P. COUSIN

Sur les fonctions périodiques

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 19 (1902), p. 9-61
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1902_3_19__9_0>

ANNALES
SCIENTIFIQUES
DE
L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

SUR

LES FONCTIONS PÉRIODIQUES,

PAR M. P. COUSIN.

INTRODUCTION.

Dans une Note présentée à l'Académie des Sciences par M. Appell, le 18 mars 1901, j'ai énoncé un théorème relatif aux fonctions entières dont les zéros admettent, relativement à chacune des variables séparément, la période $2i\pi$.

Je me suis proposé, dans le présent Mémoire, de donner la démonstration complète de ce théorème, et d'en faire l'application aux fonctions méromorphes $(n+1)$ fois ou $(n+2)$ fois périodiques, n étant le nombre des variables. Cette démonstration fait l'objet de la première Partie du Mémoire. Je me suis servi d'un des théorèmes que j'ai donnés dans ma thèse de doctorat : toutefois j'ai employé les dérivées logarithmiques de préférence aux logarithmes; l'emploi des logarithmes présente, en effet, lorsque les domaines des variables sont à connexion multiple, une difficulté que je n'ai pas signalée dans ma thèse. Comme je me propose de revenir ailleurs sur ce point, qui exige des explications un peu longues quoique faciles, j'ai eu recours aux dérivées logarithmiques. En fait, c'est par les logarithmes que j'avais obtenu tout d'abord le résultat communiqué à l'Académie des Sciences.

Le théorème qui fait l'objet de cette première Partie n'est que l'extension à n variables d'un théorème donné par M. Appell dans son Mémoire du *Journal de Liouville* (4^e série), t. VII. La démonstration de M. Appell est différente de celle que j'ai donnée.

La deuxième Partie est consacrée aux fonctions méromorphes de n variables $(n+1)$ fois ou $(n+2)$ fois périodiques. Je montre brièvement comment on peut former une fonction méromorphe admettant $(n+1)$ systèmes de périodes complètement arbitraires. En ce qui concerne les fonctions méromorphes de n variables $(n+2)$ fois périodiques, je montre, et c'est là le principal objet du Mémoire, que les $(n+2)$ systèmes de périodes ne peuvent pas être *quelconques*. Ils sont liés par une relation que l'on obtient de la façon suivante : Soit (T) le tableau de $(n+2)$ lignes et n colonnes formé par le système des $(n+2)$ systèmes de périodes conjuguées. On peut former, avec (T), $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ déterminants d'ordre n en supprimant deux lignes successivement de toutes les façons possibles. Il existe une relation linéaire, homogène, à coefficients entiers non tous nuls entre les $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ déterminants ainsi formés. On s'assure qu'une telle relation n'est pas une identité, et qu'elle implique par suite, malgré l'indétermination que laisse aux entiers l'énoncé ci-dessus, une condition entre les périodes. Le cas le plus simple de ce théorème est celui où $n=2$, et $n+2=4$; c'est celui des fonctions abéliennes de deux variables, et l'on retrouve la relation ordinaire entre les périodes prises sous leur forme la plus générale.

Pour les fonctions $(n+q)$ fois périodiques $(q \leqq n)$, je montre comment on forme $\frac{q(q-1)}{2}$ relations entre les déterminants d'ordre n du tableau des $(n+q)$ systèmes de périodes; mais je me suis borné à une indication très sommaire pour ce cas, n'ayant pas encore discuté les relations auxquelles on est ainsi conduit. Si $q=n$, c'est le cas des fonctions abéliennes de n variables, et l'on a $\frac{n(n-1)}{2}$ relations qui se présentent sous une forme plus compliquée que celle que l'on donne habituellement. Mais il est aisé de s'assurer que les relations habituelles, écrites pour $2n$ systèmes de périodes sous la forme générale, se ramènent à des relations linéaires, homogènes, à coefficients entiers non tous nuls entre des déterminants d'ordre n du tableau des $2n$ systèmes de périodes.

Je termine en ajoutant que, en se reportant au Mémoire cité plus haut de M. Appell, on pourra se rendre compte de ce que j'ai emprunté, pour la deuxième Partie, aux excellentes méthodes de l'auteur.

PREMIÈRE PARTIE.

1. Soit $F(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ une fonction entière des n variables complexes $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Nous écrirons pour abréger $F(x)$ au lieu de $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Nous supposons $F(x)$ telle que ses zéros admettent par rapport à chacune des variables la période $2i\pi$, en entendant par là d'une façon précise que le quotient de $F(x)$ par la fonction obtenue en y changeant $x_p (p = 1, 2, \ldots, n)$ en $x_p + 2i\pi$ est fini et différent de 0 pour chaque système de valeurs des variables et se réduit, par conséquent, à une fonction entière qui ne s'annule pas.

Pour indiquer le changement de x_p en $x_p + 2m_p i\pi$, m_p étant un entier positif ou négatif, nous écrirons $F(x + m_p c_p)$ et plus généralement pour le changement de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ en $x_1 + 2m_1 i\pi$, $x_2 + 2m_2 i\pi, \ldots, x_n + 2m_n i\pi$ nous écrirons

$$F(x + m_1 c_1 + m_2 c_2 + \ldots + m_n c_n).$$

Le quotient

$$\frac{F(x + m_1 c_1 + m_2 c_2 + \ldots + m_n c_n)}{F(x)}$$

est, d'après cela, une série entière qui ne s'annule pas.

Nous poserons

$$(1) \qquad u_p(x) = \frac{\partial}{\partial x_p} \log F(x),$$

de telle sorte que la différence

$$(2) \qquad u_p(x + m_1 c_1 + m_2 c_2 + \ldots + m_n c_n) - u_p(x)$$

est une fonction entière de $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Effectuons le changement de variables

$$(3) \qquad x_p = \log \xi_p \qquad (p = 1, 2, \ldots, n),$$

u_p devient une fonction non uniforme des variables $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, soit $U_p(\xi)$, qui est telle que pour un système de valeurs $\xi_p = \xi_p^0$ $(p = 1, 2, \ldots, n)$ composé de valeurs finies et toutes différentes de o, chacune des déterminations de $U_p(\xi)$ est uniforme dans le domaine de (ξ^0), et la différence de deux quelconques de ces déterminations est régulière au point (ξ^0), ainsi que cela résulte de la considération de la différence (2).

A chaque système de valeurs $\xi_1^0, \xi_2^0, \ldots, \xi_p^0$, toutes finies et différentes de o, nous ferons correspondre une détermination, choisie arbitrairement, de U_p que nous désignerons par $U_p^{(\xi^0)}$ et qui sera définie dans un domaine δ du point (ξ^0); si (ξ^1) désigne un point situé dans le domaine δ, la différence $U_p^{(\xi^0)} - U_p^{(\xi^1)}$ est évidemment régulière au point (ξ^1). On peut dès lors appliquer ici le théorème que j'ai donné dans ma thèse (théorème XI, p. 56) en ayant égard à la remarque du bas de la page 55 : actuellement les valeurs attribuables à la variable ξ_p comprennent tout le plan de cette variable à l'exclusion du point $\xi_p = 0$ et du point ∞ et constituent un continuum qui peut être regardé comme la limite d'une couronne concentrique à l'origine et de rayons R et r, lorsque R augmente indéfiniment et r décroît jusqu'à o.

Il existe donc une fonction *uniforme* des variables $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, $V_p(\xi)$ qui, en chaque point (ξ^0) composé de valeurs finies et toutes différentes de o, est équivalente à $U_p^{(\xi^0)}$ c'est-à-dire que la différence,

$$V_p(\xi) - U_p^{(\xi^0)}$$

est régulière au point (ξ^0).

Si l'on exprime maintenant $V_p(\xi)$ à l'aide des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, on obtient une fonction $v_p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ qui admet par rapport à chacune des variables la période $2i\pi$, et telle que pour chaque système de valeurs finies des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ la différence $v_p(x) - u_p(x)$ est régulière. Cette différence est donc une fonction entière de $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Nous pouvons ainsi former n fonctions, $v_1(x), v_2(x), \ldots, v_n(x)$, satisfaisant aux conditions précédentes. Les différences

$$\frac{\partial v_p}{\partial x_q} - \frac{\partial u_p}{\partial x_q}$$

et

$$\frac{\partial v_q}{\partial x_p} - \frac{\partial u_q}{\partial x_p},$$

sont toutes deux des fonctions entières; mais comme

$$\frac{\partial u_p}{\partial x_q} = \frac{\partial u_q}{\partial x_p},$$

on en conclut que la différence

$$\frac{\partial v_p}{\partial x_q} - \frac{\partial v_q}{\partial x_p} = \psi_{pq}(x) \tag{4}$$

est aussi une fonction entière; de plus, puisque le premier membre de (4) admet la période $2i\pi$ par rapport à chacune des variables, il en est de même de $\psi_{pq}(x)$ qui est, par suite, une série entière procédant suivant les puissances positives et négatives de $e^{x_1}, e^{x_2}, \ldots, e^{x_n}$, soit

$$\psi_{pq}(x) = \sum \mathrm{A}_{m_1, m_2, \ldots, m_n} e^{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots + m_n x_n}, \tag{5}$$

les m prenant toutes les valeurs entières, positives, négatives ou nulles de $-\infty$ à $+\infty$.

2. Les relations (4) sont au nombre de $\frac{n(n-1)}{2}$ correspondant à toutes les combinaisons deux à deux des n variables x. Considérons le système d'équations aux dérivées partielles, à n fonctions inconnues $w_1, w_2, \ldots, w_n$,

$$\frac{\partial w_p}{\partial x_q} - \frac{\partial w_q}{\partial x_p} = \psi_{pq}(x). \tag{6}$$

Ces équations sont certainement compatibles, par suite des équations (4). Nous allons montrer qu'elles admettent un système d'intégrales de la forme suivante

$$
\begin{aligned}
w_1 &= h_1(x),\\
w_2 &= h_2(x) + a_2^{(1)} x_1,\\
w_3 &= h_3(x) + a_2^{(1)} x_1 + a_2^{(2)} x_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
w_n &= h_n(x) + a_n^{(1)} x_1 + a_n^{(2)} x_2 + \ldots + a_n^{(n-1)} x_{n-1},
\end{aligned}
$$

où $h_1, h_2, \ldots, h_n$ sont n fonctions entières admettant la période $2i\pi$ par rapport à chacune des variables et les a des constantes.

Remarquons, pour cela, tout d'abord, que, d'une part, la dérivée partielle du premier ordre par rapport à x_p d'une série de la forme (5) est une série de même forme dont tous les termes renferment effectivement la variable x_p et que, d'autre part, si une série de la forme (5) est telle que tous ses termes renferment la variable x_p, chacune de ses dérivées partielles par rapport à chacune des variables aura la même propriété. Ces faits tiennent à ce que la dérivation n'a pour effet que de multiplier chaque terme de la série par une constante (qui peut être d'ailleurs nulle). Enfin, si une série de la forme (5) renferme effectivement la variable x_p dans chacun de ses termes, elle est la dérivée partielle par rapport à x_p d'une série de même forme.

Cela posé, le théorème s'établit immédiatement pour le cas de deux variables. Il n'y a alors qu'une seule équation :

$$\frac{\partial w_1}{\partial x_2} - \frac{\partial w_2}{\partial x_1} = \psi_{1,2}(x). \tag{7}$$

Partageons les termes de la série $\psi_{1,2}(x)$ en deux groupes, le premier $\theta(x_1, x_2)$ renfermant tous les termes qui contiennent effectivement x_2 et rien que ceux-là, le second $-\eta(x_1)$ contenant les autres, et ne dépendant que de x_1. On aura

$$\frac{\partial w_1}{\partial x_2} - \frac{\partial w_2}{\partial x_1} = \theta(x_1, x_2) - \eta(x_1);$$

$\theta(x_1, x_2)$ est la dérivée partielle d'une série de même forme $h_1(x_1, x_2)$; en posant

$$w_1 = h_1(x_1, x_2),$$

il reste

$$\frac{\partial w_2}{\partial x_1} = \eta(x_1);$$

soit $k(x_1)$ une fonction entière ayant pour dérivée $\eta(x_1)$; la différence $k(x_1 + 2i\pi) - k(x_1)$ a pour dérivée $\eta(x_1 + 2i\pi) - \eta_1(x) = 0$, et, par suite, est égale à une constante $2i\pi a_2^1$; la différence

$$k(x_1) - a_2^1 x_1$$

admet la période $2i\pi$ et, par conséquent, est une série entière $h_2(x_1)$ en e^{x_1}, et l'on a

$$w_1 = h_1(x_1, x_2),$$
$$w_2 = h_2(x_1) + a_2^1 x_1,$$

comme il fallait le démontrer.

Supposant le théorème vrai pour $(n-1)$ fonctions et $(n-1)$ variables, nous le démontrerons pour n fonctions et n variables.

Les équations (6) étant compatibles, si $w_1, w_2, \ldots, w_n$ est un système de solutions de ces équations, on en obtient un autre en ajoutant respectivement à $w_1, w_2, \ldots, w_n$ les dérivées partielles du premier ordre d'une fonction analytique quelconque de $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Il s'ensuit que w_n peut être choisi arbitrairement dans les équations (6). Nous déterminerons ce choix de la façon suivante: Rangeons les termes de la série $\psi_{pn}(x)$ $(p = 1, 2, \ldots, n-1)$ en deux groupes : d'une part un groupe $\theta_p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ contenant tous les termes qui renferment x_n et ceux-là seulement; d'autre part, un groupe

$$\eta_p(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$$

contenant tous les autres termes. On aura ainsi

$$\frac{\partial w_p}{\partial x_n} - \frac{\partial w_n}{\partial x_p} = \theta_p(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \eta_p(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}). \tag{8}$$

En dérivant par rapport à x_q $(q \neq p$ et $\neq n)$ on a la relation

$$\frac{\partial^2 w_p}{\partial x_q \partial x_n} - \frac{\partial^2 w_n}{\partial x_q \partial x_p} = \frac{\partial \theta_p}{\partial x_q} + \frac{\partial \eta_p}{\partial x_q}$$

et, d'une façon analogue,

$$\frac{\partial^2 \varpi_q}{\partial x_p \partial x_n} - \frac{\partial^2 \varpi_n}{\partial x_q \partial x_p} = \frac{\partial \theta_q}{\partial x_p} - \frac{\partial \eta_q}{\partial x_p},$$

en retranchant membre à membre et tenant compte de ce que

$$\frac{\partial \varpi_p}{\partial x_q} - \frac{\partial \varpi_q}{\partial x_p} = \psi_{pq}(x),$$

il vient

$$\frac{\partial \psi_{pq}}{\partial x_n} = \frac{\partial \theta_p}{\partial x_q} - \frac{\partial \eta_p}{\partial x_q} - \frac{\partial \theta_q}{\partial x_p} + \frac{\partial \eta_q}{\partial x_p}. \tag{9}$$

$\frac{\partial \psi_{pq}}{\partial x_n}$, $\frac{\partial \theta_p}{\partial x_q}$, $\frac{\partial \theta_q}{\partial x_p}$ sont des séries de la forme (5) qui, en vertu des remarques faites plus haut, ne contiennent que des termes renfermant effectivement x_n; au contraire, $\frac{\partial \eta_q}{\partial x_p}$ et $\frac{\partial \eta_p}{\partial x_q}$ sont des séries de même forme dont aucun terme ne renferme x_n. L'identité (9) entraîne donc la suivante :

$$\frac{\partial \eta_q}{\partial x_p} - \frac{\partial \eta_p}{\partial x_q} = 0. \tag{10}$$

Ces identités montrent que les $(n-1)$ fonctions entières $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-1}$ des $(n-1)$ variables $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, sont les dérivées partielles du premier ordre d'une même fonction entière $-g(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ et l'on a

$$\eta_p = -\frac{\partial g}{\partial x_p} \qquad (p = 1, 2, \ldots, n-1).$$

L'équation (8) devient alors la suivante :

$$\frac{\partial \varpi_p}{\partial x_n} - \frac{\partial \varpi_n}{\partial x_p} = \theta_p - \frac{\partial g}{\partial x_p}. \tag{11}$$

Nous poserons $\varpi_n = g(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$.

Considérons la différence

$$g(x + c_p) - g(x) \qquad (p = 1, 2, \ldots, n-1)$$

(conformément aux notations expliquées au début).

La dérivée de cette différence par rapport à x_q ($q = 1, 2, \ldots, n-1$) est

$$\eta_q(x + c_p) - \eta_q(x) = 0$$

et, par suite,

$$g(x + c_p) - g(x) = 2i\pi a_n^{(p)} \qquad (p = 1, 2, \ldots, n-1),$$

$a_n^{(p)}$ désignant une constante. La différence

$$g(x) - a_n^{(1)} x_1 - a_n^{(2)} x_2 - \ldots - a_n^{(n-1)} x_{n-1}$$

admet la période $2i\pi$ par rapport à chacune des variables $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$; nous la désignerons par $h_n(x)$ et nous aurons

$$(12) \qquad w_n = g(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) = h_n(x) + a_n^{(1)} x_1 + \ldots + a_n^{(n-1)} x_{n-1};$$

w_n étant ainsi choisi, $w_1, w_2, \ldots, w_{n-1}$ devront satisfaire aux équations suivantes :

$$(13) \qquad \frac{\partial w_p}{\partial x_n} = \theta_p \qquad (p = 1, 2, \ldots, n-1),$$

$$(14) \qquad \frac{\partial w_p}{\partial x_q} - \frac{\partial w_q}{\partial x_p} = \psi_{pq}(x).$$

Dans cette dernière équation p et q prennent, comme valeurs, toutes les combinaisons des nombres $1, 2, \ldots, n-1$ deux à deux. Nous savons, par ce qui précède, qu'il est possible de satisfaire aux équations (13) et (14 par un choix convenable de $w_1, w_2, \ldots, w_{n-1}$.

θ_p, étant une série de la forme (5), dont tous les termes contiennent x_n, est la dérivée par rapport à x_n d'une série de même forme Θ_p. On en conclut :

$$w_p = \Theta_p + \varphi_p(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \qquad (p = 1, 2, \ldots, n-1),$$

φ_p ne dépendant que des $(n-1)$ variables $x_1, x_2, \ldots, y_{n-1}$.

En reportant dans (14), il vient

$$(15) \qquad \frac{\partial \varphi_p}{\partial x_q} - \frac{\partial \varphi_q}{\partial x_p} = \psi_{pq}(x) - \Theta_p - \Theta_q$$

$$(p = 1, 2, \ldots, n-1;\ q = 1, 2, \ldots, n-1;\ p \neq q).$$

Comme on sait que les équations (15) peuvent être vérifiées par un choix convenable des fonctions φ qui ne dépendent que de $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, on en conclut que le second membre ne dépend pas de x_n, et se réduit, par conséquent, à une série de la forme (5) avec $(n-1)$ variables seulement $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$. Les équations (15) constituent alors un système tout à fait analogue au système (6) avec une variable et une fonction inconnue en moins. On peut donc poser, le théorème étant supposé vrai pour $n-1$,

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= k_1(x),\\
\varphi_2 &= k_2(x) + a_2^{(1)} x_1,\\
\varphi_3 &= k_3(x) + a_3^{(1)} x_1 + a_3^{(2)} x_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\varphi_{n-1} &= k_{n-1}(x) + a_{n-1}^{(1)} x_1 + \ldots + a_{n-1}^{(n-2)} x_{n-2},
\end{aligned}$$

où $k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}$ sont des fonctions entières admettant la période $2i\pi$ par rapport à chacune des variables $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ et indépendantes de x_n.

Il vient alors, pour $w_1, w_2, \ldots, w_{n-1}$,

$$\begin{aligned}
w_1 &= \Theta_1 + k_1,\\
w_2 &= \Theta_2 + k_2 + a_2^{(1)} x_1,\\
w_3 &= \Theta_3 + k_3 + a_3^{(1)} x_1 + a_3^{(2)} x_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
w_{n-1} &= \Theta_{n-1} + k_{n-1} + a_{n-1}^{(1)} x_1 + a_{n-1}^{(2)} x_2 + \ldots + a_{n-1}^{(n-2)} x_{n-2}.
\end{aligned}$$

$\Theta_p + k_p$ est une fonction entière admettant la période $2i\pi$ par rapport à chacune des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$; soit $\Theta_p + k_p = h_p$. On a ainsi finalement, à cause de (12), pour les n fonctions $w_1, w_2, \ldots, w_n$, les expressions annoncées

$$(16)\qquad \left\{\begin{aligned}
w_1 &= h_1(x),\\
w_2 &= h_2(x) + a_2^{(1)} x_1,\\
w_3 &= h_3(x) + a_3^{(1)} x_1 + a_3^{(2)} x_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
w_n &= h_n(x) + a_n^{(1)} x_1 + a_n^{(2)} x_2 + \ldots + a_n^{(n-1)} x_{n-1}.
\end{aligned}\right.$$

3. Nous écrirons ces dernières formules sous la forme plus symétrique

$$(17)\qquad w_p = h_p(x) + a_p^{(1)} x_1 + a_p^{(2)} x_2 + \ldots + a_p^{(n)} x_n \qquad (p = 1, 2, \ldots, n),$$

en remarquant que chaque constante a, pour laquelle l'indice supérieur est égal à l'indice inférieur ou est plus grand que lui, est égale à o.

Reprenons les équations (4); en les comparant à (6) nous obtenons

$$\frac{\partial}{\partial x_q}(v_p - w_p) - \frac{\partial}{\partial x_p}(v_q - w_q) = 0.$$

Les différences $(v_p - w_p)$ sont les dérivées partielles, d'après cela, d'une même fonction analytique. Il en est de même des expressions $(u_p - v_p + w_p)$, dont chacune est une fonction entière de x_1, $x_2, \ldots, x_n$; on peut poser

$$u_p - v_p + w_p = \frac{\partial H}{\partial x_p}, \tag{18}$$

où H est une fonction entière de $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Considérons la fonction entière $f(x)$ définie par

$$f(x) = F(x) e^{-H(x)}, \tag{19}$$

$f(x)$ aura les mêmes zéros que $F(x)$ et le quotient

$$\frac{f(x + c_p)}{f(x)}$$

est une fonction entière qui ne s'annule pas et de la forme $e^{\chi_p(x)}$,

$$\frac{f(x + c_p)}{f(x)} = e^{\chi_p(x)}. \tag{20}$$

Pour déterminer $\chi_p(x)$ prenons les dérivées partielles des deux membres par rapport à l'une quelconque des variables x_q, en tenant compte de (19). Il vient

$$u_q(x + c_p) - \frac{\partial}{\partial x_q} H(x + c_p) - u_q(x) + \frac{\partial}{\partial x_q} H(x) = \frac{\partial}{\partial x_q}\chi_p(x),$$

ou, en tenant compte de (18),

$$v_q(x + c_p) - w_q(x + c_p) - v_q(x) + w_q(x) = \frac{\partial}{\partial x_q}\chi_p(x).$$

Or

$$v_q(x + c_p) = v_q(x),$$

et, d'après (17),

$$w_q(x+c_p)-w_q(x)=2i\pi a_q^{(p)}.$$

Donc

$$\frac{\partial}{\partial x_q}\chi_p(x)=-2i\pi a_q^{(p)} \qquad (q=1, 2, \ldots, n),$$

ce qui fournit pour $\chi_p(x)$ l'expression suivante

$$\chi_p(x)=-2i\pi(a_1^{(p)}x_1+a_2^{(p)}x_2+\ldots+a_n^{(p)}x_n)+b_p,$$

b_p étant une constante. Nous poserons

$$\Phi(x)=f(x)e^{-\frac{1}{2i\pi}(b_1x_1+b_2x_2+\ldots+b_nx_n)},$$

$\Phi(x)$ satisfera évidemment à l'équation suivante :

$$(21) \qquad \Phi(x+c_p)=\Phi(x)e^{\chi_p(x)-b_p} \qquad (p=1, 2, \ldots, n).$$

En tenant compte des valeurs a qui sont nulles, voici le Tableau des expressions de $\chi_p(x)-b_p$:

$$\begin{aligned}
\chi_n\ \ (x)-b_n\ \ &=0,\\
\chi_{n-1}(x)-b_{n-1}&=-2i\pi a_n^{(n-1)}x_n,\\
\chi_{n-2}(x)-b_{n-2}&=-2i\pi(a_n^{(n-2)}x_n+a_{n-1}^{(n-2)}x_{n-1}),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\chi_2\ \ (x)-b_2\ \ &=-2i\pi(a_n^{(2)}x_n+a_{n-1}^{(2)}x_{n-1}+\ldots+a_{n-1}^{(2)}x_3),\\
\chi_1\ \ (x)-b^1\ \ &=-2i\pi(a_n^{(1)}x_n+a_{n-1}^{(1)}x_{n-1}+\ldots+a_2^{(1)}x_2).
\end{aligned}$$

On remarquera que $\chi_p(x)$ ne renferme que les variables x d'indice plus grand que p. Il est facile de voir maintenant que $2i\pi a_q^{(p)}$ est un nombre entier positif, négatif, ou nul. On doit supposer $q>p$. Attribuons aux variables x autres que x_p et x_q des valeurs constantes. $\Phi(x)$ se réduit à une fonction $\Phi_0(x_p, x_q)$ de x_p et x_q et l'on a

$$\begin{aligned}
\Phi_0(x_p+2i\pi, x_q)&=A\Phi_0(x_p, x_q)e^{-2i\pi a_q^{(p)}x_q},\\
\Phi_0(x_p, x_q+2i\pi)&=B\Phi_0(x_p, x_q),
\end{aligned}$$

où A et B sont des constantes. Dans la première, changeons x_q en $x_q+2i\pi$; $\Phi_0(x_p+2i\pi, x_q)$ et $\Phi_0(x_p, x_q)$ sont multipliés par la constante B; donc $e^{-2i\pi a_q^{(p)}x}$ ne doit pas changer et l'on a

$$-2i\pi a_q^{(p)}=m_q^{(p)},$$

$m_q^{(p)}$ étant un entier positif, négatif, ou nul.

L'expression de $\chi_p(x) - b_p$ devient ainsi

$$\chi_p(x) - b_p = m_n^{(p)} x_n + m_{n-1}^{(p)} x_{n-1} + \ldots + m_1^{(p)} x_1$$

avec la condition $m_q^{(p)} = 0$, si $q \leqq p$.

Nous avons ainsi démontré l'existence d'une fonction entière $\Phi(x)$ telle que le quotient $\frac{F(x)}{\Phi(x)}$ est une fonction entière qui ne s'annule pas et telle que

$$(22) \qquad \Phi(x + c_p) = \Phi(x) e^{m_n^{(p)} x_n + m_{n-1}^{(p)} x_{n-1} + \ldots + m_{p+1}^{(p)} x_{p+1}}.$$

C'est le théorème énoncé dans la Note communiquée à l'Académie des Sciences, le 18 mars 1901.

4. On peut donner, de l'entier $m_q^{(p)}$, une interprétation relative aux zéros de $F(x)$ considérés indépendamment de la fonction elle-même.

Il suffit d'envisager, pour une valeur fixe de x_p, $x_p = x_p^0$, l'intégrale

$$\int_{x_q^0}^{x_q^0 + 2i\pi} d \log \Phi_0(x_p^0, x_q),$$

prise en faisant varier x_q de x_q^0 à $x_q^0 + 2i\pi$ suivant un chemin déterminé, par exemple suivant la droite AB qui joint x_q^0 à $x_q^0 + 2i\pi$. Cette intégrale est égale à

$$\log \frac{\Phi_0(x_p^0, x_q^0 + 2i\pi)}{\Phi_0(x_p^0, x_q^0)} + 2n_1 i\pi = \log B + 2n_1 i\pi,$$

où n_1 est un entier.

Si maintenant x_p^0 varie, la valeur de l'intégrale ne pouvant varier que de multiples de $2i\pi$ ne changera que quand $\log \Phi_0$ cessera d'être continu en quelque point du champ d'intégration, c'est-à-dire quand $\Phi_0(x_p^0, x_q)$ admettra un zéro situé sur AB. On voit, sans difficulté, que x_p^0 variant, l'intégrale augmente de $2i\pi$ chaque fois qu'un zéro de $\Phi_0(x_p^0, x_q)$ traverse AB de droite à gauche et diminue de $2i\pi$ si le zéro traverse dans l'autre sens. Supposons que la valeur attribuée à x_p varie de x_p^0 à $x_p^0 + 2i\pi$; on aura la différence entre le nombre des zéros de $\Phi(x_p^0, x_q)$ qui ont traversé AB de droite à gauche et le nombre des zéros qui ont traversé dans l'autre sens, en prenant la différence des deux intégrales

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{x_q^0}^{x_q^0+2i\pi} d\log\Phi_0(x_p^0+2i\pi, x_q) - \frac{1}{2i\pi}\int_{x_q^0}^{x_q^0+2i\pi} d\log\Phi_0(x_p^0, x_q) = m_q^p$$

que l'on calcule immédiatement en remarquant que

$$\frac{\Phi_0(x_p^0+2i\pi, x_q)}{\Phi_0(x_p^0, x_q)} = \mathrm{A}\, e^{-2i\pi a_q^{(p)} x_q} = \mathrm{A}\, e^{m_q^{(p)} x_q}.$$

Nous avons ainsi une interprétation de $m_q^{(p)}$, d'où il résulte que, la fonction $\mathrm{F}(x)$ étant donnée, les entiers m qui figurent dans les formules (22) sont complètement déterminés, en supposant, comme nous l'avons fait, que $m_q^{(p)}$ est nul si $q \leq p$. Sans cette dernière restriction, les entiers m ne seraient évidemment pas déterminés, comme on le voit immédiatement en multipliant $\Phi(x)$ par $e^{\frac{1}{2i\pi}\mathrm{M}x_p x_q}$, où M est un entier.

SECONDE PARTIE.

5. Nous nous proposerons maintenant d'étudier les fonctions entières dont les zéros admettent $(n+1)$ systèmes de périodes distincts. Nous supposerons que les zéros de $\mathrm{F}(x)$ admettent, par rapport à chacune des n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, la période $2i\pi$ et admettent en outre un système de périodes conjuguées,

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \alpha_3, \quad \ldots, \quad \alpha_n,$$

l'un au moins des α ayant sa partie réelle différente de o.

Nous montrerons tout d'abord qu'il existe, pour un système de valeurs quelconques des α, de telles fonctions entières. Formons pour cela une fonction entière $\theta(x)$ qui satisfasse aux $(n+1)$ conditions suivantes :

$$(23)\qquad \begin{cases} \theta(x + c_p) = \theta(x) & (p = 1, 2, \ldots, n), \\ \theta(x + \alpha) = \theta(x)e^{L}, \end{cases}$$

avec

$$L = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n + b,$$

où $a_1, a_2, \ldots, a_n$ et b sont des constantes. Dans les relations (23), $\theta(x + c_p)$ a la signification indiquée dans la première Partie et $\theta(x + \alpha)$ indique le changement dans $\theta(x)$ de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ en $x_1 + \alpha_1$, $x_2 + \alpha_2, \ldots, x_n + \alpha_n$. On voit immédiatement que $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont des entiers, en changeant x_p en $x_p + 2i\pi$ dans la dernière des relations (23). Nous désignerons par d le plus grand commun diviseur de $a_1, a_2, \ldots, a_n$, et par $a'_1, a'_2, \ldots, a'_n$ les quotients de $a_1, a_2, \ldots, a_n$ par d. d est supposé pris positif; $a'_1, a'_2, \ldots, a'_n$ ont les signes respectifs de $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Cela posé, $a'_1, a'_2, \ldots, a'_n$ étant premiers entre eux, nous pouvons former un déterminant d'ordre n, dont tous les éléments soient entiers (ou nuls), qui soit égal à 1, et dont la première ligne soit composée des éléments $a'_1, a'_2, \ldots, a'_n$. Soit

$$\begin{vmatrix} a'_1 & a'_2 & \ldots & a'_n \\ a_1^{(2)} & a_2^{(2)} & \ldots & a_n^{(2)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1^{(n)} & a_2^{(n)} & \ldots & a_n^{(n)} \end{vmatrix} = 1$$

ce déterminant. Effectuons la substitution correspondant à ce déterminant :

$$(24)\qquad \begin{cases} X_1 = a'_1 x_1 + a'_2 x_2 + \ldots + a'_n x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ X_n = a_1^{(n)} x_1 + \ldots\ldots\ldots + a_2^{(n)} x_n. \end{cases}$$

Par cette substitution $\theta(x)$ devient $\Theta(X)$. Les équations (24) étant résolues par rapport à $x_1, x_2, \ldots, x_n$ donneront pour ces variables des expressions linéaires, à coefficients entiers, en $X_1, X_2, \ldots, X_n$, puisque le déterminant est égal à 1. Il en résulte que $\Theta(X)$ satisfait aux n conditions

$$(25)\qquad \Theta(X + c_p) = \Theta(X) \qquad (p = 1, 2, \ldots, n).$$

Au changement de x en $x+\alpha$, correspondra le changement de X en $X+\alpha'$ et l'on aura

$$\Theta(X+\alpha') = e^{dX_1+b}\Theta(X). \tag{26}$$

D'après (25), $\Theta(X)$ est une série de la forme

$$\Theta(X) = \sum A_{m_1, m_2, \ldots, m_n} e^{m_1X_1+m_2X_2+\ldots+m_nX_n},$$

les entiers m prenant toutes les valeurs entières, positives, négatives ou nulles. Nous ordonnerons cette série par rapport à $e^{X_2}, \ldots, e^{X_n}$, les coefficients étant des fonctions de X_1 ; soit

$$\Theta(X) = \sum H^{(m_2, m_3, \ldots, m_n)}(X_1)\, e^{m_2X_2+\ldots+m_nX_n},$$

et nous aurons, en identifiant les deux membres de (26),

$$H^{(m_2, m_3, \ldots, m_n)}(X_1+\alpha'_1) = e^{dX_1+b-m_2\alpha'_2-m_3\alpha'_3-\ldots-m_n\alpha'_n} H^{(m_2, m_3, \ldots, m_n)}(X_1) \tag{27}$$

et, en outre, on a

$$H^{(m_2, m_3, \ldots, m_n)}(X_1+2i\pi) = H^{(m_2, m_3, \ldots, m_n)}(X_1). \tag{28}$$

On reconnaît dans les équations (27) et (28) celles qui définissent les fonctions analogues aux fonctions de Jacobi. Il y a une condition de possibilité : d étant positif, la partie réelle de α'_1 ne peut pas être négative. Nous formerons cette partie réelle, en mettant d'abord en évidence les parties réelles et imaginaires de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$

$$\alpha_1 = \lambda_1+\mu_1 i \ldots \alpha_n = \lambda_n+\mu_n i.$$

On a

$$\alpha'_1 = a'_1\alpha_1+a'_2\alpha_2+\ldots+a'_n\alpha_n;$$

la partie réelle de α'_1 est donc

$$a'_1\lambda_1+a'_2\lambda_2+\ldots+a'_n\lambda_n.$$

Si elle était nulle, il faudrait que la partie imaginaire de α'_1 fût commensurable avec $2i\pi$, et l'on voit que l'on aurait entre $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ et $2i\pi$ une relation linéaire, homogène, à coefficients entiers non tous nuls. Si nous excluons ce cas, nous aurons la condition nécessaire

$$a'_1\lambda_1+a'_2\lambda_2+\ldots+a'_n\lambda_n > 0.$$

Sous cette condition, les équations (27) et (28) pourront être satisfaites par une fonction entière convenablement choisie, que l'on pourra multiplier par un facteur constant quelconque sans que les équations cessent d'être vérifiées. L'existence de $\Theta(X)$ et, par suite, de $\theta(x)$ se déduit de là par un raisonnement très simple. Comme conséquence immédiate, on voit que l'on peut former des fonctions méromorphes des n variables x, admettant les $(n+1)$ systèmes de périodes qui figurent dans les équations (23). On peut, en effet, d'après ce qui précède, former deux fonctions entières $\theta(x)$ et $\theta_1(x)$, dont le quotient ne soit pas une constante, et vérifiant les équations (23).

$(n+1)$ systèmes de périodes conjuguées *quelconques*, pouvant être ramenés, comme on sait, à la forme que nous avons adoptée dans les équations (23), on voit qu'il existe des fonctions méromorphes admettant $(n+1)$ systèmes de périodes conjuguées *quelconques*, donnés à l'avance.

6. Nous allons étudier, actuellement, un cas particulier laissé de côté dans ce qui précède : c'est celui où dans les équations (23), L est une constante, c'est-à-dire où tous les a sont nuls. On a alors

$$(29) \qquad \begin{cases} \theta(x+c_p) = \theta(x), \\ \theta(x+\alpha) \;= \theta(x)e^{b}. \end{cases}$$

Plaçons-nous d'abord dans l'hypothèse où il n'existe aucune relation linéaire, homogène, à coefficients entiers non tous nuls entre les α et $2i\pi$, de la forme

$$(30) \qquad p_1\alpha_1 + p_2\alpha_2 + \ldots + p_n\alpha_n = 2qi\pi,$$

q et les p étant des entiers non tous nuls.

On peut poser

$$\theta(x) = \sum C_{m_1,m_2,\ldots,m_n} e^{m_1x_1+m_2x_2+\ldots+m_nx_n},$$

et par identification, dans la seconde des relations (29),

$$C_{m_1,m_2,\ldots,m_n} = e^{b-m_1\alpha_1-m_2\alpha_2\ldots-m_n\alpha_n} C_{m_1,m_2,\ldots,m_n},$$

relation qui entraîne l'une des relations suivantes

$$(31) \qquad C_{m_1,m_2,\ldots,m_n} = 0$$

où

$$(32) \qquad m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2 + \ldots + m_n\alpha_n - b = 2ri\pi,$$

r étant un entier (ou nul).

La relation (32) ne peut avoir lieu que pour un système de valeurs de $m_1, m_2, \ldots, m_n$; car si l'on avait pour un second système de valeurs

$$m'_1\alpha_1 + m'_2\alpha_2 + \ldots + m'_n\alpha_n - b = 2r'i\pi,$$

on en conclurait

$$(m_1 - m'_1)\alpha_1 + (m_2 - m'_2)\alpha_2 + \ldots + (m_n - m'_n)\alpha_n = 2(r - r')i\pi,$$

relation qui serait de la forme (30) si l'on n'avait pas

$$m'_1 = m_1, \qquad m'_2 = m_2 \ldots m'_n = m_n.$$

On conclut de là que $\theta(x)$ est, ou bien nulle identiquement ou bien de la forme $Ce^{m_1x_1+m_2x_2+\ldots+m_nx_n}$, C étant une constante, ou bien enfin une constante si b est multiple de $2i\pi$. Supposons maintenant qu'il existe quelque relation de la forme (30) et, pour prendre tout de suite le cas général, supposons qu'il existe entre les α et $2i\pi$, s relations distinctes de la forme (30) *et pas davantage* : et soient

$$(33) \qquad p_1^{(k)}\alpha_1 + p_2^{(k)}\alpha_2 + \ldots + p_n^{(k)}\alpha_n = 2q^{(k)}i\pi \qquad (k = 1, 2, \ldots, s)$$

ces s relations.

Ces s relations étant distinctes, on en conclut que dans le Tableau des coefficients des premiers membres il existe un déterminant d'ordre s différent de 0 (car, sans cela, les relations seraient ou incompatibles ou non distinctes). Nous pouvons, sans restreindre la généralité, supposer que c'est le déterminant relatif aux éléments α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_s$. D'autre part, s est certainement inférieur à n, car sans cela, d'après (33), les parties réelles des α seraient toutes nulles. Soit D le déterminant relatif à $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$, D est un nombre entier que l'on peut supposer positif. Posons

$$(34) \qquad \left\{\begin{array}{l} DX_1 = p_1^{(1)}x_1 + p_2^{(1)}x_2 + \ldots + p_n^{(1)}x_n, \\ DX_2 = p_1^{(2)}x_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots + p_n^{(2)}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ DX_s = p_1^{(s)}x_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots + p_n^{(s)}x_n, \end{array}\right.$$

puis

$$(35)\qquad \left\{\begin{aligned} DX_{s+1} &= x_{s+1},\\ DX_{s+2} &= x_{s+2},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ DX_n &= x_n, \end{aligned}\right. \qquad D = \begin{vmatrix} p_1^{(1)} & p_2^{(1)} & \ldots & p_s^{(1)}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ p_1^{(s)} & p_2^{(s)} & \ldots & p_s^{(s)} \end{vmatrix}.$$

Par cette substitution linéaire $\theta(x)$ deviendra $\Theta(x)$. On voit tout de suite que les x sont fonctions linéaires à coefficients entiers des X. Donc $\Theta(X)$ admet la période $2i\pi$ par rapport à chacune des variables X. De plus par le changement de x en $x + D\alpha$, on voit, en tenant compte de (33), que $X_1, X_2, \ldots, X_s$ augmentent de multiples de $2i\pi$, dont on peut ne pas tenir compte puisque $\Theta(X)$ admet la période $2i\pi$ par rapport à chacune des variables X, et que $X_{s+1}, \ldots, X_n$ augmentent de $\alpha_{s+1}, \ldots, \alpha_n$. On a ainsi

$$(36)\qquad \left\{\begin{aligned} \Theta(X + c_p) &= \Theta(X),\\ \Theta(X + \alpha) &= \Theta(X)e^{Db}, \end{aligned}\right.$$

$X + \alpha$ indiquant le changement de $X_{s+1}, X_{s+2}, \ldots, X_n$ en $X_{s+1} + \alpha_{s+1}, \ldots, X_n + \alpha_n$. Il n'existe entre $\alpha_{s+1}, \alpha_{s+2}, \ldots, \alpha_n$ aucune relation de la forme (33), car une telle relation serait distincte des relations (33). On peut poser

$$\Theta(X) = \sum B_{m_1, m_2, \ldots, m_n} e^{m_1 X_1 + m_2 X_2 + \ldots + m_n X_n},$$

et par identification, dans la seconde des relations (36),

$$B_{m_1, m_2, \ldots, m_n} = e^{Db - m_{s+1}\alpha_{s+1} - m_{s+2}\alpha_{s+2} \ldots - m_n\alpha_n} B_{m_1, m_2, \ldots, m_n},$$

et l'on en conclut l'une des relations

$$B_{m_1, m_2 \ldots, m_n} = 0,$$

$$m_{s+1}\alpha_{s+1} + m_{s+2}\alpha_{s+2} + \ldots + m_n\alpha_n - D\,b = 2ri\pi \qquad (r \text{ entier ou nul}).$$

En raisonnant comme plus haut on en conclut que $\Theta(X)$ est de la forme

$$C\,e^{m_{s+1}x_{s+1} + \ldots m_n x_n}\Theta_1(X),$$

où $\Theta_1(X)$ est fonction uniquement des s variables $X_1, X_2, \ldots, X_s$. C est une constante (qui peut être nulle); les m, des entiers déterminés, qui peuvent être tous nuls et qui le sont nécessairement si b est un multiple de $2i\pi$.

En résumé, nous avons montré que si une fonction entière $\theta(x)$ satisfait aux relations (29), ou bien elle est nulle identiquement, ou bien elle ne s'annule jamais, ou bien, si elle s'annule sans être identiquement nulle, c'est qu'il existe quelque relation de la forme (30), et dans ce cas les zéros de $\theta(x)$ se ramènent par une substitution linéaire à ceux d'une fonction entière $\Theta_1(X)$ de s variables seulement ($s < n$). La seule hypothèse restrictive faite relativement aux α, est ici que toutes leurs parties réelles ne soient pas nulles.

Voici, enfin, une dernière conséquence immédiate de ce qui précède, et qu'on obtient en supposant dans les relations (29) que b est multiple de $2i\pi$. *Si une fonction entière $\theta(x)$ admet les $(n+1)$ systèmes de périodes qui interviennent dans les relations* (29) : *ou bien $\theta(x)$ est une constante (qui peut être nulle), ou bien $\theta(x)$ se ramène par une substitution linéaire à une fonction $\Theta_1(X)$ de s variables seulement ($s < n$) : il est nécessaire dans ce dernier cas qu'il existe une relation de la forme* (33).

7. Nous avons développé, un peu longuement peut-être, les considérations très simples qui précèdent pour mieux éclaircir ce qui va suivre : nous allons, en effet, retrouver toutes les circonstances de la dernière discussion, dans un cas plus général; mais nous serons obligés de suivre un procédé de démonstration très différent.

Soit $f(x)$ une fonction entière des n variables x dont les zéros admettent, par rapport à chacune des variables, la période $2i\pi$, et en outre admettent un système de périodes conjuguées, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ dont tous les éléments ne sont pas purement imaginaires. D'après le théorème démontré dans la première partie, nous pouvons supposer que $f(x)$, après multiplication par une fonction entière qui ne s'annule pas, satisfait aux conditions suivantes

$$f(x + c_p) = e^{L_p(x)} f(x) \qquad (p = 1, 2, \ldots, n), \tag{37}$$

avec

$$L_p(x) = m_1^{(p)} x_1 + m_2^{(p)} x_2 + \ldots + m_n^{(p)} x_n \tag{38}$$

et

$$m_q^{(p)} = 0 \qquad \text{si} \qquad q \leq p.$$

En ajoutant aux x les périodes α nous aurons

$$(39)\qquad f(x+\alpha) = e^{h(x)} f(x),$$

où $h(x)$ est une fonction entière des x. En changeant dans cette relation x_p en $x_p + 2i\pi$, il vient

$$f(x+\alpha+c_p) = e^{h(x+c_p)} f(x+c_p).$$

Or

$$f(x+\alpha+c_p) = e^{L_p(x+\alpha)} f(x+\alpha) = e^{h(x)+L_p(x+\alpha)} f(x).$$

On en conclut

$$h(x) + L_p(x+\alpha) = h(x+c_p) + L(x) - 2a_p i\pi,$$

où a_p est un entier ou zéro. On en tire

$$h(x+c_p) - h(x) = L_p(x+\alpha) - L(x) + 2a_p i\pi,$$
$$h(x+c_p) - h(x) = m_1^{(p)}\alpha_1 + m_2^{(p)}\alpha_2 \ldots + m_n^{(p)}\alpha_n + 2a_p i\pi.$$

Nous poserons, pour abréger,

$$(40)\qquad m_1^{(p)}\alpha_1 + m_2^{(p)}\alpha_2 + \ldots + m_n^{(p)}\alpha_n = 2i\pi b_p,$$

b_p sera une constante et finalement nous aurons

$$(41)\qquad h(x+c_p) - h(x) = 2i\pi(b_p + a_p) \qquad (p = 1, 2, \ldots, n).$$

On voit d'après cela que la différence

$$h(x) - \sum_{p=1}^{p=n} (b_p + a_p) x_p$$

admet la période $2i\pi$ par rapport à chacune des variables et se réduit à une série entière de la forme (5); soient donc

$$(42)\qquad g(x) = \sum A_{p_1, p_2, \ldots, p_n} e^{p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n}$$

et

$$(43)\qquad h(x) = g(x) + \sum_{p=1}^{p=n} (b_p + a_p) x_p.$$

Telle est l'expression de la fonction entière $h(x)$ qui figure dans la formule (39).

Cette expression de $h(x)$ contient $\frac{n(n+1)}{2}$ nombres entiers, à savoir $\frac{n(n-1)}{2}$ nombres entiers $m_p^{(q)}$ $(q>p)$ et n entiers a_p. Si tous ces entiers sont nuls, il résulte de (40) que b_p est nul et, par conséquent,

$$h(x)=g(x),$$

et l'on a, relativement à $f(x)$, les relations

$$\left.\begin{array}{ll}(44) & f(x+c_p)=f(x), \\ (45) & f(x+\alpha)=e^{g(x)}f(x)\end{array}\right\} \quad (p=1, 2, \ldots, n).$$

Nous allons démontrer que, dans ce cas, $f(x)$ ne peut pas s'annuler sans être nulle identiquement, s'il n'existe pas entre les α et $2i\pi$ une relation de la forme (33) et que, s'il existe s relations de cette forme (33), les zéros de $f(x)$ se ramènent par une substitution linéaire à ceux d'une fonction entière de s variables $(s<n)$. C'est la généralisation de la proposition du numéro précédent. La démonstration sera l'objet des trois numéros suivants.

8. Nous envisagerons dans ce numéro une fonction entière $f(x)$, à l'égard de laquelle nous supposerons : 1° qu'elle s'annule pour quelque système de valeurs des variables; 2° que ses zéros admettent les $(n+1)$ systèmes de périodes envisagés plus haut; 3° qu'il n'y a entre les α et $2i\pi$ aucune relation de la forme (33). Pour simplifier l'écriture, nous supposerons trois variables seulement que nous désignerons par x, y, z : la généralité du raisonnement sera évidente. Nous désignerons par $f(x, y, z)$ la fonction considérée. En posant, comme plus haut,

$$\alpha_1=\lambda_1+\mu_1 i, \qquad \alpha_2=\lambda_2+\mu_2 i, \qquad \alpha_3=\lambda_3+\mu_3 i,$$

nous pouvons supposer $\lambda_1 \neq 0$. Nous effectuerons alors le changement de variables suivant

$$(46) \qquad \left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{\lambda_1}{2i\pi}X, \\ y=\dfrac{\lambda_2}{2i\pi}X+Y, \\ z=\dfrac{\lambda_3}{2i\pi}X+Z, \end{array}\right.$$

ou

$$(47)\qquad \left\{\begin{aligned} X &= \frac{2i\pi}{\lambda_1}x,\\ Y &= -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}x + y,\\ Z &= -\frac{\lambda_3}{\lambda_1}x + z. \end{aligned}\right.$$

Au Tableau des systèmes de périodes relatives aux variables x, y, z,

$$\begin{matrix} 2i\pi & 0 & 0,\\ 0 & 2i\pi & 0,\\ 0 & 0 & 2i\pi,\\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3, \end{matrix}$$

correspond, pour les variables X, Y, Z, le Tableau suivant

$$\begin{matrix} \dfrac{-4\pi^2}{\lambda_1} & -2i\pi\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1} & -2i\pi\dfrac{\lambda_3}{\lambda_1},\\ 0 & 2i\pi & 0,\\ 0 & 0 & 2i\pi,\\ 2i\pi - 2\pi\dfrac{\mu_1}{\lambda_1} & i\dfrac{\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1}{\lambda_1} & i\dfrac{\lambda_1\mu_3 - \lambda_3\mu_1}{\lambda_1}. \end{matrix}$$

Dans ce Tableau tous les éléments relatifs aux variables Y et Z sont purement imaginaires; pour la variable X l'un des éléments est réel, l'autre ne l'est pas. Nous poserons

$$(48)\qquad \left\{\begin{array}{lll} \omega = -\dfrac{4\pi^2}{\lambda_1} & \beta = -2\pi\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1} & \gamma = -2\pi\dfrac{\lambda_3}{\lambda_1},\\ \omega' = 2i\pi - 2\pi\dfrac{\mu_1}{\lambda_1} & \beta' = \dfrac{\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1}{\lambda_1} & \gamma' = \dfrac{\lambda_1\mu_3 - \lambda_3\mu_1}{\lambda_1}. \end{array}\right.$$

Le Tableau des périodes des zéros de F(X, Y, Z), en désignant ainsi ce que devient $f(x, y, z)$, sera, en changeant l'ordre des lignes,

$$(49)\qquad \left\{\begin{matrix} 0 & 2i\pi & 0,\\ 0 & 0 & 2i\pi,\\ \omega & i\beta & i\gamma,\\ \omega' & i\beta' & i\gamma', \end{matrix}\right.$$

β, γ, β', γ' sont réels; le rapport $\frac{\omega'}{\omega}$ est imaginaire.

Soit X_0, Y_0, Z_0 un système de valeurs de X, Y, Z pour lequel nous supposerons que F s'annule. On pourra, d'après le théorème bien connu de Weierstrass, mettre F sous la forme

$$F(X, Y, Z) = P(X - X_0) \times \Phi(X - X_0, Y - Y_0, Z - Z_0),$$

où $P(X - X_0)$ est un polynome entier en $X - X_0$ dont les coefficients sont des fonctions régulières de Y et Z pour $Y = Y_0$, $Z = Z_0$, et Φ est une série entière en $X - X_0$, $Y - Y_0$, $Z - Z_0$, convergente dans un certain domaine, et différente de o au point X_0, Y_0, Z_0.

Il y a toutefois un cas d'exception à ce théorème : c'est celui où pour $Y = Y_0$, $Z = Z_0$, F s'annulerait quel que soit X. Nous montrerons d'abord que ce cas d'exception ne peut pas se présenter ici. Imaginons F ordonnée suivant les puissances entières et positives de X, soit

$$F(X, Y, Z) = \sum_{p=0}^{\infty} \Psi_p(Y, Z) X^p.$$

On aurait pour le cas d'exception indiqué ci-dessus

$$\Psi_p(Y_0, Z_0) = 0 \qquad (p = 0, 1, 2, \ldots, \infty).$$

Les zéros de F(X, Y, Z) étant les mêmes que ceux de la fonction

$$F(X + m\omega + n\omega', Y + mi\beta + ni\beta' + 2ri\pi, Z + mi\gamma + ni\gamma' + 2si\pi),$$

m, *n*, *r*, et *s* étant des entiers quelconques, on voit que

$$F(X + m\omega + n\omega', Y_0 + mi\beta + ni\beta' + 2ri\pi, Z_0 + mi\gamma + ni\gamma' + 2si\pi)$$

serait nulle quel que soit X, et par suite aussi la fonction

$$F(X, Y_0 + mi\beta + ni\beta' + 2ri\pi, Z_0 + mi\gamma + ni\gamma' + 2si\pi);$$

ce qui donne les conditions

$$(50) \qquad \Psi_p(Y_0 + mi\beta + ni\beta' + 2ri\pi, Z_0 + mi\gamma + ni\gamma' + 2si\pi) = 0$$
$$(p = 0, 1, 2, \ldots, \infty).$$

Or, pour des valeurs convenablement choisies des entiers *m*, *n*, *r* et *s*, les sommes $m\beta + n\beta' + 2r\pi$ et $m\gamma + n\gamma' + 2s\pi$ différeront aussi peu que l'on voudra de deux quantités réelles données à l'avance k et k', s'il n'existe pas simultanément deux relations de la forme

$$(51)\qquad \begin{cases} p_1\beta + p_2\gamma = 2p_3\pi, \\ p_1\beta' + p_2\gamma' = 2p_4\pi, \end{cases}$$

p_1, p_2, p_3 et p_4 étant quatre entiers non tous nuls. On trouvera la démonstration de cette proposition en note à la fin du Mémoire (pour le cas d'un nombre quelconque de variables). Or, en remplaçant dans (51), β, γ, β', γ' par leurs valeurs (48), il vient

$$p_3\lambda_1 + p_1\lambda_2 + p_2\lambda_3 = 0,$$

$$p_1\mu_2 + p_2\mu_3 - \frac{\mu_1}{\lambda_1}(p_1\lambda_2 + p_2\lambda_3) = 2p_4\pi.$$

La seconde s'écrit, en tenant compte de la première,

$$p_3\mu_1 + p_1\mu_2 + p_2\mu_3 = 2p_4\pi;$$

d'où

$$p_3(\lambda_1 + i\mu_1) + p_1(\lambda_2 + i\mu_2) + p_2(\lambda_3 + i\mu_3) = 2ip_4\pi,$$

ou enfin

$$p_3\alpha_1 + p_1\alpha_2 + p_2\alpha_3 = 2ip_4\pi.$$

Cette relation est de la forme (30), et actuellement nous excluons le cas où il existe une telle relation. Donc k et k' étant deux quantités réelles, $m\beta + n\beta' + 2r\pi$ et $m\gamma + n\gamma' + 2s\pi$ peuvent différer aussi peu que l'on veut de k et k'. Il en résulte, d'après (50) et par suite de la continuité de la fonction entière Ψ_p,

$$\Psi_p(Y_0 + ik, Z_0 + ik') = 0 \qquad (p = 0, 1, 2, \ldots, \infty),$$

quels que soient les nombres réels k et k'. On en conclut facilement que $\Psi_p(Y_0 + ik, Z)$ est nulle quel que soit Z et que $\Psi_p(Y, Z)$ est nulle identiquement. Par suite F serait nulle identiquement.

Nous voyons ainsi que le cas d'exception signalé plus haut au théorème de Weierstrass ne peut pas se présenter ici.

Cela posé, F(X, Y, Z) étant supposée s'annuler pour un système de valeurs X_0, Y_0, Z_0, ses zéros dans le voisinage de ce système de valeurs sont donnés en égalant à 0 le polynome de Weierstrass $P(X - X_0)$

dont les coefficients sont des fonctions régulières de Y et Z dans un domaine ρ du point Y_0, Z_0, défini par

$$|Y - Y_0| < \rho, \qquad |Z - Z_0| < \rho.$$

Pour chaque système de valeurs de Y et Z de ce domaine, $F(X, Y, Z)$ s'annulera pour une valeur voisine de X_0.

Il est maintenant facile de montrer que si l'on pose

$$Y_1 = Y_0 + ik,$$
$$Z_1 = Z_0 + ik',$$

k et k' étant deux nombres réels quelconques, $F(X, Y, Z)$ s'annulera pour $Y = Y_1$, $Z = Z_1$, $X = X_1$, X_1 étant convenablement choisie. Posons, en effet,

$$m\beta + n\beta' + 2r\pi = k + \eta,$$
$$m\gamma + n\gamma' + 2s\pi = k' + \eta';$$

m, n, r et s étant des entiers convenablement choisis, on aura $|\eta| < \varepsilon$, $|\eta'| < \varepsilon$, ε étant un nombre positif très petit donné à l'avance; cela résulte de ce qui a été dit plus haut. Or, par suite de la périodicité des zéros de $F(X, Y, Z)$, pour chaque système de valeurs de Y et Z dans le domaine ρ du point $Y_2 = Y_0 + m\beta i + n\beta' i + 2ri\pi$, $Z_2 = Z_0 + m\gamma i + n\gamma' i + 2si\pi$, $F(X, Y, Z)$ s'annulera pour une valeur de X voisine de $X_2 = X_0 + m\omega + n\omega'$. Comme $Y_2 = Y_1 + i\eta$, $Z_2 = Z_1 + i\eta'$, on voit que pour chaque système de valeurs de Y et Z dans un domaine $(\rho - \varepsilon)$ du point (Y_1, Z_1), $F(X, Y, Z)$ s'annulera pour une valeur de X voisine d'une valeur déterminée X_1, pour laquelle $F(X_1, Y_1, Z_1) = 0$.

Appelons L le segment de droite qui joint, dans le plan de la variable Y, le point Y_0 au point $Y_0 + 2i\pi$, et L' celui qui joint, dans le plan de Z, le point Z_0 au point $Z_0 + 2i\pi$. Prenons un entier positif N assez grand pour que $\frac{2\pi}{N} < \rho - \varepsilon$ et partageons L et L', respectivement, en N parties égales, l_p, l'_q (p et $q = 1, 2, \ldots, N$) et soient Y_p, Z_q les milieux de l_p et l'_q. D'après ce qui précède, Y_p et Z_q étant manifestement de la forme $Y_0 + ik$, $Z_0 + ik'$, $F(X, Y_p, Z_q)$ s'annule pour une valeur $X = X_{pq}$ et, pour tout système de valeurs de Y et Z dans le domaine $(\rho-\varepsilon)$ de (Y_p, Z_q), $F(X, Y, Z)$ s'annule pour une valeur voisine de $X_{p,q}$. En particulier, tous les points situés sur (l_p, l'_q) appartiennent au domaine $(\rho-\varepsilon)$ de (Y_p, Z_q), puisque $\frac{2\pi}{N} < \rho - \varepsilon$. Il est donc évidemment possible de tracer dans le plan de la variable X un cercle ayant l'origine pour centre et un rayon R_{pq} assez grand pour que, pour chaque point (Y, Z) situé sur (l_p, l'_q), $F(X, Y, Z)$ s'annule pour une valeur de X située à l'intérieur du cercle tracé.

Imaginons alors un cercle Γ, concentrique aux précédents et d'un rayon R supérieur aux N^2 rayons R_{pq} (p et $q = 1, 2, \ldots, N$). Pour chaque point (Y, Z) de (L, L'), $F(X, Y, Z)$ aura un zéro intérieur à Γ. Enfin, les zéros de F ne changeant pas lorsqu'on ajoute $2i\pi$ à Y ou à Z, et d'autre part L et L' étant de longueur égale à 2π, on voit que $F(X, Y_0 + ik, Z_0 + ik')$ admet, pour chaque système de valeurs réelles de k et k', un zéro à l'intérieur de Γ.

Nous pouvons imaginer dans le plan de X, un parallélogramme Π qui contienne Γ à son intérieur et dont les côtés soient équipollents à $M\omega$, $M'\omega'$, M et M' étant des entiers choisis assez grands, et imaginer, en outre, que l'on a formé tout le réseau de parallélogrammes dont Π serait le parallélogramme fondamental. Il est alors très facile de voir que $F(X, Y_0, Z_0)$ admettra au moins un zéro à l'intérieur de *chacun* des parallélogrammes de ce réseau. Car les valeurs de X qui correspondent à l'un des parallélogrammes, bien déterminé, du réseau, peuvent être écrites sous la forme

$$X = mM\omega + m'M'\omega' + X',$$

m et m' étant deux entiers déterminés et X' *intérieur* à Π. Les zéros de $F(X, Y_0, Z_0)$ sont les mêmes que ceux de

$$F(X - mM\omega - m'M'\omega', Y_0 - mMi\beta - m'M'i\beta', Z_0 - mMi\gamma - m'M'i\gamma'),$$

que l'on peut écrire

$$F(X', Y_0 - mMi\beta - m'M'i\beta', Z_0 - mMi\gamma - m'M'i\gamma'),$$

ou encore

$$F(X', Y_0 + ik, Z_0 + ik').$$

Or cette dernière fonction entière de X' admet au moins un zéro à l'intérieur de Γ et par suite à l'intérieur de Π.

En résumé, de l'hypothèse $F(X_0, Y_0, Z_0) = 0$, nous avons conclu que l'on peut construire un réseau de parallélogrammes tel que $F(X, Y_0, Z_0)$ ait un zéro au moins dans chaque parallélogramme.

Nous aurons à appliquer ce résultat dans le numéro suivant.

9. Soit $f(x)$ une fonction entière satisfaisant aux relations (44) et (45) que nous écrirons ici pour le cas de trois variables

$$(52)\quad \begin{cases} f(x+2i\pi, y, z) = f(x, y, z), \\ f(x, y+2i\pi, z) = f(x, y, z), \\ f(x, y, z+2i\pi) = f(x, y, z), \\ f(x+\alpha_1, y+\alpha_2, z+\alpha_3) = e^{g(x,y,z)} f(x, y, z), \end{cases}$$

où $g(x, y, z)$ est une fonction entière admettant la période $2i\pi$ par rapport à chacune des variables. Nous allons montrer que s'il n'existe aucune relation de la forme (30) entre les α et $2i\pi$, $f(x, y, z)$ ne peut pas s'annuler, sans être nulle identiquement.

Nous effectuerons le même changement de variables que dans le paragraphe précédent. Mais, auparavant, considérons l'expression

$$\lambda_1 \frac{\partial g}{\partial x_1} + \lambda_2 \frac{\partial g}{\partial y} + \lambda_3 \frac{\partial g}{\partial z},$$

λ_1, λ_2, λ_3 désignant encore ici les parties réelles de α_1, α_2, α_3. Soit

$$g(x, y, z) = \sum A_{p,q,r} e^{px+qy+rz},$$

p, q, r prenant toutes les valeurs entières positives, négatives ou nulles. On aura

$$(53)\quad \lambda_1 \frac{\partial g}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial g}{\partial y} + \lambda_3 \frac{\partial g}{\partial z} = \sum A_{p,q,r}(p\lambda_1 + q\lambda_2 + r\lambda_3) e^{px+qy+rz}.$$

Nous pouvons déterminer une série entière $h(x, y, z)$ de même forme que $g(x, y, z)$

$$(54)\quad h(x, y, z) = \sum B_{pqr} e^{px+qy+rz},$$

et telle que l'on ait l'identité

$$(55)\quad \begin{aligned} &h(x+\alpha_1, y+\alpha_2, z+\alpha_3) - h(x, y, z) \\ &\quad = \sum A_{pqr}(p\lambda_1 + q\lambda_2 + r\lambda_3) e^{px+qy+rz}. \end{aligned}$$

L'identification donne, en effet, l'expression suivante pour B_{pqr}

$$B_{pqr} = -A_{pqr} \frac{p\lambda_1 + q\lambda_2 + r\lambda_3}{1 - e^{p\alpha_1 + q\alpha_2 + r\alpha_3}}. \tag{56}$$

Remarquons que $1 - e^{p\alpha_1 + q\alpha_2 + r\alpha_3}$ n'est nul pour aucun système de valeurs non toutes nulles de p, q, r, puisqu'il n'existe pas de relation de la forme (30). Pour $p = q = r = 0$, on peut prendre B_{000} arbitraire.

Montrons que les B_{pqr} calculés par la formule (56) sont bien les coefficients d'une série convergente pour toutes valeurs de x, y, z. Il suffit évidemment de le démontrer pour les valeurs de p, q, r pour lesquelles on a

$$|1 - e^{p\alpha_1 + q\alpha_2 + r\alpha_3}| < \varepsilon, \tag{57}$$

ε étant un nombre positif donné à l'avance.

Or

$$|1 - e^{p\alpha_1 + q\alpha_2 + r\alpha_3}| \geqq |1 - e^{p\lambda_1 + q\lambda_2 + r\lambda_3}|.$$

Si $p\lambda_1 + q\lambda_2 + r\lambda_3$ est nul, B_{pqr} l'est aussi d'après (56). Nous pouvons donc supposer $p\lambda_1 + q\lambda_2 + r\lambda_3$ non nul et écrire l'inégalité

$$\left| \frac{p\lambda_1 + q\lambda_2 + r\lambda_3}{1 - e^{p\alpha_1 + q\alpha_2 + r\alpha_3}} \right| \leqq \left| \frac{p\lambda_1 + q\lambda_2 + r\lambda_3}{1 - e^{p\lambda_1 + q\lambda_2 + r\lambda_3}} \right|. \tag{58}$$

D'après (57), $|p\lambda_1 + q\lambda_2 + r\lambda_3|$ est inférieur à un nombre positif fixe K, choisi assez grand; le second membre de (58) est donc inférieur à un nombre fixe positif K', puisque $\frac{\xi}{1 - e^{\xi}}$ est une fonction continue de la variable réelle ξ dans l'intervalle $-K$ à $+K$. Les valeurs de B_{pqr} correspondantes satisfont donc à l'inégalité

$$|B_{pqr}| < |A_{pqr}| K'.$$

La série (54) est donc convergente.

Effectuons maintenant le même changement de variables que plus haut :

$$x = \frac{\lambda_1}{2i\pi} X,$$

$$y = \frac{\lambda_2}{2i\pi} X + Y,$$

$$z = \frac{\lambda_3}{2i\pi} X + Z.$$

Soient $F(X, Y, Z)$, $G(X, Y, Z)$, $H(X, Y, Z)$ ce que deviennent $f(x, y, z)$, $g(x, y, z)$, $h(x, y, z)$. Nous aurons

$$(59)\qquad \frac{\partial G}{\partial X} = \frac{1}{2i\pi}\left|\lambda_1\frac{\partial g}{\partial x} + \lambda_2\frac{\partial g}{\partial y} + \lambda_3\frac{\partial g}{\partial z}\right|.$$

En conservant les notations du numéro précédent, $F(X, Y, Z)$ satisfera aux conditions :

$$(60)\qquad \begin{cases} F(X, Y, Z) = F(X, Y + 2i\pi, Z) \\ \qquad = F(X, Y, Z + 2i\pi) = F(X + \omega, Y + i\beta, Z + i\gamma), \\ F(X + \omega', Y + i\beta', Z + i\gamma') = e^{G(X, Y, Z)}F(X, Y, Z). \end{cases}$$

Nous avons également

$$(61)\qquad \begin{aligned} G(X, Y + 2i\pi, Z) &= G(X, Y, Z + 2i\pi) \\ &= G(X + \omega, Y + \beta i, Z + \gamma i) = G(X, Y, Z), \end{aligned}$$

et pour H

$$(62)\qquad \begin{aligned} H(X, Y + 2i\pi, Z) &= H(X, Y, Z + 2i\pi) \\ &= H(X + \omega, Y + \beta i, Z + \gamma i) = H(X, Y, Z). \end{aligned}$$

En outre, on a, d'après (53), (55) et (59),

$$(63)\qquad H(X + \omega', Y + i\beta', Z + i\gamma') - H(X, Y, Z) = 2i\pi\frac{\partial G}{\partial X}.$$

Nous poserons, en désignant par X_1 une valeur fixe quelconque,

$$(64)\qquad K(X, Y, Z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{X_1}^{X} H(X, Y, Z)\,dX;$$

le choix du chemin d'intégration n'intervient pas, puisque H est une fonction entière de X.

En changeant dans (64) Y ou Z en $Y + 2i\pi$ ou $Z + 2i\pi$ et tenant compte de (62), il vient

$$(65)\qquad K(X, Y + 2i\pi, Z) = K(X, Y, Z + 2i\pi) = K(X, Y, Z).$$

Si nous considérons la différence

$$K(X + \omega, Y + i\beta, Z + i\gamma) - K(X, Y, Z),$$

sa dérivée par rapport à X est nulle d'après (62).

Cette différence est donc fonction de Y et Z seuls; soit

$$(66)\qquad K(X+\omega,\ Y+i\beta,\ Z+i\gamma)-K(X,\ Y,\ Z)=-\Phi(Y,\ Z).$$

Comme K(X, Y, Z) admet la période $2i\pi$ par rapport à chacune des variables Y et Z, on aura

$$(67)\qquad \Phi(Y+2i\pi,\ Z)=\Phi(Y,\ Z+2i\pi)=\Phi(Y,\ Z).$$

Considérons également la différence

$$K(X+\omega',\ Y+i\beta',\ Z+i\gamma')-K(X,\ Y,\ Z);$$

sa dérivée par rapport à X est égale, d'après (63) et (64), à $\frac{\partial G}{\partial X}$, et par conséquent,

$$(68)\quad K(x+\omega',\ Y+i\beta',\ Z+i\gamma')-K(X,\ Y,\ Z)=G(X,\ Y,\ Z)-\Psi(Y,Z),$$

où $\Psi(Y,\ Z)$ est une fonction entière de Y, Z, qui admet, par rapport à chacune des variables Y et Z, la période $2i\pi$, puisque les fonctions K et G admettent ces périodes.

Posons

$$F_1(X,\ Y,\ Z)=e^{-K(X,\ Y,\ Z)}F(X,\ Y,\ Z).$$

La fonction F_1 admettra les mêmes zéros que F.

Des relations (60), (65), (66) et (68) on conclut les suivantes:

$$(69)\quad \begin{cases} F_1(X,\ Y,\ Z)=F_1(X,\ Y+2i\pi,\ Z)=F_1(X,\ Y,\ Z+2i\pi), \\ F_1(X+\omega,\ Y+i\beta,\ Z+i\gamma)=e^{\Phi(Y,\ Z)}F_1(X,\ Y,\ Z), \\ F_1(X+\omega',\ Y+i\beta',\ Z+i\gamma')=e^{\Psi(Y,\ Z)}F_1(X,\ Y,\ Z), \end{cases}$$

où $\Phi(Y,\ Z)$ et $\Psi(Y,\ Z)$ admettent la période $2i\pi$ par rapport à chacune des variables Y et Z.

Nous allons voir comment des formules (69) on peut conclure une limite supérieure de l'ordre de grandeur de $F_1(X,\ Y_0,\ Z_0)$, Y_0 et Z_0 étant deux valeurs quelconques fixes, pour les valeurs très grandes de X. Remarquons pour cela que Φ et Ψ admettant la période $2i\pi$ par rapport à chacune des variables, on pourra poser, si k et k' sont deux nombres réels quelconques :

$$\Phi(Y_0+ik,\ Z_0+ik')=\Phi(Y_0+ik_1,\ Z_0+ik'_1),$$

k_1 et k'_1 étant deux nombres réels et positifs au plus égaux à 2π. La même remarque s'applique à $\Psi(Y_0 + ik,\ Z_0 + ik')$. D'après cela, il existe un nombre positif fixe A, tel que

$$(70)\qquad \begin{cases} |\Phi(Y_0 + ik,\ Z_0 + ik')| < A, \\ |\Psi(Y_0 + ik,\ Z_0 + ik')| < A, \end{cases}$$

pour toute valeur réelle de k et k'.

De même, on peut poser

$$F_1(X, Y_0 + ik, Z_0 + ik') = F_1(X, Y_0 + ik_1, Z_0 + ik'_1).$$

Si l'on suppose X à l'intérieur d'un parallélogramme P de côtés ω et ω', ayant pour sommet l'origine, dans le plan de X, il existe un nombre positif B tel que

$$(71)\qquad |F_1(X, Y_0 + ik, Z_0 + ik')| < B,$$

pour X *intérieur à* P, k et k' étant des valeurs réelles quelconques.

Par l'application répétée de la troisième des formules (69) on conclut, m étant un entier *positif* quelconque,

$$(72)\qquad F_1(X + m\omega, Y + mi\beta, Z + mi\gamma) = e^{S(Y,Z)}.\ F_1(X, Y, Z).$$

$$(73)\qquad \begin{aligned} S(Y, Z) = \Phi(Y, Z) + \Phi(Y + i\beta, Z + i\gamma) + \ldots \\ + \Phi[Y + (m-1)i\beta, Z + (m-1)i\gamma], \end{aligned}$$

et par conséquent, en changeant Y et Z en $Y_0 - mi\beta$ et $Z_0 - mi\gamma$,

$$(74)\qquad F_1(X + m\omega, Y_0, Z_0) = e^{S(Y_0 - mi\beta,\ Z_0 - mi\gamma)}.\ F(X, Y_0 - mi\gamma, Z_0 - mi\gamma).$$

Or, la partie réelle de $S(Y_0 - mi\beta, Z_0 - mi\gamma)$ est, d'après (73) et (70), inférieure en valeur absolue à mA.

Par suite,

$$(75)\qquad |F_1(X + m\omega, Y_0, Z_0)| < e^{mA}\,|F_1(X, Y_0 - mi\beta, Z_0 - mi\gamma)|.$$

On tire de (72), en changeant X en $X - m\omega$,

$$F_1(X - m\omega, Y, Z) = e^{-S(Y,Z)}\,|\,F_1(X, Y + mi\beta, Z + mi\gamma),$$

et par suite

$$(76)\qquad |F_1(X - m\omega, Y_0, Z_0)| < e^{mA}\,|F_1(X, Y_0 + mi\beta, Z_0 + mi\gamma)|.$$

Les deux inégalités (75) et (76) se résument dans la suivante, où m

est un entier positif, ou négatif, ou nul, et M est la valeur absolue de m :

$$(77) \qquad |F_1(X+m\omega,\ Y_0, Z_0)| < e^{MA}|F_1(X, Y_0 - mi\beta, Z_0 - mi\gamma)|.$$

De la même façon

$$(78) \qquad |F_1(X+n\omega',\ Y_0, Z_0)| < e^{NA}|F_1(X, Y_0 - ni\beta', Z_0 - ni\gamma)|,$$

n étant un entier et N sa valeur absolue.

Des inégalités (77) et (78), établies pour toute valeur de X, on conclut sans difficulté la suivante :

$$|F_1(X+m\omega+n\omega', Y_0, Z_0)| < e^{(M+N)A}|F_1(X, Y_0 - mi\beta - ni\beta', Z_0 - mi\gamma - ni\gamma)|.$$

Si l'on suppose X intérieur à P, il viendra donc, à cause de (71),

$$(79) \qquad |F_1(X+m\omega+n\omega',\ Y_0, Z_0)| < B e^{(M+N)A},$$

pour X *intérieur à* P.

Or X′ étant une valeur quelconque, on peut poser

$$X' = m\omega + n\omega' + X$$

où m et n sont deux entiers convenablement choisis et où X est intérieur à P.

Le module de X′ est évidemment de l'ordre de grandeur de (M+N), M et N étant les valeurs absolues de m et n. En fait, on peut bien facilement démontrer que ξ étant le module de X′, on aura

$$B e^{A(M+N)} < B_1 e^{A_1\xi},$$

ξ étant le module de $X' = m\omega + n\omega' + X$ (X intérieur à P) et B_1, A_1, deux constantes positives convenablement choisies. L'inégalité (79) peut être alors remplacée par la suivante

$$(80) \qquad |F_1(X', Y_0, Z_0)| < B_1 e^{A_1\xi},$$

X′ désignant une valeur quelconque et ξ son module, B_1 et A_1 des constantes qui dépendent du choix des valeurs fixes Y_0 et Z_0.

Si maintenant $F_1(X, Y, Z)$ s'annulait pour un système de valeurs X_0, Y_0, Z_0, d'après le paragraphe précédent $F_1(X, Y_0, Z_0)$ admettrait un zéro au moins à l'intérieur de chacun des parallélogrammes d'un réseau *convenablement choisi*. Or, cela est incompatible, d'après les beaux théorèmes de M. Hadamard sur la distribution des zéros et le genre des fonctions entières, avec l'inégalité (80).

Il est facile de préciser ce point : imaginons les racines de $F_1(X, Y_0, Z_0)$ rangées par ordre de modules non décroissants, et appelons ρ_μ le module de la $\mu^{\text{ième}}$ racine. $F_1(X, Y_0, Z_0)$ étant ordonnée comme série entière en X, soit

$$F_1(X, Y_0, Z_0) = \sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} a_\mu X^\mu.$$

De (80) on déduit une limite supérieure du module de a_μ, en imaginant un cercle de rayon égal à μ dans le plan de X et ayant pour centre l'origine; on a ainsi

$$|a_\mu| < \frac{B_1 e^{A_1 \mu}}{\mu^\mu}$$

et

$$\left|\frac{1}{\sqrt[\mu]{a_\mu}}\right| > \frac{\mu}{\sqrt[\mu]{B_1} e^{A_1}}.$$

D'après M. Hadamard, ρ_μ croît avec μ plus vite que $\frac{1}{\sqrt[\mu]{a_\mu}}$ et par suite que $\frac{\mu}{\sqrt[\mu]{B_1} e^{A_1}}$. Or, s'il y avait une racine au moins dans chaque parallélogramme d'un réseau convenablement choisi, ρ_μ serait au plus de l'ordre de grandeur de $\sqrt{\mu}$.

La contradiction apparaît ainsi, et l'on voit qu'il est impossible que $F_1(X, Y, Z)$ s'annule (à moins d'être nulle identiquement, cas qui échappe au théorème de M. Hadamard).

La fonction $f(x, y, z)$ ne s'annule donc pas non plus, comme nous nous proposions de l'établir.

Nous avons raisonné sur trois variables, mais le raisonnement s'applique évidemment sans aucune modification au cas de n variables.

10. Pour compléter le résultat précédent, nous examinerons le cas où il existe quelques relations de la forme (33) entre les α et $2i\pi$, bien que cette étude ne soit pas indispensable pour la suite.

Soit $f(x)$ une fonction entière de n variables satisfaisant aux relations (44) et (45), à savoir :

$$f(x+c_p)=f(x) \qquad (p=1, 2, \ldots, n),$$
$$f(x+\alpha) = e^{g(x)}f(x),$$

où $g(x)$ admet la période $2i\pi$ par rapport à chacune des variables. Nous supposons s relations de la forme (33) entre les α et $2i\pi$:

$$p_1^{(k)}\alpha_1+p_2^{(k)}\alpha_2+\ldots+p_n^{(k)}\alpha_n=2q^{(k)}i\pi \qquad (k=1, 2, \ldots, n).$$

Nous effectuerons le changement de variables suivant, identique à celui des formules (34) et (35) du paragraphe 6, en nous plaçant dans les mêmes hypothèses,

$$(81)\qquad \left\{\begin{array}{l} \mathrm{D}\xi_1=p_1^{(1)}x_1+p_2^{(1)}x_2+\ldots+p_n^{(1)}x_n,\\ \mathrm{D}\xi_2=p_1^{(2)}x_1+\ldots\ldots\ldots\ldots+p_n^{(2)}x_n,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \mathrm{D}\xi_s=p_1^{(s)}x_1+p_2^{(s)}x_2+\ldots+p_n^{(s)}x_n;\end{array}\right.$$

$$(82)\qquad \left\{\begin{array}{l} \mathrm{D}\xi_{s+1}=x_{s+1},\\ \mathrm{D}\xi_{s+2}=x_{s+2},\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ \mathrm{D}\xi_n\;\;=x_n.\end{array}\right.$$

D est un entier que l'on peut supposer *positif*.

Par cette substitution, $f(x)$ devient $\Phi(\xi)$, $\Phi(\xi)$ satisfait aux conditions (*voir* § 6)

$$\Phi(\xi+c_p)=\Phi(\xi) \qquad (p=1, 2, \ldots, n).$$

D'autre part, on a évidemment

$$f(x+\mathrm{D}\alpha)=e^{h(x)}f(x),$$

où

$$h(x)=g(x)+g(x+\alpha)+\ldots+g[x+(\mathrm{D}-1)\alpha].$$

Par suite, par le changement de $\xi_{s+1}, \xi_{s+2}, \ldots, \xi_n$ en $\xi_{s+1}+\alpha_{s+1}, \ldots, \xi_n+\alpha_n$ (comme au § 6), on aura, par une notation analogue à celle du § 1,

$$\Phi(\xi+\alpha_{s+1}+\alpha_{s+2}+\ldots+\alpha_n)=e^{\mathrm{H}(\xi)}\Phi(\xi),$$

où $\mathrm{H}(\xi)$ est ce que devient $h(x)$, en remarquant que H admet la période $2i\pi$ par rapport à chacune des variables ξ. Les $\alpha_{s+1}, \alpha_{s+2}, \ldots,$

α_n ne sont liés à $2i\pi$ par aucune relation de la forme (33). Donnons à $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s$ un système de valeurs arbitraires, mais fixes, et soit $\Phi_0(\xi)$ la fonction à laquelle se réduit $\Phi(\xi)$ pour ce système de valeurs. On aura

$$(83) \qquad \begin{cases} \Phi_0(\xi + c_p) = \Phi_0(\xi) \qquad (p = s+1, s+2, \ldots, n), \\ \Phi_0(\xi + \alpha_{s+1} + \alpha_{s+2} + \ldots + \alpha_n) = e^{\mathrm{H}_0(\xi)} \Phi_0(\xi). \end{cases}$$

Puisqu'il n'existe aucune relation de la forme (33) entre α_{s+1}, $\alpha_{s+2}, \ldots, \alpha_n$ et $2i\pi$, la fonction $\Phi_0(\xi)$ des $(n-s)$ variables ξ_{s+1}, $\xi_{s+2}, \ldots, \xi_n$, qui satisfait à (83), ne peut s'annuler sans être nulle identiquement, d'après le paragraphe précédent. Ceci nous montre que les zéros de $\Phi(\xi)$ ne dépendent que des valeurs attribuées aux variables ξ_1, $\xi_2, \ldots, \xi_s$ et pas des valeurs des autres ξ.

Appelons $\varphi(\xi)$ la fonction à laquelle se réduit $\Phi(\xi)$ lorsqu'on attribue à $\xi_{s+1}, \xi_{s+2}, \ldots, \xi_n$ un système de valeurs constantes; $\varphi(x)$ ne dépend que de $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s$. Or $\varphi(\xi)$ et $\Phi(\xi)$ s'annulent pour les mêmes valeurs, et l'on peut démontrer rigoureusement, par un raisonnement facile à imaginer, que $\dfrac{\Phi(\xi)}{\varphi(\xi)}$ est une fonction entière qui ne s'annule pas.

Soit donc

$$\Phi(\xi) = \varphi(\xi) e^{\psi(\xi)}.$$

Les zéros de $f(x)$ sont ainsi ramenés par une substitution linéaire à ceux d'une fonction $\varphi(\xi)$ de s variables $(s < n)$. Remarquons que $\varphi(\xi)$ admet la période $2i\pi$ par rapport à chacune des variables dont elle dépend.

11. *Application aux fonctions méromorphes $(n+1)$ fois périodiques.* — Soit $F(x)$ une fonction méromorphe qui admet la période $2i\pi$ par rapport à chacune des n variables x et, en outre, un système de périodes conjuguées $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, l'un au moins des α ayant sa partie réelle différente de 0.

On sait que $F(x)$ peut être mise sous forme du quotient de deux fonctions entières, soit $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$, et que l'on peut supposer que cette fraction est écrite sous forme *irréductible*, c'est-à-dire que ses deux termes ne sont pas divisibles par une même fonction entière qui s'annule. Dans ces conditions, on sait que les quotients $\frac{f(x+c_p)}{f(x)}$ $(p=1, 2, \ldots, n)$ et $\frac{f(x+\alpha)}{f(x)}$ sont des fonctions entières qui ne s'annulent pas. Il en est de même pour $\frac{\varphi(x+c_p)}{\varphi(x)}$ et $\frac{\varphi(x+\alpha)}{\varphi(x)}$. (*Voir* à ce sujet, pour le cas de deux variables, le Mémoire cité de M. Appell et le Mémoire de M. Poincaré sur les fonctions abéliennes, *Acta math.*, 1900.)

Il résulte de ce qui précède qu'on peut supposer que $f(x)$, après multiplication par une fonction entière qui ne s'annule pas, convenablement choisie, satisfait aux relations (37) et (39), à savoir

$$\begin{aligned} f(x+c_p) &= e^{\mathrm{L}_p(x)} f(x) \qquad (p=1, 2, \ldots, n), \\ f(x+\alpha) &= e^{h(x)} f(x), \end{aligned}$$

où l'on a

$$\mathrm{L}_p(x) = m_1^{(p)} x_1 + m_2^{(p)} x_2 + \ldots + m_n^{(p)} x_n,$$

avec

$$m_q^{(p)} = 0 \quad \text{si} \quad q \leqq p$$

et, d'autre part,

$$h(x) = g(x) + \sum_{p=1}^{p=n} (b_p + a_p) x_p,$$

$g(x)$ admettant la période $2i\pi$ par rapport à chacune des variables; les a sont des entiers positifs, négatifs ou nuls et b_p est donné par

$$2i\pi b_p = \mathrm{L}_p(\alpha) = m_1^{(p)} \alpha_1 + m_2^{(p)} \alpha_2 + \ldots + m_n^{(p)} \alpha_n.$$

Le quotient $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ admettant les périodes c_p et α, $\varphi(x)$ satisfait aux mêmes relations que $f(x)$

$$\begin{aligned} \varphi(x+c_p) &= e^{\mathrm{L}_p(x)} \varphi(x), \\ \varphi(x+\alpha) &= e^{h(x)} \varphi(x). \end{aligned}$$

Telle est la forme sous laquelle on peut exprimer $\mathrm{F}(x)$.

Les $\frac{n(n+1)}{2}$ entiers $m_q^{(p)}$, $(q > p)$ et a_p qui figurent dans ces formules peuvent-ils être tous nuls ?

Si cela a lieu, et s'il n'existe aucune relation de la forme (33) entre les α et $2i\pi$, des relations

$$\varphi(x+c_p)=\varphi(x),$$
$$\varphi(x+\alpha)=e^{g(x)}\varphi(x),$$

auxquelles se réduisent alors les précédentes, on conclurait que $\varphi(x)$ ne s'annule pas. Donc $F(x)$ serait une fonction entière admettant les périodes c_p et α, et, d'après ce qui a été dit à la fin du paragraphe 6, $F(x)$ serait une constante.

S'il existe s relations de la forme (33), par le changement de variables du paragraphe précédent $f(x)$ se ramène à la forme

$$f(x)=e^{\psi(\xi)}f_1(\xi),$$

f_1 ne dépendant que de $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s$ et admettant la période $2i\pi$ par rapport à chacune des variables.

De même

$$\varphi(x)=e^{\psi_1(\xi)}\varphi_1(\xi),$$

puis

$$F(x)=\frac{f_1(\xi)}{\varphi_1(\xi)}e^{\psi(\xi)-\psi_1(\xi)}.$$

Les périodes relatives aux ξ étant c_p et le système $\alpha_{s+1}, \alpha_{s+2}, \ldots, \alpha_n$, on voit que $e^{\psi(\xi)-\psi_1(\xi)}$ admet ces $(n+1)$ systèmes de périodes, puisque $\frac{f_1(\xi)}{\varphi_1(\xi)}$ les admet et $F(x)$ aussi, lorsqu'on l'exprime en fonction des ξ. D'après ce qui a été dit à la fin du paragraphe 6, $\alpha_{s+1}, \alpha_{s+2}, \ldots, \alpha_n$ n'étant liés par aucune relation de la forme (33), $e^{\psi(\xi)-\psi_1(\xi)}$ ne dépend que des variables $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s$. Donc $F(x)$ est ramenée à une fonction méromorphe de s variables ξ, et s fois périodique.

12. Nous examinerons maintenant le cas d'une fonction méromorphe $F(x)$ de n variables, $(n+2)$ fois périodique. Les $(n+2)$ systèmes de périodes seront : $2i\pi$ par rapport à chacune des n variables et deux autres systèmes de périodes conjuguées $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ et $\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_n$. Nous supposerons d'abord qu'il n'existe pas entre les α et $2i\pi$ de relation de la forme (33).

On peut, d'après ce qui précède, supposer $F(x)$ écrite sous la forme

(84) $$F(x) = \frac{f(x)}{\varphi(x)},$$

où $f(x)$ et $\varphi(x)$ satisfont aux relations

(85) $$\begin{cases} f(x + c_p) = e^{L_p(x)} f(x), \\ f(x + \alpha) = e^{h(x)} f(x), \\ f(x + \alpha') = e^{h'(x)} f(x), \end{cases}$$

où l'on a

$$L_p(x) = m_1^{(p)} x_1 + \ldots + m_n^{(p)} x_n \qquad (p = 1, 2, \ldots, n),$$

avec $m_q^{(p)} = 0$ si $q \leq p$, et

(86) $$\begin{cases} h\,(x) = g\,(x) + \sum_{p=1}^{p=n} (b_p + a_p) x_p, \\ h'(x) = g'(x) + \sum_{p=1}^{p=n} (b'_p + a'_p) x_p, \end{cases}$$

avec

(87) $$2 i\pi b_p = L_p(\alpha), \qquad 2 i\pi b'_p = L_p(\alpha').$$

D'après ce qui précède, si $F(x)$ n'est pas une constante, les $\frac{n(n+1)}{2}$ entiers $m_q^{(p)}$ $(q > p)$ et a_p *ne sont pas tous nuls* puisqu'il n'y a pas entre les α et $2i\pi$ de relation de la forme (33).

Calculons, conformément au procédé employé par M. Appell, de deux façons différentes $f(x + \alpha + \alpha')$.

On a

$$f(x + \alpha + \alpha') = e^{h(x+\alpha')} f(x + \alpha') = e^{h(x+\alpha') + h'(x)} f(x).$$

De même

$$f(x + \alpha + \alpha') = e^{h'(x+\alpha) + h(x)} f(x).$$

On en conclut

$$h(x + \alpha') + h'(x) = h'(x + \alpha) + h(x) + 2 N i\pi,$$

N étant un entier positif, négatif ou nul.

Ou encore

$$h(x + \alpha') - h(x) = h'(x + \alpha) - h'(x) + 2 N i\pi.$$

D'après (86) cette dernière s'écrit

$$g(x+\alpha') - g(x) + \sum_{p=1}^{p=n} (b_p + a_p)\alpha'_p$$
$$= g'(x+\alpha) - g(x) + \sum_{p=1}^{p=n} (b'_p + a'_p)\alpha_p + 2Ni\pi.$$

Or $g(x+\alpha') - g(x)$ et $g'(x+\alpha) - g'(x)$ sont évidemment des séries entières en e^{x_p} et e^{-x_p} $(p = 1, 2, \ldots, n)$ *sans terme constant*. Il y a donc dans la dernière relation égalité entre les termes constants, à savoir

$$\sum_{p=1}^{p=n} (b_p + a_p)\alpha'_p = \sum_{p=1}^{p=n} (b'_p + a'_p)\alpha_p + 2Ni\pi.$$

En remplaçant b_p et b'_p par leurs valeurs (87) il vient

$$\sum_{p=1}^{p=n} a_p\alpha'_p + \sum_{p=1}^{p=n} \frac{\alpha'_p \mathrm{L}_p(\alpha)}{2i\pi} = \sum_{p=1}^{p=n} a'_p\alpha_p + \sum_{p=1}^{p=n} \frac{\alpha_p \mathrm{L}_p(\alpha')}{2i\pi} + 2Ni\pi.$$

En remplaçant $\mathrm{L}_p(\alpha)$ et $\mathrm{L}_p(\alpha')$ par leurs expressions

$$\mathrm{L}_p(\alpha) = \sum_{q=1}^{q=n} m_q^{(p)}\alpha_q, \qquad \mathrm{L}_p(\alpha') = \sum_{q=1}^{q=n} m_q^{(p)}\alpha'_q,$$

la relation précédente devient

$$(88) \qquad \sum_{p=1}^{p=n} a_p\alpha'_p - \sum_{p=1}^{p=n} a'_p\alpha_p + \frac{1}{2i\pi}\sum_{p=1}^{p=n}\sum_{q=1}^{q=n} m_q^{(p)}(\alpha_q\alpha'_p - \alpha_p\alpha'_q) = 2Ni\pi.$$

La double somme s'étend à toutes les valeurs $p = 1, 2, \ldots, n$; $q = 1, 2, \ldots, n$; mais comme $m_q^{(p)} = 0$ si $q \leqq p$, on voit qu'il suffit d'étendre la double somme aux systèmes de valeurs de p et q pour lesquels $q > p$. Il y a ainsi dans la double somme $\frac{n(n-1)}{2}$ termes qui correspondent aux $\frac{n(n-1)}{2}$ déterminants du second degré qu'on peut former dans les deux lignes

$$\begin{matrix} \alpha_n, & \alpha_{n-1}, & \ldots, & \alpha_2, & \alpha_1, \\ \alpha'_n, & \alpha'_{n-1}, & \ldots, & \alpha'_2, & \alpha'_1, \end{matrix}$$

en adjoignant successivement à chacune des colonnes chacune de celles qui la suivent.

La relation (88) n'est pas une identité relativement aux α'. Pour le montrer, ordonnons-la par rapport aux α'; elle prend ainsi la forme

$$C_1 \frac{\alpha'_1}{2i\pi} + C_2 \frac{\alpha'_2}{2i\pi} + \ldots + C_n \frac{\alpha'}{2i\pi} = C_0,$$

où

$$C_0 = 2Ni\pi + \sum_{p=1}^{p=n} a'_p \alpha_p.$$

Pour calculer C_p, remarquons que dans (88) le coefficient du terme en $\frac{\alpha_q \alpha'_p}{2i\pi}$ est $m_q^{(p)} - m_p^{(q)}$, c'est-à-dire égal à $m_q^{(p)}$, si $q > p$ et à $-m_p^{(q)}$ si $q < p$. On en déduit

$$C_p = 2i\pi a_p - \sum_{q=1}^{q=p-1} m_p^{(q)} \alpha_q + \sum_{q=p+1}^{q=n} m_q^{(p)} \alpha_q \qquad (p = 1, 2, \ldots, n).$$

$C_1, C_2, \ldots, C_n$ sont linéaires et homogènes à coefficients entiers en $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ et $2i\pi$. L'un au moins renferme un coefficient non nul, puisque les a_p et $m_q^{(p)}$ $(q > p)$ ne sont pas tous nuls. Comme on a supposé qu'il n'existe pas entre les α et $2i\pi$ de relation de la forme (33), l'un au moins des $C_1, C_2, \ldots, C_n$ est différent de o, et la relation (88) n'est pas identique par rapport aux α'.

On voit, d'après cela, que les α et les α' ne peuvent pas avoir des valeurs quelconques, malgré l'indétermination laissée dans la formule (88) aux coefficients entiers.

Remarquons maintenant que, le cas particulier laissé de côté, où il y aurait une relation de la forme (33) entre les α et $2i\pi$, n'est pas une exception au résultat que nous venons d'obtenir. Car une relation de la forme (33) est un cas particulier de (88). Le seul cas d'exception au résultat obtenu est donc celui où $F(x)$ est une constante.

13. Nous allons donner une autre forme de la relation (88). Imaginons pour cela que l'on écrive le Tableau (T) des $(n+2)$ systèmes de périodes :

$$\begin{array}{ccccc} 2i\pi & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2i\pi & 0 & \dots & 0 \\ . & \dots & . & \dots & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2i\pi \\ \alpha_1 & \alpha_2 & . & \dots & \alpha_n \\ \alpha'_1 & \alpha'_2 & . & \dots & \alpha'_n \end{array}$$

Ce Tableau comprend $(n+2)$ lignes et n colonnes. On peut former dans ce Tableau $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ déterminants d'ordre n, en supprimant deux lignes successivement de toutes les façons possibles. En supprimant les deux dernières, on obtient $(2i\pi)^n$. En supprimant la $p^{\text{ième}}$, $(p \leqq n)$ et la $(n+1)^{\text{ième}}$, on obtient, au signe près, $\alpha_p(2i\pi)^{n-1}$; d'une façon analogue, on pourrait obtenir $\alpha'_p(2i\pi)^{n-1}$; enfin, en supprimant la $p^{\text{ième}}$ et la $q^{\text{ième}}$ (p et $q \leqq n$), on obtient, au signe près, $(\alpha_p\alpha'_q - \alpha_q\alpha'_p)(2i\pi)^{n-2}$. D'autre part, la relation (88) est linéaire et homogène par rapport aux entiers a_p, a'_p, $m_q^{(p)}$ $(q > p)$ et N qui sont en nombre $2n + \frac{n(n-1)}{2} + 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$. Si on la multiplie par $(2i\pi)^{n-1}$, on aperçoit immédiatement que les $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ entiers de la relation ainsi obtenue ont pour coefficients respectivement chacun des $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ déterminants du Tableau T, au signe près. En appelant D_{rs} le déterminant déduit de (T), en supprimant la $r^{\text{ième}}$ et la $s^{\text{ième}}$ ligne, la relation (88) est de la forme

$$\sum M_{rs} D_{rs} = 0, \tag{89}$$

la somme $\sum$ s'étendant aux $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ combinaisons (r, s) des $(n+2)$ premiers nombres entiers, l'ordre des indices r et s n'intervenant pas; les $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ entiers M_{rs} ne sont pas tous nuls, puisqu'ils sont respectivement égaux, au signe près, aux $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$

entiers a_p, a'_p, $m_q^{(p)}$, N. La relation (89) n'est, d'après ce qui précède, une identité par rapport aux α et aux α', pour aucun système de valeurs non toutes nulles des entiers M_{rs}.

Cette nouvelle forme (89) de la relation entre les périodes va nous permettre d'écrire la relation pour un système de $(n+2)$ systèmes de périodes conjuguées pris sous la forme la plus générale. Soient

$$\omega_1^{(\mu)}, \quad \omega_2^{(\mu)}, \quad \ldots, \quad \omega_n^{(\mu)} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, n+1, n+2),$$

$(n+2)$ systèmes de périodes conjuguées d'une fonction méromorphe de n variables F(X). Nous appellerons (T′) le Tableau de ces $(n+2)$ systèmes de périodes, et Δ_{rs} le déterminant obtenu en supprimant la $r^{\text{ième}}$ et la $s^{\text{ième}}$ ligne. Nous supposerons d'abord $\Delta_{n+1,n+2}$ non nul et poserons :

$$(90) \qquad 2i\pi X_p = \omega_p^{(1)} x_1 + \omega_p^{(2)} x_2 + \ldots + \omega_p^{(n)} x_n \qquad (p = 1, 2, \ldots, n),$$

équations dont le déterminant est $\Delta_{n+1,n+2}$ renversé autour de sa diagonale principale.

Au changement de x_q en $x_q + 2i\pi$ correspond pour $X_1, X_2, \ldots, X_n$ les systèmes de périodes $\omega_1^{(q)}, \omega_2^{(q)}, \ldots, \omega_n^{(q)}$ $(q = 1, 2, \ldots, n)$.

Les équations (90) peuvent être résolues par rapport aux x ; soit

$$x_p = d_p^{(1)} X_1 + d_p^{(2)} X_2 + \ldots + d_p^{(n)} X_n \qquad (p = 1, 2, \ldots, n).$$

Nous poserons

$$(91) \qquad \alpha_p = d_p^{(1)} \omega_1^{(n+1)} + d_p^{(2)} \omega_2^{(n+1)} + \ldots + d_p^{(n)} \omega_n^{(n+1)} \qquad (p = 1, 2, \ldots, n),$$

$$(92) \qquad \alpha'_p = d_p^{(1)} \omega_1^{(n+2)} + d_p^{(2)} \omega_2^{(n+2)} + \ldots + d_p^{(n)} \omega_n^{(n+2)} \qquad (p = 1, 2, \ldots, n),$$

de telle sorte qu'au Tableau (T′) des périodes relatives aux X correspond le Tableau (T) écrit précédemment pour les périodes relatives aux x.

Remarquons que l'on passe des n éléments d'une ligne du Tableau (T′) aux n éléments de la ligne correspondante de (T) par la substitution linéaire (90). Il en résulte que la relation obtenue entre les D_{rs}

$$\sum M_{rs} D_{rs} = 0$$

peut s'écrire

$$(93) \qquad \sum M_{rs} \Delta_{rs} = 0.$$

Nous avons supposé l'un des $\Delta_{rs} \neq 0$; le cas contraire ne serait évidemment pas un cas d'exception : il y aurait toujours une relation de la forme (93), par l'hypothèse elle-même. La relation (93) n'est une identité pour aucun système de valeurs non toutes nulles des M_{rs}, puisqu'on la ramène à la relation (89), qui n'est pas une identité.

14. Nous dirons un mot, pour terminer, des fonctions méromorphes de n variables, $(n+q)$ fois périodiques $(q < n)$. En supposant d'abord que les systèmes de périodes sont : $2i\pi$ par rapport à chacune des variables et q autres systèmes de périodes conjuguées, $\alpha_1^{(\nu)}$, $\alpha_2^{(\nu)}, \ldots, \alpha_n^{(\nu)}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, q)$, on est amené à considérer les relations suivantes, tout à fait analogues à celles que l'on a rencontrées plus haut,

$$f(x+c_p) = e^{L_p(x)} f(x) \qquad (p = 1, 2, \ldots, n),$$
$$f(x+\alpha^{(\nu)}) = e^{h^{(\nu)}(x)} f(x) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, q),$$

où

$$L_p(x) = \sum_{q=1}^{q=n} m_q^{(p)} x_p, \qquad m_q^{(p)} = 0 \quad \text{si} \quad q \leq p$$

et

$$h^{(\nu)}(x) = g^{(\nu)}(x) + \sum_{p=1}^{p=n} (b_p^{(\nu)} + a_p^{(\nu)}) x_p;$$

les notations ayant le même sens que dans les relations (85) et suivantes. Si (ν, ν') est une combinaison de deux des entiers $1, 2, \ldots, q$, on aura la relation suivante, qui se déduit de (88)

$$\sum_{p=1}^{p=n} a_p^{(\nu)} \alpha_p^{(\nu')} - \sum_{p=1}^{p=n} a_p^{(\nu')} \alpha_p^{(\nu)} + \frac{1}{2i\pi} \sum_{p=1}^{p=n} \sum_{q=1}^{q=n} m_q^{(p)} (\alpha_q^{(\nu)} \alpha_p^{(\nu')} - \alpha_p^{(\nu)} \alpha_q^{(\nu')}) = 2i\pi N_{\nu\nu'}.$$

Il y aura $\frac{q(q-1)}{2}$ relations de cette nature, obtenues en prenant les $\frac{q(q-1)}{2}$ combinaisons possibles pour (ν, ν'). Ces relations renferment en tout $\frac{n(n-1)}{2}$ entiers $m_q^{(p)}$; nq entiers a, et $\frac{q(q-1)}{2}$ entiers N.

En supposant les systèmes de périodes pris sous la forme la plus générale, les dernières relations seront remplacées par $\frac{q(q-1)}{2}$ relations analogues à (93).

Je me borne pour ce cas à ces indications sommaires, n'ayant pas encore discuté les relations ainsi obtenues; je me propose de poursuivre cette étude et d'aborder la question inverse des précédentes : Peut-on former des fonctions méromorphes $(n+q)$ fois périodiques avec un système de $(n+q)$ systèmes de périodes conjuguées données, satisfaisant à des relations de la forme de celles que nous avons trouvées nécessaires. A cet égard, on peut affirmer qu'il y a, outre les conditions d'égalité obtenues, des conditions d'inégalité entre les entiers et les parties réelles et imaginaires des périodes.

Si l'on suppose $q=n$, on est dans le cas des fonctions abéliennes. Les $\frac{q(q-1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ relations indiquées plus haut se présentent sous une forme plus compliquée que celle que l'on donne habituellement pour les fonctions abéliennes. Mais on peut, par un calcul facile, montrer que les relations ordinaires peuvent être ramenées à des relations linéaires, homogènes, à coefficients entiers entre des déterminants d'ordre n formés dans le Tableau des $2n$ systèmes de périodes.

NOTE.

I. Nous donnerons ici la démonstration de la proposition sur laquelle nous nous sommes appuyé dans le n° 8.

Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ et b, $(n+1)$ nombres réels dont le dernier b est essentiellement supposé différent de zéro. On peut déterminer un entier m, positif ou négatif, différent de zéro, et n entiers q_i $(i=1, 2, \ldots, n)$, positifs, négatifs ou nuls, tels que les n quantités ma_i+q_ib $(i=1, 2, \ldots, n)$ soient toutes plus petites en valeur absolue qu'un nombre positif ε donné à l'avance, quelques-unes de ces quantités pouvant être égales à zéro, si quelques-unes des fractions $\frac{a_i}{b}$ sont commensurables avec l'unité. C'est là un théorème connu, employé par

Hermite et par Kronecker dans ses recherches sur les périodes (*Sitzungsberichte*, Berlin, novembre 1884).

Nous compléterons cet énoncé de la façon suivante :

S'il n'existe entre les a_i et b aucune relation linéaire, homogène, à coefficients entiers non tous nuls, on peut déterminer les $(n+1)$ entiers m et q_i de telle sorte que les n quantités $ma_i + q_i b$ diffèrent aussi peu que l'on veut de n quantités réelles ξ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ choisies arbitrairement.

Ce théorème s'établit sans difficulté pour $n = 1$. ε étant un nombre positif donné à l'avance, on peut poser, d'après le théorème rappelé plus haut,

$$m' a_1 + q'_1 b = a'_1 \qquad \text{avec} \qquad |a'_1| < \varepsilon,$$

m' et q'_1 étant des entiers convenablement choisis et $m' \neq 0$. a'_1 n'est pas nul, car sans cela il y aurait entre a_1 et b une relation $m' a_1 + q'_1 b = 0$ à coefficients non tous nuls, contrairement à l'hypothèse.

q_1 étant un entier arbitraire, et ξ_1 une quantité réelle arbitraire, on aura évidemment

$$ma'_1 < \xi_1 - q_1 b < (m+1) a'_1,$$

ou bien

$$ma'_1 > \xi_1 - q_1 b > (m+1) a'_1,$$

m étant un entier positif, négatif, ou nul convenablement choisi, et l'on en déduit

$$|ma'_1 + q_1 b - \xi_1| < |a'_1| < \varepsilon;$$

ou, en remplaçant a'_1 par sa valeur,

$$|mm'_1 a_1 + (mq'_1 + q_1) b - \xi_1| < \varepsilon,$$

et la proposition est établie dans ce cas.

Supposant ensuite la proposition vraie pour $n - 1$, nous l'établirons pour n.

Nous pouvons poser

$$(1) \qquad a'_i = m' a_i + q'_i b \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

avec

$$(2) \qquad |a'_i| < \varepsilon,$$

m' et q'_i étant $(n+1)$ entiers et $m' \neq 0$.

Les a'_i sont tous différents de o, car la relation $m'a_i + q_i b = 0$ serait contraire à l'hypothèse faite dans l'énoncé. Soient ξ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, n quantités réelles arbitraires. Nous pouvons poser, q_1 étant un entier quelconque,

$$(3) \qquad \frac{\xi_1 - q_1 b}{a'_1} = m + \theta,$$

m étant un entier convenablement choisi (ou zéro), et θ un nombre réel positif tel que $0 \leqq \theta < 1$. D'où

$$(4) \qquad ma'_1 + q_1 b = \xi_1 - \theta a'_1,$$

ou encore

$$(5) \qquad ma'_1 + q_1 b = \xi_1 + \eta_1 \quad \text{avec} \quad |\eta_1| = |\theta a'_1| < \varepsilon.$$

Posons, $q_2, q_3, \ldots, q_n$ étant $(n-1)$ entiers quelconques,

$$(6) \qquad ma'_i + q_i b = \xi_i + \eta_i \qquad (i = 2, 3, \ldots, n).$$

Remplaçons, dans (6), m par sa valeur tirée de (3); il vient

$$(7) \qquad q_1 a'_i - q_i a'_1 = \frac{a'_i \xi_1 - a'_1 \xi_i}{b} - a'_1 \frac{\eta_i + \theta a'_i}{b} \qquad (i = 2, 3, \ldots, n).$$

Il n'y a entre les a'_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ aucune relation linéaire, homogène, à coefficients entiers non tous nuls, car sans cela, d'après (1) (où $m' \neq 0$), il y aurait une relation de même nature entre les a_i et b.

Le théorème étant supposé vrai pour $n - 1$, nous pouvons choisir les n entiers q_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ laissés jusqu'ici arbitraires, de façon que l'on ait

$$(8) \qquad q_1 a'_1 - q_i a'_1 = \frac{a'_i \xi_1 - a'_1 \xi_i}{b} + \tau_i \quad \text{avec} \quad |\tau_i| < \left|\frac{a'_1 \varepsilon}{b}\right| \quad i = (2, 3, \ldots, n).$$

Les entiers q étant ainsi choisis, on a, en comparant (7) et (8),

$$\tau_i = - a'_1 \frac{\eta_i + \theta a'_i}{b},$$

d'où

$$\eta_i = - \frac{b \tau_i}{a'_1} - \theta a'_i,$$

et, par suite,

$$|\eta_i| < \varepsilon + \theta \varepsilon.$$

En rapprochant les relations (5) et (6) on a les n relations

$$ma' + q_i b = \xi_i + \eta_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{9}$$

avec

$$|\eta_i| < (1 + \theta)\varepsilon < 2\varepsilon \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

En remplaçant dans (9) les a' par leurs valeurs (1), la proposition est établie.

II. Nous examinerons maintenant le cas où il existe entre les a et b quelques relations linéaires, homogènes, à coefficients entiers non tous nuls. Supposons qu'il y ait s relations de cette nature et s seulement, et soit

$$p^{(k)} b + \sum_{i=1}^{i=n} p_i^{(k)} a_i = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, s) \tag{10}$$

ces s relations.

Comme $b \neq 0$ et que les relations sont distinctes, il y a un déterminant d'ordre s, différent de zéro dans le Tableau des coefficients de a_i ; soit

$$\mathrm{D} = |p_i^{(k)}| \qquad (k \text{ et } i = 1, 2, \ldots, s) \tag{11}$$

ce déterminant.

Nous dirons, dans tout ce qui suit, qu'un système de n valeurs réelles ξ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ est *acceptable* si les n quantités $(ma_i + q_i b)$ peuvent en différer aussi peu que l'on veut pour un système de valeurs convenablement choisi des entiers m et q_i ; il sera *inacceptable* dans le cas contraire.

Posons, les ξ_i étant des valeurs données,

$$ma_i + q_i b = \xi_i + \eta_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

On en conclut

$$m\sum_{i=1}^{i=n} p_i^{(k)} a_i + b\sum_{i=1}^{i=n} p_i^{(k)} q_i = \sum_{i=1}^{i=n} p_i^{(k)} \xi_i + \sum_{i=1}^{i=n} p_i^{(k)} \eta_i,$$

ou, en tenant compte de (10),

$$b\left(\sum_{i=1}^{i=n} p_i^{(k)} q_i - p^{(k)} m\right) - \sum_{i=1}^{i=n} p_i^{(k)} \xi_i = \sum_{i=1}^{i=n} p_i^{(k)} \eta_i. \tag{12}$$

Le premier membre est la différence entre un multiple entier de b et une quantité complètement déterminée; il ne peut donc être plus petit en valeur absolue qu'un nombre fixe, choisi assez petit, que s'il est nul, c'est-à-dire que les valeurs ξ_i ne peuvent être *acceptables* que si l'on a, pour un choix convenable de m et q_i, les s relations

$$(13) \qquad \sum_{i=1}^{i=n} p_i^{(k)} \xi_i = b\left(-mp^{(k)} + \sum_{i=1}^{i=n} p_i^{(k)} q_i\right) \qquad (k = 1, 2, \ldots, s).$$

Nous écrirons ces conditions nécessaires sous la forme

$$(14) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\sum_{i=1}^{i=n} p_i^{(k)} \xi_i = \mathrm{P}^{(k)} b, \\ \text{avec} \\ \displaystyle\mathrm{P}^{(k)} = -\mathrm{M} p^{(k)} + \sum_{i=1}^{i=n} p_i^{(k)} \mathrm{Q}_i, \end{array} \right.$$

M et Q_i étant $(n+1)$ entiers convenablement choisis; $\mathrm{P}^{(k)}$ étant par suite aussi un entier.

Inversement, si les ξ_i satisfont aux relations (14) pour un système de valeurs quelconques, positives, négatives ou nulles, des entiers M et Q_i, ils constituent un système de valeurs acceptables.

En effet, il n'existe entre $a_{s+1}, a_{s+2}, \ldots, a_n$ et b aucune relation linéaire, homogène, à coefficients non tous nuls, car une telle relation serait distincte des relations (10). Il en résulte que, quelles que soient les valeurs de $\xi_{s+1}, \xi_{s+2}, \ldots, \xi_n$, elles constituent un système de valeurs *acceptables* pour les $(n-s)$ quantités

$$(ma_i + q_i b) \qquad (i = s+1, s+2, \ldots, n);$$

on peut donc poser

$$ma_i + q_i b = \frac{\xi_i}{\mathrm{D}} + \frac{\eta_i}{\mathrm{D}} \qquad (i = s+1, s+2, \ldots, n)$$

avec

$$|\eta_i| < \varepsilon,$$

ou encore

$$(15) \qquad \mathrm{D} ma_i + \mathrm{D} q_i b = \xi_i + \eta_i \qquad (i = s+1, s+2, \ldots, n).$$

Nous poserons en outre

$$(16) \qquad \mathrm{D}ma_j + q_j b = \xi_j + \eta_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, s),$$

les q_j $(j = 1, 2, \ldots, s)$ étant s entiers indéterminés.

De (15) et (16) on conclut

$$\mathrm{D}m\sum_{i=1}^{i=n} p_i^{(k)} a_i + b\sum_{j=1}^{j=s} p_j^{(k)} q_j + b\mathrm{D}\sum_{i=s+1}^{i=n} p_i^{(k)} q_i = \sum_{i=1}^{i=n} p_i^{(k)}\xi_i + \sum_{i=1}^{i=n} p_i^{(k)}\eta_i$$
$$(k = 1, 2, \ldots, s).$$

En tenant compte de (10), il vient alors

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{D}b\left(-mp^{(k)} + \displaystyle\sum_{i=s+1}^{i=n} p_i^{(k)} q_i\right) + b\displaystyle\sum_{j=1}^{j=s} p_j^{(k)} q_j = \displaystyle\sum_{i=1}^{i=n} p_i^{(k)}\xi_i + \displaystyle\sum_{i=1}^{i=n} p_i^{(k)}\eta_i \\ \qquad\qquad (k = 1, 2, \ldots, s). \end{array} \right.$$

Supposons d'abord que dans les relations (14) tous les $\mathrm{P}^{(k)}$ soient nuls, ce qui aura lieu en particulier si tous les entiers M et Q_i sont nuls.

La relation (17) devient alors

$$(18) \qquad \mathrm{D}b\left(-mp^{(k)} + \sum_{i=s+1}^{i=n} p_i^{(k)} q_i\right) + b\sum_{j=1}^{j=s} p_j^{(k)} q_j = \sum_{i=1}^{i=n} p_i^{(k)}\eta_i.$$

Choisissons maintenant les entiers q_j $(j = 1, 2, \ldots, s)$ de façon que les premiers membres soient nuls, ce qui donne les s conditions

$$\sum_{j=1}^{j=s} p_j^{(k)} q_j = \mathrm{D}\left(mp^{(k)} - \sum_{i=s+1}^{i=n} p_i^{(k)} q_i\right) \qquad (k = 1, 2, \ldots, s).$$

Dans ces relations, le déterminant relatif aux q_j étant D, il est clair que ces équations donnent pour les q_j des valeurs entières. Par ce choix, la relation (18) devient

$$(19) \qquad 0 = \sum_{i=1}^{i=n} p_i^{(k)}\eta_i \qquad (k = 1, 2, \ldots, s).$$

Le déterminant relatif à $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_s$ dans ces équations est D, et l'on voit d'après cela que, $\eta_{s+1}, \eta_{s+2}, \ldots, \eta_n$ étant infiniment petits, $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_s$ le sont aussi. La proposition est donc établie dans ce cas, en ayant égard aux relations (15) et (16).

Supposons maintenant que dans (14) les entiers M et Q_i aient des valeurs quelconques. En tenant compte de la deuxième des relations (14) et des relations (10), la première des relations (14) peut être écrite sous la forme suivante :

$$\sum_{i=1}^{i=n} p_i^{(k)} [\xi_i - \mathrm{M} a_i - \mathrm{Q}_i b] = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, s).$$

Posons

$$\xi'_i = \xi_i - \mathrm{M} a_i - \mathrm{Q}_i b.$$

D'après ce qui précède, les ξ'_i seront un système de valeurs *acceptables* puisque

$$\sum_{i=1}^{i=n} p_i^{(k)} \xi'_i = 0.$$

On peut poser

$$m a_i + q_i b = \xi'_i + \eta_i \quad \text{avec} \quad |\eta_i| < \varepsilon \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

D'où

$$(m + \mathrm{M}) a_i + (\mathrm{Q}_i + q_i) b = \xi_i + \eta_i \quad \text{avec} \quad |\eta_i| < \varepsilon.$$

Ce qu'il fallait démontrer.

Les relations (14) donnent, d'après cela, tous les systèmes de valeurs acceptables pour les ξ. Les premières des relations (14) pouvant être résolues par rapport à $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s$, on voit bien facilement que *toutes les valeurs acceptablés* pourront être comprises dans les formules

$$\xi_i = \mathrm{L}_i(t) + b\mu_i \qquad (i = 1, 2, \ldots n),$$

où les $\mathrm{L}_i(t)$ sont n formes linéaires, homogènes, à coefficients entiers de $(n-s)$ paramètres $t_1, t_2, \ldots, t_{n-s}$, complètement arbitraires, et les μ_i des fractions rationnelles *convenablement choisies* (sans qu'il soit nécessaire, pour la suite, de préciser davantage); les μ_i seront, en particulier, tous nuls, si les $\mathrm{P}^{(k)}$ sont tous nuls.

Le cas de $s = n$ ne fait pas exception, mais alors les $\mathrm{L}_i(t)$ sont remplacés par zéro.

III. Considérons maintenant $(2n+1)$ quantités réelles a_i, c_i, b $(i=1, 2, \ldots, n)$, b étant, ici encore, $\neq 0$, et considérons les n quantités $ma_i + m'c_i + q_i b$, où m, m', q_i sont $(n+2)$ entiers positifs, négatifs ou nuls, et recherchons si ces n quantités peuvent différer aussi peu que l'on veut de n quantités réelles données à l'avance.

Remarquons qu'au lieu de $ma_i + m'c_i + q_i b$, nous pouvons considérer les quantités $ma_i + r_i b + m'c_i + q_i b$, où les r_i sont n entiers.

Or, les valeurs acceptables pour $(ma_i + r_i b)$ sont toutes celles qui sont de la forme

$$L_i(t) + b\mu_i \qquad (i=1, 2, \ldots, n),$$

et les valeurs acceptables pour $m'c_i + q_i b$ peuvent être écrites sous une forme analogue

$$L'_i(u) + b\nu_i \qquad (i=1, 2, \ldots, n),$$

le sens des notations étant évident par ce qui précède. Les μ_i et ν_i pouvant être pris tous nuls, on voit que toutes les valeurs de la forme

$$\xi_i = L_i(t) + L'_i(u)$$

seront certainement *acceptables* pour les quantités

$$[ma_i + m'c_i + (q_i + r_i)b].$$

Pour qu'il existe des valeurs non *acceptables* pour ces quantités, on voit qu'il est nécessaire que les n formes linéaires $[L_i(t) + L'_i(u)]$ des paramètres t et des paramètres u ne soient pas indépendantes. Comme elles sont à coefficients entiers, elles seront liées par une relation linéaire, homogène, à coefficients entiers non tous nuls, ce qui donne les deux relations simultanées :

$$\begin{gathered}A_1 L_1(t) + A_2 L_2(t) + \ldots + A_n L_n(t) = 0, \\ A_1 L'_1(u) + A_2 L'_2(u) + \ldots + A_n L'_n(u) = 0,\end{gathered}$$

où $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont n entiers non tous nuls.

Mais les a_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ étant évidemment des valeurs acceptables pour $(ma_i + r_i b)$, on doit avoir pour des valeurs convenables (t^0) des (t) et $\mu_i^{(0)}$ des μ_i :

$$a_i = L_i(t^0) + b\mu_i^{(0)} \qquad (i=1, 2, \ldots, n),$$

et d'une façon tout analogue

$$c_i = L'_i(u^0) + b\nu_i^{(0)},$$

et, par suite,

$$A_1(a_1 - b\mu_1^{(0)}) + A_2(a_2 - b\mu_2^{(0)}) + \ldots + A_n(a_n - b\mu_n^{(0)}) = 0,$$
$$A_1(c_1 - b\nu_1^{(0)}) + A_2(c_2 - b\nu_2^{(0)}) + \ldots + A_n(c_n - b\nu_n^{(0)}) = 0.$$

On peut écrire ces deux relations sous la forme

$$A_1 a_1 + A_2 a_2 + \ldots + A_n a_n = \lambda b,$$
$$A_1 c_1 + A_2 c_2 + \ldots + A_n c_n = \lambda' b,$$

λ et λ' étant comme les μ^0 et les ν^0 des fractions rationnelles. En multipliant ces deux relations par un même nombre entier convenablement choisi, on aura finalement

$$A'_1 a_1 + A'_2 a_2 + \ldots + A'_n a_n = B b,$$
$$A'_1 c_1 + A'_2 c_2 + \ldots + A'_n c_n = B' b,$$

$A'_1, A'_2, \ldots, A'_n$ étant n entiers non tous nuls et B, B′ deux autres entiers.

Donc, s'il n'y a pas deux relations simultanées de cette forme entre (a_i, b) et (c_i, b) les quantités $ma_i + m'c_i + q_i b$ peuvent différer aussi peu que l'on veut de n valeurs réelles quelconques données à l'avance.

C'est la proposition dont nous avons fait usage au n° 8.