = \lambda^2 u;$$

mais

$$u = \frac{\Lambda_3}{\Lambda_1}, \quad v = -\lambda^2 \frac{\Lambda_2}{\Lambda_1}, \quad u' = \frac{\Lambda'_3}{\Lambda'_1}, \quad v' = -\lambda^2 \frac{\Lambda'_2}{\Lambda'_1};$$

on a donc

$$(42) \quad \Lambda'_1 = \Lambda_1, \quad \Lambda'_2 = \Lambda_2, \quad \Lambda'_3 = \lambda^2 \Lambda_3$$

et, en tenant compte des relations (5),

$$\begin{aligned} \Lambda'_1 &= \Lambda_1, & \Lambda'_3 &= -\Lambda_3 + \Lambda_4, & \Lambda'_5 &= \Lambda_5, \\ \Lambda'_2 &= \Lambda_2, & \Lambda'_4 &= -\Lambda_3, & \Lambda'_6 &= \Lambda_6. \end{aligned}$$

Celles des relations (27) qui contiennent les A peuvent donc s'écrire

$$\begin{aligned} [\Lambda_1 \ \Lambda_3 \ \Lambda_5] \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix} + [\Lambda_2 \ \Lambda_4 \ \Lambda_6] \begin{bmatrix} \alpha'_{11} & \alpha'_{12} & \alpha'_{13} \\ \alpha'_{21} & \alpha'_{22} & \alpha'_{23} \\ \alpha'_{31} & \alpha'_{32} & \alpha'_{33} \end{bmatrix} &= [\Lambda_1 \ -\Lambda_3 + \Lambda_4 \ \Lambda_5], \\ [\Lambda_1 \ \Lambda_3 \ \Lambda_5] \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \end{bmatrix} + [\Lambda_2 \ \Lambda_4 \ \Lambda_6] \begin{bmatrix} \beta'_{11} & \beta'_{12} & \beta'_{13} \\ \beta'_{21} & \beta'_{22} & \beta'_{23} \\ \beta'_{31} & \beta'_{32} & \beta'_{33} \end{bmatrix} &= [\Lambda_2 \ -\Lambda_3 \ \Lambda_6]. \end{aligned}$$

Le résultat de l'identification est immédiat; je le disposerai en Tableau de la manière suivante

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \vdots & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

56. Ce Tableau des coefficients n'est pas le seul qui convienne à la substitution S_1 . D'une manière générale, j'ai calculé les substitutions sur des figures qui contenaient un élément arbitraire : j'ai supposé que la ligne de passage entraînée avec le point ne décrivait pas un tour complet autour de ce point. Faisons maintenant l'hypothèse contraire et supposons d'abord qu'elle tourne en sens direct; les courbes passeront du premier feuillet au troisième; du deuxième au premier; du troisième au deuxième; en vertu des relations (4), les quantités $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ et, par suite, les A' seront multipliées par λ ; les équations (42) seront remplacées par

$$(43) \quad A'_1 = \lambda A_1, \quad A'_2 = \lambda A_2, \quad A'_3 = A_3.$$

De même, si c'est en sens rétrograde qu'on fait tourner la ligne de passage; les équations (42) seront remplacées par

$$(44) \quad A'_1 = \lambda^2 A_1, \quad A'_2 = \lambda^2 A_2, \quad A'_3 = \lambda A_3.$$

Les équations (43) et (44) donnent deux nouveaux Tableaux de coefficients; chaque substitution S_i conduit ainsi à trois transformations distinctes; je les désigne par S'_i, S''_i, S'''_i . Ces trois transformations ont ceci de remarquable que les valeurs des τ' sont les mêmes pour les trois; en effet, on passe de l'une à l'autre en remplaçant les A' par des grandeurs proportionnelles, ce qui ne change pas u' et v' . Il en résulte des relations entre les fonctions θ ; ces relations sont les mêmes quelle que soit la substitution qui sert de point de départ; je les établirai en partant de S_1 . Voici d'abord les éléments

des trois transformations provenant de cette substitution [S'₁ correspond aux équations (43), S''₁ aux équations (42); quant à S'₁ elle provient des équations (44), mais j'ai changé les signes de tous les coefficients afin d'avoir |α_i| > 0; on sait que ce changement de signe est sans influence].

57. Transformation S'₁.

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{pmatrix}'_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \vdots & & \\ 0 & 1 & 0 & & & 0 \\ -1 & 0 & -1 & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & -1 & 0 & 1 \\ 0 & & & 0 & 1 & 0 \\ & & & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} \alpha' &= 0, \\ x'_1 &= x_3, \quad x'_2 = x_2, \quad x'_3 = -x_1 - x_3, \\ |\alpha| &= \mu_1^2 = 1, \quad \phi'_1 = 0, \quad \Pi'_1 = 1. \end{aligned}$$

58. Transformations S''₁ et S'''₁.

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{pmatrix}''_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{pmatrix}'''_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour ces deux transformations, on a α' ≠ 0, |α'| = 0, p' = 1. Soient y' et z' les valeurs des nouvelles variables, c'est-à-dire les quantités (α + τα')x relatives aux deux substitutions. On trouve

$$y' = \delta x', \quad z' = \delta' x'$$

en posant

$$(45) \quad \delta = \begin{pmatrix} 0 & \lambda^2 u & -1 \\ 0 & \lambda^2 & 0 \\ 1 & u & 1 \end{pmatrix}, \quad \delta' = \begin{pmatrix} -1 & \lambda^2 u & -1 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 1 & u & 0 \end{pmatrix}.$$

Ces matrices vérifient les relations suivantes :

$$(46) \quad \delta^2 = \delta', \quad \delta'^2 = -\delta,$$

d'où il suit

$$\partial^3 = -\partial'^3 = \partial\partial' = \partial'\partial = -1, \quad \partial'^{-1} = -\partial, \quad \partial^{-1} = -\partial'.$$

En formant $\overline{\alpha'}(\alpha + \tau\alpha')$, on trouve, pour les formes quadratiques des deux substitutions,

$$\varphi_1'' x^2 = -\lambda^2 x_2^2, \quad \varphi_1''' x^2 = \lambda x_2^2.$$

Pour les deux substitutions, on peut prendre

$$g = h = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\varepsilon = \varepsilon' = -1),$$

et l'on trouve $\alpha_1 = 1$.

Dans les deux cas on a $E' = 0$, et la somme de Gauss se réduit à 1.

Pour S_1'' , on a $|b_2| = 1$, $|\alpha + \tau\alpha'| = -\lambda^2$, d'où

$$\sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon'|b_2|i}{|\alpha + \tau\alpha'|}} = \sqrt{-i\lambda} = \pm \frac{1-i}{\sqrt{2}} \lambda^2 = \pm \left(\frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} + i \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \right).$$

Il faut que la partie réelle soit positive; c'est donc le signe $-$ qui convient, et l'on a

$$H_1'' = \frac{-1+i}{\sqrt{2}} \lambda^2.$$

Pour S_1''' , on a $|b_2| = 1$, $|\alpha + \tau\alpha'| = \lambda$,

$$\sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon'|b_2|i}{|\alpha + \tau\alpha'|}} = \sqrt{i\lambda^2} = \pm \frac{1+i}{\sqrt{2}} \lambda = \pm \left(\frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \right) + i \left(\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \right).$$

C'est encore le signe $-$ qui convient, et l'on a

$$H_1''' = \frac{-1-i}{\sqrt{2}} \lambda.$$

Restent à calculer E , k et K , qui dépendent des caractéristiques.

Pour S_1' , on a $E = 0$,

$$\begin{aligned} k_1 &\equiv -q_1 - q_3, & k_2 &\equiv q_2, & k_3 &\equiv q_1 & (\text{mod } 4), \\ k_1' &\equiv q_3', & k_2' &\equiv q_2', & k_3' &\equiv q_1 + q_3' & (\text{mod } 2). \end{aligned}$$

Pour S_1'' , en remarquant que $q_i^2 = q_i$ et $q_i'^2 = q_i'$, puisque les q et q' n'ont d'autres valeurs que 0 et 1, on trouve

$$\begin{aligned} E &\equiv -q_2 + 2q_2q_2' \pmod{8}, \\ k_1 &\equiv -q_3, & k_2 &\equiv q_2 + q_2' - 1, & k_3 &\equiv q_1 + q_3 \pmod{4}, \\ k_1' &\equiv q_1 + q_3', & k_2' &\equiv q_2, & k_3' &\equiv q_1' \pmod{2}. \end{aligned}$$

Pour S_1''' , on a

$$\begin{aligned} E &\equiv q_2' + 2q_2q_2' \pmod{8}, \\ k_1 &\equiv q_1, & k_2 &\equiv q_2', & k_3 &\equiv q_3 \pmod{4}, \\ k_1' &\equiv q_1', & k_2' &\equiv q_2 + q_2' + 1, & k_3' &\equiv q_3' \pmod{2}. \end{aligned}$$

59. On a ainsi les trois formules de transformation

$$(47) \quad \left\{ \begin{aligned} \theta_N(x') &= \eta \theta_{N'}(x) = \Lambda \theta_{N'}(x), \\ \theta_N(x') &= \eta \frac{-1+i}{\sqrt{2}} e^{\frac{\pi i(-q_2+2q_2q_2')}{4}} \lambda^2 e^{\pi i \lambda^2 x^2} \theta_{N''}(x) = \Lambda \lambda^2 e^{\pi i \lambda^2 x^2} \theta_{N''}(x), \\ \theta_N(x') &= \eta \frac{-1-i}{\sqrt{2}} e^{\frac{\pi i(q_2'+2q_2q_2')}{4}} \lambda e^{-\pi i \lambda^2 x^2} \theta_{N'''}(x) = \Lambda \lambda e^{-\pi i \lambda^2 x^2} \theta_{N'''}(x). \end{aligned} \right.$$

La première donne, en particulier,

$$(47)' \quad \theta_1(x') = \theta_1(x).$$

On pourrait supposer que, dans ces formules, N parcourt les 64 caractéristiques; il en serait alors de même, mais dans des ordres différents, de N' , N'' , N''' . Toutefois, comme les caractéristiques sont toujours transformées en des caractéristiques de même parité, il est avantageux de supposer que N parcourt seulement les 36 caractéristiques paires; il en est alors de même dans d'autres ordres de N' , N'' , N''' ; puis on écrira de nouveau ces formules en y remplaçant θ_N par θ_N et l'on supposera que N parcourt les 28 caractéristiques impaires.

Pour ce qui concerne l'échange des caractéristiques, on trouve avec cette substitution et avec toutes les autres que les fonctions se séparent en cycles de 1 ou 3 fonctions; en d'autres termes, ou bien θ_N est transformée en elle-même, ou bien elle est transformée en $\theta_{N'}$ qui, par la même transformation, devient $\theta_{N''}$ qui, à son tour, devient θ_N ;

il en est de même des fonctions impaires. Le fait le plus remarquable est que la fonction qui a pour caractéristique

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

et que je désigne par \mathfrak{S}_1 , est transformée en elle-même par toutes les substitutions.

Les racines de l'unité Λ présentent aussi une propriété remarquable; quand une fonction est transformée en elle-même, on a, dans la relation correspondante, $\Lambda = 1$ si la fonction est paire, $\Lambda = \pm 1$ si elle est impaire; si trois fonctions forment un cycle et que l'on écrive les trois relations relatives à ces fonctions, le produit des racines Λ qui y figurent est 1 si les fonctions sont paires, ± 1 si les fonctions sont impaires.

60. N' , N'' , N''' parcourant toutes les caractéristiques, prenons les trois relations où figurent la même caractéristique $N' = N'' = N'''$, et supposons que les caractéristiques N correspondantes soient N_1 , N_2 , N_3 ; nous aurons

$$(48) \quad \pm \theta'_{N'}(x) = \theta_{N_1}(x') = \gamma \lambda e^{-\pi i \lambda^2 x'^2} \theta_{N_1}(\partial x') = \gamma' \lambda^2 e^{\pi i \lambda^2 x'^2} \theta_{N_1}(\partial' x'),$$

$$(49) \quad \pm \mathfrak{S}'_{N'}(x) = \mathfrak{S}_{N_1}(x') = \gamma \lambda e^{-\pi i \lambda^2 x'^2} \mathfrak{S}_{N_1}(\partial x') = \gamma' \lambda^2 e^{\pi i \lambda^2 x'^2} \mathfrak{S}_{N_1}(\partial' x'),$$

où γ et γ' sont des racines huitièmes de l'unité.

Il existe des caractéristiques N'' et N''' qui sont les transformées de N_2 et N_3 par la transformation S'_1 ; si l'on cherche les trois expressions de $\theta'_{N''}(x)$ et de $\theta'_{N'''}(x)$ comme on a cherché celles de $\theta'_{N'}(x)$, on trouve

$$(48)' \quad \pm \theta'_{N''}(x) = \theta_{N_2}(x') = \frac{\gamma'}{\gamma} \lambda e^{-\pi i \lambda^2 x'^2} \theta_{N_2}(\partial x') = \frac{1}{\gamma} \lambda^2 e^{\pi i \lambda^2 x'^2} \theta_{N_2}(\partial' x'),$$

$$(48)'' \quad \pm \theta_{N'''}(x) = \theta_{N_3}(x') = \frac{1}{\gamma'} \lambda e^{-\pi i \lambda^2 x'^2} \theta_{N_3}(\partial x') = \frac{\gamma}{\gamma'} \lambda^2 e^{\pi i \lambda^2 x'^2} \theta_{N_3}(\partial' x'),$$

et avec les fonctions impaires

$$(49)' \quad \pm \mathfrak{S}'_{N''}(x) = \mathfrak{S}_{N_2}(x') = \frac{\gamma'}{\gamma} \lambda e^{-\pi i \lambda^2 x'^2} \mathfrak{S}_{N_2}(\partial x') = -\frac{1}{\gamma} \lambda^2 e^{\pi i \lambda^2 x'^2} \mathfrak{S}_{N_2}(\partial' x'),$$

$$(49)'' \quad \pm \mathfrak{S}_{N'''}(x) = \mathfrak{S}_{N_3}(x') = -\frac{1}{\gamma'} \lambda e^{-\pi i \lambda^2 x'^2} \mathfrak{S}_{N_3}(\partial x') = -\frac{\gamma}{\gamma'} \lambda^2 e^{\pi i \lambda^2 x'^2} \mathfrak{S}_{N_3}(\partial' x'),$$

Les formules pourront s'écrire, en remplaçant x' par x ,

$$(50) \quad \begin{cases} \theta_{N+12}(x) = \gamma_N \lambda e^{-\pi i \lambda^2 x^2} \theta_N(\partial x), & \theta_{N+24}(x) = \gamma'_N \lambda^2 e^{\pi i \lambda x^2} \theta_N(\partial' x) \\ (N=1, 2, \dots, 12), \end{cases}$$

en donnant aux γ_N et γ'_N les valeurs suivantes :

$$\begin{array}{c|cccccc} N & 1, 2, \dots, 7 & 8 & 9 & 10 & 11, 12 \\ \hline \gamma_N & \frac{-1-i}{\sqrt{2}} & \frac{-1-i}{\sqrt{2}} & \frac{1+i}{\sqrt{2}} & \frac{1+i}{\sqrt{2}} & -1 \\ \gamma'_N & \frac{-1+i}{\sqrt{2}} & \frac{1-i}{\sqrt{2}} & \frac{-1+i}{\sqrt{2}} & \frac{1-i}{\sqrt{2}} & -1 \end{array}$$

Puis

$$(51) \quad \mathfrak{E}_1(x) = -\lambda e^{-\pi i \lambda^2 x^2} \mathfrak{E}_1(\partial x) = \lambda^2 e^{\pi i \lambda x^2} \mathfrak{E}_1(\partial' x),$$

$$(52) \quad \mathfrak{E}_{N+9}(x) = \gamma_N \lambda e^{-\pi i \lambda^2 x^2} \mathfrak{E}_N(\partial x), \quad \mathfrak{E}_{N+18}(x) = \gamma'_N \lambda^2 e^{\pi i \lambda x^2} \mathfrak{E}_N(\partial' x) \quad [N=2, 3, \dots, 10],$$

en donnant aux γ_N et γ'_N les valeurs suivantes :

$$\begin{array}{c|ccccccccc} N & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ \hline \gamma_N & \frac{1+i}{\sqrt{2}} & \frac{-1-i}{\sqrt{2}} & -1 & \frac{-1-i}{\sqrt{2}} & 1 & -i & \frac{-1-i}{\sqrt{2}} & \frac{-1-i}{\sqrt{2}} & -1 \\ \gamma'_N & \frac{1-i}{\sqrt{2}} & \frac{-1+i}{\sqrt{2}} & 1 & \frac{-1+i}{\sqrt{2}} & 1 & \frac{-1+i}{\sqrt{2}} & i & \frac{1-i}{\sqrt{2}} & 1 \end{array}$$

VIII.

62. Les autres transformations conduiraient aux mêmes relations. Je ne les développerai pas entièrement, je me contenterai de calculer certaines formules relatives à S'_2, S'_4, S'_6 dont je vais me servir dans le calcul qui suit :

63. Transformation S'_2 . — On a

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{pmatrix}'_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \vdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -1 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & -1 & \vdots & 2 & -1 & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \vdots & -1 & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \vdots & -1 & 1 & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \vdots & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} \alpha' &= 0. \\ x''_1 &= x_2 + x_3, & x''_2 &= x_2, & x''_3 &= -x_1 - 2x_2 - x_3. \\ |\alpha| &= \mu_2^2 = 1, & \varphi'_2 &= 0, & H'_2 &= 1. \end{aligned}$$

On trouve ensuite

$$\begin{aligned} E &\equiv -q'_1 + 3q'_3 + 4q'_1q'_2 + 4q'_1q'_3 - 2q'_2q'_3 && \pmod{8}, \\ k_1 &\equiv -q_1 - q_2 - q_3 + q'_1 + q'_2 + 2q'_3, & k_2 &\equiv q_2 + 2q_1 + q'_3, & k_3 &\equiv q_1 - q_2 + q'_1 + 2q'_2 + q'_3 + 1 && \pmod{4}, \\ k'_1 &\equiv q'_3, & k'_2 &\equiv q'_1 + q'_2, & k'_3 &\equiv q'_1 + q'_3 && \pmod{2}. \end{aligned}$$

On en déduit en particulier

$$(53) \quad \theta_7(x'') = \theta''_1(x).$$

64. Transformation S'_4 .

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{pmatrix}'_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & \vdots & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & \vdots & -1 & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & -1 & \vdots & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & \vdots & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} \alpha' &\neq 0, & |\alpha'| &= 0, & p' &= 2, \\ |\alpha + \tau\alpha'| &= \mu_4^2, \\ \mu_4 &= (\lambda - \lambda^2)\nu - 2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1^{\nu'} &= \lambda u^2 x_1 + (\mu_4 - u^2) x_2, \\ x_2^{\nu'} &= (1 - \lambda) u x_1 + x_2 + (1 - \lambda^2) u x_3, & x_3^{\nu'} &= (\lambda^2 u^2 - \mu_4) x_1 - (\lambda u^2 + \mu_4) x_3, \\ \varphi_4' x^2 &= -2\mu_4(x_1^2 + x_1 x_3 + x_3^2) + (\lambda^2 - 1) u^2 (x_1^2 - 2\lambda^2 x_1 x_3 + \lambda x_3^2). \end{aligned}$$

En prenant

$$g = h = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\varepsilon = \varepsilon' = -1),$$

on trouve

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad |a_1| = 3, \quad |b_2| = 1.$$

Il en résulte

$$\frac{e^{\frac{\pi i E'}{4}}}{|\alpha_1|^{p' - \frac{1}{2}}} \sum_{\rho} e^{-\pi i \chi(\rho)} = \frac{\lambda}{3\sqrt{3}} \cdot 3(1 - \lambda) = i$$

et

$$\sqrt{\frac{\varepsilon \varepsilon' |b_2| i^{p'}}{|\alpha + \tau\alpha'|}} = \sqrt{\frac{-1}{\mu_4^2}} = \frac{\pm i}{\mu_4} = \frac{\pm i}{(\lambda - \lambda^2)\nu - 2} = \frac{\pm [\sqrt{3}\nu' + i(2 - \sqrt{3}\nu'')]}{(2 - \sqrt{3}\nu'')^2 + 3\nu'^2},$$

il faut que le second membre ait sa partie réelle positive et la condition de convergence $u'^2 + u''^2 + 2v' < 0$ exige que v' soit négatif; c'est donc le signe $-$ qui convient, et l'on a

$$H'_k = \frac{1}{\mu_k}.$$

On trouve ensuite

$$\begin{aligned} E &\equiv 2(-q_1 + q_3 + 2q'_1 + 2q'_3 - q_1q_3 - q_1q'_1 - q_3q'_3 + 2q'_1q'_3) \pmod{8}, \\ k_1 &\equiv -q_1 - q_3 + q'_1 + q'_3 + 2, & k_2 &\equiv q_2, & k_3 &\equiv q_1 + 2q'_1 + q'_2 + 2 \pmod{4}, \\ k'_1 &\equiv q_1, & k'_2 &\equiv q'_2, & k'_3 &\equiv q_1 + q_3 \pmod{2}. \end{aligned}$$

On en déduit en particulier

$$(54) \quad \theta_1(x^{iv}) = \frac{e^{-i\pi i \varphi'_k x^2}}{\mu_k} \theta_1^{iv}(x).$$

65. Transformation S'_6 .

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{pmatrix}'_6 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & 1 & 1 & \vdots & -1 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & \vdots & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} \alpha' &\neq 0, & |\alpha'| &= 0, & \rho' &= 2 \\ -|\alpha + \tau\alpha'| &= \mu_6^2, \\ \mu_6 &= \lambda^2 + (\lambda - 1)u + (\lambda - \lambda^2)v. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1^{vi} &= -\lambda(u + \lambda)^2 x_1 + [(u + \lambda)^2 - \mu_6] x_2 + [(u + \lambda)^2 - \mu_6] x_3, \\ x_2^{vi} &= -\lambda(\lambda^2 - 1)(u + \lambda) x_1 + [(\lambda^2 - 1)u - \lambda] x_2 + (\lambda^2 - 1)(u + \lambda) x_3, \\ x_3^{vi} &= [-\lambda^2(u^2 - u + 1) + \mu_6] x_1 + [\lambda(u^2 - u - \lambda) + \mu_6] x_2 + [\lambda(u^2 - u + 1) + \mu_6] x_3. \end{aligned}$$

En posant $x_4 = x_2 + x_3$, on a

$$\varphi'_6 x^2 = -2\mu_6(x_1^2 + x_1 x_4 + x_4^2) + (\lambda^2 - 1)(u + \lambda)^2(x_1^2 - 2\lambda^2 x_1 x_4 + \lambda x_4^2).$$

En prenant

$$\bar{g} = h = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (\varepsilon = \varepsilon' = 1),$$

on trouve

$$a_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad |a_1| = 3, \quad |b_2| = -1.$$

Il en résulte

$$\frac{e^{\frac{\pi i E'}{4}}}{|\alpha_1|^{p'-\frac{1}{2}}} \sum_{\rho} e^{-\pi i \chi(\rho)} = \frac{(-1-i)\lambda}{\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{3}} \cdot 3(1-\lambda) = \frac{1-i}{\sqrt{2}}.$$

$$\sqrt{\frac{\varepsilon \varepsilon' |b_2| i^{p'}}{|\alpha + \tau \alpha'|}} = \sqrt{-\frac{1}{\mu_6^2}} = \frac{\pm i}{\mu_6} = \frac{\pm i}{\lambda^2 + (\lambda - 1)u + (\lambda - \lambda^2)v}$$

$$= \frac{\pm 2 [\sqrt{3}(1-u' - \sqrt{3}u'' + 2v') + i(-1-3u' - \sqrt{3}u'' - 2\sqrt{3}v'')]}{(-1-3u' - \sqrt{3}u'' - 2\sqrt{3}v'')^2 + 3(-1-u' - \sqrt{3}u'' + 2v')^2}.$$

Le plan et le paraboloïde

$$-1 - u' - \sqrt{3}u'' + 2v' = 0, \quad u'^2 + u''^2 + 2v' = 0$$

ne se rencontrant qu'en des points imaginaires, le premier membre de l'équation du plan a donc même signe en tout point intérieur au paraboloïde, on trouve que c'est le signe $-$; c'est donc le signe $-$ qu'il faut prendre pour que l'expression précédente ait sa partie réelle positive; on a ainsi

$$\mathbb{H}'_6 = \frac{-1-i}{\sqrt{2}} \frac{1}{\mu_6}.$$

On trouve ensuite

$$\begin{aligned} E &\equiv 3q_1 + q'_2 - 2(q_1 - q_2 - q_3)q'_2 && \pmod{8}, \\ k_1 &\equiv -q_1, & k_2 &\equiv 2q_1 + q_3 - q'_2, & k_3 &\equiv -q_3 && \pmod{4}, \\ k'_1 &\equiv q_1 + q'_1 + q'_2 + 1, & k'_2 &\equiv q_1 + q_2 + q_3 + q'_2 + 1, & k'_3 &\equiv q_1 + q_2 + q_3 + q'_3 + 1 && \pmod{2}. \end{aligned}$$

Il en résulte en particulier

$$(55) \quad \mathfrak{S}_1(x^{VI}) = -\frac{e^{-\pi i \varphi_6 x^2}}{\mu_6} \mathfrak{S}_1^{\text{VI}}(x).$$

66. Nous avons maintenant les formules qui nous sont nécessaires pour déterminer la demi-période $\frac{p_1}{2}, \frac{p_2}{2}, \frac{p_3}{2}$ contenue dans les arguments des expressions (17). Posons

$$p_i = v_i + v'_1 \tau_{i1} + v'_2 \tau_{i2} + v'_3 \tau_{i3} \quad (i = 1, 2, 3);$$

il s'agit de déterminer les quantités v_i et v'_i .

67. Je remarque d'abord que les six arguments sont de la forme suivante :

$$x_1(u, v) = \mu_1[\lambda^2 u^2 + (\lambda - \lambda^2)v] + \mu_2 \lambda^2 u - 2\mu'_1 + \frac{p_1}{2},$$

$$x_2(u, v) = \mu_1(\lambda - \lambda^2)u - \mu_2 \lambda^2 - \mu'_2 + \frac{p_2}{2},$$

$$x_3(u, v) = \mu_1 u^2 + \mu_2 u + \mu'_1 + \frac{p_3}{2},$$

où $\mu_1, \mu'_1, \mu_2, \mu'_2$ sont des coefficients numériques. Les valeurs à donner à ces coefficients pour avoir les arguments sont contenues dans le Tableau suivant où (i) désigne le $i^{\text{ème}}$ argument $x_1^{(i)}(u, v), x_2^{(i)}(u, v), x_3^{(i)}(u, v)$:

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
μ_1	0	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$
μ_2	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0
μ'_1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
μ'_2	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0

J'ai désigné par $\theta_N^{(i)}(x)$ ce que devient $\theta_N(x)$ quand on effectue la substitution S_i sur u et v qui figurent dans les périodes. Soit

$$x_k^{(i)}[S_i(u, v)]$$

ce que devient $x_k^{(j)}(u, v)$ quand on y effectue la même substitution.

Enfin, désignons par M'_i la matrice $\alpha + \tau\alpha'$ relative à la transformation S'_i ; nous aurons, d'après la formule de transformation,

$$\theta_1^{(i)}\{x[S_i(u, v)]\} = A'_i \mu_i e^{\pi i \varphi'_i\{x[S_i(u, v)]\}} \theta_N\{M'_i x[S_i(u, v)]\}.$$

68. Pour que la substitution S_i laisse invariante les expressions de $1 - \frac{1}{x}$ et de $1 - \frac{1}{y}$, il faut deux conditions :

1° Que, à un facteur exponentiel près, $\theta_N\{M'_i x[S_i(u, v)]\}$ soit égal à $\theta_1\{x(u, v)\}$, $x(u, v)$ représentant un quelconque des six arguments;

2° En supposant la première condition réalisée, que si

$$e^{2\pi i \Psi'_i(u, v)}, \quad e^{2\pi i \Psi''_i(u, v)}$$

sont les facteurs qui s'introduisent quand on effectue la substitution S_i dans les produits de fonction θ qui figurent dans les expressions de $1 - \frac{1}{x}$, $1 - \frac{1}{y}$, on ait, à des entiers près,

$$(56) \quad \begin{cases} E' [S_i(u, v)] + \Psi'_i(u, v) = E'(u, v), \\ E'' [S_i(u, v)] + \Psi''_i(u, v) = E''(u, v), \end{cases}$$

$E'(u, v)$ et $E''(u, v)$ désignant les expressions (25).

La première de ces conditions appliquée aux substitutions S_1, S_2, S_4 va nous suffire pour déterminer la demi-période.

69. *Transformation S'_1 .* — On a, d'après la formule (47),

$$\theta'_1 \{x [S_1(u, v)]\} = \theta_1 \{M'_1 x [S_1(u, v)]\}.$$

Or, si l'on forme la somme

$$M'_1 x [S_1(u, v)] + \delta x(u, v),$$

où δ est la première des matrices (45), et si l'on cherche à l'égaliser à celle des demi-périodes $\frac{1}{2}(\sigma + \tau\sigma')$ qui correspond à la vingt-cinquième fonction paire, c'est-à-dire à celle dont les éléments sont (les ρ et ρ' désignant des entiers) :

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= 2\rho_1, & \sigma_2 &= 2\rho_2, & \sigma_3 &= 2\rho_3, \\ \sigma'_1 &= 2\rho'_1, & \sigma'_2 &= 2\rho'_2 + 1, & \sigma'_3 &= 2\rho'_3. \end{aligned}$$

On trouve que l'identification est possible à la seule condition de poser

$$(57) \quad v_2 = v'_2 = -1.$$

On a donc, en faisant ces hypothèses et en appliquant une formule connue,

$$\begin{aligned} \theta'_1 \{x [S_1(u, v)]\} &= \theta_1 \left[\delta x(u, v) - \frac{1}{2}(\sigma + \tau\rho') \right] \\ &= \pm e^{\frac{\pi i(2\rho'+1)}{2} \left[-\lambda^2 x_2(u, v) + \frac{1}{4}(2\rho'_2+1)\lambda^2 \right]} \theta_{23} [\delta x(u, v)]. \end{aligned}$$

Mais si, dans la seconde des formules (50), on change x en δx , d'où il suit, d'après les formules (48), que $\delta'x$ est changé en $-x$, et si l'on

y fait $N = 1$, on a

$$\theta_{25}(\delta x) = \frac{-1+i}{\sqrt{2}} \lambda^2 e^{\pi i \lambda^2 x^2} \theta_1(x).$$

En appliquant cette formule, on a finalement

$$\theta_1 \{x[S_1(u, v)]\} = \pm \frac{-1+i}{\sqrt{2}} \lambda^2 e^{\pi i \lambda^2 \left[\frac{1}{2}(2\rho_2+1) - x_2(u, v)\right]^2} \theta_1[x(u, v)].$$

70. *Transformation S'_2.* — La formule (53) donne

$$\theta_1'' \{x[S_1(u, v)]\} = \theta_7 \{M'_2 x[S_2(u, v)]\}.$$

Supposons que $\frac{1}{2}(\sigma + \tau\sigma')$ soit la demi-période qu'il faut ajouter à la septième demi-période paire pour reproduire la vingt-cinquième; c'est-à-dire, supposons que l'on ait

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= 2\rho_1 + 1, & \sigma_2 &= 2\rho_2, & \sigma_3 &= 2\rho_3 + 1, \\ \sigma'_1 &= 2\rho'_1, & \sigma'_2 &= 2\rho'_2 + 1, & \sigma'_3 &= 2\rho'_3, \end{aligned}$$

et cherchons à identifier cette demi-période avec

$$M'_2 x[S_2(u, v)] + \delta x(u, v).$$

En supposant $v_2 = v'_2 = -1$, on trouve que l'identification est possible à la condition d'ajouter

$$(58) \quad v'_1 = v'_3 = 0.$$

Ces hypothèses faites, on trouve, en procédant comme au cas précédent,

$$\theta_1'' \{x[S_2(u, v)]\} = \pm \frac{-1+i}{\sqrt{2}} \lambda^2 e^{\pi i \lambda^2 \left[\frac{1}{2}(2\rho'_2+1) - x_1(u, v)\right]^2} \theta_1[x(u, v)].$$

71. *Transformation S'_4.* — La formule (54) donne

$$\theta_1'' \{x[S_4(u, v)]\} = \mu_4 e^{\pi i \varphi_4 \{x[S_4(u, v)]\}^2} \theta_1 \{M'_4 x[S_4(u, v)]\}.$$

Supposons, comme au premier cas, que la demi-période $\frac{1}{2}(\sigma + \tau\sigma')$ a pour éléments

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= 2\rho_1, & \sigma_2 &= 2\rho_2, & \sigma_3 &= 2\rho_3, \\ \sigma'_1 &= 2\rho'_1, & \sigma'_2 &= 2\rho'_2 + 1, & \sigma'_3 &= 2\rho'_3, \end{aligned}$$

et cherchons à l'identifier avec l'expression

$$M'_4 x[S_4(u, v)] + \delta x(u, v).$$

En supposant $v_2 = v'_2 = -1$ et $v'_1 = v'_3 = 0$, on trouve que l'identification est possible à la condition de poser

$$(59) \quad v_1 = v_3 = 0.$$

La demi-période cherchée est entièrement déterminée par les équations (57), (58), (59); c'est bien celle qui correspond à la fonction impaire \mathfrak{S}_1 , ainsi que je l'ai annoncé à la première Partie.

72. Je vais maintenant me servir des formules de transformation pour montrer que la substitution S_6 laisse invariante les fonctions x et y .

Il est nécessaire ici de tenir compte des deux conditions du n° 68; je suppose la demi-période déterminée et les expressions de $1 - \frac{1}{x}$ et $1 - \frac{1}{y}$ mises sous la forme (26), mais, pour plus de commodité, je désigne les arguments par

$$\bar{x}_j^{(i)}(u, v) = x_j^{(i)}(u, v) - \frac{\rho_i}{2}.$$

La formule (55) donne

$$\mathfrak{S}_1 \{ \bar{x}[S_6(u, v)] \} = -\mu_6 e^{\pi i \varphi_6 \{ \bar{x}[S_6(u, v)] \}^2} \mathfrak{S}_1 \{ M'_6 \bar{x}[S_6(u, v)] \}.$$

Si l'on forme la quantité

$$M'_6 \bar{x}[S_6(u, v)] + \bar{x}(u, v),$$

elle se trouve être égale à une période $\rho + \tau\rho'$, pour chacun des six arguments; pour tous les six, on a

$$\rho_1 = \rho_2 = 0, \quad \rho'_2 = \rho'_3 = 1;$$

les valeurs des deux autres éléments sont contenues dans le Tableau suivant :

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
ρ'_1	1	0	0	1	0	1
ρ_2	0	-1	-1	0	-1	0

En débarrassant les arguments de la période, on a donc (en désignant par q, q' la caractéristique de la fonction \mathfrak{S}_i)

$$\mathfrak{S}_i' \{ \bar{x} [\mathfrak{S}_6(u, v)] \} = \mu_6 e^{\pi i \left\{ \varphi_6' \{ \bar{x} [\mathfrak{S}_6(u, v)] \} + 2\rho' \left[\bar{x}(u, v) - \frac{1}{2} \tau \rho' \right] + \rho' q + \rho q' \right\}} \mathfrak{S}_i \{ \bar{x}(u, v) \},$$

$x(u, v)$ représentant l'un quelconque des six arguments.

La première condition est donc réalisée; pour montrer qu'il en est de même de la seconde, il faut calculer les expressions $\Psi_6'(u, v)$ et $\Psi_6''(u, v)$.

73. Je remarque d'abord que, parmi les facteurs exponentiels de la formule précédente, ceux qui sont indépendants des arguments ne donnent aucun terme aux expressions Ψ' à cause de la symétrie des valeurs des ρ et des ρ' ; on voit, en effet, sur le Tableau de ces valeurs que la somme des nombres (1) et (3) est égale à la somme des nombres (2) et (4), et la somme des nombres (1) et (5) est égale à la somme des nombres (2) et (6); or (1), (3), (5) correspondent aux fonctions des numérateurs, (2), (4), (6) aux fonctions des dénominateurs. Une autre simplification provient de ce que l'on a, pour $i = 1, 2, 3$,

$$\bar{x}_i^{(1)} - \bar{x}_i^{(2)} = -(\bar{x}_i^{(3)} - \bar{x}_i^{(4)}) = -(\bar{x}_i^{(5)} - \bar{x}_i^{(6)}).$$

En tenant compte de ces relations, on trouve

$$\Psi_6'(u, v) = \Pi_6^{(1)}(u, v) + 3(\bar{x}_1^{(1)} - \bar{x}_1^{(4)}),$$

$$\Psi_6''(u, v) = \Pi_6^{(2)}(u, v) + 3(\bar{x}_1^{(1)} - \bar{x}_1^{(6)}),$$

avec

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} \Pi_6^{(1)}(u, v) &= \varphi_6' \{ \bar{x}^{(1)} [\mathfrak{S}_6(u, v)] \}^2 \\ &\quad - \varphi_6' \{ \bar{x}^{(2)} [\mathfrak{S}_6(u, v)] \}^2 + \varphi_6' \{ \bar{x}^{(3)} [\mathfrak{S}_6(u, v)] \}^2 - \varphi_6' \{ \bar{x}^{(4)} [\mathfrak{S}_6(u, v)] \}^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} \Pi_6^{(2)}(u, v) &= \varphi_6' \{ \bar{x}^{(1)} [\mathfrak{S}_6(u, v)] \}^2 \\ &\quad - \varphi_6' \{ \bar{x}^{(2)} [\mathfrak{S}_6(u, v)] \}^2 + \varphi_6' \{ \bar{x}^{(5)} [\mathfrak{S}_6(u, v)] \}^2 - \varphi_6' \{ \bar{x}^{(6)} [\mathfrak{S}_6(u, v)] \}^2. \end{aligned}$$

74. Pour effectuer le calcul de ces dernières expressions, il est avantageux de poser

$$u + \lambda = a, \quad x_2 + x_3 = x_4;$$

la substitution peut alors s'écrire

$$\left[a, \quad v, \quad \frac{\lambda^2 a}{\mu_6}, \quad \frac{\lambda^2 v}{\mu_6} \right],$$

et l'on a

$$\begin{aligned} \mu_6 &= (\lambda - 1)(a - \lambda v) + \lambda, \\ \varphi'_6 x^2 &= -2\mu_6(x_1^2 + x_1 x_4 + x_4^2) + (\lambda^2 - 1)a^2(x_1^2 - 2\lambda^2 x_1 x_4 + \lambda x_4^2), \\ \bar{x}_1^{(1)} &= -\frac{2}{3}, & \bar{x}_4^{(1)} &= \frac{1}{3}, \\ \bar{x}_1^{(2)} &= \frac{1}{3}[\lambda^2 a^2 + (\lambda - 1)a + \lambda - 1 + (\lambda - \lambda^2)v], & \bar{x}_4^{(2)} &= \frac{1}{3}a^2, \\ \bar{x}_1^{(3)} &= \frac{1}{3}(\lambda^2 a - 1), & \bar{x}_4^{(3)} &= \frac{1}{3}(a - 1), \\ \bar{x}_1^{(4)} &= -\frac{1}{3}[\lambda^2 a^2 + 2\lambda a + 1 - \lambda^2 + (\lambda - \lambda^2)v], & \bar{x}_4^{(4)} &= -\frac{1}{3}(a^2 - a), \\ \bar{x}_1^{(5)} &= -\frac{1}{3}(\lambda^2 a + 1), & \bar{x}_4^{(5)} &= -\frac{1}{3}(a + 1), \\ \bar{x}_1^{(6)} &= -\frac{1}{3}[\lambda^2 a^2 - 2a + 1 - \lambda^2 + (\lambda - \lambda^2)v], & \bar{x}_4^{(6)} &= -\frac{1}{3}(a^2 + a). \end{aligned}$$

Posons

$$\begin{aligned} \gamma_{i,j}^{(1)}(u, v) &= x_i^{(1)} x_j^{(1)} - x_i^{(2)} x_j^{(2)} + x_i^{(3)} x_j^{(3)} - x_i^{(4)} x_j^{(4)}, \\ \gamma_{i,j}^{(2)}(u, v) &= x_i^{(1)} x_j^{(1)} - x_i^{(2)} x_j^{(2)} + x_i^{(5)} x_j^{(5)} - x_i^{(6)} x_j^{(6)}, \end{aligned}$$

puis

$$\begin{cases} \Omega_1^{(k)}(u, v) = \gamma_{11}^{(k)}(u, v) + \gamma_{14}^{(k)}(u, v) + \gamma_{44}^{(k)}(u, v) \\ \Omega_2^{(k)}(u, v) = \gamma_{11}^{(k)}(u, v) - 2\lambda^2 \gamma_{14}^{(k)}(u, v) + \lambda \gamma_{44}^{(k)}(u, v) \end{cases} \quad (k=1, 2);$$

nous aurons

$$\frac{2}{3} \Pi_6^{(k)}(u, v) = -2\mu_6 \Omega_1^{(k)}[S_6(u, v)] + (\lambda^2 - 1)a^2 \Omega_2^{(k)}[S_6(u, v)] \quad (k=1, 2).$$

En effectuant les calculs, on trouve

$$\begin{aligned} \Pi_6^{(1)}(u, v) &= \frac{1}{\mu_6^2} \left\{ -2\lambda^2 a^2 - 3\lambda^2 a^2 \mu_6 \right. \\ &\quad \left. + 2\lambda a \mu_6^2 - \mu_6^3 + \lambda^2 v [2\lambda a^2 + (4\lambda - \lambda^2)a \mu_6 - 2\mu_6^2] - 2\lambda v^2 \mu_6 \right\} \\ &\quad + \frac{(\lambda^2 - 1)a^2}{\mu_6^2} [\lambda^2 a^2 - \lambda a \mu_6 + \lambda^2 v (-2\lambda a + \mu_6) + \lambda v^2], \\ \Pi_6^{(2)}(u, v) &= \frac{1}{\mu_6^2} \left\{ -2\lambda^2 a^2 + (2\lambda - \lambda^2)a^2 \mu_6 \right. \\ &\quad \left. + 2\lambda a \mu_6^2 - \mu_6^3 + \lambda^2 v [2\lambda a^2 + (3\lambda - 1)a \mu_6 - 2\mu_6^2] - 2\lambda v^2 \mu_6 \right\} \\ &\quad + \frac{(\lambda^2 - 1)a^2}{\mu_6^2} [\lambda^2 a^2 - \lambda a \mu_6 + \lambda^2 v (-2\lambda a + \mu_6) + \lambda v^2]. \end{aligned}$$

Il en résulte

$$E'[\mathbf{S}_6(u, v)] + \Pi_6^{(1)}(u, v) = \frac{1-\lambda^2}{3}a^2 + \frac{\lambda^2-\lambda}{3}a + \frac{\lambda^2-\lambda}{3}v + \frac{2(1-\lambda^2)}{3} - \lambda,$$

$$E''[\mathbf{S}_6(u, v)] + \Pi_6^{(2)}(u, v) = \frac{1-\lambda^2}{3}a^2 + a + \frac{\lambda^2-\lambda}{3}v + \frac{\lambda-\lambda^2}{3} - \lambda.$$

En ajoutant membre à membre avec la première de ces relations

$$3[\bar{x}_1^{(1)} - \bar{x}_1^{(4)}] = \lambda^2 a^2 + 2\lambda a + (\lambda - \lambda^2)v + \lambda,$$

et avec la seconde,

$$3[\bar{x}_1^{(1)} - \bar{x}_1^{(6)}] = \lambda^2 a^2 - 2a + (\lambda - \lambda^2)v + \lambda,$$

on trouve que les conditions (56) sont bien vérifiées dans le cas de la sixième substitution.

75. *Autres fonctions hyperfuchsienues du groupe S.* — Si l'on suppose les arguments nuls dans les fonctions paires, les formules de transformation relatives à ces fonctions se simplifient notablement; si, de plus, au moyen des relations (50), on élimine de ces formules toutes les fonctions dont l'indice est supérieur à 12, on obtient le Tableau de formules suivant [j'ai écrit θ_N au lieu de $\theta_N(o)$]:

	$S_1.$	$S_2.$	$S_3.$	$S_4.$	$S_5.$	$S_6.$
$\theta_1 =$	$\theta'_1,$	$\theta''_3,$	$\theta'''_2,$	$\frac{1}{\mu_4} \theta_1^v,$	$\frac{\lambda^2}{\mu_5} \theta_6^v,$	$\frac{\lambda^2}{\mu_6} \theta_4^{v1}.$
$\theta_2 =$	$\theta'_7,$	$\theta''_2,$	$\theta'''_3,$	$i \frac{1}{\mu_4} \theta_{10}^{v1},$	$\frac{\lambda}{\mu_5} \theta_{12}^v,$	$\frac{1}{\mu_6} \theta_2^{v1}.$
$\theta_3 =$	$\theta'_2,$	$\theta''_7,$	$\theta'''_1,$	$-i \frac{1}{\mu_4} \theta_3^v,$	$\frac{\lambda}{\mu_5} \theta_3^v,$	$-i \frac{\lambda}{\mu_6} \theta_{10}^{v1}.$
$\theta_4 =$	$\theta'_5,$	$-i\lambda^2 \theta''_{10},$	$-i\lambda^2 \theta'''_{11},$	$-\frac{1}{\mu_4} \theta_2^v,$	$\frac{\lambda^2}{\mu_5} \theta_4^v,$	$\frac{\lambda^2}{\mu_6} \theta_6^{v1}.$
$\theta_5 =$	$\theta'_6,$	$\lambda \theta''_5,$	$i\lambda^2 \theta'''_8,$	$-\frac{1}{\mu_4} \theta_7^v,$	$\frac{\lambda^2}{\mu_5} \theta_1^v,$	$\frac{\lambda^2}{\mu_6} \theta_3^{v1}.$
$\theta_6 =$	$\theta'_4,$	$i\lambda \theta''_{11},$	$\lambda \theta'''_6,$	$-\frac{1}{\mu_4} \theta_3^v,$	$\frac{\lambda^2}{\mu_5} \theta_5^v,$	$\frac{\lambda^2}{\mu_6} \theta_1^{v1}.$
$\theta_7 =$	$\theta'_3,$	$\theta''_1,$	$\theta'''_7,$	$-i \frac{1}{\mu_4} \theta_8^v,$	$i \frac{1}{\mu_5} \theta_9^v,$	$-\frac{\lambda^2}{\mu_6} \theta_{12}^{v1}.$
$\theta_8 =$	$\theta'_9,$	$i\lambda^2 \theta''_6,$	$-i\lambda^2 \theta'''_{12},$	$-i \frac{1}{\mu_4} \theta_3^v,$	$\frac{1}{\mu_5} \theta_8^v,$	$i \frac{\lambda}{\mu_6} \theta_7^{v1}.$

$S_1.$	$S_2.$	$S_3.$	$S_4.$	$S_5.$	$S_6.$
$\theta_9 = -\theta'_{10},$	$\lambda\theta''_9,$	$i\lambda^2\theta'''_3,$	$-i\frac{1}{\mu_4}\theta^v_6,$	$-\frac{1}{\mu_3}\theta^v_{11},$	$\frac{1}{\mu_6}\theta^v_9.$
$\theta_{10} = -\theta'_8,$	$-i\lambda\theta''_{12},$	$\lambda\theta'''_{10},$	$i\frac{1}{\mu_4}\theta^v_4,$	$-i\frac{1}{\mu_3}\theta^v_2,$	$-\frac{\lambda}{\mu_6}\theta^v_{11}.$
$\theta_{11} = \lambda\theta'_{11},$	$-\theta''_8,$	$\lambda^2\theta'''_9,$	$\frac{1}{\mu_4}\theta^v_{11},$	$i\frac{\lambda^2}{\mu_3}\theta^v_7,$	$-i\frac{\lambda}{\mu_6}\theta^v_3.$
$\theta_{12} = \lambda\theta'_{12},$	$-\theta''_4,$	$\lambda^2\theta'''_3,$	$\frac{\lambda^2}{\mu_4}\theta^v_{12},$	$i\frac{\lambda}{\mu_3}\theta^v_{10},$	$i\frac{1}{\mu_6}\theta^v_8.$

76. On vérifie sur ce Tableau ce que j'ai déjà fait remarquer au sujet de la première substitution, à savoir que, pour ce qui concerne leur échange dans le cas de chaque substitution, les fonctions se séparent en cycles de une ou de trois fonctions; mais, par rapport à l'ensemble des substitutions; elles forment un cycle unique, chaque fonction pouvant être changée en chacune des autres par une au moins des substitutions.

Les multiplicateurs sont tous de la forme $\frac{\varepsilon}{\mu}$, où ε est une racine douzième de l'unité et où μ , étant le dénominateur de la substitution, est le même pour toutes les fonctions (PICARD, *Comptes rendus*, 1884).

Il résulte de ces remarques que le quotient de deux fonctions symétriques et homogènes du même degré des douze fonctions

$$\theta_N^2 \quad [N = 1, 2, \dots, 12]$$

est transformé en lui-même par toutes les substitutions du groupe; c'est donc une fonction hyperfuchsienne appartenant à ce groupe.

Remarquons encore que, pour chaque substitution, le produit des racines de l'unité qui figurent dans les douze multiplicateurs est une racine cubique; il en résulte que la fonction

$$\frac{\sum_{N=1}^{12} \theta_N^{36}}{\prod_{N=1}^{12} \theta_N^3}$$

est aussi une fonction hyperfuchsienne du groupe S.