ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

CH. MICHEL

Sur les application géométrique du théorème d' Abel

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 18 (1901), p. 77-126
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1901_3_18__77_0>

SUR LES

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES

DU

THÉORÈME D'ABEL,

PAR M. CH. MICHEL,

PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES AU LYCÉE DE DOUAI.

I.

On doit à M. G. Humbert d'importantes recherches sur l'application, à l'étude des propriétés géométriques des courbes algébriques, du théorème d'Abel relatif aux intégrales des fonctions algébriques (1). J'entends ici spécialement par propriété géométrique d'une courbe une propriété de cette courbe dont la forme n'est pas altérée par une transformation homographique quelconque d'un certain groupe, à l'exclusion de toute autre transformation birationnelle.

Étant données une courbe algébrique fixe $F = 0$, représentée point par point sur une surface de Riemann, et une intégrale abélienne attachée à cette courbe et qui en soit, au sens que je viens de définir, une propriété géométrique, le problème général consiste à calculer explicitement et à mettre sous une forme susceptible d'une interprétation géométrique la fonction algébrico-logarithmique des coefficients de l'équation d'une courbe algébrique variable $f = 0$, qui est égale, en

(1) G. HUMBERT, *Sur le théorème d'Abel et quelques-unes de ses applications géométriques* (*Journal de Mathématiques*; 1887).

vertu du théorème d'Abel, à la somme des variations de l'intégrale abélienne donnée, le long des lignes décrites sur la surface de Riemann par les points d'intersection de la courbe proposée et de la courbe variable.

M. Humbert a obtenu sur cette question de nombreux résultats, en assujettissant la courbe sécante à varier dans un faisceau ponctuel linéaire fixe. J'ai étudié le même problème avec une méthode différente, dont voici le principe. Le théorème d'Abel permet d'exprimer une somme de différentielles uniformes sur une surface de Riemann par une différentielle uniforme sur une variété fermée simplement connexe. Mais, cette variété étant indépendante de la surface de Riemann donnée, il est possible de considérer à la fois plusieurs courbes fixes, de former, en les coupant par une même courbe variable, une somme de différentielles algébriques respectivement uniformes sur les surfaces de Riemann auxquelles elles sont attachées, et d'exprimer cette somme par une différentielle algébrique uniforme sur une seule et même variété fermée simplement connexe. La connaissance des singularités des différentielles abéliennes sur leurs surfaces de Riemann respectives permet d'étudier les singularités de leur somme sur la variété simplement connexe précédente.

Je me suis borné à étudier quelques cas simples, où cette somme n'admet aucune singularité et, par suite, se réduit à o. J'ai pu ainsi, par voie élémentaire, établir le théorème d'Abel, lorsque l'intégrale n'a, en des points ordinaires de la surface de Riemann, que des singularités de la forme $A \log(x-a) + \frac{B}{x-a}$, qui sont celles que l'on rencontre surtout dans les applications géométriques. De la sorte, j'ai retrouvé divers théorèmes de Liouville, sur les distances ([1]), de Laguerre, sur les angles ([2]), de M. Humbert, sur les courbes de direction, et démontré de nouveaux théorèmes sur les aires des courbes.

Les énoncés qui interprètent géométriquement le théorème d'Abel deviennent illusoires lorsque la courbe sécante passe constamment par une singularité de l'intégrale. Dans les cas les plus importants, j'ai pu,

([1]) Liouville, *Journal de Mathématiques*; 1841.
([2]) Laguerre, *Comptes rendus*; 1865.

par un artifice, lever l'indétermination de manière à conserver à chaque théorème une forme géométrique, et étendre ainsi l'application des théorèmes généraux à l'étude des courbes algébriques.

La même méthode permet, sans modification essentielle, d'étudier les propriétés géométriques des points d'intersection d'une courbe gauche algébrique fixe avec une surface algébrique variable.

Les idées principales de ce travail ont été présentées à l'Académie des Sciences (séance du 2 avril 1900).

II.

1. L'équation algébrique entière en x

$$A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_m = 0,$$

dont les coefficients sont variables, admet une ou plusieurs racines augmentant indéfiniment en module, lorsque, A_m restant fini, A_0 tend vers o, et une ou plusieurs racines tendant vers o, lorsque, A_0 restant fini, A_m tend vers o. On peut toujours supposer que l'un des coefficients A_0 et A_m reste fini.

Je dis que, si $x_1, x_2, \ldots, x_k$ sont les racines qui augmentent indéfiniment en module, quand, A_m restant fini, A_0 tend vers o, le produit $A_0 x_1 x_2 \ldots x_k$ a une limite différente de o.

Pour le démontrer, supposons d'abord que, A_0 tendant vers o, A_m ne tende pas vers o. Aucune des racines finies $x_{k+1}, \ldots, x_m$ ne tend alors vers o. Le produit des m racines étant égal à $(-1)^m \frac{A_m}{A_0}$, on a

$$A_0 x_1 x_2 \ldots x_k = \frac{(-1)^m A_m}{x_{k+1} \ldots x_m},$$

dont le second membre, et par suite le premier, a une limite non nulle.

Si A_m a pour limite o, effectuons sur l'équation la transformation $y = x + h$, où h est fixe; elle prend la nouvelle forme

$$A_0 y^m + B_1 y^{m-1} + \ldots + B_m = 0.$$

On peut choisir h, de façon que B_m ait une limite non nulle; aucune des racines finies de l'équation en y ne tend alors vers o. On a l'égalité

$$(x_1+h)(x_2+h)\ldots(x_k+h)(x_{k+1}+h)\ldots(x_m+h)=(-1)^m\frac{B_m}{A_0},$$

qui s'écrit aussi

$$A_0x_1x_2\ldots x_k\left(1+\frac{h}{x_1}\right)\left(1+\frac{h}{x_2}\right)\ldots\left(1+\frac{h}{x_k}\right)=\frac{(-1)^m B_m}{(x_{k+1}+h)\ldots(x_m+h)}.$$

On voit ainsi que $A_0x_1x_2\ldots x_k$ a encore une limite non nulle.

Si $x'_1, x'_2, \ldots, x'_l$ sont les racines qui tendent vers o quand, A_0 restant fini, A_m tend vers o, le quotient

$$\frac{x'_1x'_2\ldots x'_l}{A_m}$$

a une limite non nulle. Pour le montrer, il suffit d'appliquer le résultat précédent à l'équation aux inverses des racines de l'équation proposée.

2. Cela posé, soient deux courbes algébriques fixes, de degrés m et m', n'ayant, comme on peut toujours le supposer, aucune direction asymptotique parallèle à l'axe des y. Leurs équations, ordonnées par rapport à y, sont alors de la forme

$$F(x,y)=y^m+A_1y^{m-1}+\ldots+A_m=0,$$
$$F'(x,y)=y^{m'}+A'_1y^{m'-1}+\ldots+A_{m'}=0.$$

Supposons que ces deux courbes admettent l'origine comme point simple, et que la tangente à chacune d'elles y soit distincte de l'axe des y. Les deux polynomes en x, A_m et $A_{m'}$, contiennent alors x en facteur.

Coupons ces deux courbes par une même courbe variable, de degré n, dont l'équation, ordonnée par rapport à y, est de la forme

$$f(x,y)=a_0y^p+a_1y^{p-1}+\ldots+a_p=0,$$

$a_0, a_1, \ldots, a_p$ étant des polynomes en x. Supposons que la courbe $f=0$ tende à passer par l'origine O; le terme indépendant de x dans a_p tend alors vers o. Soient $x_1, x_2, \ldots, x_h$; $x'_1, x'_2, \ldots, x'_{h'}$ les abscisses des points, infiniment voisins de l'origine, communs à $F = 0$ et à $f = 0$ d'une part, à $F' = 0$ et à $f = 0$ d'autre part. Je dis que le rapport

$$\frac{x_1 x_2 \ldots x_h}{x'_1 x'_2 \ldots x'_{h'}}$$

a une limite non nulle.

En effet, formons l'équation aux abscisses des points d'intersection des deux courbes $F = 0$ et $f = 0$. Si $y_1, y_2, \ldots, y_m$ sont les racines de $F(x, y)$, où l'on regarde x comme un paramètre, le résultant de $F(x,y)$ et de $f(x,y)$, où x est un paramètre, est un polynome en x, $R(x)$, entier par rapport aux coefficients de F et de f, et identique à

$$f(x, y_1) f(x, y_2) \ldots f(x, y_m).$$

L'équation cherchée est $R(x) = 0$.

Le terme indépendant de x dans $R(x)$ est la limite de la valeur de $R(x)$, quand x tend vers 0. Pour $x = 0$, les fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_m$ ont des valeurs toutes finies, $y_{1,0}, y_{2,0}, \ldots, y_{m,0}$, et, la courbe $F = 0$ passant par l'origine, l'une de ces valeurs, par exemple $y_{1,0}$, est nulle. Le terme constant $R(0)$, dans $R(x)$, est égal au produit des m facteurs finis

$$f(0, 0) f(0, y_{2,0}) \ldots f(0, y_{m,0}).$$

La courbe $f(x,y) = 0$ ne passant pas par l'origine, $f(0, 0)$ n'est pas nul. Si les autres facteurs sont différents de 0, le terme constant dans $R(x)$ est de la forme $A f(0, 0)$, A n'étant pas nul.

Si l'un des facteurs $f(0, y_{i,0})$ est nul, c'est que la courbe sécante passe par le point $(0, y_{i,0})$ d'intersection de l'axe Oy avec $F = 0$. Alors $R(x)$ admet des racines nulles. Cherchons le terme indépendant dans $R(x)$, débarrassé de ses racines nulles. Nous pouvons toujours supposer que l'axe Oy rencontre la courbe $F = 0$ en des points ordinaires de la surface de Riemann qui la représente. Alors la fonction y_i et, par suite, la fonction $f(x, y_i)$ sont holomorphes au voisinage de $x = 0$. Il existe ainsi une puissance entière et positive de x, telle que le rapport de $f(x, y_i)$ à cette puissance de x ait une limite différente de 0. Le rapport de $R(x)$ à cette puissance de x a, pour $x = 0$, une limite non nulle, et de la forme $A f(0, 0)$.

Le raisonnement s'étend au cas où plusieurs des facteurs $f(x, y_i)$ s'annulent pour $x = 0$. En définitive, le terme constant, dans $R(x)$, débarrassé, s'il y a lieu, des racines nulles, est de la forme $Af(0, 0)$, A n'étant pas nul.

Cela posé, supposons que $f = 0$ tende à passer par l'origine. Le terme constant, dans $R(x)$, tend vers o, et, $R(x)$ étant entier par rapport aux coefficients de $f(x, y)$, le coefficient du terme du plus haut degré en x reste fini. Par suite, le quotient $\frac{x_1 x_2 \ldots x_h}{f(0, 0)}$ a une limite non nulle. De même, le quotient $\frac{x'_1 x'_2 \ldots x'_h}{f(0, 0)}$ a une limite non nulle. Donc, enfin, le rapport $\frac{x_1 x_2 \ldots x_h}{x'_1 x'_2 \ldots x'_{h'}}$ a lui-même une limite différente de o.

Si le point de rencontre de $F = 0$ et de $F' = 0$ n'est pas l'origine, mais un point, de coordonnées a, b, simple et non de ramification sur chacune d'elles, si, en outre, $x_1, x_2, \ldots, x_h$; $x'_1, x'_2, \ldots, x'_{h'}$ sont les abscisses des points, infiniment voisins de (a, b), communs aux courbes $F = 0$ et $F' = 0$ et à une courbe sécante $f = 0$, le quotient

$$\frac{(x_1 - a) \ldots (x_h - a)}{(x'_1 - a) \ldots (x'_{h'} - a)}$$

a une limite finie et non nulle.

Supposons enfin que le point commun aux deux courbes $F = 0$ et $F' = 0$ soit à l'infini, simple et non de ramification sur chacune d'elles. Alors la direction asymptotique commune est distincte de l'axe des y, et à cette direction correspond dans chaque courbe une asymptote à distance finie. Soient $x_1, x_2, \ldots, x_h$; $x'_1, x'_2, \ldots, x'_{h'}$ les abscisses des points de rencontre des deux courbes fixes avec une courbe variable, qui s'éloignent à l'infini dans la direction asymptotique considérée. Si α est le coefficient angulaire de cette direction, effectuons sur $F = 0$, $F' = 0$ la transformation homographique

$$x = \frac{1}{X}, \qquad y = \frac{Y + \alpha}{X}.$$

Elles se transforment en deux courbes, $\Phi = 0$, $\Phi' = 0$, admettant l'origine comme point simple, la tangente en ce point étant distincte de Oy. De plus, si $F=o$ et $F'=o$ n'ont pas de point de ramification à l'infini, les points de rencontre de $\Phi=o$ et de $\Phi'=o$ avec Oy sont tous distincts. La courbe $f=o$ se transforme en une courbe $\varphi=o$, tendant à passer par O. A tout point de $F=o$ ou de $F'=o$, s'éloignant dans la direction α, correspond un point de $\Phi=o$ ou de $\Phi'=o$, infiniment voisin de l'origine, et réciproquement. Or, le rapport $\frac{X_1 X_2 \ldots X_h}{X'_1 X'_2 \ldots X'_{h'}}$ a une limite finie et non nulle; il en est de même du quotient $\frac{x_1 x_2 \ldots x_h}{x'_1 x'_2 \ldots x'_{h'}}$.

3. Soient les deux courbes $F=o$ et $F'=o$, de degrés m et m', passant par l'origine O qu'elles admettent comme point simple, la tangente y étant la même et distincte de Oy. Si $x_1, x_2, \ldots, x_h$; $x'_1, x'_2, \ldots, x'_{h'}$ sont les abscisses des points, infiniment voisins de O, communs aux courbes $F=o$ et $F'=o$ et à une courbe variable $f=o$, tendant à passer par O, je dis que $\sum_{i=1}^{i=h}\frac{1}{x_i}-\sum_{i=1}^{i=h'}\frac{1}{x'_i}$ a une limite.

L'équation aux abscisses $x_1, \ldots, x_h, \ldots, x_{mn}$ des points de rencontre de $F=o$ et de $f=o$ est

$$R(x)=f(x, y_1)f(x, y_2)\ldots f(x, y_m)=o.$$

On a les relations

$$\sum_{i=1}^{i=mn}\frac{1}{x_i}=-\frac{R'(o)}{R(o)}=-\sum_{i=1}^{i=m}\frac{f'(o, y_{i,0})}{f(o, y_{i,0})},$$

si $f'(x, y_i)$ est la dérivée par rapport à x de $f(x, y_i)$, où y_i est fonction de x. La courbe $F=o$ passant par O et la tangente en O ayant pour coefficient angulaire β, une détermination y_1 de y s'annule pour $x=o$, et sa dérivée est égale à β. L'un des termes $\frac{f'(o, y_{i,0})}{f(o, y_{i,0})}$ est égal à $\frac{f'_x(o, o)+\beta f'_y(o, o)}{f(o, o)}$.

Supposons qu'aucune des quantités $f(o, y_{i,0})$, $i\neq 1$, ne soit nulle. Si les points de rencontre de Oy et de $F=o$ sont tous distincts, aucune des quantités $f'(o, y_{i,0})$ n'est infinie. On a ainsi une relation de la forme

$$\sum_{i=1}^{i=h} \frac{1}{x_i} = -\frac{f'_x(0,0) + \beta f'_y(0,0)}{f(0,0)} + B,$$

B étant une quantité finie, quelle que soit la courbe sécante.

Supposons qu'une quantité $f(0, y_{i,0})$, $i \neq 1$, soit nulle. La courbe $f = 0$ passe alors par un point commun à Oy et à $F = 0$; $R(x)$ admet des racines nulles, correspondant à des points non infiniment voisins de O.

Cherchons la somme des inverses des racines non nulles. La fonction $f(x, y_i)$, étant holomorphe au voisinage de $x = 0$ et s'annulant pour $x = 0$, se met sous la forme $x^p \varphi(x)$, où p est un entier positif et $\varphi(x)$ une fonction holomorphe, non nulle pour $x = 0$; le rapport $\frac{f'(x, y_i)}{f(x, y_i)}$ s'écrit $\frac{p}{x} + \Phi(x)$, Φ étant régulière pour $x = 0$. La fonction $\frac{R'(x)}{R(x)} - \frac{p}{x}$ reste finie pour $x = 0$, et, par suite, $R(x)$ a p racines nulles. La sommation s'étendant aux racines non nulles, on a

$$\sum \frac{1}{x_i} = \lim \left[-\frac{R'(x)}{R(x)} + \frac{p}{x} \right]_{x=0}.$$

En répétant alors le raisonnement précédent, on voit encore que l'on a

$$\sum_{i=1}^{i=h} \frac{1}{x_i} = -\frac{f'_x(0,0) + \beta f'_y(0,0)}{f(0,0)} + B,$$

B restant fini, pour toute position de $f = 0$.

Le raisonnement s'applique encore au cas où plusieurs des quantités $f(0, y_{i,0})$ sont nulles, et la relation est générale. En l'appliquant à la courbe $F' = 0$, avec la même valeur de β, on voit que la différence $\sum_{i=1}^{i=h} \frac{1}{x_i} - \sum_{i=1}^{i=h'} \frac{1}{x'_i}$ reste finie, quand $f = 0$ passe par O, moyennant les restrictions faites sur les points de rencontre de Oy avec les courbes fixes.

Si le point de contact de $F = 0$ et de $F' = 0$ n'est pas l'origine, mais un point de coordonnées (a, b), simple et non de ramification sur chacune d'elles, si en outre $x_1, x_2, \ldots, x_h$; $x'_1, x'_2, \ldots, x'_{h'}$ sont les abscisses des points, infiniment voisins du point (a, b), communs aux deux courbes fixes et à une courbe variable,

$$\sum_{i=1}^{i=h} \frac{1}{x_i - a} - \sum_{i=1}^{i=h'} \frac{1}{x'_i - a}$$

reste finie, quand $f = 0$ passe en (a, b).

Soient enfin deux courbes $F = 0$ et $F' = 0$ ayant une direction asymptotique simple commune, non parallèle à Oy, et l'asymptote correspondante commune. Supposons, en outre, que la droite de l'infini rencontre les deux courbes données respectivement en des points distincts. Si $x_1, x_2, \ldots, x_h$ et $x'_1, x'_2, \ldots, x'_{h'}$ sont les abscisses des points, à l'infini dans la direction considérée, communs aux deux courbes et à une courbe variable,

$$\sum_{i=1}^{i=h} x_i - \sum_{i=1}^{i=h'} x'_i$$

reste finie, quand la courbe variable passe par le point à l'infini commun. Pour le voir, il suffit de se servir de la transformation homographique déjà définie.

4. Soient deux courbes fixes $F = 0$ et $F' = 0$, de degrés m et m', se coupant en deux points $A(a, b)$ et $A'(a', b')$, simples sur chacune d'elles et ordinaires sur les surfaces de Riemann qui représentent les deux courbes. Désignons par $\varpi(x, y)$ et $\varpi'(x, y)$ deux intégrales abéliennes de troisième espèce, respectivement attachées aux deux courbes, ayant pour seuls points singuliers A et A', les parties principales étant pour chacune d'elles au voisinage de ces points $\log(x - a)$ et $-\log(x - a')$.

Une courbe variable $f = 0$, de degré n, rencontrant les deux courbes en des points d'abscisses $x_1, x_2, \ldots, x_{mn}$ et $x'_1, x'_2, \ldots, x'_{m'n}$, formons la différence

$$U = \sum^{i=mn} \varpi(x_i, y_i) - \sum^{i=m'n} \varpi'(x'_i, y'_i).$$

D'après un raisonnement connu, chacun des termes de la différence, et par suite la différence elle-même, est une fonction algébrico-logarithmique des coefficients de l'équation de la courbe variable. Je dis que U est constant, à des multiples des périodes des intégrales près. Il suffit de montrer que U est fini, pour toute position de la courbe sécante. Or U est évidemment fini tant que $f = 0$ ne passe ni par A ni par A'. Supposons que cette courbe tende à passer par A. Soient $(x_1, y_1), \ldots, (x_h, y_h)$; $(x'_1, y'_1), \ldots, (x'_{h'}, y'_{h'})$ les points de rencontre infiniment voisins de A avec les courbes fixes. U est, au voisinage de A, égal à la somme d'une fonction V régulière et de l'expression

$$\sum_{i=1}^{i=h} \log(x_i - a) - \sum_{i=1}^{i=h'} \log(x'_i - a),$$

que l'on peut écrire

$$\log \frac{(x_1 - a) \ldots (x_h - a)}{(x'_1 - a) \ldots (x'_{h'} - a)}.$$

Mais, la quantité sous le signe log a une limite finie et non nulle; l'expression elle-même reste donc finie, et aussi la différence U, qui est par suite constante.

Si le point A est à l'infini, il suffit de remplacer dans la démonstration $x - a$ par $\frac{1}{x}$. La démonstration n'est valable qu'avec des restrictions relatives à l'intersection des courbes fixes par la droite de l'infini et les parallèles à Oy menées par A et A'. Si ces conditions ne sont pas remplies, on voit, en effectuant une transformation homographique de la figure, que le théorème est encore vrai.

En particulier, supposons que $F' = 0$ soit la droite AA'. Dans ce cas, l'expression $\log \frac{x - a}{x - a'}$ est une intégrale ϖ'. Ainsi, la différence

$$U = \sum_{i=1}^{i=mn} \varpi(x_i, y_i) - \left[\log \frac{x'_1 - a}{x'_1 - a'} + \ldots + \log \frac{x'_n - a}{x'_n - a'}\right]$$

est, aux périodes près, une quantité constante, de la forme nC, C étant constant et indépendant du degré n de la courbe sécante.

C'est le théorème d'Abel relatif à l'intégrale normale de troisième espèce. Voici comment on peut le mettre sous la forme obtenue par Clebsch et Gordan. Soient α, β les paramètres directeurs d'une demi-droite portée par AA′, et, μ_i étant un point de rencontre de la courbe $f = 0$ avec AA′, d'abscisse x'_i, désignons par ρ_i et ρ'_i les valeurs algébriques des segments $A\mu_i$ et $A'\mu_i$. Si $\varphi(x, y)$ est l'ensemble des termes du plus haut degré dans f, on a

$$\rho_1\rho_2\ldots\rho_n = (-1)^n \frac{f(a, b)}{\varphi(\alpha, \beta)}, \qquad \rho'_1\rho'_2\ldots\rho'_n = (-1)^n \frac{f(a', b')}{\varphi(\alpha, \beta)},$$

et, par suite,

$$\frac{\rho_1\rho_2\ldots\rho_n}{\rho'_1\rho'_2\ldots\rho'_n} = \frac{f(a, b)}{f(a', b')}.$$

Or $\dfrac{\rho_i}{\rho'_i} = \dfrac{x'_i - a}{x'_i - a'}$. Donc,

$$\sum_{i=1}^{i=n} \log \frac{x'_i - a}{x'_i - a'} = \log \frac{\rho_1\rho_2\ldots\rho_n}{\rho'_1\rho'_2\ldots\rho'_n} = \log \frac{f(a, b)}{f(a', b')}.$$

En définitive,

$$\sum_{i=1}^{i=mn} \varpi(x_i, y_i) = \log \frac{f(a, b)}{f(a', b')} + nC.$$

C'est la forme de Clebsch. En particulier, si les points A et A′ sont superposés sur la surface de Riemann, en un point double de $F = 0$, $\Sigma\varpi$ se réduit à une quantité constante.

5. Soient deux courbes fixes $F = 0$ et $F' = 0$ se touchant en un point A simple sur chacune d'elles et ordinaires sur les surfaces de Riemann qui représentent les deux courbes. Soient $I(x, y)$ et $I'(x, y)$ deux intégrales abéliennes respectivement attachées à ces courbes, ayant comme seule singularité et comme pôle le point $A(a, b)$, le résidu étant pour chacune d'elles égal à 1. Coupons les deux courbes par $f = 0$, de degré n, aux points d'abscisses $x_1, \ldots, x_{mn}$ et $x'_1, \ldots, x'_{m'n}$, et formons la différence

$$S = \sum^{i=mn} I(x_i, y_i) - \sum^{i=m'n} I'(x'_i, y'_i).$$

Je dis que S est constant, aux périodes des intégrales près. Il suffit de montrer que S est fini, pour toute position de $f=0$. Or, S est évidemment fini tant que $f=0$ ne passe pas par A. Supposons que cette courbe tende à passer par A. Au voisinage de A, S est la somme d'une fonction régulière T et de l'expression

$$\sum_{i=1}^{i=h} \frac{1}{x_i - a} - \sum_{i=1}^{i=h'} \frac{1}{x'_i - a},$$

les sommations étant étendues aux points de rencontre, infiniment voisins de A. Comme nous l'avons montré, cette expression est finie, quand $f=0$ passe en A, et aussi la différence S, qui est, par suite, constante.

Si A est à l'infini, il suffit, dans la démonstration, de remplacer $x-a$ par $\frac{1}{x}$. Le théorème est indépendant des restrictions relatives aux points de rencontre des courbes fixes avec la droite de l'infini et la parallèle à Oy menée par A.

En particulier, supposons que $F'=0$ soit la tangente en A à $F=0$. Dans ce cas, $\frac{1}{x-a}$ est une intégrale I'. Ainsi la différence

$$S = \sum_{i=1}^{i=mn} I(x_i, y_i) - \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{x'_i - a}$$

est, aux périodes près, constante et de la forme nL, L étant indépendant du degré n de la courbe sécante. C'est le théorème d'Abel relatif à l'intégrale normale de seconde espèce. Voici comment on peut le mettre sous la forme connue. Soient α, β les paramètres directeurs d'une demi-droite portée par la tangente en A, et, μ_i étant un point de rencontre de cette droite avec $f=0$, d'abscisse x'_i, désignons par ρ_i la valeur algébrique du segment $A\mu_i$. Si $\varphi(x,y)$ est l'ensemble des termes du plus haut degré dans $f(x,y)$, ρ est racine de l'équation

$$f(a,b) + \rho(\alpha f'_a + \beta f'_b) + \ldots + \rho^n \varphi(\alpha, \beta) = 0.$$

Par suite,

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{\rho_i} = -\frac{\alpha f'_a + \beta f'_b}{f(a,b)}.$$

Mais, d'autre part, $\frac{1}{\rho_i} = \frac{\alpha}{x'_i - a}$. Donc,

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{x_i - a} = -\frac{f'_a + \frac{\beta}{\alpha} f'_b}{f(a, b)}.$$

Or $\frac{\beta}{\alpha}$ est le coefficient angulaire de la tangente en A, c'est-à-dire b'_a. Le numérateur, dans le second membre, est donc la dérivée de $f(a, b)$, où b est considéré comme fonction de a définie par $F(a, b) = 0$. On a ainsi

$$\sum_{i=1}^{i=mn} I(x_i, y_i) = -\frac{f'(a, b)}{f(a, b)} + nL.$$

6. Plus généralement, soient deux intégrales abéliennes, l'une $J(x, y)$, relative à $F = 0$, l'autre $J'(x, y)$, relative à $F' = 0$, ayant mêmes points singuliers, simples sur chacune des deux courbes et ordinaires sur chacune des surfaces de Riemann qui représentent les deux courbes. En chaque point singulier, la partie principale est la même pour chaque intégrale, de la forme $A \log(x - a)$, si les deux courbes n'ont pas même tangente, $A \log(x - a) + \frac{B}{x - a}$, A pouvant être nul, si la tangente est la même. Si l'un des points singuliers est à l'infini, $x - a$ doit être remplacé par $\frac{1}{x}$.

La différence

$$\sum_{i=1}^{i=mn} J(x_i, y_i) - \sum_{i=1}^{i=m'n} J'(x_i, y_i),$$

où les sommations s'étendent aux points de rencontre des deux courbes et d'une courbe variable $f = 0$, de degré n, reste finie pour toute position de $f = 0$, et, par suite est égale, aux périodes près, à une constante, de la forme nH, H étant indépendant de n.

Il n'est pas nécessaire que $F' = 0$ soit indécomposable. Par exemple, soient $A_1, \ldots, A_r$ les points singuliers de J où la partie principale contient un terme de la forme $A_1 \log(x - a_1), \ldots, A_r \log(x - a_r)$, et prenons la courbe $F' = 0$ réduite aux droites $A_1 A_2, \ldots, A_{r-1} A_r$ et aux tangentes à $F = 0$, aux points singuliers où la partie principale de J contient un terme de la forme $\frac{B_i}{x - a_i}\cdot$ Il existe des nombres $C_1, C_2, \ldots, C_{r-1}$ tels que l'expression

$$C_1 \log \frac{x - a_1}{x - a_2} + C_2 \log \frac{x - a_2}{x - a_3} + \ldots + C_{r-1} \log \frac{x - a_{r-1}}{x - a_r}$$

devienne infinie en $A_1, A_2, \ldots, A_r$, comme $A_1 \log(x - a_1), \ldots, A_r \log(x - a_r)$. On a les égalités

$$C_1 = A_1, \qquad C_2 - C_1 = A_2, \qquad \ldots, \qquad C_{r-1} - C_{r-2} = A_{r-1}, \qquad -C_{r-1} = A_r,$$

compatibles, en vertu de la condition $A_1 + A_2 + \ldots + A_r = 0$. Les C étant ainsi choisis, l'expression

$$\sum_{i=1}^{i=mn} J(x_i, y_i) - \sum C_i \sum_{i=1}^{i=n} \log \frac{x - a_i}{x - a_{i+1}} - \sum B_i \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{x - a_i}$$

se réduit à une quantité constante, de la forme nH, aux périodes près.

7. Au lieu de deux courbes fixes, on peut prendre un contour curviligne formé de courbes algébriques. Par exemple, soient trois courbes $F = 0$, $F' = 0$, $F'' = 0$ formant un triangle $A''A'A$, et coupons ce triangle par $f = 0$, de degré n. Désignons par ϖ une intégrale abélienne relative à $F = 0$, avec les singularités $\log(x - a')$ et $-\log(x - a'')$, aux points $A'(a', b')$ et $A''(a'', b'')$; par ϖ', une intégrale abélienne relative à $F' = 0$, avec les seules singularités $\log(x - a'')$ et $-\log(x - a)$, aux points A'' et $A(a, b)$; par ϖ'', une intégrale abélienne relative à $F'' = 0$, avec les seules singularités $\log(x - a)$ et $-\log(x - a')$, aux points A et A'. L'expression

$$\sum_{i=1}^{i=mn} \varpi(x_i, y_i) + \sum_{i=1}^{i=m'n} \varpi'(x'_i, y'_i) + \sum_{i=1}^{i=m''n} \varpi''(x''_i, y''_i)$$

est constante, aux périodes près. Si, en particulier, les courbes fixes sont des droites, on peut prendre, pour ϖ, ϖ' et ϖ'', $\log \frac{x - a'}{x - a''}$, $\log \frac{x - a''}{x - a}$, $\log \frac{x - a}{x - a'}\cdot$ On obtient ainsi le théorème des transversales, dû à Carnot.

8. Reprenons le théorème d'Abel relatif à l'intégrale normale de troisième espèce. Soit, sur la droite AA′ qui joint les points logarithmiques, une origine fixe ω, d'abscisse c. Si μ_i est un point de rencontre de AA′ avec $f=0$, d'abscisse x'_i, soit r_i le rapport anharmonique des quatre points μ_i, ω, A et A′. On a

$$\log r_i = \log \frac{x'_i - a}{x'_i - a'} - \log \frac{c-a}{c-a'};$$

la relation d'Abel devient ainsi

$$\sum_{i=1}^{i=mn} \varpi(x_i, y_i) = \log \prod_{i=1}^{i=n} r_i + n\left(C - \log \frac{c-a}{c-a'}\right).$$

Pareille modification s'applique à l'intégrale $J(x, y)$, précédemment définie.

On voit ainsi s'introduire le produit des rapports anharmoniques d'un ensemble de points d'une droite avec une origine fixe et deux points fixes de cette droite. M. Humbert a établi, sous une forme métrique, un théorème ayant une signification projective où intervient une telle expression :

Soit une courbe algébrique variable, de degré n, dépendant rationnellement et entièrement d'un paramètre λ. Le produit ΠR_i des n rapports anharmoniques des points de rencontre M_i de la courbe et d'une droite fixe, avec une origine ω fixe et deux autres points fixes A et A′ de cette droite est constant, si, toutes les fois que la courbe passe par A, avec un certain degré de multiplicité, elle passe aussi par A′, avec le même degré de multiplicité.

Soit, en effet,

$$f(x,y,z) \equiv \lambda^m f_m(x,y,z) + \lambda^{m-1} f_{m-1}(x,y,z) + \ldots \\ + \lambda f_1(x,y,z) + f_0(x,y,z) = 0$$

l'équation de la courbe variable.

Soient, dans une représentation propre de la droite, θ, α, α' et γ les paramètres d'un point M, des points A et A′ et du point ω. Si l'on remplace, dans $f(x,y,z)$, x, y, z par leurs expressions en θ sur la droite, $f(x,y,z)$ se change en un polynome de degré n, $F(\theta)$, et l'équation aux θ des points de rencontre de la courbe et de la droite est $F(\theta) = 0$. Posons $\theta = \alpha + t$. L'équation en θ devient l'équation en t

$$F(\alpha) + tF'(\alpha) + \ldots + \frac{t^n}{n!}F^{(n)}(\alpha) = 0.$$

Par suite,

$$\prod_{i=1}^{i=n} (\theta_i - \alpha) = n!(-1)^n \frac{F(\alpha)}{F^{(n)}(\alpha)},$$

et, de même,

$$\prod_{i=1}^{i=n} (\theta_i - \alpha') = n!(-1)^n \frac{F(\alpha')}{F^{n}(\alpha')}.$$

Or, $F^{(n)}(\alpha) = F^{(n)}(\alpha')$. Donc,

$$\prod_{i=1}^{i=n} \frac{\theta_i - \alpha}{\theta_i - \alpha'} = \frac{F(\alpha)}{F(\alpha')} \qquad \text{et} \qquad \prod_{i=1}^{i=n} R_i = \frac{(\gamma - \alpha')^n}{(\gamma - \alpha)^n} \frac{F(\alpha)}{F(\alpha')}.$$

Soient (a, b, c) et (a', b', c') les coordonnées des points A et A'. On a

$$F(\alpha) = f(a, b, c) = \lambda^m f_m(a, b, c) + \ldots + f_0(a, b, c),$$
$$F(\alpha') = f(a', b', c') = \lambda^m f_m(a', b', c') + \ldots + f_0(a', b', c').$$

Par hypothèse, les deux équations en λ,

$$f(a, b, c) = 0 \qquad \text{et} \qquad f(a', b', c') = 0,$$

ont mêmes racines avec le même ordre de multiplicité; le rapport de $f(a, b, c)$ et de $f(a', b', c')$ est par suite indépendant de λ, et ΠR_i est constant.

Plus généralement, supposons que la courbe variable passe constamment par l'un ou l'autre des points A et A', ayant en chacun d'eux un contact d'un ordre donné avec la droite AA'. Le produit ΠR_i, étendu aux points variables, est encore constant si toutes les fois que la courbe variable passe, avec un certain ordre de multiplicité, en un point de plus confondu avec A sur la droite AA', elle passe aussi, avec la même multiplicité, en un point de plus de AA', confondu avec A'.

En particulier, supposons que A et A' soient les points cycliques. Appelons, avec Laguerre, *orientation* du système des directions des points à l'infini M_i, la somme des angles de ces directions avec une direction fixe. On a ainsi le théorème de M. Humbert :

Si une courbe algébrique dépend entièrement d'un paramètre λ, *l'orientation du système de ses directions asymptotiques est constante si, toutes les fois que la courbe passe par un point cyclique, elle passe par l'autre* (1).

Corrélativement, *si l'équation tangentielle d'une courbe algébrique dépend entièrement d'un paramètre* λ, *l'orientation du système des tangentes menées d'un point* O *à cette courbe est constante si, toutes les fois que la courbe touche une droite isotrope du point* O, *elle touche l'autre.*

En particulier, l'orientation des tangentes menées à une courbe variable d'un faisceau tangentiel linéaire par un foyer d'une courbe de ce faisceau est constante (2).

9. Reprenons de même le théorème d'Abel relatif à l'intégrale normale de seconde espèce et donnons une signification projective au second membre de la relation.

Étant donnés sur une droite et, plus généralement, sur une courbe unicursale, n points $M_1, M_2, \ldots, M_n$, de paramètres $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$, et un point A, de paramètre α, soit le point M, dont le paramètre θ est défini par la relation

$$\frac{n}{\theta-\alpha}=\sum_{i=1}^{i=n}\frac{1}{\theta_i-\alpha}.$$

La relation entre les paramètres θ et θ' d'un même point M, dans deux représentations propres différentes, étant homographique, on voit aisément que la définition de M est indépendante de la représentation choisie. Il est clair en outre qu'elle n'est pas altérée par une transformation homographique. Modifiant une dénomination ancienne, nous appellerons le point M le *pôle harmonique de* A *par rapport aux points* $M_1, M_2, \ldots, M_n$. Le pôle harmonique du point à l'infini d'une droite par rapport à plusieurs points de cette droite est le centre des moyennes distances de ces points (3).

(1) HUMBERT, *Sur l'orientation des systèmes de droites* (*American Journal*; 1888).

(2) HUMBERT, *Journal de Mathématiques*; 1887.

(3) PONCELET, *Traité des propriétés projectives des figures*.

Corrélativement, étant données, autour d'un point ou tangentiellement à une courbe unicursale, plusieurs droites de paramètres θ_1, $\theta_2, \ldots, \theta_n$ et une droite de paramètre α, nous appellerons *polaire harmonique* de cette droite, par rapport aux premières, la droite dont le paramètre θ est défini par la relation

$$\frac{n}{\theta-\alpha}=\sum_{i=1}^{i=n}\frac{1}{\theta_i-\alpha}.$$

La définition est encore indépendante de la représentation choisie et se conserve dans une transformation homographique.

Je rappelle ici une proposition de Poncelet (*loc. cit.*) :

Soient dans un plan un système de points $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *et une droite* Δ. *D'un point* M *variable de* Δ, *on mène les droites* $MA_1, \ldots, MA_n$; *la polaire harmonique de* Δ *par rapport au système de ces droites passe par un point fixe*, que nous appellerons *pôle harmonique* de Δ par rapport aux points A. Et corrélativement.

Cela posé, la somme des valeurs de l'intégrale normale de seconde espèce relative à $F=0$, pour les points d'intersection avec $f=0$, ne dépend que de la position du pôle harmonique du point singulier A de l'intégrale par rapport aux points de rencontre de $f=0$ avec la tangente en A à $F=0$.

Voici un cas général où un tel point est fixe :

Étant donnée une courbe algébrique dont l'équation ponctuelle dépend entièrement d'un paramètre λ, *le pôle harmonique d'un point* A *d'une droite, n'appartenant pas à l'enveloppe de la courbe, par rapport aux points de rencontre de la courbe et de la droite, est fixe si, toutes les fois que la courbe passe en* A, *elle est tangente en ce point à la droite.*

Soit, en effet, la courbe

$$f(x,y,z)=\lambda^m f_m(x,y,z)+\lambda^{m-1}f_{m-1}(x,y,z)+\ldots+\lambda_1 f_1+f_0=0.$$

Soient θ le paramètre d'un point M de la droite, α le paramètre de A. L'équation aux θ des points de rencontre de la courbe et de la droite est de la forme

$$F(\theta)=\lambda^m F_m(\theta)+\ldots+\lambda F_1(\theta)+F_0(\theta)=0.$$

La condition de l'énoncé exprime que, si $F(\theta)$ admet comme racine α, $F'(\theta)$ admet aussi comme racine α. On a

$$F'(\theta) = \lambda^m F'_m(\theta) + \ldots + \lambda F'_1(\theta) + F'_0(\theta).$$

Le point A n'étant pas sur l'enveloppe de la courbe, l'équation en λ, $F(\alpha) = 0$, admet m racines distinctes, qui sont aussi racines de l'équation en λ, $F'(\alpha) = 0$. Par suite, le rapport des deux quantités $F(\alpha)$ et $F'(\alpha)$ est indépendant de λ. Or

$$\frac{F'(\alpha)}{F(\alpha)} = \frac{1}{\theta_1 - \alpha} + \ldots + \frac{1}{\theta_n - \alpha},$$

$\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ étant les racines de $F(\theta)$, c'est-à-dire les paramètres des points de rencontre de la courbe avec la droite. Le pôle harmonique du point A par rapport à ces points est, par suite, fixe.

Plus généralement, supposons que la courbe variable ait en A un contact d'ordre donné avec AA'. Le pôle harmonique de A par rapport aux points variables d'intersection de la droite et de la courbe est fixe si, toutes les fois qu'un de ces points vient en A, un second vient aussi en A.

En particulier, supposons que le point A soit à l'infini.

Le centre des moyennes distances des points de rencontre d'une droite et d'une courbe algébrique dont l'équation ponctuelle dépend entièrement d'un paramètre est fixe si, toutes les fois que la courbe a une direction asymptotique parallèle à la droite, elle est asymptote à cette droite, à la condition que l'enveloppe de la courbe n'ait pas de direction asymptotique parallèle à la droite.

Énonçons le théorème corrélatif en supposant que la droite corrélative de A soit à l'infini :

Le centre des moyennes distances des points de contact des tangentes à une courbe dont l'équation tangentielle dépend entièrement d'un paramètre, qui sont parallèles à une direction donnée, décrit une droite parallèle à cette direction si, toutes les fois que la courbe est asymptotique à cette direction, l'asymptote correspondante est la droite de l'infini, à la condition que l'enveloppe de la courbe ne soit pas tangente à la droite de l'infini.

10. La relation d'Abel est illusoire si la courbe variable $f=0$ passe constamment par un point singulier commun aux deux intégrales qui y entrent. D'une manière générale, on peut en lever l'indétermination sans en altérer la forme, en restreignant la variation de la courbe sécante autour du point singulier.

Reprenons, avec les mêmes notations, l'égalité relative à l'intégrale $\varpi(x, y)$. Imaginons que la courbe variable ait une branche simple, infiniment voisine de A, et qu'à la limite, quand cette branche passe en A, la tangente y soit distincte à la fois de la droite AA′ et de la tangente en A à $F=0$. Dans une position infiniment voisine de A, cette branche rencontre AA′ en un seul point μ_1 et $F=0$ en un seul point M_1. La droite $\mu_1 M_1$ rencontre à nouveau $F=0$ en $m-1$ points M′, de coordonnées x'', y''. On a à la fois

$$\varpi(x_1, y_1) + \sum_{i=2}^{i=mn} \varpi(x_i, y_i) = \log \frac{x'_1 - a}{x'_1 - a'} + \sum_{i=2}^{i=n} \log \frac{x'_i - a}{x'_i - a'} + n\,C,$$

$$\varpi(x_1, y_1) + \sum_{i=2}^{i=m} \varpi(x''_i, y''_i) = \log \frac{x'_1 - a}{x'_1 - a'} + C,$$

et, en retranchant membre à membre,

$$\sum_{i=2}^{i=mn} \varpi(x_i, y_i) - \sum_{i=2}^{i=n} \log \frac{x'_i - a}{x'_i - a'} = (n-1)\,C + \sum_{i=2}^{i=m} \varpi(x''_i, y''_i).$$

A la limite, la droite $\mu_1 M_1$ est la tangente en A à $f=0$, et la relation conserve un sens. Si la tangente en A à cette courbe est fixe, le second membre de la relation, et par suite le premier, est invariable. La relation a ainsi une forme analogue à celle de la relation générale. C'est en ce sens que nous dirons que le théorème d'Abel s'applique au cas où, la courbe sécante passant par un point singulier, la tangente en ce point est fixe.

Toutefois, si AA′ est tangent en A à $F=0$, la condition que la tangente en A à $f=0$ soit fixe est inutile. Quelle que soit la direction de cette tangente, non confondue avec AA′, le premier membre de la relation précédente a une valeur constante. Il suffit de montrer que, si

$M'_2, \ldots, M'_m$ sont les points d'intersection d'une droite passant par A avec $F = 0$, $\Sigma\varpi(x''_i, y''_i)$ a une valeur constante. Soit, d'abord, une droite rencontrant AA′ et $F = 0$ en deux points μ_1 et M_1, infiniment voisins de A. On a

$$\varpi(x_1, y_1) + \sum_{i=2}^{i=m} \varpi(x''_i, y''_i) = \log \frac{x'_1 - a}{x'_1 - a'} + C.$$

Au voisinage de A, $\varpi(x_1, y_1)$ a pour partie principale $\log(x_1 - a)$, et le second membre de l'égalité, pour partie principale $\log(x'_1 - a)$. Or le rapport $\frac{x_1 - a}{x'_1 - a}$ a pour limite 1, quantité indépendante de la direction de la droite autour de A. Par suite, à la limite, $\Sigma\varpi(x''_i, y''_i)$ est indépendant de cette direction.

Les résultats précédents subsistent si la courbe présente en A un point d'une multiplicité quelconque.

Supposons que la branche de la courbe $f = 0$ soit tangente à AA′. Dans une position infiniment voisine, elle rencontre $F = 0$ en un point M_1 et AA′ en deux points μ_1 et μ_2. Soit une courbe de degré n, $\varphi = 0$, passant par M_1, μ_1 et μ_2, rencontrant en outre $F = 0$ en $mn - 1$ points $M'(\xi, \eta)$, et AA′ en $n - 2$ points $\mu(\xi', \eta')$. On a

$$\sum_{i=2}^{i=mn} \varpi(x_i, y_i) - \sum_{i=3}^{i=n} \log \frac{x'_i - a}{x'_i - a'} = \sum_{i=2}^{i=mn} \varpi(\xi_i, \eta_i) - \sum_{i=3}^{i=n} \log \frac{\xi'_i - a}{\xi'_i - a'}.$$

A la limite, la relation conserve un sens et les deux courbes $f = 0$ et $\varphi = 0$ ont un contact du second ordre en A. Par suite, la droite AA′ n'étant pas tangente en A à $F = 0$, si $f = 0$ a une branche qui touche AA′ en A, le théorème d'Abel s'applique à cette courbe, si cette branche varie en conservant avec elle-même un contact du second ordre.

Même résultat, si $f = 0$ touche, en A, $F = 0$. Une simplification se présente si A est d'inflexion sur $f = 0$. Une courbe de degré n ayant avec $f = 0$ en A un contact du second ordre est formée de la tangente en A à $F = 0$ et d'une courbe quelconque de degré $n - 1$. Si x'' et y'' sont les coordonnées d'un point de rencontre de la tangente en A avec $F = 0$, on a

$$\sum_{i=3}^{i=mn} \varpi(x_i, y_i) - \sum_{i=2}^{i=n} \log \frac{x'_i - a}{x'_i - a'} = \sum_{i=3}^{i=m} \varpi(x''_i, y''_i) + (n-1)C.$$

Les considérations précédentes s'appliquent encore au cas où les points A et A′ sont superposés, dans deux feuillets de la surface de Riemann, en un point double de $F = 0$.

De même, si $f = 0$ passe constamment par le point singulier A de l'intégrale normale de seconde espèce $I(x, y)$, la différence

$$\sum I(x_i, y_i) - \sum \frac{1}{x'_i - a},$$

où les sommations s'étendent aux points de rencontre variables avec $F = 0$ et avec la tangente en A à $F = 0$, est constante si les tangentes à $f = 0$ en A, distinctes de la tangente en A à $F = 0$, sont fixes.

Toutefois, la restriction est inutile si $F = 0$ admet avec sa tangente en A un contact d'ordre supérieur au premier. Tout revient à démontrer que, si une droite passant par A rencontre $F = 0$ en $m - 1$ autres points $M'(x'', y'')$, la somme

$$\sum_{i=2}^{i=m} I(x''_i, y''_i)$$

a une valeur indépendante de la direction de cette droite. Dans une position infiniment voisine de A, la droite rencontre la tangente en A en μ_1, et la courbe $F = 0$ en M_1, et l'on a

$$I(x_1, y_1) + \sum_{i=2}^{i=} I(x''_i, y''_i) = \frac{1}{x'_1 - a} + C.$$

Mais $I(x_1, y_1)$ a pour partie principale $\frac{1}{x_1 - a}$. Il suffit d'établir que $\frac{1}{x_1 - a} - \frac{1}{x'_1 - a}$ a une limite indépendante de la sécante. Je dis que, si le contact de $F = 0$ avec sa tangente en A est d'ordre supérieur au premier, cette limite est o. Au voisinage de A, sur $F = 0$, on a

$$y - b = A(x - a) + (x - a)^3 \varphi(x - a),$$

A étant le coefficient angulaire de la tangente, φ une fonction régulière au voisinage de $x = a$. L'équation de la sécante étant

$$y - b = \lambda(x - a) + \mu,$$

μ tendant vers o, l'abscisse x_1 du point de rencontre de $F = 0$ et de la droite, voisin de A, satisfait à l'égalité

$$\lambda(x_1 - a) + \mu = A(x_1 - a) + (x_1 - a)^3 \varphi(x_1 - a).$$

L'abscisse x'_1 du point de rencontre de la sécante et de la tangente en A est solution de l'équation

$$\lambda(x'_1 - a) + \mu = A(x'_1 - a).$$

Par suite,

$$(\lambda - A)\left(\frac{1}{x'_1 - a} - \frac{1}{x_1 - a}\right) = \frac{(x_1 - a)^2}{x'_1 - a}\varphi(x_1 - a).$$

Or, $\dfrac{x - a}{x'_1 - a}$ ayant pour limite 1, le second membre a pour limite o. Si λ n'a pas pour limite A, la différence considérée a bien pour limite o.

Le résultat s'applique au cas où $F' = 0$ est d'un degré quelconque et a un contact en A avec $F = 0$ d'ordre supérieur à 1.

III.

11. *Application aux aires.* — L'aire décrite par le rayon qui va de l'origine O au point M de $F = 0$ a pour expression

$$A = \frac{1}{2}\int x\,dy - y\,dx = \frac{xy}{2} - \int y\,dx.$$

C'est une intégrale abélienne relative à $F = 0$.

Si la courbe n'a pas de point de ramification à l'infini, y a, au voisinage d'un des m points à l'infini, un développement de la forme

$$y = cx + d + \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x^2} + \dots.$$

Donc,

$$A = k - dx - 2\alpha \log x + \frac{3\beta}{x} + \dots.$$

A admet donc chaque point à l'infini de $F = o$ comme point singulier, la partie principale étant $-dx - 2\alpha \log x$. Comme elle n'a pas de point singulier à distance finie, c'est une intégrale $J(x, y)$.

Soit une seconde courbe $F' = o$, ayant mêmes points à l'infini que $F = o$, et ayant avec $F = o$ en chacun de ces points un contact du second ordre. L'intégrale A′, relative à $F' = o$, a, en chaque point singulier, même partie principale que A. Donc,

Étant données deux courbes de même degré, ayant mêmes points à l'infini, supposés distincts, et ayant en chacun de ces points un contact du second ordre, la différence entre les sommes des aires décrites par les rayons vecteurs qui vont d'un point fixe aux points de rencontre de chacune d'elles avec une courbe variable $f = o$, de degré n, est constante :

$$\Sigma A_i - \Sigma A'_i = nC.$$

Supposons que $f = o$ passe constamment par un point à l'infini commun à $F = o$ et à $F' = o$, mais que les asymptotes de la courbe variable soient distinctes de l'asymptote commune des courbes fixes. Dans une position infiniment voisine, une branche de $f = o$ rencontre les courbes fixes en deux points d'abscisses x_1 et x'_1, et les termes A_1 et A'_1 sont infiniment grands. Or, les courbes fixes étant tangentes, $\frac{x_1}{x'_1}$ a pour limite 1, et, comme elles ont un contact du second ordre, $x_1 - x'_1$ a pour limite o. Donc, la différence entre les parties principales de A_1 et de A'_1 a pour limite o, quantité indépendante de la position de l'asymptote à la branche de $f = o$. Par suite, *le théorème précédent s'applique aux points de rencontre à distance finie, à la condition qu'aucune asymptote de $f = o$ ne coïncide avec une asymptote de $F = o$ et de $F' = o$.*

En particulier, si les points à l'infini de $F = o$ sont distincts et d'inflexion, on peut prendre comme courbe $F' = o$ l'ensemble des asymptotes de $F = o$; $\Sigma A_i - \Sigma A'_i$ est constant. Or, la somme des aires décrites par les rayons qui vont d'un point fixe à des points variables d'une droite est constante, si le centre des moyennes distances de ces points est fixe. Donc, si le centre des moyennes distances des points de rencontre de $f = o$ avec chacune des asymptotes de $F = o$ est fixe, $\Sigma A'_i$, et, par suite, aussi ΣA_i, est constant. C'est ce qui arrive si, chaque fois que $f = 0$, dépendant entièrement d'un paramètre, a une direction asymptotique commune avec $F = 0$, elle a aussi l'asymptote commune, à la condition que l'enveloppe de $f = 0$ n'ait pas de points à l'infini communs avec $F = 0$. Ainsi :

Soient $F = 0$ *une courbe fixe dont les points à l'infini sont distincts et d'inflexion, et* $f = 0$ *une courbe variable, de degré constant, dont l'équation dépend entièrement d'un paramètre et dont l'enveloppe n'a pas de points à l'infini communs avec* $F = 0$. *La somme des aires décrites par les rayons vecteurs qui joignent un point fixe aux points de rencontre des deux courbes est constante si, toutes les fois que la courbe variable a une direction asymptotique commune avec la courbe fixe, elle a aussi l'asymptote commune.*

Lorsque $f = 0$ passe constamment par un point à l'infini de $F = 0$, la somme précédente étendue aux points de rencontre à distance finie est constante, si, toutes les fois que la courbe a une asymptote commune avec $F = 0$, elle admet cette droite comme asymptote d'inflexion.

On peut supposer que $f = 0$ fasse partie d'un faisceau ponctuel linéaire, et même qu'une courbe de ce faisceau soit formée de la droite double de l'infini et d'une courbe de degré $n - 2$. Les courbes du faisceau ont alors mêmes asymptotes. On obtient ainsi un cas particulier d'un théorème de M. Humbert [1].

12. *Application aux arcs des courbes de direction.* — Une courbe de direction est telle que l'arc de la courbe soit une intégrale abélienne. L'arc a pour expression

$$S = \int \sqrt{1 + y'^2}\, dx,$$

$\sqrt{1 + y'^2}$ étant rationnel en x et y, liés par $F(x, y) = 0$. L'intégrale n'a pas d'autres points singuliers qu'à l'infini.

Sur une branche simple, ayant une asymptote, on a, au voisinage du point à l'infini,

$$y = cx + d + \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x^2} + \ldots.$$

[1] HUMBERT, *Journal de Mathématiques*; 1887.

Si la branche n'est pas isotrope, on a

$$S = \sqrt{1+c^2}x + \frac{\alpha c}{\sqrt{1+c^2}x} + \ldots,$$

et la partie principale, $\sqrt{1+c^2}x$, ne dépend que de c. Donc :

Si deux courbes de direction non circulaires ont mêmes points à l'infini distincts, la différence entre les sommes des arcs décrits sur l'une et sur l'autre par les points de rencontre avec une courbe variable, de degré n, est constante :

$$\Sigma S_i - \Sigma S'_i = n L.$$

En particulier, on peut prendre comme courbe de direction $F' = 0$, l'ensemble des asymptotes de $F = 0$. Par suite :

Si une courbe de direction non circulaire, de degré m, a m asymptotes distinctes, la différence entre la somme des arcs décrits sur la courbe et la somme des segments décrits sur l'ensemble de ses asymptotes par les points de rencontre avec une courbe variable est constante (1).

Si la branche simple est cyclique, on a

$$S = \sqrt{-2\alpha c}\log x + \ldots,$$

en supposant $\alpha \neq 0$. Si $F = 0$ a, sur chaque branche, aux points cycliques, un contact du second ordre avec $F = 0$, les parties principales de S et de S' sont les mêmes. Donc :

Si deux courbes de direction ont mêmes asymptotes, distinctes entre elles, et si les branches cycliques ont un contact du second ordre, la différence entre les sommes des arcs décrits sur l'une et sur l'autre par les points de rencontre avec une courbe variable, de degré n, est constante.

Si $\alpha = 0$, l'intégrale S est régulière au point cyclique, et la branche de courbe est d'inflexion. Il n'est plus nécessaire de supposer que les branches cycliques de $F = 0$ aient un contact du second ordre avec celles de $F' = 0$; il suffit que ces branches soient d'inflexion.

(1) HUMBERT, *loc. cit.*

Si toutes les branches cycliques de $F = 0$ sont d'inflexion, on peut choisir comme courbe $F' = 0$ l'ensemble des asymptotes de $F = 0$. Comme la somme des segments décrits sur une droite isotrope par les points de rencontre avec $f = 0$ est nulle, on a le théorème suivant :

Si une courbe de direction a toutes ses asymptotes distinctes et si ses asymptotes isotropes sont d'inflexion, la différence entre la somme des arcs décrits sur la courbe et la somme des segments décrits sur l'ensemble des asymptotes non isotropes par les points de rencontre avec une courbe variable, de degré n, est constante.

Si $f = 0$ passe constamment par un point singulier non cyclique, la différence entre les sommes des arcs de $F = 0$ et de $F' = 0$ limités aux points de rencontre à distance finie avec $f = 0$ est constante, quand les tangentes au point singulier à $f = 0$ sont fixes, ou quand $F = 0$ et $F' = 0$ ont en ce point un contact du second ordre. Si $f = 0$ passe constamment par un point singulier cyclique, ce point étant logarithmique et les courbes $F = 0$ et $F' = 0$ y étant tangentes, la courbe $f = 0$ peut s'y comporter d'une manière quelconque, sans que la différence précédente cesse d'être constante.

Supposons que $F' = 0$ soit formée des asymptotes de $F = 0$. La somme des segments décrits sur une asymptote non isotrope par les points de rencontre avec $f = 0$ est constante, si leur centre des moyennes distances est fixe. C'est ce qui arrive si, chaque fois que $f = 0$, dépendant entièrement d'un paramètre, admet une direction asymptotique commune avec $F = 0$, elle admet aussi l'asymptote commune, à condition que l'enveloppe de $f = 0$ n'ait pas de direction asymptotique commune avec $F = 0$. *La somme des arcs décrits sur* $F = 0$ *par les points de rencontre avec* $f = 0$ *est constante.*

13. *Application aux angles.* — Soient trois droites OA, OB, OC, passant par l'origine, de coefficients angulaires a, b, c. M, (x, y), étant un point de la courbe $F = 0$, qui ne passe pas par O, soit R le rapport anharmonique des quatre droites OM, OC, OA et OB.

$\operatorname{Log} R$ est une intégrale abélienne, admettant comme points singuliers les points de rencontre de $F = 0$ avec OA et OB. Supposons que chacune de ces droites rencontre $F = 0$ en des points simples, en chacun desquels la tangente soit distincte de la droite et non parallèle à Oy. En un point singulier (x_0, y_0) à distance finie sur OA, la partie principale de l'intégrale est $\log(x - x_0)$. En effet,

$$\log R = \log(y - ax) - \log(y - bx) - \log \frac{c-a}{c-b}.$$

Il suffit de prendre la partie principale du terme $\log(y - ax)$, qui peut s'écrire

$$\log(x - x_0) + \log\left(\frac{y - y_0}{x - x_0} - a\right).$$

Avec les hypothèses faites, le second terme de cette somme est fini, quand M tend vers (x_0, y_0).

De même, en un point (x_1, y_1) singulier sur OB, la partie principale est $-\log(x - x_1)$. Si le point singulier est à l'infini sur OA, la partie principale est $-\log x$; s'il est à l'infini sur OB, elle est $\log x$.

Soit une seconde courbe $F' = 0$ rencontrant, avec les mêmes restrictions, les droites OA et OB aux mêmes points que $F = 0$, et coupons ces deux courbes par $f = 0$, variable. Si M' est un point de $F' = 0$ et si R' est le rapport anharmonique des droites OM', OC, OA et OB,

$$\Sigma \log R - \Sigma \log R',$$

où les sommes s'étendent aux points de rencontre des courbes fixes et de la courbe variable, est constant.

Au lieu d'une courbe indécomposable, on peut prendre, pour $F' = 0$, un ensemble de droites joignant deux à deux les points singuliers situés sur OA et les points singuliers situés sur OB; par exemple, si OA et OB sont imaginaires conjuguées, on joindra, par des droites réelles, les points singuliers imaginaires conjugués.

Par raison de continuité, on peut s'affranchir de toute restriction sur les points de rencontre de OA et de OB avec $F = 0$. Il suffit de joindre un point singulier sur OA à un nombre de points singuliers sur OB égal à l'ordre de multiplicité du point dans l'intersection de OA avec $F = 0$, et inversement. Plus généralement, on peut prendre deux courbes de degré m, $F = 0$ et $F' = 0$, pourvu qu'elles rencontrent les deux droites OA et OB aux mêmes points, avec le même ordre de multiplicité, dans l'intersection de ces droites avec chacune d'elles. $\Sigma \log R_i - \Sigma \log R'_i$ est constant. En coupant par une courbe $f = 0$ formée de droites passant par O, on voit que la différence est nulle.

Supposons que $F = 0$ passe par O, avec une multiplicité quelconque. Si OA et OB ne sont pas tangentes à $F = 0$ en O, le point O n'est pas un point singulier de l'intégrale et n'intervient pas. Plus généralement, il n'intervient pas, comme on le voit par continuité, même lorsqu'il est singulier, si les droites OA et OB rencontrent $F = 0$ chacune en un même nombre de points confondus avec O.

Si $f = 0$ passe constamment par un ou plusieurs points singuliers, la différence $\Sigma \log R_i - \Sigma \log R'_i$, où les sommes sont étendues aux points de rencontre variables, est constante, si les tangentes à $f = 0$ en chaque point singulier sont fixes ou si les deux courbes fixes se touchent.

Supposons que $F' = 0$ soit formée de droites joignant un point singulier sur OA à un point singulier sur OB. Soit $f = 0$ dépendant entièrement d'un paramètre. Si toutes les fois qu'elle passe, avec un certain ordre de multiplicité, par un point singulier sur OA, elle passe, avec la même multiplicité, par le point singulier correspondant sur OB, $\Sigma \log R'_i$ est constant et, par suite, aussi $\Sigma \log R_i$.

Supposons que OA et OB soient les droites isotropes du point O. On a les résultats suivants :

Étant données deux courbes $F = 0$ *et* $F' = 0$, *rencontrant les droites isotropes de* O *aux mêmes points, avec la même multiplicité, la différence des orientations des systèmes de droites qui joignent* O *aux points de rencontre avec chacune des deux courbes d'une courbe variable, de degré donné, est constante.*

L'orientation du système des droites qui joignent O *aux points de rencontre d'une courbe fixe et d'une courbe variable dépendant entièrement d'un paramètre est constante, si, toutes les fois que la courbe variable passe par un point commun à la courbe fixe et à une droite isotrope du point* O, *elle passe par le point imaginaire conjugué, avec le même degré de multiplicité.*

En particulier, si la courbe variable appartient à un faisceau linéaire et s'il existe une courbe du faisceau passant par les points de rencontre, autres que O, des droites isotropes de O avec la courbe fixe, on retrouve un théorème de M. Humbert [1].

14. Supposons que $F = 0$ soit un cercle, que O soit sur ce cercle, OA et OB étant isotropes. Prenons pour OC la tangente en O au cercle. On peut former $F' = 0$ avec la droite de l'infini. Donc :

L'orientation du système des droites qui joignent un point O d'un cercle aux points de rencontre de ce cercle avec une courbe variable non circulaire est égale à l'orientation du système des directions asymptotiques de la courbe variable, les deux orientations étant prises par rapport à la tangente en O au cercle [2].

Si la courbe variable, de degré n, a p branches cycliques imaginaires conjuguées, *la différence entre l'orientation du système des droites qui joignent un point O d'un cercle aux points de rencontre à distance finie du cercle avec la courbe et l'orientation du système des directions asymptotiques non circulaires est constante, si les tangentes à la courbe variable aux points cycliques sont fixes.*

Soient ω le centre du cercle, M un point du cercle, V et W les angles, avec la tangente en O, des droites OM et ωM. A un multiple de π près, $W = 2V + \frac{\pi}{2}$. Par suite, *si l'on coupe une courbe circulaire par un cercle, l'orientation du système des droites qui joignent le centre du cercle aux points d'intersection à distance finie est égale à la double somme des orientations des systèmes des directions asymptotiques non cycliques et des droites qui joignent le centre du cercle aux foyers singuliers réels de la courbe.*

En particulier, soit un cercle de centre ω tangent en deux points M_1 et M_2 à une quartique bicirculaire. Si F_1 et F_2 sont les foyers singuliers réels de la quartique, l'orientation du système des droites ωM_1 et ωM_2 est égale à celle du système des droites ωF_1 et ωF_2; les deux systèmes ont mêmes bissectrices et la perpendiculaire menée par ω sur la corde des contacts est bissectrice des droites ωF_1 et ωF_2. Or, si l'on

---

(1) Humbert, *loc. cit.*
(2) Humbert, *loc. cit.*

regarde la quartique comme l'enveloppe des cercles qui lui sont bitangents, cette droite est la tangente en ω au lieu des centres de ces cercles. Donc, *le lieu de* ω *est une conique ayant pour foyers* F_1 *et* F_2.

Soient deux cercles de la même famille, de centres ω et ω', bitangents à la quartique en M_1, M_2 et M'_1, M'_2. Si I est le point de rencontre des tangentes à la conique précédente, l'orientation du système des quatre droites IM_1, IM_2, IM'_1 et IM'_2 est égale au double de celle du système des droites IF_1 et IF_2. Donc, si N et N′ sont les points de rencontre avec la quartique du cercle de centre I qui passe par M_1 et M_2, NN′ est parallèle à $M'_1M'_2$. Quand, le cercle ω' étant fixe, le cercle ω varie, NN′ est fixe, sinon la quartique aurait un axe de symétrie. De plus, NN′ coïncide avec $M'_1M'_2$. Donc les quatre points M_1, M_2, M'_1 et M'_2 sont sur un même cercle. Par suite, le cercle qui a pour centre le point de rencontre des cordes de contact des cercles ω et ω' et qui est orthogonal à ces deux cercles est orthogonal à un cercle de la famille infiniment voisin de chacun d'eux, et par conséquent à tout cercle de la famille. Ainsi, *les cercles bitangents à la quartique sont orthogonaux à un cercle fixe*.

L'orientation du système des droites qui joignent le centre d'un cercle aux quatre points de rencontre avec une cubique circulaire est égale au double de l'orientation du système formé par la direction asymptotique réelle et la droite qui joint le centre du cercle au foyer singulier. Il en résulte que le lieu des centres des cercles bitangents à la cubique, d'une même famille, est une parabole ayant pour foyer le foyer singulier et dont l'axe est parallèle à la direction asymptotique réelle, et que les cercles sont orthogonaux à un cercle fixe.

Supposons que $F = 0$ soit une cubique circulaire ayant un point double O. On peut prendre pour $F' = 0$ la droite de l'infini. Par suite :

La différence entre l'orientation du système des droites qui joignent le point double aux points de rencontre de la cubique et d'une courbe variable non circulaire et l'orientation du système des directions asymptotiques de cette courbe est constante.

L'orientation du système des droites qui joignent le point double aux points de rencontre de la cubique et d'un cercle variable de centre fixe est constante.

Supposons que $F = 0$ soit une cubique circulaire passant par son foyer singulier O; $F' = 0$ peut être formée de la droite de l'infini. Par suite :

La différence entre l'orientation du système des droites qui joignent le foyer singulier aux points de rencontre de la cubique avec une courbe variable et le double de l'orientation du système des directions asymptotiques de cette courbe variable est constante.

Si la courbe sécante est une droite, on voit que *si l'on prend trois points d'inflexion en ligne droite d'une cubique circulaire qui passe par son foyer singulier, la somme des angles que font les tangentes aux points d'inflexion avec la droite qui les porte est nulle.*

Ce théorème s'applique à la strophoïde.

Supposons que $F = 0$ soit une quartique, admettant les points cycliques comme points doubles d'inflexion et que O soit un foyer singulier. On peut former $F' = 0$ avec la droite de l'infini prise quatre fois. Par suite :

L'orientation du système des droites qui joignent un foyer singulier aux points de rencontre de la quartique et d'une courbe variable et le quadruple de l'orientation du système des directions asymptotiques ont une différence constante.

Ce théorème s'applique à la lemniscate.

Supposons que $F = 0$ soit une cubique ayant un point double O, les tangentes en ce point étant isotropes.

L'orientation du système des droites qui joignent le point double aux points de rencontre de la cubique avec une courbe quelconque, de degré n, est constante, et de la forme nC, à un multiple de π près.

Ce théorème donne la condition nécessaire et suffisante pour que $3n$ points de la cubique soient sur une courbe de degré n. Par $3n - 1$ points de la cubique, on peut, en effet, toujours faire passer une courbe de degré n; autrement dit, une courbe de degré n qui passe par $3n - 1$ points de la cubique ne se décompose pas nécessairement en cette cubique et une courbe de degré $n - 3$.

Voici une démonstration différente de celle de MM. Appell et Goursat [1] :

Soit $N = \frac{n(n+3)}{2}$ le nombre des points qui déterminent une courbe de degré n. Prenons $N - (3n - 1)$ points P arbitraires dans le plan et $3n - 1$ points M sur la cubique. Par les points P et M on peut faire passer au moins une courbe de degré n. Si une telle courbe se décomposait en la cubique et une courbe de degré $n - 3$, on pourrait faire passer une courbe de degré $n - 3$ par les points P. Or le nombre des points P est égal à $\frac{n(n-3)}{2} + 1$, et ainsi supérieur d'une unité au nombre des points qui déterminent une courbe de degré $n - 3$. C'est donc impossible.

Si $f = 0$ passe par le point double O de la cubique, l'orientation du système des droites qui joignent le point O aux points de rencontre de la courbe et de la cubique, autres que O, est constante, si les tangentes en O à $f = 0$ sont fixes et non isotropes.

Si $f = 0$ admet O comme point double, les droites isotropes de O étant tangentes d'inflexion, l'orientation du système des droites qui joignent O aux $3n - 6$ points de rencontre variables avec la cubique est constante et égale à $n - 2$ fois l'orientation du système des droites qui vont de O aux points de rencontre de la cubique avec une droite quelconque. Par ces points, on peut faire passer, par suite, une courbe de degré $n - 2$.

15. En transformant les théorèmes généraux précédents par polaires réciproques, par rapport à un cercle de centre O, on obtient divers théorèmes énoncés par Laguerre sans démonstration [2], établis et complétés par M. Humbert. Je les énoncerai sous une forme un peu plus générale.

Les deux systèmes de tangentes respectivement communes à deux courbes homofocales et à une courbe algébrique quelconque ont même orientation (Laguerre).

---

(1) APPELL et GOURSAT, *Théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales.*

(2) LAGUERRE, *Comptes rendus;* 1865. — *Société philomathique;* 1870.

En particulier, *l'orientation du système des tangentes communes à deux courbes est égale à l'orientation du système des tangentes menées à l'une par les foyers de l'autre.*

L'orientation du système des tangentes communes à une courbe fixe et à une courbe variable dont l'équation tangentielle dépend entièrement d'un paramètre, de classe donnée n, est constante si, toutes les fois que la courbe variable touche une tangente isotrope à la courbe fixe, elle touche la tangente isotrope imaginaire conjuguée, avec le même degré de multiplicité.

En particulier, *l'orientation du système des tangentes communes à une courbe fixe et à une courbe variable d'un faisceau tangentiel linéaire est constante, si chaque foyer de la courbe fixe est foyer d'une courbe du faisceau.*

Plus particulièrement encore, *les deux systèmes de tangentes respectivement communes à deux courbes algébriques de même classe et à une courbe algébrique quelconque ont même orientation si, parmi les courbes du faisceau tangentiel déterminé par les deux premières, il en est une qui admette pour foyers tous les foyers de la dernière* (M. Humbert).

Supposons que la courbe fixe soit de classe m et admette la droite de l'infini comme tangente double aux points cycliques, le contact étant, en chaque point, d'ordre $m-1$. Ce cas a été étudié par M. Humbert (1).

L'orientation du système des tangentes communes à la courbe fixe et à une courbe variable, de classe n, est constante.

Si $m=3$, la courbe fixe est l'hypocycloïde à trois rebroussements. Le théorème donne alors la condition nécessaire et suffisante pour que $3n$ tangentes à l'hypocycloïde soient tangentes à une courbe de classe n.

En particulier, si $n=1$, *l'orientation du système des tangentes menées d'un point quelconque à une hypocycloïde à trois rebroussements est constante.*

Ce théorème permet d'établir, par une voie différente de celle de Cremona (2), les propriétés élémentaires de l'hypocycloïde. On voit, en

(1) Humbert, *American Journal*; 1888.

(2) Cremona, *Journal de Crelle*; 1864.

particulier, que la développée d'une hypocycloïde est une hypocycloïde. Par suite, on peut mener d'un point trois normales à une hypocycloïde, et l'orientation du système de ces normales est constante. Or, les tangentes de rebroussement sont concourantes et normales à la courbe. Donc, les orientations, par rapport à une même droite Δ, de trois tangentes concourantes et de trois normales concourantes sont égales. Soit L leur valeur commune, à un multiple de π près.

L'orientation du système des quatre tangentes à distance finie communes à une parabole et à la courbe est constante, si l'axe de la parabole est parallèle à une direction fixe. Si V est l'angle d'une tangente commune avec la direction Δ et W l'angle de l'axe de la parabole avec Δ, on a

$$V_1 + V_2 + V_3 + V_4 - W = L.$$

Or les tangentes à l'hypocycloïde aux quatre points d'intersection de la courbe avec une droite D sont tangentes à une parabole dont l'axe est perpendiculaire à D. Soit U l'angle de D avec la droite-origine Δ. On a

$$V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = U + L + \frac{\pi}{2}.$$

Si U est constant, le premier membre est constant. Donc :

L'orientation du système des tangentes à l'hypocycloïde aux points de rencontre avec une droite D *est constante, si* D *se déplace parallèlement à elle-même.*

Si D est normale à la courbe, une des quatre tangentes est perpendiculaire à la droite; par exemple, $V_4 = \frac{\pi}{2} + U$. Donc :

$$V_1 + V_2 + V_3 = L.$$

Ainsi, *les tangentes à l'hypocycloïde aux points de rencontre avec une normale à la courbe, autres que le pied de la normale, sont concourantes.*

Ce théorème est connu. Voici d'autres résultats :

Si six tangentes à une hypocycloïde sont tangentes à une même conique, les six normales aux points de contact sont tangentes à une même conique.

Si l'on considère quatre tangentes à la courbe et les quatre normales aux points de contact, les axes des paraboles tangentes respectivement aux quatre tangentes et aux quatre normales sont parallèles.

Les six tangentes communes à une hypocycloïde à trois rebroussements et à une hypocycloïde à quatre rebroussements sont tangentes à une même conique.

16. *Application aux distances.* — Soit OA une droite passant par l'origine O, de coefficient angulaire a, rencontrant la courbe $F=0$, de degré m, qui ne passe pas par O, en m points distincts et non de ramification. Si m est le coefficient angulaire de la droite qui joint O au point $M(x, y)$ de la courbe, $\frac{1}{m-a}$ est une intégrale abélienne, dont les seules singularités sont les points de rencontre de OA avec la courbe.

Soit (x_0, y_0) un point singulier. On a $y_0 = ax_0$ et, par suite,

$$I = \frac{1}{m-a} = \frac{x}{y-y_0-a(x-x_0)}, \qquad \text{d'où} \qquad (x-x_0)I = \frac{x}{\frac{y-y_0}{x-x_0}-a}.$$

Ainsi, $(x-x_0)I$ a pour limite $\frac{x_0}{y'_{x_0}-a}$, pour $x=x_0$. Le point (x_0, y_0) est un pôle simple de I, la partie principale étant de la forme $\frac{B}{x-x_0}$, où B ne dépend que de la direction de la tangente au point singulier. Si le point est à l'infini, on a $\frac{I}{x} = \frac{1}{y-ax}$. Par suite, $\frac{I}{x}$ a une limite, et I a pour partie principale Bx, B ne dépendant que de la position de l'asymptote.

Soit une seconde courbe $F'=0$, de degré m, rencontrant OA aux mêmes points que $F=0$, et admettant en chacun de ces points la même tangente. Si m' est le coefficient angulaire de la droite qui joint O à M', sur $F'=0$, $\sum\frac{1}{m-a} - \sum\frac{1}{m'-a}$, où les sommations s'étendent aux points de rencontre des deux courbes fixes avec une courbe variable $f=0$, de degré n, est constant. En coupant par un système de n droites passant par O, on voit que cette quantité est nulle.

Il en résulte que la polaire harmonique de OA, par rapport aux droites qui joignent O aux points de rencontre de $F = 0$ et de $f = 0$, ne change pas quand on remplace $F = 0$ par une courbe qui touche $F = 0$ en chacun de ses points de rencontre avec OA. Le résultat est indépendant de la position de O sur OA. Par suite :

Le pôle harmonique d'une droite qui rencontre une courbe de degré m en m points distincts par rapport aux points de rencontre de cette courbe avec une courbe de degré n ne change pas quand on remplace la première courbe par une autre qui la touche en ses points de rencontre avec la droite.

Par raison de continuité, le théorème subsiste lorsque OA rencontre $F = 0$ en des points multiples, où les tangentes sont distinctes et différentes de OA.

Si OA est la droite de l'infini, on a un théorème de Liouville :

Le centre des moyennes distances des points communs à deux courbes algébriques reste fixe si l'une d'entre elles varie en restant asymptote à elle-même.

En particulier, on peut prendre comme courbe $F' = 0$ l'ensemble des asymptotes de $F = 0$. Supposons que $f = 0$ dépende entièrement d'un paramètre et que, toutes les fois qu'elle admet une direction asymptotique commune avec $F = 0$, elle admette aussi l'asymptote commune. Si l'enveloppe de la courbe $f = 0$ n'a pas de direction asymptotique commune avec $F = 0$, le centre des moyennes distances des points de rencontre de $f = 0$ avec une asymptote de $F = 0$ est fixe. Par suite :

Le centre des moyennes distances des points de rencontre d'une courbe fixe et d'une courbe dépendant entièrement d'un paramètre, et dont l'enveloppe n'a pas de direction asymptotique commune avec la courbe fixe, est un point fixe, si, toutes les fois que la courbe variable admet une direction asymptotique commune avec la courbe fixe, elle admet l'asymptote commune.

En supposant que la courbe fasse partie d'un faisceau ponctuel linéaire, on obtient un théorème de M. Humbert.

Si $f = 0$ passe constamment par un point à l'infini commun à $F = 0$ et à $F' = 0$, de façon à n'avoir en ce point aucune asymptote commune avec chacune de ces deux courbes, la différence entre les sommes des abscisses des points de rencontre à distance finie est constante, si les tangentes à $f=0$ en ce point sont fixes ou si $F=0$ et $F'=0$ ont un contact du second ordre. Par suite, le segment qui joint les centres des moyennes distances des points de rencontre à distance finie de $f=0$ avec les courbes fixes est constant en grandeur et en direction, et même ces deux points coïncident si $f=0$ ne passe que par des points à l'infini où les deux courbes fixes aient un contact du second ordre.

Voici des applications aux cubiques circulaires et aux quartiques bicirculaires :

Le centre des moyennes distances des quatre points de rencontre d'une cubique circulaire (ou d'une quartique bicirculaire) avec un cercle qui reste concentrique à lui-même décrit une droite.

Le centre des moyennes distances des quatre points de rencontre à distance finie d'une quartique admettant les points cycliques comme points doubles d'inflexion et d'un cercle passant par les deux foyers singuliers réels de la quartique est le milieu du segment qui joint ces deux foyers.

17. Supposons que O soit sur $F=0$. Si OA n'est pas tangente en ce point à la courbe, le point O n'est pas singulier et n'intervient pas. Si OA touche la courbe au point O supposé simple, le point O est un pôle simple de l'intégrale, et les parties principales de $\frac{1}{m-a}$ et de $\frac{1}{m'-a}$ sont les mêmes, si $F=0$ et $F'=0$ ont en O un contact du second ordre. La différence $\sum\frac{1}{m-a}-\sum\frac{1}{m'-a}$ est encore égale à o.

Supposons que O soit de rebroussement et que OA soit la tangente. C'est la dégénérescence du cas où les droites OA et OB qui portent les points singuliers de l'intégrale $\log R$ sont les tangentes à la courbe au point double O. Le point O, singulier pour l'intégrale, n'intervient pas.

En particulier, supposons que, $F=0$ étant de degré m, le point O soit de rebroussement et que la tangente rencontre la courbe en m points confondus en O. *La polaire harmonique de la tangente de rebroussement par rapport au système des droites qui joignent le point* O *aux points de rencontre de la courbe fixe avec une courbe variable est fixe.*

Ce théorème s'applique, en particulier, à la cubique à rebroussement. Corrélativement, *le pôle harmonique du point d'inflexion d'une cubique à rebroussement par rapport au système des points de rencontre avec la tangente d'inflexion des tangentes communes à la cubique et à une courbe quelconque est fixe, à l'intersection de la tangente d'inflexion et de la tangente de rebroussement.*

18. *Application aux courbes unicursales.* — Soient, sur une courbe unicursale $F = 0$, de degré m, t le paramètre d'un point M, α et α' les paramètres des points $A(a, b)$ et $A'(a', b')$. L'expression $\log \frac{t-\alpha}{t-\alpha'}$ est une intégrale abélienne, singulière aux seuls points A et A', comme $\log(x - a)$ et $-\log(x - a')$. De même, soient, sur la droite AA', u le paramètre d'un point m, β et β' les paramètres de A et de A'; $\log \frac{u-\beta}{u-\beta'}$ est une intégrale abélienne, singulière aux seuls points A et A', comme $\log(x - a)$ et $-\log(x - a')$.

Par suite, si l'on coupe $F = 0$ et AA' par une courbe $f = 0$ en des points M et m, on a

$$\sum_{i=1}^{i=mn} \log \frac{t-\alpha}{t-\alpha'} - \sum_{i=1}^{i=n} \log \frac{u-\beta}{u-\beta'} = n\,\mathrm{C}.$$

Soient une origine C sur $F = 0$ et une origine c sur AA' et désignons par R le rapport anharmonique des quatre points M, C, A, A' sur la courbe, par r celui des quatre points m, c, A et A'. On a la relation

$$\prod_{i=1}^{i=mn} \mathrm{R} = \mathrm{U}^n \prod_{i=1}^{i=n} r,$$

U étant constant.

Si A et A' sont confondus en un point double de $F = 0$, la relation se réduit à $\Pi \mathrm{R} = \mathrm{U}^n$. C'est un résultat dû à Clebsch.

Supposons que $F = 0$ soit une conique. Si c est le point de rencontre avec AA' de la tangente en C à la conique, $\mathrm{U} = 1$, et la relation devient

$$\prod_{i=1}^{i=2n} \mathrm{R} = \prod_{i=1}^{i=n} r.$$

Si $f = 0$ est elle-même une conique, on a $\mathrm{R}_1\mathrm{R}_2\mathrm{R}_3\mathrm{R}_4 = r_1 r_2$; la relation donne alors la condition nécessaire et suffisante pour que quatre points de $\mathrm{F} = 0$ et deux points de AA' soient sur une conique.

Supposons que la conique $\mathrm{F} = 0$ soit une ellipse et que AA' soit la droite de l'infini. Prenons pour origine C le sommet situé sur la partie positive de l'axe focal et posons $\mathrm{R} = e^{i\varphi}$; φ est l'anomalie excentrique du point M. Si φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 sont les anomalies des quatre points de rencontre de l'ellipse avec une conique variable dont les points à l'infini sont fixes, $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4$ est constant. Si ces points sont à l'infini sur les axes de l'ellipse, la somme est égale à $(2k+1)\pi$. Ainsi, la somme des anomalies des pieds des quatre normales menées d'un point à une ellipse est égale à $(2k+1)\pi$. De même, la somme des anomalies de quatre points d'une ellipse situés sur un cercle est égale à $2k\pi$.

Considérons un triangle variable ABC, inscrit dans $\mathrm{F} = 0$, circonscrit à une conique fixe et, par suite, conjugué par rapport à une autre conique fixe Γ. Soient $\alpha\beta\gamma$ une position du triangle mobile, I et J les points de rencontre de Γ avec $\beta\gamma$, ω le point où la tangente en α à $\mathrm{F} = 0$ rencontre $\beta\gamma$. Il existe une conique passant par A, B, C, α et touchant $\beta\gamma$ en I. Soient R_1, R_2, R_3 les rapports anharmoniques $(\mathrm{A}, \alpha, \beta, \gamma)$, $(\mathrm{B}, \alpha, \beta, \gamma)$, $(\mathrm{C}, \alpha, \beta, \gamma)$ et r celui des quatre points m, ω, β, γ. On a $\mathrm{R}_1\mathrm{R}_2\mathrm{R}_3 = r^2 =$ constante. On obtient une seconde relation en choisissant un autre côté du triangle $\alpha\beta\gamma$.

Soient a, b, c, u_1, u_2, u_3 les paramètres des points A, B, C, α, β, γ. On a ainsi

$$\begin{aligned} & \frac{(a-u_1)(b-u_1)(c-u_1)}{m} \\ = & \frac{(a-u_2)(b-u_2)(c-u_2)}{n} \\ = & \frac{(a-u_3)(b-u_3)(c-u_3)}{p}, \end{aligned}$$

m, n et p étant constants. Par suite, si a', b', c' sont les paramètres des sommets A′, B′, C′ d'un autre triangle, on a

$$\begin{aligned}&\frac{(a-u_1)(b-u_1)(c-u_1)}{(a'-u_1)(b'-u_1)(c'-u_1)}\\&=\frac{(a-u_2)(b-u_2)(c-u_2)}{(a'-u_2)(b'-u_2)(c'-u_2)}\\&=\frac{(a-u_3)(b-u_3)(c-u_3)}{(a'-u_3)(b'-u_3)(c'-u_3)}.\end{aligned}$$

Posons

$$g(u)=(u-a)(u-b)(u-c),\qquad h(u)=(u-a')(u-b')(u-c').$$

Les quantités u_1, u_2, u_3 sont racines d'une équation de la forme $g(u)-\lambda h(u)=0$, où λ varie quand, ABC et A′B′C′ restant fixes, $\alpha\beta\gamma$ varie.

Dans le raisonnement précédent, supposons que β et γ soient les points cycliques. On a le théorème suivant :

On considère les triangles ABC *circonscrits à une parabole et inscrits dans un cercle passant par le foyer de la parabole. L'orientation du système des droites qui joignent le foyer aux sommets de chacun de ces triangles est constante.*

Voici des applications à l'hypocycloïde à trois rebroussements, qui est une courbe unicursale. Soient I et J les points cycliques. Comme d'un point de la droite de l'infini on ne peut mener qu'une tangente à la courbe, le rapport anharmonique des quatre points M, C, I, J sur la courbe est égal à celui des points *m*, *c*, où les tangentes en M et C rencontrent la droite de l'infini, et des points I et J. Par suite :

Si l'on coupe une hypocycloïde à trois rebroussements par une courbe de degré n, la différence entre l'orientation du système des tangentes à l'hypocycloïde aux points d'intersection et l'orientation du système des directions asymptotiques de la courbe sécante est constante.

La droite de l'infini étant tangente à la courbe aux points I et J, le théorème subsiste, relativement aux points à distance finie et aux directions asymptotiques non isotropes, lorsque la courbe variable passe par I et J. Par exemple, *l'orientation du système des tangentes à l'hypocycloïde aux six points de rencontre à distance finie de l'hypocycloïde* *avec un cercle est constante*. En coupant par le cercle des rebroussements, on voit que cette orientation est le double de celle de trois tangentes concourantes. Par suite, *les six tangentes (et aussi les six normales) à l'hypocycloïde aux points de rencontre à distance finie avec un cercle sont tangentes à une conique*.

19. Soient, sur une courbe unicursale $F = 0$, de degré m, t le paramètre d'un point M, α celui du point $A(a, b)$. L'expression $\frac{1}{t-\alpha}$ est une intégrale abélienne, admettant le point A comme pôle simple. De même, soient, sur la tangente en A, u le paramètre d'un point m, β celui du point A; $\frac{1}{u-\beta}$ est une intégrale abélienne, admettant le point A comme pôle simple.

Par suite, si l'on coupe $F = 0$ et la tangente en A par une courbe $f = 0$ en des points M et m, on a

$$\sum_{i=1}^{i=mn} \frac{1}{t-\alpha} - \Lambda \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{u-\beta} = n\mathrm{L},$$

Λ étant le rapport des résidus des deux intégrales au point A.

Si A est un point de rebroussement de $F = 0$, la tangente en ce point doit être regardée comme indéterminée, et Λ est nul. On obtient ainsi un résultat de Clebsch.

S'il existe des droites variables rencontrant $F = 0$ en un seul point mobile M et, par suite, en un seul point fixe O, on peut prendre comme paramètre t celui de la droite OM et comme paramètre u celui de la droite Om. Alors A a même paramètre sur la courbe et sur la tangente, et les résidus des deux intégrales en A sont égaux; Λ est égal à 1. On obtient une forme particulière d'un résultat précédemment établi.

Supposons que $F = 0$ soit une conique. On peut prendre comme paramètre t celui de la droite AM autour de A. Si l'on suppose que la tangente en A soit la droite de l'infini, on voit que *le centre des moyennes distances des points de rencontre d'une parabole fixe avec une courbe variable dont les directions asymptotiques sont fixes décrit une droite parallèle à l'axe de la parabole*.

Si la courbe variable passe par le point à l'infini de la parabole, le théorème subsiste, à condition que les asymptotes en ce point soient fixes et distinctes de la droite de l'infini.

Si les directions asymptotiques de $f = 0$ sont toutes isotropes, par symétrie, la droite précédente est l'axe de la parabole. Par exemple, *le centre des moyennes distances des points de rencontre d'une parabole avec un cercle, une quartique bicirculaire, une hypocycloïde à trois rebroussements est sur l'axe de la parabole.*

De même, les pieds des normales menées d'un point à une parabole étant sur une hyperbole équilatère admettant l'axe comme asymptote, leur centre des moyennes distances est sur l'axe.

Soit v le paramètre du point N de contact de la tangente à la conique menée par le point m situé sur la tangente en A. On a

$$\frac{2}{v-\alpha} = \frac{1}{u-\alpha} + \mathrm{L}.$$

Par suite, la courbe $f = 0$ rencontrant la conique et la tangente en des points M et m, on a

$$\sum_{i=1}^{i=2n} \frac{1}{t-\alpha} = 2\sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{v-\alpha}.$$

Ainsi, *le pôle harmonique du point* A *par rapport au système des points* M *coïncide avec celui du point* A *par rapport au système des points* N.

Si $f = 0$ admet le point A comme point multiple d'ordre μ, les μ tangentes en ce point étant distinctes de la tangente en A à la conique et rencontrant cette conique en μ points P, *le pôle harmonique du point* A *par rapport au système des points* M *coïncide avec celui du point* A *par rapport au système des points* N, *comptés deux fois, et des points* P.

Ces théorèmes admettent des énoncés corrélatifs. En particulier, *le centre des moyennes distances des points de contact avec une parabole des tangentes communes à cette parabole et à une hypocycloïde à trois rebroussements est à égale distance de l'axe de la parabole et de la tangente à l'hypocycloïde qui est parallèle à cet axe.*

Le centre de gravité du triangle formé par les trois tangentes communes à deux paraboles coïncide avec le centre de gravité du triangle formé par les deux tangentes à ces paraboles parallèles à leurs axes et la droite qui joint les points de contact.

Reprenons, avec les mêmes notations, un triangle variable ABC inscrit dans $F = 0$ et circonscrit à une conique fixe. Supposons que α soit un point commun à ces deux coniques; le triangle $\alpha\beta\gamma$ s'aplatit, et les points β et γ se confondent avec le point où la tangente en α à la seconde conique rencontre $F = 0$. Ce point I est sur la conique Γ, conjuguée aux triangles ABC. Le troisième côté du triangle $\alpha\beta\gamma$ est la tangente en I à $F = 0$, laquelle rencontre Γ en J. Il existe une conique passant par A, B, C, α et tangente en J à IJ. Si u_1, u_2, u_3 sont les paramètres de A, B, C sur $F = 0$, a le paramètre de I, α celui de α, b celui du point de contact de la seconde tangente menée de J à $F = 0$,

$$\frac{1}{u_1 - a} + \frac{1}{u_2 - a} + \frac{1}{u_3 - a} + \frac{1}{\alpha - a} = \frac{4}{b - a}.$$

Ainsi, *le pôle harmonique d'un point commun à deux coniques par rapport au système des trois sommets d'un triangle inscrit dans la première et conjugué à la seconde est fixe.*

Soit A le point d'inflexion d'une cubique à rebroussement. On peut prendre, comme paramètre t du point M de la courbe, celui du point m où la tangente en M rencontre la tangente d'inflexion. Le point A a ainsi même paramètre α sur la courbe et sur la tangente. Proposons-nous de calculer le rapport des résidus de l'intégrale $\frac{1}{t - \alpha}$ sur la cubique et sur la tangente.

Prenons le point A comme origine, la tangente en A comme axe des x, pour paramètre du point m son abscisse x. La partie principale de $\frac{1}{t - \alpha}$ au voisinage de l'origine sur la tangente est $\frac{1}{x}$. L'équation de la cubique au voisinage de l'origine est $y = Ax^3$, A étant une fonction finie et non nulle à l'origine. L'abscisse ξ du point m où la tangente en M, d'abscisse x, rencontre l'axe des x est égale à $\frac{xy' - y}{y'}$, et l'intégrale $\frac{1}{t - \alpha}$ sur la cubique est $\frac{y'}{xy' - y}$. On a

$$\frac{x}{\xi} = \frac{xy'}{xy' - y} = \frac{3Ax^3 + A'x^4}{2Ax^3 + A'x^4}.$$

Ainsi, la partie principale de $\frac{1}{t - \alpha}$ sur la cubique est $\frac{3}{2x}$.

La relation entre les points de rencontre de la cubique et de la tangente d'inflexion avec $f = 0$ devient

$$\sum_{i=1}^{i=3n} \frac{1}{t-\alpha} = \frac{3}{2} \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{u-\alpha} + n\mathrm{L}.$$

Si β est le paramètre du point de rebroussement, $\mathrm{L} = \dfrac{3}{2(\beta-\alpha)}$.

Soient I le point de rencontre des tangentes d'inflexion et de rebroussement, M le pôle harmonique de A par rapport aux points de rencontre de la cubique et de $f = 0$, m celui de A par rapport aux points de rencontre de la courbe et de la tangente d'inflexion. *Les points* I *et* m *sont conjugués harmoniques par rapport au point* A *et au point où la tangente en* M *rencontre la tangente d'inflexion.*

20. *Application aux courbes gauches.* — Soient deux courbes passant par un point simple $\mathrm{A}(a, b, c)$, avec une tangente non parallèle au plan YOZ. Si $x_1, x_2, \ldots, x_h$ et $x'_1, x'_2, \ldots, x'_{h'}$ sont les abscisses des points, voisins de A, de rencontre des deux courbes fixes avec une surface variable tendant à passer par A, le rapport

$$\frac{(x_1-a)\ldots(x_h-a)}{(x'_1-a)\ldots(x'_{h'}-a)}$$

a une limite non nulle. En effet, par les deux courbes on peut faire passer une surface algébrique fixe, rencontrant la surface en une courbe variable, laquelle passe par les points de rencontre de cette surface avec les deux courbes données. Si l'on projette ensuite les deux courbes fixes et la courbe variable, sur XOY, parallèlement à OZ, on est ramené à une proposition déjà établie.

Si les deux courbes fixes ont même tangente en A, non parallèle à YOZ, la différence $\displaystyle\sum_{i=1}^{i=h} \frac{1}{x-a} - \sum_{i=1}^{i=h'} \frac{1}{x'-a}$ a une limite, quand la surface variable tend à passer par A.

Si le point A est à l'infini et non de ramification, on remplace $x - a$ par $\dfrac{1}{x}$.

Soient $\mathrm{J}(x, y, z)$ et $\mathrm{J}'(x, y, z)$ deux intégrales abéliennes respectivement attachées à deux courbes gauches ayant, en leurs points de rencontre, des singularités de la forme $A \log(x - a)$, si les courbes ne se touchent pas, et de la forme $A \log(x-a) + \frac{B}{x-a}$, si ces courbes se touchent, les parties principales en chaque point ayant mêmes coefficients. La différence

$$\sum_{i=1}^{i=mn} J(x_i, y_i, z_i) - \sum_{i=1}^{i=m'n} J(x'_i, y'_i, z'_i),$$

où les sommations sont étendues aux points de rencontre des deux courbes avec une surface de degré n, est constante et de la forme nC, aux périodes près.

Si la surface passe constamment par un point singulier, la différence des sommes précédentes, étendues aux points de rencontre variables, est constante, si le plan tangent à la surface au point singulier passe par une droite fixe et, en particulier, s'il est fixe. La restriction est inutile, lorsqu'en un point singulier où la partie principale est de la forme $A \log(x-a)$, les deux courbes sont tangentes, et lorsqu'en un point singulier où elle est de la forme $A \log(x-a) + \frac{B}{x-a}$, les deux courbes ont un contact du second ordre.

Soit, sur une courbe gauche, une intégrale $\varpi(x, y, z)$ singulière aux seuls points A et A′ comme $\log(x-a)$ et $-\log(x-a')$. Si $f(x, y, z) = 0$ est l'équation de la surface variable, on a

$$\sum_{i=1}^{i=mn} \varpi(x_i, y_i, z_i) = \log \frac{f(a, b, c)}{f(a', b', c')} + nC.$$

Soit $I(x, y, z)$ une intégrale singulière au seul point A comme $\frac{1}{x-a}$. On a

$$\sum_{i=1}^{i=mn} I(x_i, y_i, z_i) = \frac{f'(a, b, c)}{f(a, b, c)} + nL.$$

21. Soit une courbe gauche de direction. L'intégrale

$$S = \int \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}\, dx$$

est abélienne, n'ayant de points singuliers qu'à l'infini. Si M s'éloigne sur une branche simple, ayant une asymptote, on a

$$y = cx + d + \frac{\alpha}{x} + \ldots, \qquad z = c'x + d' + \frac{\alpha'}{x} + \ldots,$$

et, si la branche n'est pas isotrope, la partie principale de S est

$$\sqrt{1 + c^2 + c'^2}\, x.$$

Donc :

Si deux courbes gauches de direction non circulaires ont mêmes points à l'infini distincts, la différence entre les sommes des arcs décrits par les points de rencontre avec une surface variable est constante et proportionnelle au degré de la surface.

Si la branche est isotrope, la partie principale de S est

$$\sqrt{-2(\alpha c + \alpha' c')}\log x$$

et ne change pas si la courbe varie en conservant avec elle-même un contact du second ordre. Donc :

Si deux courbes de direction ont les mêmes asymptotes et si les branches isotropes ont un contact du second ordre, la différence précédente est constante.

22. Je n'insiste pas sur l'application à l'intégrale $\log R$, où R est le rapport anharmonique de quatre plans passant par une même droite dont un seul mobile passe par un point variable de la courbe, et à l'intégrale $\frac{1}{m - a}$, où m est le paramètre du plan qui joint une droite fixe à un point de la courbe.

En particulier, on obtient un théorème, énoncé différemment par Liouville (*loc. cit.*) : *Le centre des moyennes distances des points de rencontre d'une courbe gauche avec une surface variable coïncide avec le centre des moyennes distances des points de rencontre de cette surface avec les asymptotes de la courbe.*

Le centre des moyennes distances des points de rencontre d'une sphère *de centre fixe avec une cubique circulaire ou avec une quartique dont deux ou quatre points à l'infini sont cycliques décrit une droite.*

23. Soient une cubique gauche Γ et une droite Δ s'appuyant en deux points A et A' sur la courbe. Prenons sur Γ une origine C et sur la droite, comme origine c, le point où le plan osculateur en C rencontre Δ. Soient R le rapport anharmonique (MCAA') sur la cubique, r le rapport anharmonique (mcAA') sur la droite. Si une surface S, de degré n, rencontre Γ et Δ en des points M et m,

$$\prod_{i=1}^{i=mn} \mathrm{R}_i = \prod_{i=1}^{i=n} r_i.$$

Proposons-nous de trouver les relations qui existent entre les paramètres des quatre sommets d'un tétraèdre variable inscrit dans Γ et conjugué à une quadrique (Q).

Soit AA'A''A''' une position de ce tétraèdre. Désignons par (q) la conique d'intersection du plan AA'A'' et de (Q), par I et J les points d'intersection de AA' et de (q). Soit $\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2\mathrm{M}_3\mathrm{M}_4$ une position du tétraèdre mobile. Les quadriques qui passent par les six points M_1, M_2, M_3, M_4, A'' et A''' rencontrent AA' suivant des couples de points variant dans une involution, dont les points doubles sont I et J. Par suite, il existe une quadrique S passant par ces six points et tangente en I à AA'. Soient ρ et ρ' les rapports anharmoniques (A''CAA') et (A'''CAA'), r le rapport anharmonique (IcAA'). On a

$$\mathrm{R}_1\mathrm{R}_2\mathrm{R}_3\mathrm{R}_4\rho\rho' = r^2,$$

d'où

$$\mathrm{R}_1\mathrm{R}_2\mathrm{R}_3\mathrm{R}_4 = \text{const.}$$

Si u_1, u_2, u_3, u_4 sont les paramètres des quatre points M, ce sont les racines d'une équation de la forme

$$g(u) - \lambda h(u) = 0,$$

où λ est arbitraire.

Il existe une quadrique Σ, passant par (q) et par les quatre points M; elle rencontre Γ en deux autres points M et M'. Si R et R' sont les rapports anharmoniques (MCAA′) et (M′CAA′), on a

$$R_1 R_2 R_3 R_4 RR' = -r^2,$$

d'où

$$RR' = -\rho\rho'.$$

Donc, si B est conjugué harmonique de A″ par rapport à A et A′, les couples (M, M′), (A, A′) et (B, A‴) sont en involution; de même, si B′ est conjugué harmonique de A‴ par rapport à A′ et A″, les couples (M, M′), (A′, A″) et (A, B′) sont en involution. Ainsi, M *et* M′ *sont fixes.*

Par exemple, *étant donnée une sphère ayant son centre sur une cubique équilatère, il existe une infinité de tétraèdres inscrits à la cubique et conjugués à la sphère. Les sphères circonscrites à ces tétraèdres passent par deux points fixes de la cubique* (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1897).

24. Soient une cubique Γ et une droite Δ, tangente en A à Δ. Si t est le paramètre du plan qui passe par une sécante double fixe et par le point M de Γ, et u, celui du plan qui passe par cette droite et le point m de Δ, entre les points de rencontre M et m de la cubique et de la droite avec une surface S de degré n, on a

$$\sum_{i=1}^{i=3n} \frac{1}{t_i - \alpha} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{u_i - \alpha} + nL,$$

α étant le paramètre de A.

Si v est le paramètre du point N de contact du plan osculateur à la cubique passant par m, on a

$$\frac{3}{v - \alpha} = \frac{1}{u - \alpha} + L$$

et, par suite,

$$\sum_{i=1}^{i=3n} \frac{1}{t_i - \alpha} = 3 \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{v_i - \alpha}.$$

Ainsi, *le pôle harmonique de* A *par rapport au système des points* M *coïncide avec celui de* A *par rapport au système des points* N. Et corrélativement.

Reprenons, avec les mêmes notations, le tétraèdre variable inscrit dans Γ et conjugué à (Q). Si A est un point commun à Γ et à (Q), le tétraèdre $AA'A''A'''$ s'aplatit; A' se confond avec A, et A'' et A''' sont à l'intersection de Γ et du plan tangent en A à (Q). Le plan qui passe par la tangente en A à Γ et le point A'' rencontre (Q) suivant la conique (q), qui coupe la tangente en A à Γ en I, confondu avec A, et en J. Il existe des quadriques passant par M_1, M_2, M_3, M_4, A'' et A''' et tangentes en J à IJ. Soient u_1, u_2, u_3, u_4, v, v' les paramètres de ces six points, a celui de A, b celui de J sur IJ. On a

$$\frac{1}{u_1-a}+\frac{1}{u_2-a}+\frac{1}{u_3-a}+\frac{1}{u_4-a}+\frac{1}{v-a}+\frac{1}{v'-a}=\frac{2}{b-a}+2L,$$

L étant la constante précédemment définie. Par suite, *le pôle harmonique d'un point commun à* (Q) *et à* Γ *par rapport au système des sommets d'un tétraèdre inscrit à* Γ *et conjugué à* (Q) *est fixe.*