J. HADAMARD

Sur l'équilibre des plaques élastiques circulaires libres ou appuyées et celui de la sphère isotrope

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 18 (1901), p. 313-342
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1901_3_18__313_0>

SUR L'ÉQUILIBRE

DES

PLAQUES ÉLASTIQUES CIRCULAIRES

LIBRES OU APPUYÉES

ET CELUI

DE LA SPHÈRE ISOTROPE,

PAR M. HADAMARD.

Les principaux problèmes relatifs à l'équilibre des plaques circulaires ont été résolus par le moyen des séries dans le Mémoire de M. Mathieu (¹) (cas des plaques encastrées) et dans celui de M. Maurice Lévy (²).

M. Almansi et M. Lauricella (³) ont ensuite exprimé la solution sous forme d'intégrale définie dans le cas de la plaque *encastrée*. Je me propose d'obtenir le même résultat pour le problème de la plaque simplement *appuyée* et pour celui de la plaque *libre*.

1. On sait que les méthodes de MM. Almansi et Lauricella reposent sur cette remarque que toute solution de l'équation

$$\Delta\Delta u = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^2 u = 0 \tag{1}$$

(¹) *Sur le mouvement vibratoire des plaques* (*Journal de Liouville*, 2ᵉ série, t. XIV, p. 241; 1869).

(²) *Mémoire sur la Théorie des plaques élastiques planes* (*Journal de Liouville*, 3ᵉ série, t. III, p. 219; 1877).

(³) ALMANSI, *Sull' integrazione dell' equazione differenziale* $\Delta^2\Delta^2 = 0$ (*Atti Ac. Sc. Torino*, t. XXXI, p. 881; 1896). — LAURICELLA, *Integrazione dell' equazione* $\Delta^2(\Delta^2 u) = 0$ *in un campo di forma circolare* (*Ibid.*, p. 1010).

peut se mettre sous la forme

$$u = \mathrm{U}(x^2 + y^2 - \mathrm{R}^2) + \mathrm{V}, \tag{2}$$

U et V étant des fonctions harmoniques. Dans le cas de la plaque encastrée, les conditions données font connaître les valeurs que prennent U et V sur la circonférence, de sorte qu'on est ramené au problème de Dirichlet. Dans le cas de la plaque libre ou simplement appuyée, les données semblent au premier abord beaucoup plus compliquées. On va voir cependant que, pour être encore ramené au problème de Dirichlet et à des quadratures, il suffit d'utiliser ce fait [lequel intervient aussi, comme on sait, dans l'établissement de la formule (2)], que l'équation $\Delta(u) = 0$ admet la transformation infinitésimale

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y};$$

autrement dit, que si u est une intégrale de cette équation,

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y}$$

en est une autre.

Considérons d'abord le cas où la plaque est appuyée. Alors on cherche une fonction u pour laquelle on donne :

a) A l'intérieur du cercle donné, soit du cercle

$$x^2 + y^2 - \mathrm{R}^2 = 0, \tag{3}$$

les valeurs de $\Delta\Delta u$; autrement dit l'équation

$$\Delta\Delta u = f, \tag{4}$$

f étant une fonction donnée de x et de y;

b) Sur la circonférence, les valeurs de u;

c) Sur la circonférence également, les valeurs de la quantité

$$(\lambda - 2\mu)\Delta u + 2\mu\frac{d^2 u}{dn^2},$$

où μ et $\lambda - \mu$ sont deux constantes positives. Nous désignerons, pour abréger, cette quantité par $\mathrm{D}(u)$.

Supposons tout d'abord que la fonction f qui constitue le second membre de l'équation (4) soit identiquement nulle. Nous pouvons alors prendre u sous la forme (2); la condition b fait alors connaître les valeurs de V sur la circonférence et, par conséquent, on a cette fonction elle-même en résolvant une première fois le problème de Dirichlet.

L'expression $D(u)$ s'écrit, d'autre part (en tenant compte de ce que U est une fonction harmonique),

$$(5)\qquad D(u) = 4(\lambda - 2\mu)\left(x\frac{\partial U}{\partial x} + y\frac{\partial U}{\partial y} + U\right) + 2\mu\left[4\left(x\frac{\partial U}{\partial x} + y\frac{\partial U}{\partial y}\right) + 2U + \frac{d^2V}{dn^2}\right].$$

C'est ici qu'intervient la remarque à laquelle nous faisions allusion tout à l'heure : cette remarque nous montre que la fonction

$$4(\lambda - 2\mu)\left(x\frac{\partial U}{\partial x} + y\frac{\partial U}{\partial y} + U\right) + 2\mu\left[4\left(x\frac{\partial U}{\partial x} + y\frac{\partial U}{\partial y}\right) + 2U\right] = 4\left[\lambda\left(x\frac{\partial U}{\partial x} + y\frac{\partial U}{\partial y}\right) + (\lambda - \mu)U\right] = U_1$$

est une fonction harmonique en même temps que U. Les valeurs de cette fonction étant connues sur la circonférence, nous aurons U_1 par une seconde résolution du problème de Dirichlet.

Enfin, U_1 étant obtenu, et en désignant par ρ, θ les coordonnées polaires, l'équation

$$\frac{U_1}{4} = \lambda\rho\frac{\partial U}{\partial \rho} + (\lambda - \mu)U$$

nous donnera

$$(6)\qquad U = \frac{1}{4\lambda\rho^k}\int \rho^{k-1} U_1\, d\rho,$$

en posant

$$k = \frac{\lambda - \mu}{\lambda}.$$

La seule difficulté qui reste à examiner concerne le choix de la limite inférieure d'intégration. Or ce choix est imposé par la condition que U soit une fonction régulière à l'origine. C'est ce qui aura lieu si l'intégrale est prise entre les limites o et ρ, et dans ce cas seulement.

La fonction U ainsi déterminée est, d'ailleurs, harmonique en même temps que U_1 : car on a, en général,

$$\Delta\left(x\frac{\partial U}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+2\right)\Delta u,$$

et, par conséquent,

$$0=\Delta U_1=\left[\lambda\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)+3\lambda-\mu\right]\Delta U,$$

de sorte que, si ΔU n'était pas nul, il devrait être une fonction homogène de degré $-\frac{3\lambda-\mu}{\lambda}$, ce qui ne peut être, puisque U est une fonction régulière.

2. Passons maintenant au cas de la plaque libre, en écrivant les conditions au contour à la façon de Kirchhoff et de M. Boussinesq. Ces conditions ne font plus connaître les valeurs de u, mais donnent :

c) Les valeurs de l'expression $D(u)$ précédemment écrite, et

d) Celles de la nouvelle expression différentielle

$$\mathcal{D}(u)=\lambda\frac{d}{dn}(\Delta u)+2\mu\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t\,\partial n}\right),$$

dans laquelle s désigne l'arc du contour, pendant que l'expression $\frac{\partial^2 u}{\partial t\,\partial n}$ représente une dérivée seconde formée en rapportant la figure à deux axes auxiliaires, l'un Mt dirigé suivant la tangente au contour dans le sens des s croissants, l'autre Mn normal à ce même contour, et nommant t et n les coordonnées cartésiennes obtenues dans ces conditions. On a, d'ailleurs, aisément

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t\,\partial n}=\frac{d}{ds}\left(\frac{du}{dn}\right)+\frac{1}{R}\frac{du}{ds}, \tag{7}$$

R étant le rayon de courbure du contour, compté comme positif ou comme négatif, suivant qu'il a ou non le même sens que la normale n.

Les données précédentes ne sont d'ailleurs pas compatibles en général : il y a trois conditions de possibilité. Si, d'autre part, ces conditions sont vérifiées, la solution n'est déterminée qu'à un polynome linéaire quelconque près.

Reprenons encore la fonction cherchée sous la forme (2) : la quantité $D(u)$ continuera à être donnée par la formule (5), que l'on peut encore écrire

$$(5') \qquad Du = 4\left[\lambda\rho\frac{\partial U}{\partial\rho} + (\lambda-\mu)U\right] + \frac{2\mu}{R^2}\rho^2\frac{\partial^2 V}{\partial\rho^2}.$$

Pour $\mathcal{D}(u)$, on aura [en supposant que n soit la direction de la normale extérieure, et utilisant la formule (7)]

$$\mathcal{D}(u) = 4\lambda\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial U}{\partial\rho} + U\right) + \frac{2\mu}{R^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\left(2RU + \frac{\partial V}{\partial\rho} - \frac{V}{R}\right).$$

En remarquant que $\rho\frac{\partial V}{\partial\rho} = x\frac{\partial V}{\partial x} + y\frac{\partial V}{\partial y}$ est harmonique en même temps que V, et que, φ étant une fonction quelconque, la quantité $\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}$ est égale à $\Delta\varphi - \frac{1}{\rho^2}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)^2\varphi$, on peut mettre cette expression de $\mathcal{D}(u)$ sous la forme

$$(7') \qquad \mathcal{D}(u) = \frac{4\lambda}{R}\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial U}{\partial\rho} + U\right) - \frac{2\mu}{R}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)^2\left[2U + \frac{1}{R^2}\left(\rho\frac{\partial V}{\partial\rho} - V\right)\right].$$

Considérons alors la fonction $\mathcal{D}(u)$ comme définie, non seulement sur la circonférence, mais dans tout l'intérieur du cercle, par la formule précédente, nous voyons que cette fonction est harmonique. Connaissant (d'après l'hypothèse) les valeurs de $\mathcal{D}(u)$ sur le contour, nous pourrons calculer cette fonction dans tout le cercle, par la résolution du problème de Dirichlet.

Il en sera de même pour la fonction $D(u)$ définie par la formule (5') et dont la propriété harmonique apparaîtra si l'on tient compte de l'identité

$$\rho^2\frac{\partial V}{\partial\rho^2} = \left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)^2 V - \rho\frac{\partial V}{\partial\rho}.$$

Les fonctions $D(u)$ et $\mathcal{D}(u)$ étant ainsi connues, il s'agit de remonter aux fonctions U et V elles-mêmes. A cet effet, on éliminera V en différentiant par rapport à ρ l'équation (5') et combinant avec (7'), ce qui donne, toutes réductions faites,

$$\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \mathrm{D}(u) + \mathrm{R}\mathfrak{D}(u) = (8\lambda - 4\mu)\rho \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \rho} + \mathrm{U}\right). \tag{8}$$

Il vient donc

$$\rho \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \rho} + \mathrm{U} - \frac{\mathrm{D}(u)}{8\lambda - 4\mu} = \frac{1}{8\lambda - 4\mu} \int_0^\rho \frac{\mathrm{R}}{\rho} \mathfrak{D}(u)\, d\rho + \text{const.} \tag{8'}$$

Mais $\rho \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \rho} + \mathrm{U}$ doit être une fonction régulière : il est, pour cela, nécessaire et suffisant que $\mathfrak{D}(u)$ soit nul à l'origine.

Cette condition étant supposée vérifiée, la valeur de $\rho \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \rho} + \mathrm{U}$ fera connaître celle de U, savoir

$$\mathrm{U} = \frac{1}{(8\lambda - 4\mu)\rho} \int_0^\rho \left[\mathrm{D}\, u + \int_0^\rho \frac{\mathrm{R}}{\rho} \mathfrak{D}(u)\, d\rho\right] d\rho + \text{const.}, \tag{9}$$

le choix de la limite inférieure o sous le nouveau signe d'intégration étant imposé par la condition que U soit une fonction régulière, et la constante arbitraire additive provenant de celle qui figure dans la formule (8′).

U étant ainsi trouvé, la formule (5′) fera connaître V, qui sera une fonction régulière si l'expression $\mathrm{D}(u) - 4\left[\lambda\rho \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \rho} + (\lambda - \mu)\mathrm{U}\right]$ manque : 1° de terme constant; 2° de termes du premier degré.

La première de ces deux conditions détermine la constante arbitraire que contient la formule (9). Quant à la seconde, si l'on remarque que les termes du premier degré de $\rho \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \rho}$ sont identiques à ceux de U, elle se réduit aisément à celle-ci que $\mathrm{D}\, u - \mathrm{R}\mathfrak{D}(u)$ doit également manquer de termes du premier degré. Il est d'ailleurs aisé de voir que l'ensemble de cette condition et de celle que nous avons précédemment trouvée [d'après laquelle $\mathfrak{D}(u)$ doit manquer de terme constant] équivaut aux conditions de possibilité qui s'écrivent *a priori*.

3. Si maintenant on veut passer au cas où la fonction f, second membre de l'équation (4), est différente de zéro, on sait que le moyen le plus commode consiste à former des expressions analogues à la fonction de Green pour l'équation de Laplace. L'identité fondamen-

tale étant

$$(10)\qquad \lambda \iint_{\Sigma} (u\Delta\Delta v - v\Delta\Delta u)\, d\sigma = \int_{(s)} \left[u\,\mathfrak{D}(v) - v\,\mathfrak{D}(u) - \frac{du}{dn}\mathrm{D}(v) + \frac{dv}{dn}\mathrm{D}(u)\right] ds,$$

où u et v sont deux fonctions régulières dans l'aire Σ, limitée par le contour (s) (ici l'aire du cercle donné), on prendra pour v une fonction qui soit irrégulière, à la façon de $r^2 \log r$, au seul point $\mathrm{P}(x_0, y_0)$ de cette aire. La formule précédente sera alors complétée par le terme $2\pi\lambda u(x_0, y_0)$ et donnera la valeur de ce terme si tous les autres sont connus. C'est ce qui arrivera, pour le cas de la plaque appuyée, si v satisfait à l'équation $\Delta\Delta v = 0$ et est nul ainsi que $\mathrm{D}(v)$ au contour.

4. La fonction v a d'ailleurs une interprétation physique simple. Elle représente la flexion produite par l'effet d'une force normale unique appliquée au point P. C'est ce que l'on voit immédiatement en remplaçant, dans l'équation (10), $\Delta\Delta u$ par f, f étant nul dans toute l'aire de la plaque, sauf dans une très petite région entourant P, mais devenant très grande dans cette région, de manière qu'on ne cesse pas d'avoir

$$\iint f\, d\sigma = 1.$$

5. Pour le cas de la plaque libre, on sait que les choses se passent d'une façon un peu moins simple. Pour une intégrale v de l'équation $\Delta\Delta v = 0$, irrégulière à la façon indiquée au point (x_0, y_0) et en ce point seul, on ne peut pas avoir, tout le long du contour, $\mathrm{D}(v) = \mathfrak{D}(v) = 0$, la distribution des quantités $\mathrm{D}(v)$ et $\mathfrak{D}(v)$ devant être telle que l'on ait

$$(11)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_{(s)} \left[x\,\mathfrak{D}(v) - \frac{dx}{dn}\mathrm{D}(v)\right] ds = 2\pi\lambda x_0, \\ \displaystyle\int_{(s)} \left[y\,\mathfrak{D}(v) - \frac{dy}{dn}\mathrm{D}(v)\right] ds = 2\pi\lambda y_0, \\ \displaystyle\int \mathfrak{D}(v)\, ds = 2\pi\lambda. \end{cases}$$

La forme la plus simple que puissent prendre $D(v)$ et $\mathcal{D}(v)$ de manière à vérifier les équations (11) est celle où $D(v)$ est nul, $\mathcal{D}(v)$ étant égal à une fonction linéaire de x et de y. Si l'on désigne par q la forme quadratique définie

$$(12) \qquad q(\xi, \eta, \zeta) = \int_{(s)} (\xi x + \eta y + \zeta)^2 \, ds,$$

par $Q(x, y, t)$ la forme adjointe de q, divisée par le discriminant de q, on pourra prendre

$$(13) \qquad \mathcal{D}(v) = \lambda\pi \left(x \frac{\partial Q}{\partial x_0} + y \frac{\partial Q}{\partial y_0} + \frac{\partial Q}{\partial t_0} \right) = \lambda\pi \left(x_0 \frac{\partial Q}{\partial x} + y_0 \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial t} \right)$$

($t = t_0 = 1$ étant des variables d'homogénéité).

6. Dans le cas de la plaque appuyée, comme dans le cas de la plaque encastrée, la fonction auxiliaire v est symétrique par rapport aux coordonnées x, y; x_0, y_0 des deux points dont elle dépend, ainsi qu'on le montre par un raisonnement tout semblable à celui qu'on emploie, dans un but analogue, à propos du problème de Dirichlet.

Il semble, au premier abord, que l'on ne puisse arriver au même résultat pour le problème de la plaque libre, où se présente une difficulté analogue à celle que l'on rencontre à propos du second problème aux limites de la théorie des fonctions harmoniques (problème hydrodynamique). Dans ce dernier cas, on sait que, pour obvier à la difficulté en question, M. Klein [1] a été conduit à compliquer un peu la fonction primitivement considérée par Fr. Neumann, en y introduisant quatre points du plan au lieu de deux. J'ai montré, dans mon enseignement de l'année scolaire 1898-1899, au Collège de France, qu'une telle complication était inutile et qu'il suffisait, pour arriver à la symétrie voulue, de disposer convenablement de l'arbitraire qui reste encore dans la fonction de Neumann.

Il en est tout à fait de même ici. Si, dans la formule (10), on remplace v par la fonction $v(x, y; x_0, y_0)$ qui vient d'être considérée, et u par la fonction analogue $v_1 = v(x, y; x_1, y_1)$ formée en remplaçant

---

[1] *In* Pockels, *Differentialgleichung* $\Delta u + k^2 u = 0$. Leipzig, p. 253; 1891.

le point $P(x_0, y_0)$ par un autre point quelconque $P_1(x_1, y_1)$, on constate, à la manière ordinaire, que la différence

$$v(x_0, y_0; x_1, y_1) - v(x_1, y_1; x_0, y_0)$$

s'exprime [$D(v)$ et $D(v_1)$ étant nuls] par l'intégrale

$$\int [v_1 \mathcal{D}(v) - v \mathcal{D}(v_1)]\, ds \tag{14}$$

étendue au contour donné.

Or les propriétés par lesquelles nous avons défini la fonction v ne déterminent cette fonction qu'à une quantité près de la forme $mx + ny + p$; m, n, p étant indépendants de x, y, mais pouvant dépendre d'une façon tout à fait quelconque de x_0, y_0.

Soit alors $f(x, y, t)$ une forme quadratique quelconque, laquelle peut d'ailleurs être identiquement nulle. Déterminons les coefficients m, n, p de manière que l'on ait

$$\tag{15} \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{2}\int_{(s)} v \frac{\partial Q}{\partial x}\, ds = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_0}, \\ &\frac{1}{2}\int_{(s)} v \frac{\partial Q}{\partial y}\, ds = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y_0}, \\ &\frac{1}{2}\int_{(s)} v \frac{\partial Q}{\partial t}\, ds = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial t_0}, \end{aligned} \right.$$

et cela pour toute position du point P, de sorte qu'en particulier on ait aussi

$$\tag{15'} \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{2}\int_{(s)} v_1 \frac{\partial Q}{\partial x}\, ds = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_1}, \\ &\frac{1}{2}\int_{(s)} v_1 \frac{\partial Q}{\partial y}\, ds = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y_1}, \\ &\frac{1}{2}\int_{(s)} v_1 \frac{\partial Q}{\partial t}\, ds = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial t_1}. \end{aligned} \right.$$

Les coefficients m, n, p étant ainsi choisis, on aura bien

$$v(P, M) = v(M, P);$$

car, si l'on remplace $\mathcal{D}(v)$ par sa valeur (13), et $\mathcal{D}(v_1)$ par une valeur analogue, l'expression (14) disparaît.

Quant à la résolution des équations (15) par rapport aux arbitraires m, n, p, elle est assurément possible. En effet, dans ces équations, les termes qui dépendent de m, n, p sont respectivement

$$(16)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{2}\int_{(s)}(mx+ny+p)\frac{\partial Q}{\partial x}\,ds,\\ &\frac{1}{2}\int_{(s)}(mx+ny+p)\frac{\partial Q}{\partial y}\,ds,\\ &\frac{1}{2}\int_{(s)}(mx+ny+p)\frac{\partial Q}{\partial t}\,ds;\end{aligned}\right.$$

ils peuvent s'écrire respectivement $\frac{1}{2}\frac{\partial Q}{\partial X}$, $\frac{1}{2}\frac{\partial Q}{\partial Y}$, $\frac{1}{2}\frac{\partial Q}{\partial Z}$, en posant

$$\begin{aligned} X &= \int_{(s)} x\,(mx+ny+p)\,ds,\\ Y &= \int_{(s)} y\,(mx+ny+p)\,ds,\\ Z &= \int_{(s)} (mx+ny+p)\,ds.\end{aligned}$$

Mais, ainsi que nous l'avons remarqué plus haut, X, Y, Z sont respectivement égaux à $\frac{1}{2}\frac{\partial q}{\partial m}$, $\frac{1}{2}\frac{\partial q}{\partial n}$, $\frac{1}{2}\frac{\partial q}{\partial p}$. Donc les quantités (16) ne sont autres que les coefficients m, n, p eux-mêmes.

Des considérations toutes semblables s'appliquent, d'ailleurs, à l'équilibre du solide élastique de dimensions finies, en partant, par exemple, de la solution donnée de ce problème par M. Fredholm (¹).

La fonction v, calculée pour le cas de la plaque libre, représentera encore l'effet d'une force normale unique appliquée au point x_0, y_0, cette force étant contre-balancée par des forces également normales au plan de la plaque, appliquées aux différents points de son contour et proportionnelles aux distances de ces points à une droite convenablement choisie.

Il faut toutefois interpréter les équations (15), qui achèvent de déterminer v. C'est ce que l'on fait aisément lorsque f est nul. Les intégrales $\int v\,ds$, $\int xv\,ds$, $\int yv\,ds$ représentent, en effet, la projection

(¹) *Acta Mathematica*, t. XXIII.

sur l'axe des z et les moments par rapport aux axes des x et des y du système des quantités de mouvement du contour de la plaque, supposé matériel et homogène, lorsqu'on considère les déplacements que subissent ses différents points comme des vitesses communiquées à ces points. Les équations (15) expriment donc (pour $f = 0$) que si, les points du contour étant animés des vitesses en question, on rendait ce contour rigide, il resterait en repos. Il devient alors évident qu'on peut satisfaire à ces équations en disposant convenablement du déplacement infinitésimal arbitraire qu'on peut adjoindre à la déformation cherchée.

7. Proposons-nous donc d'appliquer la méthode développée tout à l'heure au calcul de la fonction auxiliaire v, singulière au point P, pour les deux problèmes dont nous avons eu à nous occuper.

Conformément aux notations de M. Lauricella [1], r représentant toujours la distance du point P à un point quelconque M du plan, nous désignerons :

Par ρ', θ' les coordonnées polaires du point P, rapportées au centre O du cercle;

Par P_1 l'image du point P par rapport au cercle ;

Par ρ'' la distance $OP_1 = \dfrac{R^2}{\rho'}$ et par r_1 la distance MP_1.

Enfin, $\gamma = \theta - \theta'$ représentera l'angle des rayons vecteurs OM, OP, et φ l'angle $\widehat{OMP}$.

La fonction

$$\chi = r^2 \log r - \frac{\rho'^2}{R^2} r_1^2 \log\left(\frac{\rho'}{R} r_1\right)$$

satisfait à l'équation $\Delta\Delta\chi = 0$. Elle possède au point P la singularité voulue. Enfin, elle s'annule sur la circonférence. Il suffira donc, pour obtenir l'expression cherchée, d'adjoindre à χ un produit de la forme $U(\rho^2 - R^2)$, où U sera une fonction harmonique choisie de façon à réaliser, sur la circonférence, la seconde condition

$$D[\chi + U(\rho^2 - R^2)] = 0.$$

---

(1) *Loc. cit.*

On trouve aisément, en un point quelconque du cercle,

$$\Delta\chi = 4\left\{1+\log r - \frac{\rho'^2}{R^2}\left[1+\log\left(\frac{\rho'}{R}r_1\right)\right]\right\},$$

et, en un point quelconque de la circonférence,

$$\frac{d\chi}{d\rho} = (1+2\log r)\,\frac{R^2-\rho'^2}{R}.$$

Si l'on tient compte de ce que, sur la circonférence, r est égal à $\frac{\rho'}{R}r_1$, on voit que la fonction harmonique

$$(17)\qquad \left(1-\frac{\rho'^2}{R^2}\right)\left[4\lambda-2\mu+4(\lambda-\mu)\log\left(\frac{\rho'}{R}r_1\right)\right]$$

prend, sur le contour, les mêmes valeurs que $D(\chi)$. D'après les considérations précédentes, c'est cette fonction qu'on devra égaler à $-4\left[\lambda\rho\frac{\partial U}{\partial\rho}+(\lambda-\mu)U\right]$. L'application de la formule (6) donne alors

$$U = \left(1-\frac{\rho'^2}{R^2}\right)\left[\frac{2\lambda-\mu}{2(\lambda-\mu)}+\frac{\lambda-\mu}{\lambda\rho^k}\int_0^\rho \rho^{k-1}\log\left(\frac{\rho'}{R}r_1\right)d\rho\right]\qquad\left(k=\frac{\lambda-\mu}{\lambda}\right).$$

Il est aisé de mettre en évidence la symétrie du second membre de la formule précédente $\left(\text{privé du facteur } 1-\frac{\rho'^2}{R^2}\right)$ par rapport aux deux points M et P. Si l'on tient compte, en effet, de l'équation

$$OP_1 = \rho'' = \frac{R^2}{\rho'},$$

qui donne

$$\rho' r_1 = \sqrt{R^4+\rho^2\rho'^2-2R^2\rho\rho'\cos\gamma},$$

il vient

$$(18)\qquad U = -\left(1-\frac{\rho'^2}{R^2}\right)\left[\frac{2\lambda-\mu}{2(\lambda-\mu)}+\log R+\frac{\lambda-\mu}{\lambda}\psi\left(\frac{\rho\rho'}{R^2},\gamma\right)\right],$$

en posant

$$(18')\qquad \psi(t,\gamma) = \frac{1}{t^{1-\frac{\mu}{\lambda}}}\int_0^t t^{-\frac{\mu}{\lambda}}\log\sqrt{t^2-2t\cos\gamma+1}\,dt.$$

La fonction $\psi(t, \gamma)$ n'est, d'ailleurs, elle-même autre que la partie réelle de la fonction $\varphi(te^{i\gamma})$, dans laquelle

$$\varphi(t) = \frac{1}{t^{1-\frac{\mu}{\lambda}}} \int_0^t t^{-\frac{\mu}{\lambda}} \log(1-t)\, dt,$$

l'intégrale étant supposée prise suivant le chemin rectiligne.

La fonction v cherchée se présente bien alors d'une manière symétrique par rapport aux deux points dont elle dépend : on a

$$(19) \quad v = r^2 \log r - \left(\frac{\rho'}{R} r_1\right)^2 \log\left(\frac{\rho'}{R} r_1\right) + \frac{(\rho^2 - R^2)(\rho'^2 - R^2)}{R^2} \left[\frac{2\lambda - \mu}{2(\lambda-\mu)} + \log R + \frac{\lambda-\mu}{\lambda} \psi\left(\frac{\rho\rho'}{R^2}, \gamma\right)\right].$$

v étant ainsi calculé, une intégrale quelconque u de l'équation

$$(4) \qquad \Delta\Delta_u = f$$

sera déterminée, en fonction de ses valeurs et de celles de $D(u)$ sur la circonférence, par la formule

$$8\pi\lambda u_P = \int \left[u\, \mathcal{D}(v) + D(u) \frac{dv}{d\rho}\right] ds + \lambda \int\int v f\, d\sigma,$$

$d\sigma$ désignant l'élément d'aire du cercle.

v étant nul au contour, on a

$$\mathcal{D}(v) = \lambda \frac{\partial}{\partial \rho}(\Delta v) + \frac{2\mu}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\left(\frac{\partial v}{\partial \rho}\right).$$

Nous supposerons que la distribution donnée des valeurs de u sur le contour ait, par rapport à θ, une dérivée continue et une dérivée seconde continue, sauf en des points isolés. On peut alors écrire, moyennant une intégration par parties relative à θ,

$$(20) \quad 8\pi\lambda u_P = \lambda \int\int v f\, d\sigma + \int \left\{ \lambda u \frac{\partial}{\partial \rho}(\Delta v) + \left[D(u) + \frac{2\mu}{R^2} \frac{d^2 u}{d\theta^2}\right] \frac{\partial v}{\partial \rho} \right\} ds,$$

ou, toutes réductions faites,

$$
\begin{aligned}
(20') \qquad u_P = {} & \frac{1}{8\pi}\iint v f\, d\sigma + \frac{R^2-\rho'^2}{2\lambda\pi R^2} \\
& \times \left\{ \int \left[\frac{\lambda R}{r^2} + \mu\left(\frac{1}{R} - \frac{\cos\varphi}{r}\right) - \mu\frac{(\lambda-\mu)}{\lambda R}\log\frac{r}{R} + \frac{M}{R}\left(\frac{\lambda-\mu}{\lambda}\right)^2 \psi\left(\frac{\rho'}{R}, \gamma\right)\right] u\, ds \right. \\
& \left. - \frac{R}{4}\int\left[\frac{\lambda}{\lambda-\mu} + 2\log\frac{r}{R} - 2\frac{\lambda-\mu}{\lambda}\psi\left(\frac{\rho'}{R},\gamma\right)\right]\left[D(u) + \frac{2\mu}{R^2}\frac{d^2u}{d\theta^2}\right] ds \right\}.
\end{aligned}
$$

8. Dans le Mémoire cité, M. Lauricella, après avoir établi la formule qui fait connaître la valeur de u au point P en fonction des valeurs de u et de $\frac{\partial u}{\partial \rho}$ au contour, et que l'on peut écrire

$$
(21) \qquad 2\pi u_P = \int \frac{(R^2-\rho'^2)^2}{2R^2 r^2}\frac{\partial u}{\partial \rho}\, ds + \int \frac{(R^2-\rho'^2)^2\cos\varphi}{R^2 r^3}\, u\, ds,
$$

a démontré que la fonction ainsi définie satisfait bien aux conditions du problème. Toutefois, en ce qui regarde la condition relative à la dérivée normale, il n'arrive au résultat qu'en supposant que la série de valeurs données de u admet, par rapport à θ, une dérivée et une dérivée seconde. On peut montrer qu'il suffit de supposer à u une dérivée première $\frac{du}{d\theta}$ (la série des valeurs de $\frac{\partial u}{\partial \rho}$ étant, bien entendu, continue) et qu'on peut même, dans ces conditions, donner à la démonstration une forme plus simple que celle qui a été indiquée par M. Lauricella.

Si, en effet, on différentie la formule (21) par rapport à ρ', il vient

$$
(21') \qquad 2\pi\frac{\partial u}{\partial \rho'} = \int \frac{\partial u}{\partial \rho}\frac{\partial}{\partial \rho'}\frac{(R^2-\rho'^2)^2}{2R^2r^2}\, ds + \int u\frac{\partial}{\partial\rho'}\frac{(R^2-\rho'^2)^2\cos\varphi}{R^2r^3}\, ds.
$$

Si l'on tient compte de ce fait que $R-\rho'$ est toujours plus petit que r et, par conséquent, $R^2-\rho'^2$ plus petit que $2Rr$, on voit sans difficulté que les quantités

$$
\frac{\partial}{\partial\rho'}\frac{(R^2-\rho'^2)^2}{2R^2r^2}, \qquad \frac{\partial}{\partial\rho'}\frac{(R^2-\rho'^2)^2\cos\varphi}{R^2r^3}
$$

sont respectivement de la forme

$$K \frac{(R^2 - \rho'^2)}{R r^2}, \qquad K' \frac{(R^2 - \rho'^2)}{R r^3},$$

K et K′ restant finis, même lorsque r est infiniment petit.

Supposons alors qu'au point Q, vers lequel nous allons faire tendre le point P, la fonction donnée $u(\theta)$ soit égale à u_0 et admette une dérivée u'_0, pendant que $\frac{\partial u}{\partial \rho}$ est continu et prend, au même point, la valeur $\left(\frac{\partial u}{\partial \rho}\right)_0$. On aura

$$u = u_0 + (u'_0 + \eta) \sin(\theta - \theta'),$$

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = \left(\frac{\partial u}{\partial \rho}\right)_0 + \eta',$$

η, η' tendant vers zéro avec $\theta - \theta'$.

Si l'on tient compte des évaluations précédemment obtenues et de l'inégalité évidente $R \sin(\theta - \theta') \leqq r$, on voit que la formule (21′) s'écrit (η'' tendant encore vers zéro avec $\theta - \theta'$)

$$\begin{aligned} 2\pi \frac{\partial u}{\partial \rho'} = \left(\frac{\partial u}{\partial \rho}\right)_0 \int \frac{\partial}{\partial \rho'} \frac{(R^2 - \rho'^2)^2}{2 R^2 r^2} ds + u_0 \int \frac{\partial}{\partial \rho'} \frac{(R^2 - \rho'^2)^2 \cos\varphi}{R^2 r^3} ds \\ + u'_0 \int \sin(\theta - \theta') \frac{\partial}{\partial \rho'} \frac{(R^2 - \rho'^2)^2 \cos\varphi}{R r^3} ds + \int \eta'' \frac{(R^2 - \rho'^2)}{R r^2} ds. \end{aligned}$$

Le premier terme est égal à $\left(\frac{\partial u}{\partial \rho}\right)_0$ et le second à zéro, ainsi qu'on le voit immédiatement en appliquant la formule (21) aux deux fonctions $u = \rho^2 - R^2$ et $u = 1$; le troisième est aussi nul, puisque la quantité sous le signe $\int$ est une fonction impaire de $\theta - \theta'$.

La dernière intégrale tendant vers zéro avec $R - \rho'$, ainsi qu'il est bien connu, la conclusion demandée est établie.

9. Un traitement tout semblable s'applique à la formule (20′), en supposant que $u(\theta)$ ait une dérivée et une dérivée seconde continues.

Il n'y a, tout d'abord, pas lieu d'insister sur le premier terme

$$\frac{1}{8\pi} \iint \varphi f \, d\sigma,$$

lequel s'étudie par les méthodes classiques de la théorie du potentiel.

Soient maintenant u_0, u'_0, u''_0 les valeurs de u, $\frac{du}{d\theta}$, $\frac{d^2u}{d\theta^2}$ au point Q de la circonférence; $D_0(u)$ la valeur donnée de $D(u)$ au même point, cette valeur de $D(u)$ étant d'ailleurs supposée fonction continue de la position du point Q.

Le fait que u_P tend vers u_0 résulte immédiatement de ce que le terme

$$\frac{R^2-\rho'^2}{2\lambda\pi R^2}\int\frac{\lambda R}{r^2}\,ds = \frac{R^2-\rho'^2}{2\pi}\int\frac{ds}{R r^2}$$

est celui même qui figure dans la solution classique du problème de Dirichlet pour la circonférence et que les autres termes du second membre de (20′) sont infiniment petits par rapport à celui-là, pour r infiniment petit.

Désignons, d'autre part, par Δ' l'opération Δ relative non aux coordonnées du point M, mais à celles du point P; par D′, l'opération

$$(\lambda-2\mu)\,\Delta' + 2\mu\,\frac{\partial^2}{\partial\rho'^2}.$$

L'expression $D'(v)$ s'annule toujours pour $\rho' = R$ [puisque $D(v)$ s'annule pour $\rho = R$] ; il en est de même des quantités

$$D'\left\{\frac{(R^2-\rho'^2)}{R^2}\left[\frac{\lambda R}{r^2}+\mu\left(\frac{1}{R}-\frac{\cos\varphi}{r}\right)-\frac{\mu(\lambda-\mu)}{\lambda R}\log\frac{r}{R}+\mu\left(\frac{\lambda-\mu}{\lambda}\right)^2\psi\left(\frac{\rho'}{R},\gamma\right)\right]\right\}$$
$$= \frac{\lambda}{4}\frac{\partial}{\partial\rho}\Delta D'(v),$$

$$D'\left\{\frac{R^2-\rho'^2}{R}\left[\frac{\lambda}{\lambda-\mu}+2\log\frac{r}{R}-2\,\frac{\lambda-\mu}{\lambda}\,\psi\left(\frac{\rho'}{R},\gamma\right)\right]\right\} = -\frac{\partial}{\partial\rho}D'(v).$$

On s'assure aisément que ces dernières sont respectivement de la forme

$$K\frac{(R^2-\rho'^2)}{R r^4},\qquad K'\frac{(R^2-\rho'^2)}{R r^2},$$

K et K′ restant finis, même pour r infiniment petit.

Or, moyennant les notations indiquées ci-dessus, on a

$$u(\theta) = u_0 + u'_0\sin(\theta-\theta') + \frac{u''_0+\eta}{2}\sin^2(\theta-\theta'),$$
$$D(u) = D_0(u) + \eta',$$

et, par conséquent, en négligeant, dans la formule (20′), l'intégrale double,

$$\begin{aligned} D'(u_P) = & \frac{u_0}{8\pi}\int \frac{\partial}{\partial\rho}\Delta D'(v)\,ds + \frac{u'_0}{8\pi}\int \sin(\theta-\theta')\frac{\partial}{\partial\rho}\Delta D'(v)\,ds \\ & + \frac{u''_0}{16\pi}\int \sin^2(\theta-\theta')\frac{\partial}{\partial\rho}\Delta D'(v)\,ds \\ & + \frac{1}{8\lambda\pi}\left[D_0(u) + \frac{2\mu}{R^2}u''_0\right]\int \frac{\partial}{\partial\rho}D'(v)\,ds + \int \eta''\frac{R^2-\rho'^2}{Rr^2}\,ds. \end{aligned}$$

Le terme en u'_0 disparaît évidemment. Il en est de même des termes en u_0 et en u''_0 [comme on le voit en appliquant la formule (20′) aux fonctions $u=1$ et $u=R-\rho\cos(\theta-\theta')$]. Le terme en $D_0(u)$ subsiste donc seul et fournit la conclusion demandée.

10. Pour trouver la fonction v dans le cas de la plaque libre, nous prendrons encore cette fonction sous la forme

$$r^2\log r - \left(\frac{\rho'}{R}r_1\right)^2\log\left(\frac{\rho'}{R}r_1\right) + U(\rho^2-R^2) + V = \chi + U(\rho^2-R^2) + V,$$

U et V étant des fonctions harmoniques. Pour déterminer la fonction U, il faudra, d'après le n° 2, trouver tout d'abord une fonction harmonique prenant au contour les mêmes valeurs que $D(\chi)$ et une fonction harmonique prenant les mêmes valeurs que $\varpi(\chi)$.

La première de ces fonctions est donnée par la formule (17). La seconde est, manifestement, la fonction

$$(22)\qquad \frac{4\lambda}{R}\left[1-\left(1+\frac{\rho'^2}{R^2}\right)\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\log\left(\frac{\rho'}{R}r_1\right)\right] + 4\mu\frac{R^2-\rho'^2}{R^3}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\left(\log\frac{\rho'}{R}r_1\right).$$

La fonction U sera alors déterminée par la condition que l'expression

$$-4(2\lambda-\mu)\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial U}{\partial\rho}+U\right)$$

soit égale, à un polynome linéaire près, à

$$\left[4(\lambda-\mu)\left(1-\frac{\rho'^2}{R^2}\right) - 4\lambda\left(1+\frac{\rho'^2}{R^2}\right)\right]\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\log r_1 + 4\mu\left(1-\frac{\rho'^2}{R^2}\right)\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log r_1.$$

Comme $\log r_1$ est une fonction harmonique et que, par conséquent,

$$\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\log r_1 = -\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)^2 \log r_1,$$

on voit que l'on aura, à un polynome linéaire près,

$$\begin{aligned}(\lambda - 2\mu)&\left(\rho\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial\rho} + \mathrm{U}\right)\\ &= -\left[(\lambda-\mu)\left(1-\frac{\rho'^2}{\mathrm{R}^2}\right) - \lambda\left(1+\frac{\rho'^2}{\mathrm{R}^2}\right)\right]\log\left(\frac{r_1}{\rho''}\right) + \mu\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\log\left(\frac{r_1}{\rho''}\right)\\ &= \mu\left(1-\frac{\rho'^2}{\mathrm{R}^2}\right)\left[\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\log\left(\frac{r_1}{\rho''}\right) + \log\left(\frac{r_1}{\rho''}\right)\right] + 2\lambda\frac{\rho'^2}{\mathrm{R}^2}\log\left(\frac{r_1}{\rho''}\right),\end{aligned}$$

la quantité $\rho'' = \dfrac{\mathrm{R}^2}{\rho'}$ introduite dans cette formule étant la valeur de r_1 pour $\rho = 0$.

Le calcul de U lui-même est simplifié par l'introduction des variables imaginaires. Soient, comme plus haut, z la variable imaginaire qui est représentée par le point M; $\dfrac{\mathrm{R}^2}{z'_0}$, celle qui est représentée par le point P_1. La fonction U pourra être considérée comme la partie réelle d'une fonction w de la variable imaginaire z; la fonction $\rho\dfrac{\partial \mathrm{U}}{\partial\rho}$ sera alors la partie réelle de $z\dfrac{dw}{dz}$. Comme $\log\left(\dfrac{r_1}{\rho''}\right)$ est la partie réelle de $\log\left(1-\dfrac{zz'_0}{\mathrm{R}^2}\right)$, on voit que l'on aura

$$(23)\quad \begin{aligned}(2\lambda-\mu)\mathrm{U} &= \mu\left(1-\frac{\rho'^2}{\mathrm{R}^2}\right)\mathcal{R}\log\left(1-\frac{zz'_0}{\mathrm{R}^2}\right) - 2\lambda\frac{\rho'^2}{\mathrm{R}^2}\mathcal{R}\frac{1}{z}\int_0^z \log\left(1-\frac{zz'_0}{\mathrm{R}^2}\right)dz + \mathrm{C} + \mathrm{P}\\ &= \mu\left(1-\frac{\rho'^2}{\mathrm{R}^2}\right)\mathcal{R}\log\left(1-\frac{zz'_0}{\mathrm{R}^2}\right) - 2\lambda\frac{\rho'^2}{\mathrm{R}^2}\left[1+\mathcal{R}\left(\frac{\mathrm{R}^2}{zz'_0}-1\right)\log\left(1-\frac{zz'_0}{\mathrm{R}^2}\right)\right] + \mathrm{C}+\mathrm{P},\end{aligned}$$

C désignant une constante; P, un polynome homogène du premier degré par rapport aux coordonnées cartésiennes du point M; $\mathcal{R}u$, la partie réelle de u.

On devra ensuite déterminer V par la condition que

$$\frac{2\mu}{\mathrm{R}^2}\rho^2\frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial\rho^2} + 4\left[\lambda\rho\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial\rho} + (\lambda-\mu)\mathrm{U}\right]$$

soit égal et de signe contraire à la quantité (17).

Soit encore ϖ_1 la fonction de la variable imaginaire z qui a pour partie réelle V, de sorte que $\rho^2 \frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} = \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho}\right)^2 V - \rho \frac{\partial V}{\partial \rho}$ sera la partie réelle de $z^2 \frac{d^2 \varpi_1}{dz^2}$, et que ϖ_1 sera déterminé par la condition

$$\begin{aligned}
\frac{2\mu}{R^2} \mathfrak{R}\, z^2 \frac{d^2 \varpi_1}{dz^2} &= -4\left[\lambda \rho \frac{\partial U}{\partial \rho} + (\lambda - \mu) U\right] - \left(1 - \frac{\rho'^2}{R^2}\right)\left\{4\lambda - 2\mu + 4(\lambda - \mu)\left[\mathfrak{R} \log\left(1 - \frac{z z'_0}{R^2}\right) + \log R\right]\right. \\
&= \frac{8\lambda(\mu - \lambda)}{2\lambda - \mu} \mathfrak{R} \log\left(1 - \frac{z z'_0}{R^2}\right) - \frac{4\lambda\mu}{2\lambda - \mu}\left(1 - \frac{\rho'^2}{R^2}\right) \mathfrak{R}\, z \frac{d}{dz} \log\left(1 - \frac{z z'_0}{R^2}\right) \\
&\quad - \frac{8\lambda\mu}{2\lambda - \mu} \frac{\rho'^2}{R^2} \mathfrak{R} \frac{R^2}{z z'_0} \log\left(1 - \frac{z z'_0}{R^2}\right) - 2(2\lambda - \mu)\left(1 - \frac{\rho'^2}{R^2}\right) \\
&\quad - 4(\lambda - \mu)\left(1 - \frac{\rho'^2}{R^2}\right) \log R - \frac{8\lambda\mu}{2\lambda - \mu} \frac{\rho'^2}{R^2} - 4(\lambda - \mu) C - 4(2\lambda - \mu) P.
\end{aligned}$$

La constante C et le polynome P doivent être déterminés par la condition que le second membre soit divisible par ρ^2. On trouve ainsi

$$(24) \qquad \left\{\begin{aligned}
C &= -\left(1 - \frac{\rho'^2}{R^2}\right)\left[\log R + \frac{2\lambda - \mu}{2(\lambda - \mu)}\right], \\
P &= \frac{\lambda}{2\lambda - \mu} \frac{\rho\rho' \cos\gamma}{R^2},
\end{aligned}\right.$$

valeurs qu'il faudra substituer dans la formule (23). Puis il vient

$$\begin{aligned}
\varpi_1 &= \frac{4R^2\lambda(\lambda - \mu)}{\mu(2\lambda - \mu)} \int_0^{\frac{z z'_0}{R^2}} \frac{\log(1 - t)\, dt}{t} \\
&\quad + 2\lambda \log\left(1 - \frac{z z'_0}{R^2}\right)\left[\frac{\rho'^2}{2\lambda - \mu}\left(1 - \frac{R^2}{z z'_0}\right) + \frac{R^2}{\mu}\left(1 - \frac{z z'_0}{R^2}\right)\right].
\end{aligned}$$

On en tire, moyennant les formules (23) et (24) et en rendant symétrique par l'addition (permise) d'un polynome du premier degré en ρ,

$$\begin{aligned}
v &= r^2 \log \frac{r}{R} - \left(\frac{\rho' r_1}{R}\right)^2 \log\left(\frac{\rho' r_1}{R^2}\right) \\
&\quad + \frac{(\rho^2 - R^2)(\rho'^2 - R^2)}{R^2}\left[\frac{2\lambda - \mu}{2(\lambda - \mu)} - \frac{\mu}{2\lambda - \mu} \log\left(\frac{\rho' r_1}{R^2}\right)\right] + \frac{\lambda}{2\lambda - \mu} \frac{\rho\rho'}{R^2}[(\rho^2 + \rho'^2)\cos\gamma - 2\rho\rho'] \\
&\quad + \mathfrak{R}\left\{\frac{4R^2\lambda(\lambda - \mu)}{\mu(2\lambda - \mu)} \int_0^{\frac{z z'_0}{R^2}} \frac{\log(1 - t)\, dt}{t} + \left[\frac{2\lambda R^2}{\mu}\left(1 - \frac{z z'_0}{R^2}\right) + \frac{2\lambda}{2\lambda - \mu} \frac{\rho^2 \rho'^2}{R^2}\left(1 - \frac{R^2}{z z'_0}\right)\right] \log\left(1 - \frac{z}{1}\right.\right.
\end{aligned}$$

Si l'on tient compte des identités

$$\rho'\rho'^2 = |z|^2\,|z'|^2 = zz_0 z' z'_0,$$

$$\left(1 - \frac{zz'_0}{R^2}\right)\left(1 - \frac{z_0 z'}{R^2}\right) = \left|1 - \frac{zz'_0}{R^2}\right|^2 = \left(\frac{\rho' r_1}{R^2}\right)^2,$$

$$r^2 - \left(\frac{\rho' r_1}{R}\right)^2 = -\frac{(\rho^2 - R^2)(\rho'^2 - R^2)}{R^2},$$

on voit qu'on pourra encore écrire

$$(25)\quad v = r^2\left[\log\left(\frac{r}{R}\right) + \frac{\mu}{2\lambda - \mu}\log\left(\frac{\rho' r_1}{R^2}\right)\right] + \frac{2\lambda - \mu}{2(\lambda - \mu)}\,\frac{(\rho^2 - R^2)(\rho'^2 - R^2)}{R^2}$$
$$+ \frac{\lambda}{2\lambda - \mu}\,\frac{\rho\rho'}{R^2}\left[(\rho^2 + \rho'^2)\cos\gamma - 2\rho\rho'\right]$$
$$+ \frac{4R^2\lambda(\lambda - \mu)}{\mu(2\lambda - \mu)}\,\mathfrak{R}\left[\int_0^{\frac{zz'_0}{R^2}} \frac{\log(1 - t)\,dt}{t} + \left(1 - \frac{zz'_0}{R^2}\right)\log\left(1 - \frac{zz'_0}{R^2}\right)\right].$$

La fonction

$$\int_0^t \frac{\log(1 - t)}{t}\,dt = -\left(\frac{t}{1^2} + \frac{t^2}{2^2} + \frac{t^3}{3^3} + \ldots\right) = F_0(t)$$

est évidemment analogue à la fonction $F_k(t)$ considérée plus haut. De plus, les dérivées successives de la fonction

$$\int_0^t \frac{\log(1 - t)}{t}\,dt + (1 - t)\log(1 - t)$$

ne sont infinies, au point $t = 1$, que comme celles de $(1 - t)^2\log(1 - t)$, ainsi qu'on le constate, soit en développant l'expression précédente en une série entière dont les coefficients diminuent comme les valeurs successives de $\frac{1}{n^3}$, soit en remarquant que la dérivée première est

$$\frac{1}{t}\log(1 - t) - \log(1 - t) - 1 = 1 - \frac{(1 - t)\log(1 - t)}{t}.$$

Une fois v obtenu, on a (à un polynome linéaire près)

$$8\pi\lambda u_P = \lambda\iint v f\,d\sigma + \int\left[\frac{\partial v}{\partial \rho}\,D(u) - v\,\mathfrak{D}(u)\right]ds.$$

Quant à ce fait que la formule ainsi écrite donne bien une fonction répondant aux conditions du problème, il résulte de ce que, en raison des remarques qui viennent d'être faites, les dérivées d'ordre quelconque de v ne sont jamais infinies que comme les dérivées correspondantes de $r^2 \log r$ ou de $r_1^2 \log r_1$. Si, en effet, on pose, comme précédemment,

$$D'(v) = (\lambda - 2\mu)\Delta' v + 2\mu \frac{\partial^2 v}{\partial \rho'^2},$$

puis

$$\mathfrak{D}'(v) = \lambda \frac{\partial}{\partial \rho'}(\Delta' v) + \frac{2\mu}{\rho'^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta'^2}\left(\frac{\partial v}{\partial \rho'}\right) - \frac{2\mu}{\rho'^3}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta'^2},$$

on voit que les quantités $D'(v)$, $\mathfrak{D}'(v)$, $\frac{\partial}{\partial \rho}[D'(v)]$, $\frac{\partial}{\partial \rho}[\mathfrak{D}'(v)]$, lesquelles s'annulent avec $\rho' - R$, sont toutes de la forme

$$\frac{K(R^2 - \rho'^2)}{R r^2},$$

K étant fini. On en déduit, comme tout à l'heure, que si les valeurs données $D(u)$ et $\mathfrak{D}(u)$ sont continues, on a, en désignant par $D_0(u)$ et $\mathfrak{D}_0(u)$ les valeurs en question au point Q,

$$\lim_{\rho' = R} D'(u) = AD_0(u) + B\mathfrak{D}_0(u),$$

$$\lim_{\rho' = R} \mathfrak{D}'(u) = CD_0(u) + D\mathfrak{D}_0(u),$$

en posant

$$A = \lim_{\rho' = R} \int \frac{\partial}{\partial \rho} D'(v)\, ds, \qquad B = -\lim_{\rho' = R} \int D'(v)\, ds,$$

$$C = \lim_{\rho' = R} \int \frac{\partial}{\partial \rho} \mathfrak{D}'(v)\, ds, \qquad D = -\lim_{\rho' = R} \int \mathfrak{D}'(v)\, ds.$$

D'ailleurs, il est clair que ces limites existent et sont égales, les unes (A et D) à 1, les autres (B et C) à zéro : il suffit, pour le voir, de remarquer qu'il existe évidemment des fonctions u telles que $D_0(u)$ et $\mathfrak{D}_0(u)$ aient des valeurs quelconques données, — par exemple $D_0(u) = 1$, $\mathfrak{D}_0(u) = 0$; ou $D_0(u) = 0$, $\mathfrak{D}_0(u) = 1$, — et d'appliquer à de telles fonctions la formule (25).

11. Après avoir résolu le problème de la plaque circulaire encas-

trée, M. Almansi [1] a appliqué des considérations toutes semblables à l'équilibre de la sphère isotrope, en se plaçant successivement dans le cas où l'on donne les déplacements à la surface et dans celui où l'on donne les tensions à la surface.

Il est un troisième problème que l'on peut encore se poser relativement à l'équilibre de la sphère isotrope; c'est celui où, sans se donner ni les déplacements, ni les tensions, on assujettit la sphère à rester en contact sur toute sa surface avec des corps de forme et de position données, le contact ayant lieu sans frottement. Les conditions aux limites sont alors: 1° que la pression (de grandeur inconnue) soit normale; 2° que la composante normale du déplacement ait en chaque point une valeur donnée. Le problème ainsi posé se rapproche donc de celui qui a été traité par M. Marcolongo [2] et où l'on se donne une composante de la tension et deux du déplacement, ou inversement, à ceci près que les données actuelles ont, comme on vient de le voir, une signification physique très simple.

Soient (u, v, w) le déplacement du point (x, y, z);

$$\begin{aligned}
t_{xx} &= \lambda\sigma + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x},\\
t_{yy} &= \lambda\sigma + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y},\\
t_{zz} &= \lambda\sigma + 2\mu\frac{\partial w}{\partial z},\\
t_{yz} = t_{zy} &= \mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right),\\
t_{zx} = t_{xz} &= \mu\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right),\\
t_{xy} = t_{yx} &= \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)
\end{aligned}$$

les composantes de l'effort;

$$\begin{aligned}
X &= x\,t_{xx} + y\,t_{xy} + z\,t_{xz},\\
Y &= x\,t_{xy} + y\,t_{yy} + z\,t_{zy},\\
Z &= x\,t_{xz} + y\,t_{yz} + z\,t_{zz},
\end{aligned}$$

---

[1] *Sulla deformazione della sfera elastica* (*Memorie Ac. Sc. Torino*, 2ᵉ série, t. XLVII, p. 103; 1897.

[2] *Annali di Matematica*, 2ᵉ série, t. XXIII.

les composantes de la pression sur une direction de plan normale au rayon vecteur qui va de l'origine au point x, y, z, multipliées par la valeur $\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ de ce rayon vecteur. Nous désignerons par Δ l'opération de Laplace considérée, cette fois, dans l'espace à trois dimensions, soit $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

La recherche de l'équilibre de la sphère élastique de rayon R, ayant son centre à l'origine, revient à la recherche des fonctions u, v, w, connaissant à la surface :

1° La valeur de la quantité $ux + vy + wz$;

2° Les conditions

$$\frac{X}{x} = \frac{Y}{y} = \frac{Z}{z}.$$

Désignons par k la valeur commune (inconnue) des trois rapports précédents; par K la fonction harmonique qui prend, à la surface de la sphère, les valeurs k. La fonction X satisfaisant, ainsi que le remarque M. Almansi [1], à l'équation

$$\Delta\Delta V = 0, \tag{26}$$

il en est de même de la différence $X - Kx$: celle-ci, s'annulant avec $\rho^2 - R^2$, est dès lors le produit de $\rho^2 - R^2$ par une fonction harmonique θ_1; et, de même, on a

$$Y - Ky = (\rho^2 - R^2)\theta_2; \qquad Z - Kz = (\rho^2 - R^2)\theta_3.$$

Les équations

$$\begin{aligned}\Delta X &= -2(\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial\sigma}{\partial x} + y\frac{\partial\sigma}{\partial y} + z\frac{\partial\sigma}{\partial z} - \sigma\right)\\ &= -2(\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho\frac{\partial\sigma}{\partial\rho} - \sigma\right);\end{aligned}$$

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = (3\lambda + 2\mu)\sigma,$$

traitées comme il est indiqué dans le Mémoire de M. Almansi, montrent :

1° Que θ_1, θ_2, θ_3 sont les dérivées partielles d'une même fonction

(1) *Sulla deformazione*, etc., p. 120.

harmonique θ, de sorte qu'on a

$$(27)\quad \begin{cases} X = (\rho^2 - R^2)\dfrac{\partial\theta}{\partial x} + Kx, \\ Y = (\rho^2 - R^2)\dfrac{\partial\theta}{\partial y} + Ky, \\ Z = (\rho^2 - R^2)\dfrac{\partial\theta}{\partial z} + Kz; \end{cases}$$

2° Qu'entre les fonctions θ, σ, K existent les relations

$$(28)\quad \begin{cases} \rho\dfrac{\partial\theta}{\partial\rho} + \dfrac{1}{2}(\theta + K) = -\dfrac{\lambda+\mu}{2}\left(\rho\dfrac{\partial\sigma}{\partial\rho} - \sigma\right), \\ 2\rho\dfrac{\partial\theta}{\partial\rho} + \rho\dfrac{\partial K}{\partial\rho} + 3K = (3\lambda + 2\mu)\sigma. \end{cases}$$

Enfin, la quantité $ux + vy + wz$ satisfait, comme les précédentes, à l'équation (26), et l'on peut écrire

$$(29)\quad ux + vy + wz = (\rho^2 - R^2)G + H.$$

où G et H sont deux fonctions harmoniques. L'expression de X en fonction de u, v, w s'écrit alors

$$\begin{aligned} X &= x\left(\lambda\sigma + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \mu y\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \mu z\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ &= \lambda x\sigma + \mu\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho} - u\right) + \mu\frac{\partial}{\partial x}(ux + vy + wz) \\ &= \lambda x\sigma + \mu\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho} - u\right) + \mu\frac{\partial}{\partial x}[(\rho^2 + R^2)G + H], \end{aligned}$$

de sorte que l'on a

$$(30)\quad \begin{cases} X = (\rho^2 - R^2)\dfrac{\partial\theta}{\partial x} + Kx = x(\lambda\sigma + 2\mu G) + \mu(\rho^2 - R^2)\dfrac{\partial G}{\partial x} + \mu\left(\rho\dfrac{\partial u}{\partial\rho} - u\right) + \mu\dfrac{\partial H}{\partial x}, \\ Y = (\rho^2 - R^2)\dfrac{\partial\theta}{\partial y} + Ky = y(\lambda\sigma + 2\mu G) + \mu(\rho^2 - R^2)\dfrac{\partial G}{\partial y} + \mu\left(\rho\dfrac{\partial v}{\partial\rho} - v\right) + \mu\dfrac{\partial H}{\partial y}, \\ Z = (\rho^2 - R^2)\dfrac{\partial\theta}{\partial z} + Kz = z(\lambda\sigma + 2\mu G) + \mu(\rho^2 - R^2)\dfrac{\partial G}{\partial z} + \mu\left(\rho\dfrac{\partial w}{\partial\rho} - w\right) + \mu\dfrac{\partial H}{\partial z}. \end{cases}$$

Ajoutons membre à membre ces trois équations, respectivement multipliées par x, y, z, et tenons compte de l'identité

$$\rho x \frac{\partial u}{\partial \rho} + \rho y \frac{\partial v}{\partial \rho} + \rho z \frac{\partial w}{\partial \rho} = \rho \frac{\partial}{\partial \rho}(ux + vy + wz) - (ux + vy + wz).$$

Il vient une équation dont les deux membres sont de la forme

$$(\rho^2 - R^2)\,\mho + \psi,$$

$\mho$ et ψ étant des fonctions harmoniques. Or une expression de cette forme ne peut être identiquement nulle que pour $\mho = \psi = 0$. Nous avons donc

$$\lambda\sigma + 2\mu\left(G + \rho\frac{\partial G}{\partial \rho}\right) - \rho\frac{\partial \theta}{\partial \rho} - K = 0, \tag{31}$$

$$\frac{2\mu}{R^2}\left(\rho\frac{\partial H}{\partial \rho} - H\right) + \lambda\sigma + 4\mu G - K = 0. \tag{32}$$

Si l'on donne la composante normale du déplacement à la surface, la fonction H est connue par la résolution du problème de Dirichlet. Les équations (28), (31), (32), font alors connaître les fonctions σ, G, θ, K; après quoi les équations (30) donnent u, v, w.

12. Lorsqu'un corps élastique est déformé par l'action de corps rigides qui doivent rester en contact avec lui, le contact ayant lieu sans frottement, la déformation qu'il subit ne peut pas être quelconque, quels que soient les corps déformants, puisque la tension à la surface doit être normale. On peut se proposer de trouver la déformation la plus générale qui puisse être obtenue dans ces conditions.

Pour résoudre cette question dans le cas de la sphère, nous aurons à déterminer la forme la plus générale des fonctions σ, G, θ, K satisfaisant aux équations (28) et (31).

La recherche de la forme générale de n fonctions liées entre elles par des équations différentielles en nombre inférieur à n, se rattache à une série de questions traitées par Monge.

Dans le cas où les équations sont linéaires, cette recherche est extrêmement simple et le devient encore plus lorsqu'elles sont à coefficients constants.

Soient, en effet, D un symbole de dérivation; F_{11}, F_{12}, ... des opérations différentielles de la forme

$$A_0 D^\nu + A_1 D^{\nu-1} + \ldots + A_\nu, \tag{33}$$

où les A sont des constantes : de pareils symboles peuvent, on le sait, se traiter comme si D était un nombre. Soient les $n-1$ équations différentielles

$$F_{i1}(y_1) + F_{i2}(y_2) + \ldots + F_{in}(y_n) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1) \tag{34}$$

aux n fonctions inconnues $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Il est clair que les fonctions

$$\left\{\begin{array}{l} y_1 = \Phi_1(\xi), \\ y_2 = \Phi_2(\xi), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_n = \Phi_n(\xi), \end{array}\right. \tag{35}$$

où $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$ sont de nouveaux symboles de la forme (33) et ξ une fonction arbitraire, satisfont à ces équations, si les symboles Φ vérifient les conditions

$$F_{i1}\Phi_1 + F_{i2}\Phi_2 + \ldots + F_{in}\Phi_n = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1), \tag{36}$$

ce qui aura lieu si l'on prend pour les Φ les déterminants déduits du Tableau rectangulaire

$$\| F_{ik} \| \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1;\ k = 1, 2, \ldots, n).$$

Par contre, il n'est pas évident que l'on obtienne ainsi la solution la plus générale du problème. Aussi convient-il de rechercher celle-ci par une méthode directe qui s'applique également au cas où, dans les expressions (33) des F_{ik}, les A sont des fonctions quelconques de la variable indépendante et non plus des constantes.

Supposons que toutes les expressions différentielles F_{ik} soient du premier ordre, ce que l'on peut toujours faire moyennant l'introduction d'inconnues auxiliaires. Les équations (34) s'écriront

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} y'_k + \sum_{k=1}^{n} b_{ik} y_k = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{34'}$$

Si les polynomes linéaires $\sum\limits_k a_{1k} y_k$, $\sum\limits_k a_{2k} y_k$, ..., ne sont pas indépendants, on pourra éliminer tous les y' entre les équations précédentes et en déduire au moins une relation en termes finis entre les y. Si l'on se sert de cette relation pour exprimer une de ces inconnues en fonction des autres, on aura remplacé le système (34′) par un autre analogue, mais où le nombre n est diminué d'une unité.

Supposons donc les polynomes $\sum\limits_k a_{ik} y_k$ indépendants les uns des autres. On pourra alors prendre ces polynomes pour nouvelles variables et donner aux équations (34′) la forme

$$(34'') \qquad z'_i + \sum_{k=1}^{n-1} b_{ik} z_k + b_{in} z_n = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1).$$

En général, tous les b_{in} ne seront pas nuls. Alors, en éliminant z_n, on aura un système analogue à (34′), mais où n est diminué d'une unité. Poursuivant ainsi, on parviendra à une seule équation de la forme

$$u'_1 + b_1 u_1 + b_2 u_2 = 0$$

laquelle fera connaître la fonction u_2, une fois u_1 choisi arbitrairement. Remontant alors la série des calculs précédemment effectués, on arrivera à exprimer $y_1, y_2, \ldots, y_n$ à l'aide de la fonction arbitraire $\xi = u_1$ et de ses dérivées jusqu'à l'ordre $n-1$. Dans le cas où les équations données sont à coefficients constants, ces expressions ne peuvent évidemment être autres que les expressions (35) précédemment obtenues [1].

Seulement, il est un cas où les calculs précédents tombent en défaut : c'est celui où, dans le système (34″), b_{in} est nul pour chaque valeur de i.

Dans ce cas, le système proposé s'intègre en termes finis, à l'aide de constantes arbitraires.

---

[1] On suppose que la solution du système (36) est unique. Mais il est aisé de voir que le contraire ne peut se produire que lorsqu'il existe une relation en termes finis (sans constantes arbitraires) entre les y.

Alors même que cette circonstance ne se présenterait pas pour le système (34′), elle pourrait se présenter pour l'un des systèmes suivants : c'est ce qui aurait lieu si le système donné admettait des intégrales premières (en nombre inférieur à $n-1$).

En résumé, *la solution générale du système* (34) *peut, en général, s'exprimer par les formules* (35); *mais, il y a un cas d'exception, celui où les équations* (34) *admettent une ou plusieurs intégrales premières :* dans ce cas, l'intervention de constantes arbitraires est nécessaire [1].

13. Appliquons les généralités qui précèdent aux équations (28) et (31). Ces trois équations admettent une combinaison intégrable. Si, en effet, on les ajoute après avoir multiplié la première équation (28) par -2, il vient

$$\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}+1\right)[2\mu G-(\lambda+\mu)\sigma-\theta+K]=0. \tag{37}$$

La fonction $2\mu G-(\lambda+\mu)\sigma-\theta+K$ doit donc être inversement proportionnelle à ρ. Cette fonction devant être régulière à l'origine, il vient nécessairement

$$2\mu G-(\lambda+\mu)\sigma-\theta+K=0. \tag{37′}$$

L'équation (37) est d'ailleurs, ainsi qu'il est facile de s'en assurer, la seule intégrale première admise par le système considéré.

En tenant compte de l'équation (37′) et désignant par D l'opération $\rho\frac{\partial}{\partial\rho}=\frac{\partial}{\partial\log\rho}$, l'application de la méthode précédemment indiquée donnera

$$\left\{\begin{aligned} \sigma &= (D+1)(2D+3)\xi,\\ \mu G &= -(D+1)\left(\frac{\lambda+\mu}{2}D-\mu\right)\xi,\\ K &= [3\lambda+2\mu+2(2\lambda+\mu)D+2(\lambda+\mu)D^2]\xi,\\ \theta &= [\mu-2(\lambda+\mu)D-(\lambda+\mu)D^2]\xi, \end{aligned}\right. \tag{38}$$

où ξ est une fonction harmonique arbitraire; et l'on aura ainsi la solu-

---

[1] Comparez DARBOUX, *Sur la résolution de l'équation $dx^2+dy^2+dz^2=ds^2$ et de quelques équations analogues* (*Journal de Liouville*, 4e série, t. III, p. 311; 1887).

tion la plus générale des équations (28) et (31), puisque celles-ci n'ont pas d'autre combinaison intégrable que (37).

H étant connu, la fonction ξ sera déterminée par l'équation (32), soit

$$\frac{\mu}{R^2}(D-1)H = \left[(\lambda+2\mu)D^2 + \frac{\lambda}{2}D - \mu\right]\xi.$$

Le premier membre manque de termes du premier degré en ρ, de sorte qu'il en est de même de la fonction ξ. Nous pourrons donc poser

$$\xi = (D-1)\zeta, \tag{39}$$

ζ étant déterminé par l'équation

$$\left[(\lambda+2\mu)D^2 + \frac{\lambda}{2}D - \mu\right]\zeta = \frac{\mu H}{R^2}. \tag{40}$$

Les déplacements cherchés u, v, w seront donnés par les équations (30), dont la première s'écrira [en vertu des formules (38), (39), (40)]

$$\begin{aligned}
\mu(D-1)u &= \rho^2\frac{\partial}{\partial x}(\theta-\mu G) - x(\lambda\sigma+\mu G-K) + \frac{R^2\partial}{\partial x}\left(\mu G - \theta - \frac{\mu H}{R^2}\right)\\
&= \frac{\rho^2}{2}\frac{\partial}{\partial x}D[(\lambda+\mu)D+3\lambda+5\mu]\xi + xD[(\lambda+3\mu)D+\mu]\xi\\
&\quad + \frac{R^2}{2}\frac{\partial}{\partial x}(D-2)[(\lambda+\mu)D^2+(3\lambda+5\mu)D-[(\lambda+3\mu)D+\mu]\zeta.
\end{aligned}$$

Si l'on tient compte des identités

$$\rho^2\frac{\partial}{\partial x}D\varphi = (D-1)\rho^2\frac{\partial\varphi}{\partial x},$$
$$xD\varphi = (D-1)x\varphi,$$
$$\frac{\partial}{\partial x}(D-2)\varphi = (D-1)\frac{\partial\varphi}{\partial x},$$

il vient, à un polynome linéaire près,

$$\mu u = -\frac{\rho^2-R^2}{2}\frac{\partial}{\partial x}[(\lambda+\mu)D+3\lambda+5\mu](D-1)\zeta + x[(\lambda+3\mu)D+\mu](D-1)\zeta + \frac{R^2}{2}\frac{\partial}{\partial x}(3\lambda+4\mu-2\mu D)\zeta,$$
$$\mu v = -\frac{\rho^2-R^2}{2}\frac{\partial}{\partial y}[(\lambda+\mu)D+3\lambda+5\mu](D-1)\zeta + y[(\lambda+3\mu)D+\mu](D-1)\zeta + \frac{R^2}{2}\frac{\partial}{\partial y}(3\lambda+4\mu-2\mu D)\zeta,$$
$$\mu w = -\frac{\rho^2-R^2}{2}\frac{\partial}{\partial z}[(\lambda+\mu)D+3\lambda+5\mu](D-1)\zeta + z[(\lambda+3\mu)D+\mu](D-1)\zeta + \frac{R^2}{2}\frac{\partial}{\partial z}(3\lambda+4\mu-2\mu D)\zeta.$$

Comme les valeurs ainsi écrites satisfont à l'équation (29), elles donnent bien la solution du problème, ζ étant déterminé par l'équation (40). Les polynomes linéaires qu'il y aura lieu d'ajouter à u, v, w, pour avoir la solution la plus générale, seront alors les composantes d'une rotation infinitésimale.