ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

A. THYBAUT

Sur une classe de surfaces isothermiques

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 17 (1900), p. 541-591
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1900_3_17__541_0>

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1900, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (http://www.elsevier.com/locate/ansens) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SUR UNE CLASSE

DE

SURFACES ISOTHERMIQUES,

PAR M. A. THYBAUT,

PROFESSEUR AU LYCÉE CONDORCET.

INTRODUCTION.

Les rapports qui existent entre la théorie des surfaces isothermiques et la déformation des quadriques ont leur origine dans une belle proposition que M. Darboux a communiquée à l'Académie des Sciences le 24 mai 1899. M. Darboux associe à chaque surface applicable sur une *quadrique générale* huit surfaces isothermiques qui correspondent une à une aux huit génératrices isotropes de la quadrique.

Dans ma Thèse de Doctorat, publiée en 1897, un cas particulier de cette proposition était indiqué sous la forme suivante : chaque surface applicable sur le *paraboloïde* fait connaître un couple de surfaces isothermiques. Ce couple de surfaces et un couple formé de deux surfaces inverses des premières correspondent, dans le théorème de M. Darboux, aux quatre génératrices isotropes du paraboloïde qui sont rejetées à l'infini.

Le Chapitre II du présent Mémoire contient quelques *propriétés caractéristiques* de ces quatre surfaces isothermiques qui sont normales aux cercles d'un système cyclique particulier dont l'étude fait l'objet du Chapitre I.

Par une généralisation facile on peut étendre certains résultats à quatre surfaces plus générales que l'on déduit de chaque surface applicable sur une *quadrique quelconque*. Ces quatre nouvelles surfaces, qui sont définies par une relation simple entre les rayons de courbure, sont étroitement liées aux huit surfaces isothermiques de M. Darboux.

La détermination de ces huit surfaces isothermiques est un problème équivalent à la déformation de la quadrique correspondante. La quadrique la plus générale que l'on sache complètement déformer étant *le paraboloïde qui a un plan directeur isotrope,* l'étude des surfaces isothermiques qui correspondent à ce paraboloïde particulier présente un intérêt spécial.

Le Chapitre III est entièrement consacré à ces surfaces isothermiques qui étaient déjà déterminées dans ma Thèse de Doctorat. Parmi leurs propriétés *caractéristiques,* on peut choisir la définition suivante :

A chacune de ces surfaces, qui sont désignées sous le nom de *surfaces* (I), est associé un plan fixe (P) sur lequel des sphères tangentes à la surface et au plan décrivent un tracé géographique de la surface. Lorsque le plan (P) s'éloigne indéfiniment, il résulte de la définition que les surfaces (I) se confondent avec les *surfaces minima* qui peuvent être considérées, à ce point de vue, comme un cas limite des surfaces (I).

L'étude de ces surfaces est facilitée par l'emploi d'un système particulier de coordonnées curvilignes, et le Chapitre III renferme, avec la détermination complète des surfaces (I) algébriques ou réelles, des propositions relatives aux lignes de courbure, aux lignes asymptotiques de ces surfaces, et à l'image de ces lignes sur le plan (P) correspondant.

L'interprétation analytique de quelques remarques géométriques contenues dans les deux premiers Chapitres conduit à des propriétés de certaines équations de Laplace.

Plusieurs propositions qui figurent dans le présent Mémoire ont été communiquées à l'Académie des Sciences dans les séances des 23 mai 1899, 12 février et 3 décembre 1900.

Dans la rédaction, j'ai souvent fait usage des résultats que renferme l'Ouvrage classique de M. Darboux : *Leçons sur la Théorie générale des surfaces*.

CHAPITRE I.

SUR UN SYSTÈME CYCLIQUE PARTICULIER.

1. **Définition et propriétés du système cyclique.** — Soient (M) et (N) les deux nappes de l'enveloppe d'une sphère variable dépendant de deux paramètres arbitraires; supposons que les lignes de courbure se correspondent sur les deux nappes de façon que les normales aux deux surfaces, en deux points correspondants M et N, soient toujours dans un plan passant par un point fixe O.

Si les deux surfaces ne sont pas parallèles, on peut tracer un cercle γ normal à (M) et à (N) en deux points correspondants et les cercles γ ainsi obtenus forment un système cyclique puisque, par hypothèse, les lignes de courbure se correspondent sur les deux nappes de l'enveloppe. Remarquons immédiatement que si tous les cercles γ passaient par O, les deux surfaces seraient les inverses par rapport au point O de deux surfaces parallèles.

Lorsque les cercles γ ne passent pas par O, à deux positions infiniment voisines du point M sur une ligne de courbure de la surface (M) correspondent deux cercles γ infiniment voisins qui se coupent en deux points; ces deux points sont situés sur une droite passant par O. Le point O a donc même puissance par rapport à deux cercles infiniment voisins, et par suite par rapport à tous les cercles γ; il en résulte que les cercles γ sont orthogonaux à une sphère fixe (S) de centre O.

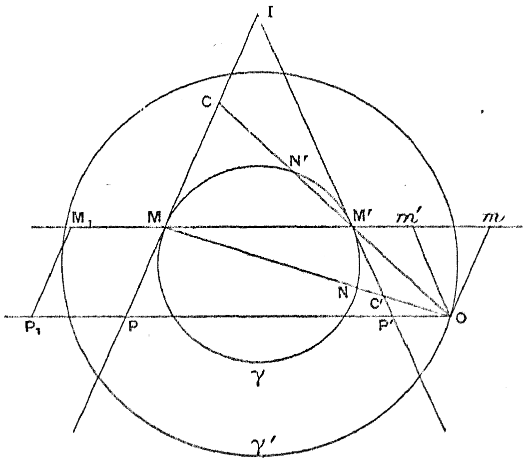
Si les plans des cercles d'un système cyclique passent par un point fixe O, *ces cercles sont orthogonaux à une sphère fixe ayant pour centre le point* O.

Dans les cas limites où la sphère (S) a un rayon infini ou nul, les deux surfaces (M) et (N) sont parallèles ou inverses par rapport à O de deux surfaces parallèles. Ces deux cas étant exclus, nous pourrons supposer que la sphère fixe (S) a pour rayon 1.

Il résulte de la théorie des systèmes cycliques que les cercles γ orthogonaux à la surface (M) et à la sphère (S) sont orthogonaux à une infinité de surfaces; il est facile de mettre ces surfaces en évidence dans le cas particulier que nous traitons.

Portons sur les normales à la surface (M) (*fig.* 1) une longueur

Fig. 1.



constante MP que nous désignerons par $\cos h$, le point P est situé sur une surface (P) parallèle à (M). Soit (P′) la surface inverse de (P) par rapport à O avec la puissance d'inversion $\sin^2 h$. On vérifie aisément que les points correspondants P et P′ ont même puissance par rapport au cercle γ, donc la normale au point P′ à la surface (P′) est tangente au cercle γ en un point M′ et la longueur P′M′ est égale à $\cos h$. Le point M′, construit comme nous venons de l'indiquer, décrit une surface (M′) parallèle à (P′). Les deux surfaces (M) et (M′) parallèles à deux surfaces inverses sont les deux nappes de l'enveloppe d'une sphère variable dépendant de deux paramètres et coupant une sphère fixe sous un angle constant; nous dirons, pour abréger, que (M) et (M′) sont les deux nappes d'une *enveloppe* E. La sphère fixe est la sphère (S) de rayon 1, l'angle constant est l'angle h qui a servi à déterminer la longueur MP.

Le point M restant fixe, si le point P parcourt la normale MI dans un sens déterminé, $\cos h$ qui est égal à MP prend toutes les valeurs réelles et le point M′ décrit le cercle γ. Pour une valeur particulière de h, la surface (M′) coïncide donc avec la surface (N) et l'on obtient la proposition suivante qui peut être établie aussi par le calcul :

Si les lignes de courbure se correspondent sur les deux nappes de l'enveloppe d'une sphère dépendant de deux paramètres, de façon que les normales en deux points correspondants soient toujours dans un plan passant par un point fixe O, *la sphère variable coupe une sphère fixe de centre* O *sous un angle constant.* Les surfaces parallèles et leurs inverses correspondent aux cas limites où l'angle constant est infini et le rayon de la sphère fixe infini ou nul.

Il en résulte que deux surfaces quelconques, normales aux cercles γ, sont les deux nappes d'une enveloppe E. Réciproquement, on retrouvera les systèmes cycliques que nous avons considérés en menant les cercles normaux aux deux nappes d'une enveloppe E; l'une de ces nappes étant une surface quelconque, on peut obtenir ainsi tous les systèmes cycliques dont les cercles sont normaux à une sphère.

Si une congruence de cercles normaux à une sphère forme un système cyclique, deux surfaces quelconques normales aux cercles constituent les deux nappes d'une enveloppe E; *soit h l'angle constant correspondant. Si on laisse fixe l'une des deux surfaces et si l'on fait varier h, la seconde surface coïncide successivement avec toutes les surfaces normales aux cercles.*

Sur l'un des cercles γ, si le point M de la première surface reste fixe, le point M′ de la seconde décrit le cercle lorsqu'on fait varier h; $\cos h$ est réel, mais l'angle h n'est réel que si les points M et M′ sont dans deux régions différentes de la sphère fixe (S). Lorsque le point M′ est situé sur la droite OM, l'angle h égale $\frac{\pi}{2}$ et les deux surfaces sont inverses.

On vérifie facilement qu'à deux positions de M′ inverses par rapport à O (par exemple M′ et N′) correspondent deux valeurs inverses de $\cos h$. Lorsque M′ coïncide avec le point de contact d'une tangente menée de O au cercle γ, l'angle h devient 0 ou π. Enfin, lorsque M′ coïncide avec M, h est infini ($\tang h = \pm i$).

2. **Remarques.** — Signalons deux remarques relatives aux nappes d'une enveloppe E :

1° Soit C le point de rencontre de OM′ et de la normale MI à la surface (M) (*fig.* 1), la sphère de centre M′ et de rayon M′P′ et la sphère de centre C et de rayon CP sont inverses par rapport à O. La première a pour rayon $\cos h$; on en déduit aisément que la sphère de centre C et de rayon CM, qui est tangente à la surface (M), coupe la sphère fixe (S) sous un angle constant k. Les angles h et k sont liés par la relation

$$2\cos h\cos k = \cos^2 h + 1. \tag{1}$$

Si, de même, on appelle C′ le point de rencontre de OM et de la normale M′I, la sphère tangente à (M′) qui a pour centre le point C′ coupe la sphère fixe (S) sous le même angle k.

Les deux nappes d'une enveloppe E *étant* (M) *et* (M′), *les sphères tangentes à* (M) *qui ont pour centres les points* C *définis précédemment et les sphères tangentes à* (M′) *qui ont pour centres les points analogues* C′ *coupent sous le même angle la sphère fixe* (S).

Cette remarque sera appliquée dans le Chapitre suivant.

Si $\cos k$ est donné, on déduit de la formule (1) deux valeurs inverses de $\cos h$. Ces valeurs correspondent aux deux enveloppes E que l'on obtient en associant à la surface (M) les deux surfaces inverses (M′) ou (N′).

2° La droite MM′ coupe la sphère du centre O et de rayon $\cos h$ aux points m et m' (*fig.* 1) qui sont la représentation sphérique de M et M′. Les développables de la congruence engendrée par MM′ coupent (M) et (M′) suivant leurs lignes de courbure et la sphère de centre O suivant deux réseaux orthogonaux qui sont la représentation sphérique de ces lignes de courbure.

Rappelons que les surfaces (P) et (M) sont parallèles et que PM est égal à $\cos h$. Considérons une surface (P_1) homothétique de (P) par rapport au point O et portons sur la normale à (P_1) une longueur P_1M_1 égale à PM et de même sens; le point M_1 est situé sur la droite Mm. Le point M_1 décrit une surface (M_1) et, en faisant varier le rapport d'homothétie, nous obtiendrons une famille de surfaces (M_1) comprenant la surface (M). Toutes ces surfaces se correspondent par plans tangents parallèles et ont la même représentation sphérique.

On obtient une seconde famille de surfaces en partant de (M′). La surface (M) et la sphère fixe pouvant être prises arbitrairement, on peut énoncer la proposition suivante :

Considérons la congruence formée par les droites qui joignent un point d'une surface (M) au point correspondant de sa représentation sphérique sur une sphère quelconque. Les développables de cette congruence coupent la sphère suivant deux réseaux orthogonaux; l'un est la représentation sphérique des lignes de courbure de (M) et d'une famille de surfaces coupées par les développables de la congruence suivant leurs lignes de courbure; l'autre réseau orthogonal est la représentation sphérique des lignes de courbure d'une seconde famille de surfaces analogues aux premières.

Deux surfaces de familles différentes constituent les deux nappes d'une enveloppe E puisque leurs lignes de courbure se correspondent et que les normales correspondantes sont toujours dans un plan passant par un point fixe.

3. **Relations entre les éléments géométriques des deux nappes d'une enveloppe E.** — Soient (M) et (M′) les deux nappes d'une enveloppe E; prenons pour origine le centre O de la sphère fixe (S), cette sphère a pour rayon 1. Désignons par p la distance du point O au plan tangent en M à la surface (M), par q le demi-carré de OM, par ρ et ρ_1 les rayons de courbure de (M) au point M. Les éléments correspondants de la seconde nappe (M′) seront représentés par p, q, ρ', ρ'_1.

1° En remarquant que (M) et (M′) sont respectivement parallèles à deux surfaces inverses, on peut établir les formules suivantes dans lesquelles h désigne, comme précédemment, l'angle constant sous lequel les sphères tangentes à (M) et à (M′) coupent la sphère (S); r est le rayon de ces sphères variables :

$$(2)\qquad \frac{1}{r} = \frac{p - \cos h}{q - \frac{1}{2}} = \frac{p' - \cos h}{q' - \frac{1}{2}} = \cos h + \frac{\sin^2 h}{\cos h}\,\frac{qq' - \frac{1}{4}}{\left(q - \frac{1}{2}\right)\left(q' - \frac{1}{2}\right)}.$$

2° Les formules précédentes permettent d'établir des relations simples entre deux points correspondants M et M′ et leurs représentations sphériques m et m' sur la sphère de centre O et de rayon $\cos h$:

$$\mathrm{MM'}\sin^2 h = (\mathrm{OM'}^2 - 1)\, m\mathrm{M} = -(\mathrm{OM}^2 - 1)\, m'\mathrm{M'}.$$

On déduit facilement de cette double égalité

$$-\mathrm{MM'}^2 \sin^2 h = (\mathrm{OM}^2 - 1)(\mathrm{OM'}^2 - 1).$$

3° Cherchons maintenant les relations qui existent entre les rayons de courbure correspondants ρ, ρ' et ρ_1, ρ'_1 des deux nappes d'une enveloppe E. Une famille de lignes de courbure est définie par l'une des deux équations

$$dq + \rho\, dp = 0, \qquad dq' + \rho'\, dp' = 0$$

que l'on déduit immédiatement des formules d'Olinde Rodrigue. En développant la seconde équation on obtient

$$\frac{\partial q'}{\partial p} dp + \frac{\partial q'}{\partial q} dq + \rho' \left(\frac{\partial p'}{\partial p} dp + \frac{\partial p'}{\partial q} dq \right) = 0.$$

Remplaçons le rapport $\frac{dq}{dp}$ par $(-\rho)$ et les dérivées de p' et q' par leurs expressions en fonction de p et q calculées à l'aide des formules (2). En introduisant, pour simplifier, l'angle k défini au n° 2 et lié à h par la relation (1)

$$2 \cos h \cos k = \cos^2 h + 1,$$

on trouve les deux équations

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} -\sin^2 k &= \left(p - \cos k - \frac{q - \frac{1}{2}}{\rho} \right) \left(p' - \cos k - \frac{q' - \frac{1}{2}}{\rho'} \right), \\ -\sin^2 k &= \left(p - \cos k - \frac{q - \frac{1}{2}}{\rho_1} \right) \left(p' - \cos k - \frac{q' - \frac{1}{2}}{\rho'_1} \right). \end{aligned} \right.$$

4° Les normales aux deux nappes (M) et (M′) en deux points correspondants étant dans un même plan passant par O, deux centres de courbure correspondants de (M) et de (M′) sont sur une droite D menée par O. Si l'on trace les cercles γ normaux en M et M′ aux surfaces (M) et (M′), on voit facilement que *la droite* D *contient les centres de courbure correspondants de toutes les surfaces normales aux cercles* γ ; elle contient aussi les deux points de rencontre du cercle γ correspondant avec l'un des cercles infiniment voisins; enfin la droite D passe par l'un des points focaux de la droite MM′.

4. **Application analytique.** — Nous avons vu au n° 1 que les cercles γ normaux à une surface quelconque (M) et à une sphère (S) sont normaux à une famille de surfaces et que deux surfaces quelconques de la famille constituent les deux nappes d'une enveloppe E. On peut interpréter analytiquement ces résultats de la façon suivante :

L'origine étant le centre O de la sphère fixe (S) de rayon 1, soient (X, Y, Z) les coordonnées d'un point M de la surface (M) et (X′, Y′, Z′) les coordonnées du point correspondant M′ de la surface (M′). Les sphères tangentes à (M) et à (M′) coupent la sphère (S) sous l'angle constant h.

En représentant par l et l' deux constantes quelconques, posons

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{l} X^2+Y^2+Z^2=\dfrac{u+l}{u-l}, \qquad X'^2+Y'^2+Z'^2=\dfrac{u'+l'}{u'-l'}, \\ x=X(u-l), \qquad y=Y(u-l), \qquad z=Z(u-l), \\ \qquad\qquad x'=X'(u'-l'), \qquad \ldots. \end{array}\right.$$

Soient A et A′ les points qui ont respectivement pour coordonnées les quantités (x, y, z) et (x', y', z') définies par les relations (4).

Considérons le cercle γ normal en M et M′ aux surfaces (M) et (M′); il est normal à la sphère (S) de rayon 1, c'est-à-dire que le centre O de cette sphère a la puissance 1 par rapport au cercle γ. Il en résulte que le cercle concentrique γ' passant par O (*fig.* 1) intercepte une longueur 2 sur toutes les tangentes au cercle γ; en particulier, il coupe la normale en M à la surface (M) en deux points situés à la distance 1 du point M, il coupe de même la normale en M′. Si de chacun des points des surfaces (M) et (M′) on décrit une sphère de rayon 1, les quatre points de contact de deux sphères correspondantes avec leurs enveloppes sont donc sur une circonférence γ' passant par O.

Transformons par l'inversion avec la puissance $2l$ la sphère de centre M et de rayon 1; d'après les formules (4), nous obtiendrons une sphère (Σ) de centre A et de rayon $(u - l)$. Effectuons avec la puissance $2l'$ la même transformation sur la sphère de centre M', nous obtiendrons une sphère (Σ'). Chacune des deux sphères (Σ), (Σ') touche son enveloppe en deux points et, en transformant la propriété du cercle γ', on trouve que les cordes de contact sont deux droites homothétiques par rapport au point O.

La surface (A), décrite par le point A, est le lieu des centres des sphères (Σ); d'après une propriété bien connue des enveloppes de sphères, le plan tangent en A est perpendiculaire à la corde de contact de la sphère (Σ) de centre A. Les cordes de contact de deux sphères correspondantes (Σ), (Σ') étant parallèles, les surfaces (A) et (A') se correspondent par plans tangents parallèles; leur réseau conjugué commun correspond aux lignes de courbure de (M) et (M').

En désignant par α et β les paramètres des lignes de courbure des deux surfaces (M) et (M'), les quantités x et x', y et y', z et z' seront solutions du système

$$\frac{\partial\Theta}{\partial\alpha} = \lambda\frac{\partial\Theta'}{\partial\alpha}, \qquad \frac{\partial\Theta}{\partial\beta} = \mu\frac{\partial\Theta'}{\partial\beta}, \tag{5}$$

et l'on reconnaît facilement que u et u' vérifient les mêmes équations. Réciproquement, si ces conditions sont remplies, il est aisé de constater, en recommençant le raisonnement en sens inverse, que (M) et (M') sont les deux nappes d'une enveloppe E.

On déduit immédiatement des formules (4) les relations

$$x^2 + y^2 + z^2 = u^2 - l^2, \qquad x'^2 + y'^2 + z'^2 = u'^2 - l'^2,$$

on peut donc considérer (x, y, z, u, l) et (x', y', z', u', l') comme un système de coordonnées pentasphériques des points M et M'; rappelons que l et l' sont deux constantes quelconques.

La condition nécessaire et suffisante pour que les sphères tangentes à deux surfaces coupent sous un angle constant une sphère fixe de centre O *et de rayon* 1 *est que les coordonnées pentasphériques* (x, y, z, u, l) *et* (x', y', z', u', l') *de deux points correspondants forment cinq couples de solutions du système* (5).

L'une des deux surfaces (M) ou (M'), la surface (M) par exemple, peut être prise arbitrairement; l'autre nappe (M') ne dépend alors que de l'angle constant h. En d'autres termes, lorsqu'on se donne x, y, z et u, les fonctions λ et μ sont déterminées à une constante près; on peut donc calculer λ et μ en fonction des éléments géométriques de la surface (M) et de la constante.

En faisant usage des formules (2), on trouve facilement

$$(6)\qquad \begin{cases} \lambda = \dfrac{il\sin k}{l'}\,\dfrac{\rho}{\rho(p-\cos k)-(q-\frac{1}{2})}, \\[2ex] \mu = \dfrac{il\sin k}{l'}\,\dfrac{\rho_1}{\rho_1(p-\cos k)-(q-\frac{1}{2})}. \end{cases}$$

Dans ces égalités figurent p et q, définis au n° 3, et les rayons de courbure ρ, ρ_1 de la surface (M). L'angle k, introduit pour simplifier, est lié à h par la formule déjà signalée

$$2\cos h\cos k = \cos^2 h + 1.$$

En employant les éléments correspondants p', q', ρ', ρ'_1 de la surface (M'), on obtiendra de même

$$(7)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{il'\sin k}{l}\,\dfrac{\rho'}{\rho'(p'-\cos k)-(q'-\frac{1}{2})}, \\[2ex] \dfrac{1}{\mu} = \dfrac{il'\sin k}{l}\,\dfrac{\rho'_1}{\rho'_1(p'-\cos k)-(q'-\frac{1}{2})}. \end{cases}$$

Si l'on rapproche les formules (6) et (7), on retrouve les équations (3) qui lient les rayons de courbure correspondants des deux nappes d'une enveloppe E.

En négligeant le facteur constant $\frac{l}{l'}$, les fonctions λ et μ, et par suite le système (5) correspondant, ne dépendent plus que d'une constante k.

Le système (5) étant complètement établi, si l'on élimine Θ' entre les deux équations de ce système, on obtient une équation de la forme

$$(8)\qquad \frac{\partial^2\Theta}{\partial\alpha\,\partial\beta} = m\frac{\partial\Theta}{\partial\alpha} + n\frac{\partial\Theta}{\partial\beta}$$

que vérifient les coordonnées pentasphériques (x, y, z, u, l).

Si quatre fonctions dont la somme des carrés est constante sont des solutions d'une équation de Laplace (8), *on peut déterminer deux fonctions λ et μ dépendant d'une constante arbitraire et telles que la transfor-*

mation définie par les formules

$$\frac{\partial\Theta}{\partial\alpha} = \lambda\frac{\partial\Theta'}{\partial\alpha}, \qquad \frac{\partial\Theta}{\partial\beta} = \mu\frac{\partial\Theta'}{\partial\beta}$$

fasse correspondre aux quatre fonctions données quatre autres fonctions dont la somme des carrés est constante, solutions d'une équation de Laplace de la même forme.

Les équations de Laplace, que l'on déduit ainsi de l'équation initiale (8) en donnant toutes les valeurs à la constante arbitraire k, correspondent aux différentes surfaces orthogonales au cercle γ. Parmi ces surfaces, on trouve deux fois la sphère fixe (S) lorsqu'on donne à k les valeurs o et π. Dans ces cas limites, $\sin k$ étant nul, il résulte des formules (6) que l' est nul.

Dans le groupe d'équations de Laplace, que l'on fait dériver de l'équation primitive (8), *se trouvent deux équations particulières* A *et* B *qui possèdent quatre solutions dont la somme des carrés est nulle.*

On retrouve les mêmes équations de Laplace en appliquant la transformation à une équation quelconque du groupe; en particulier, on pourra prendre A ou B comme équation initiale.

Les remarques précédentes seront employées aux n^{os} 11 et 12 pour étudier certaines équations de Laplace à invariants égaux.

CHAPITRE II.

LES SURFACES ISOTHERMIQUES ET LA DÉFORMATION DU PARABOLOIDE.

5. Nous appliquerons maintenant les résultats du Chapitre I dans le cas où les deux nappes d'une enveloppe E se correspondent avec similitude des éléments infiniment petits.

Considérons la congruence formée par les droites MM' qui joignent les deux points de contact M et M' de chaque sphère avec l'enveloppe, les développables de cette congruence coupent les deux nappes (M) et (M') de l'enveloppe suivant leurs lignes de courbure; donc, d'après une proposition de M. Cosserat [1], la condition nécessaire et suffi-

[1] E. COSSERAT, *Sur la déformation infinitésimale d'une surface flexible et inextensible* (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 1re série, t. VIII, p. E_1-E_{46}; 1894).

sante pour que les lignes de longueur nulle se correspondent sur les deux nappes est que les points de contact M et M' soient conjugués harmoniques par rapport aux deux points focaux de la droite MM' (¹). *Les deux nappes* (M) *et* (M') *de l'enveloppe* E *sont alors isothermiques.*

Désignons comme précédemment par C le point de rencontre de OM' et de la normale en M à la surface (M), par C' le point de rencontre de OM et de la normale en M' à la surface (M') (*fig.* 1). Les points M et M' sont conjugués harmoniques par rapport aux points focaux de MM', et, d'après une remarque faite au n° 3, la droite qui joint l'origine à l'un des points focaux de la droite MM' passe par l'un des centres de courbure de la surface (M) au point M. Les points M et C sont donc conjugués harmoniques par rapport aux deux centres de courbure situés sur MC. Les points M' et C', situés sur la normale en M' à la surface (M'), possèdent une propriété analogue.

6. **Propriétés des deux nappes isothermiques** (M) **et** (M'). — Nous appellerons, pour abréger, *développée harmonique* d'une surface le lieu géométrique du conjugué harmonique de chaque point de la surface par rapport aux deux centres de courbure correspondants.

Ainsi, lorsque les deux nappes d'une enveloppe E se correspondent avec similitude des éléments infiniment petits, la surface (C) décrite par le point C est la développée harmonique de la surface (M); de même la surface (C') est la développée harmonique de la surface (M').

Les remarques faites précédemment conduisent à la proposition suivante :

Si la normale à l'une des nappes d'une enveloppe E *passe par le point correspondant de la développée harmonique de l'autre nappe :* 1° *La normale à l'autre nappe possède la même propriété;* 2° *Les deux nappes sont*

(¹) On retrouve cette condition géométrique lorsqu'on cherche à établir entre deux points M et M' d'une sphère fixe une correspondance qui conserve les lignes de longueur nulle. Dans ce cas, les points M et M' doivent être conjugués harmoniques par rapport aux deux points focaux supposés distincts de la droite MM', et cette condition est suffisante. Les développables de la congruence coupent la sphère fixe suivant deux réseaux orthogonaux isothermes qui sont la représentation sphérique des lignes de courbure de deux surfaces inverses. Les couples de surfaces inverses, qui correspondent à ces réseaux, sont déterminés dans ma Thèse de Doctorat (*Annales de l'École Normale;* 1897).

isothermiques et se correspondent avec similitude des éléments infiniment petits.

Une surface peut être considérée comme l'une des nappes de l'enveloppe des sphères (Σ) qui sont tangentes à la surface et ont leurs centres sur la développée harmonique. Le rayon de chaque sphère est l'inverse de la courbure moyenne de la surface au point de contact. On démontre facilement que *la définition des sphères* (Σ) *ne change pas si l'on transforme la figure par inversion.*

Dans le cas particulier que nous traitons, les développées harmoniques des surfaces (M) et (M′) étant les surfaces (C) et (C′), il résulte d'une remarque faite au n° 2 que les sphères (Σ), tangentes à l'une des nappes (M) ou (M′), coupent la sphère fixe (S) sous un angle constant k lié à h par la relation

$$2\cos h \cos k = \cos^2 h + 1. \tag{1}$$

Il est facile de démontrer directement que si les sphères (Σ) coupent une sphère fixe sous un angle constant, l'une des nappes de leur enveloppe est isothermique. Ce théorème, que j'ai énoncé dans ma Communication du 23 mai 1899, est un cas particulier d'une proposition démontrée depuis par M. Darboux et qui peut être énoncé de la façon suivante :

Considérons une surface (M) et les sphères, tangentes à (M), qui ont leurs centres sur la développée harmonique de (M); la condition nécessaire et suffisante pour que la surface (M) soit isothermique est que les lignes de courbure se correspondent sur les deux nappes de l'enveloppe des sphères [1].

Lorsque les sphères (Σ) coupent sous un angle constant k la sphère fixe (S) de centre O et de rayon 1, l'équation de la surface isother-

---

[1] On peut rapprocher de la proposition de M. Darboux le théorème suivant dont je me borne à indiquer l'énoncé :

Considérons une surface (M) et les sphères, tangentes à (M), qui ont leurs centres sur la développée moyenne de (M); la condition nécessaire et suffisante pour que la surface (M) ait une représentation sphérique isotherme est que les lignes de courbure se correspondent sur les deux nappes de l'enveloppe des sphères.

mique (M) correspondante peut être écrite (en conservant les notations du n° 3)

$$2\rho\rho_1(p - \cos k) - (\rho + \rho_1)(q - \tfrac{1}{2}) = 0. \tag{2}$$

A chaque surface isothermique (M) *définie par l'équation* (2), *on peut associer une surface isothermique* (M′) *satisfaisant à la même équation* (2) *et formant avec* (M) *les deux nappes d'une enveloppe* E.

Les cercles γ normaux aux surfaces (M) et (M′) sont normaux à la sphère fixe (S); d'après les propositions établies dans le Chap. I, ces cercles sont normaux à deux surfaces (N) et (N′) inverses de (M) et (M′) par rapport à O. Les surfaces (M) et (M′) étant isothermiques, les surfaces inverses (N) et (N′) le sont aussi. Deux surfaces quelconques normales aux cercles γ constituent les deux nappes d'une enveloppe E; on peut donc énoncer la proposition suivante qui est une conséquence des remarques faites au n° 1 (1).

Les cercles, normaux à la sphère fixe (S) *de centre* O *et de rayon* 1 *et à une surface isothermique* (M) *définie par la relation* (2), *sont normaux à trois autres surfaces isothermiques* (M′), (N), (N′).

Les sphères tangentes à deux de ces quatre surfaces coupent la sphère fixe (S) *sous un angle constant qui a pour cosinus :*

1° $\cos h$ *pour les couples de surfaces* (M), (M′) *et* (N), (N′);

2° $\dfrac{1}{\cos h}$ *pour les couples de surfaces* (M), (N′) *et* (M′), (N);

3° 0 *pour les couples de surfaces* (M), (N) *et* (M′), (N′).

7. **Les surfaces (M) et (M′) et la déformation du paraboloïde.** — Les surfaces (M) et (M′) sont les surfaces isothermiques que j'ai associées à la déformation du paraboloïde dans ma Thèse de Doctorat. Nous établirons directement les liaisons qui existent entre la détermination des surfaces (M) et (M′) et la déformation du paraboloïde quelconque.

L'équation (2) est une relation involutive entre les rayons de courbure de la surface (M); appliquons à cette équation la transformation

(1) Cette proposition renferme, en particulier, un théorème énoncé par M. Servant dans une Communication à l'Académie des Sciences (19 novembre 1900).

bien connue de M. Weingarten; c'est-à-dire posons

$$(3)\qquad \begin{cases} x = u = \dfrac{1}{q-\frac{1}{2}}, \qquad \dfrac{y-zi}{\sqrt{2}} = v = -\dfrac{p-\cos k}{(q-\frac{1}{2})^2}, \\ \dfrac{y+zi}{\sqrt{2}} = \dfrac{v}{u} + u\cos k + \dfrac{v}{2}; \end{cases}$$

on en déduit, entre x, y et z, une relation qui est l'équation d'un paraboloïde. En mettant en évidence les plans directeurs, l'équation du paraboloïde prend la forme suivante :

$$(x+1)(y+3iz-2\sqrt{2}\cos kx+2\sqrt{2}\cos k) = 3y+iz+2\sqrt{2}\cos k.$$

Le paraboloïde quelconque se déduit du précédent par une homothétie. La forme du paraboloïde détermine la constante $\cos k$ et, par suite, la relation (2) qui définit les surfaces (M).

On sait que chaque surface applicable sur le paraboloïde fait connaître une surface (M) satisfaisant à l'équation (2); on peut en déduire aussi la surface correspondante (M').

Soit, en effet, d la distance d'un point (x, y, z) du paraboloïde au premier plan directeur; on trouve immédiatement

$$d = x+1 = \frac{2q+1}{2q-1}.$$

Nous obtenons ainsi une relation géométrique entre l'un des plans directeurs et une surface (M) vérifiant l'équation (2).

Par analogie, il existe la même relation entre le second plan directeur et une autre surface (M_1) qui doit aussi vérifier l'équation (2) puisque cette équation est déterminée par la forme du paraboloïde. Nous allons démontrer que les surfaces (M_1) et (M') coïncident.

Désignons par p' et q' les éléments correspondant à p et q dans la surface (M_1) et par d' la distance du point (x, y, z) au second plan directeur; on peut écrire

$$(4)\qquad d' = \frac{y+3iz-2\sqrt{2}\cos kx+2\sqrt{2}\cos k}{\sqrt{2}\,i\sin k} = \frac{2q'+1}{2q'-1}.$$

En remplaçant dans l'équation (4) les coordonnées (x, y, z) par leur valeur tirée des équations (3) en fonction de p et de q, on obtient

$$(5) \qquad \frac{p - \cos k}{q - \frac{1}{2}} = e^{-ik} - \frac{i \sin k}{q' - \frac{1}{2}}$$

et l'on trouve une égalité analogue en permutant p et q respectivement avec p' et q'. Ces deux relations deviennent identiques aux relations (2) établies au n° 3 si l'on remplace la constante k en fonction de la constante h, à l'aide de la formule (1); les éléments p' et q' de la surface (M_1) sont donc respectivement égaux aux éléments correspondants de la surface (M'). En outre, en des points correspondants, les normales aux surfaces (M), (M'), (M_1) sont dans un même plan passant par O; on en déduit facilement que les surfaces (M_1) et (M') coïncident.

On peut encore établir ce résultat en vérifiant par le calcul que la droite OM, qui joint l'origine à un point quelconque M de la surface (M), passe par le point correspondant de la développée harmonique de (M_1). Il résulte alors d'une remarque faite au n° 6 que le couple de surfaces (M) et (M_1) est identique au couple de surfaces (M) et (M').

La déformation du paraboloïde est un problème équivalent à la détermination des nappes d'une enveloppe E *qui se correspondent avec similitude des éléments infiniment petits.*

8. Parmi les propriétés géométriques des quatre surfaces isothermiques (M), (M'), (N), (N') se trouvent les propriétés de quatre des huit surfaces isothermiques associées par M. Darboux à la déformation d'une quadrique; ce résultat peut être expliqué.

Rappelons d'abord l'énoncé de la proposition de M. Darboux : Si une quadrique générale (Q) roule sur une surface applicable (Θ), les huit points où les génératrices isotropes de (Q) coupent le plan de contact de (Q) et de (Θ) décrivent huit surfaces isothermiques.

Lorsque la quadrique (Q) est un paraboloïde, elle a seulement quatre génératrices isotropes à distance finie, les points de rencontre des quatre génératrices isotropes rejetées à l'infini avec le plan de contact du paraboloïde et de la surface applicable sont à l'infini, et les surfaces isothermiques correspondantes n'existent plus. Nous allons montrer néanmoins que *les surfaces isothermiques* (M), (M′), (N), (N′), étudiées dans ce Chapitre, *correspondent une à une aux quatre génératrices isotropes du paraboloïde qui sont rejetées à l'infini.*

La méthode de M. Weingarten consiste, en effet, à déterminer, à l'aide d'une surface (M) satisfaisant à la relation

$$2\rho\rho_1(p - \cos k) - (\rho + \rho_1)(q - \tfrac{1}{2}) = 0,$$

une surface (Θ) applicable sur le paraboloïde (P) dont l'équation est

$$x(y + 3iz - 2\sqrt{2}\cos kx) = 2(y - zi).$$

Si l'on fait rouler le paraboloïde (P) sur la surface (Θ), la surface (M) correspondante peut être définie de la façon suivante [1] :

Considérons la droite isotrope (d) qui, rapportée à des axes invariablement liés au paraboloïde (P), est définie par les équations

$$x = 0, \qquad y - iz = l;$$

elle est parallèle à la génératrice isotrope de (P) qui a pour équations

$$x = 0, \qquad y - iz = 0.$$

Dans le roulement du paraboloïde (P) sur la surface applicable (Θ), le point (ξ, η, ζ) où la droite (d) coupe le plan de contact de (P) et de (Θ) décrit une surface (Σ).

Si l'on fait croître l indéfiniment, la droite isotrope (d) s'éloigne indéfiniment dans le plan

$$x = 0$$

rattaché au paraboloïde et tend à se confondre avec une génératrice isotrope située dans ce plan et rejetée à l'infini. La surface (Σ) s'éloigne aussi indéfiniment, mais la surface homothétique décrite par le point, dont les coordonnées sont $\left(\frac{\xi}{l}, \frac{\eta}{l}, \frac{\zeta}{l}\right)$, reste à distance finie et se réduit à la surface (M).

Il existe sur le paraboloïde une génératrice isotrope de même système que la première, elle est à l'intersection de deux plans définis par les équations

$$x + 2 = 0, \qquad y + zi + 2\sqrt{2}\cos k = 0.$$

---

(1) Darboux, *Leçons sur la Théorie des surfaces*, Livre VIII, n° 1067.

Supposons que dans le premier de ces plans, une droite isotrope s'éloigne indéfiniment en restant parallèle à la génératrice isotrope, on en déduira, comme précédemment, une surface isothermique; c'est la surface (N) inverse de (M) par rapport à l'origine O.

On trouvera de même les surfaces inverses (M') et (N') en employant des parallèles aux deux génératrices isotropes de l'autre système.

En résumé, dans le roulement du paraboloïde (P) sur une surface applicable, les surfaces isothermiques (M), (M'), (N), (N') correspondent aux quatre génératrices isotropes de (P) qui sont rejetées à l'infini.

Il est facile de déduire de ces quatre surfaces les surfaces isothermiques qui correspondent aux génératrices isotropes à distance finie.

Soient, par exemple, (X, Y, Z) les coordonnées d'un point de la surface (M), (C, C', C'') les cosinus directeurs de la normale à la surface en ce point, p et q les éléments géométriques définis au n° 3. En faisant usage des formules données par M. Darboux dans la théorie du roulement d'une surface sur une surface applicable ([1]), on trouve que le point de rencontre de la droite isotrope

$$x = 0, \qquad y - iz = 0$$

avec le plan de contact du paraboloïde et de la surface applicable décrit une surface isothermique (M_1) dont les coordonnées (X_1, Y_1, Z_1) sont définies par trois équations de la forme

$$X_1 = \int \frac{p - \cos k}{(q - \frac{1}{2})^2}\, dX - \frac{1}{q - \frac{1}{2}}\, dC.$$

Les surfaces (M) et (M_1) se correspondent par plans tangents parallèles et leurs lignes de courbure ont la même représentation sphérique.

9. **Généralisation**. — Il a été démontré au n° 7 que l'on peut déduire de toute surface définie par la relation involutive (2) trois autres surfaces satisfaisant à la même relation. Ce résultat peut être étendu aux

([1]) Darboux, *Leçons sur la Théorie des surfaces*, Livre VIII, n° 1067.

surfaces (Σ) définies par l'équation plus générale

$$2\rho\rho_1(p+a)-(\rho+\rho_1)(q+b)+c=0, \tag{6}$$

dans laquelle a, b et c sont des constantes quelconques. En donnant à c la valeur o et à b la valeur $(-\frac{1}{2})$ on retrouve l'équation (2); les surfaces isothermiques (M) sont donc comprises dans les surfaces (Σ).

En supposant que c ne soit pas nul, si l'on pose

$$\varphi(p,q)=\sqrt{(q+b)^2-2c(p+a)},$$

l'équation (6) peut être mise sous la forme

$$\rho\rho_1\frac{\partial^2\varphi}{\partial q^2}-(\rho+\rho_1)\frac{\partial^2\varphi}{\partial p\,\partial q}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial p^2}=0.$$

Il résulte de la méthode de M. Weingarten que la recherche des surfaces (Σ) est un problème équivalent à la déformation de la quadrique définie par l'équation

$$2ax^2+2b(y-zi)x+(y+zi)x+c(y-zi)^2-c=0.$$

La déformation de la quadrique générale est un problème équivalent à la détermination des surfaces définies par la relation (6).

L'équation qui donne les carrés des demi-axes de la quadrique est

$$t^3+2bt^2+2act-c^2=0.$$

Il en résulte, si la quadrique est donnée, que la constante b est déterminée, mais que les constantes a et c sont déterminées au signe près. On vérifie aisément que les surfaces (Σ), représentées par la formule (6), demeurent invariables lorsqu'on change en même temps le signe de a et de c.

A une quadrique donnée correspond donc une famille bien déterminée de surfaces (Σ) qui satisfont à une même équation (6).

Si l'on fait rouler la quadrique sur une surface applicable (Θ), nous avons vu au n° 8 que la surface (Σ) correspondante se définit au moyen de la droite isotrope (d) dont les équations sont

$$x=0, \qquad y-zi=k,$$

en supposant que k augmente indéfiniment. Cette droite est parallèle à deux génératrices isotropes de la quadrique et elle est située dans le plan de ces deux génératrices. On peut donc déduire une surface (Σ) d'un couple de génératrices isotropes parallèles et, comme il y a quatre couples analogues sur la quadrique, il y aura quatre surfaces correspondantes. De plus, d'après une remarque faite précédemment, la relation (6) est bien déterminée lorsque la grandeur de la quadrique est donnée; les quatre surfaces satisferont donc à l'équation (6).

Les normales à ces surfaces, en des points correspondants, sont dans un même plan passant par l'origine; ce plan est parallèle au plan tangent à la quadrique au point correspondant.

Les lignes de courbure des quatre surfaces (Σ) se correspondent, puisqu'elles correspondent au réseau conjugué commun à la quadrique et à la surface applicable (Θ).

Chaque surface applicable sur une quadrique fait connaître quatre surfaces (Σ) *satisfaisant à la relation* (6); *les lignes de courbures se correspondent sur ces quatre surfaces et les normales en quatre points correspondants sont dans un même plan passant par l'origine.*

Il est facile de rattacher ces surfaces aux huit surfaces isothermiques que M. Darboux associe à chaque surface applicable sur une quadrique. On sait que, parmi les huit surfaces de M. Darboux, deux surfaces ayant la même représentation sphérique correspondent à deux génératrices isotropes parallèles, par exemple aux génératrices (δ) et (δ') définies par les équations

$$x = 0, \qquad y = zi \pm 1.$$

Lorsqu'on fait rouler la quadrique sur la surface applicable, les trois points de rencontre des droites parallèles (d), (δ), (δ') avec le plan de contact décrivent trois surfaces ayant la même représentation sphérique. On en déduit facilement la proposition suivante :

Chacune des quatre surfaces (Σ) *a la même représentation sphérique que deux des huit surfaces isothermiques de M. Darboux.*

Si l'on connaît l'une des surfaces (Σ), on peut obtenir par des quadratures les deux surfaces isothermiques qui ont la même représentation sphérique :

Soient (X, Y, Z) les coordonnées d'un point d'une surface (Σ); (C, C', C'') les cosinus directeurs de la normale en ce point. Les coordonnées (X_1, Y_1, Z_1), qui représentent un point de l'une des deux surfaces isothermiques, sont données par trois équations de la forme

$$X_1 = \int \frac{c\,dC - (q+b)\,dX}{\sqrt{(q+b)^2 - 2c(p+a)}} \pm X,$$

on obtient Y_1 et Z_1 en changeant X et C en Y et C' ou Z et C''.

Inversement, lorsque les huit surfaces isothermiques sont connues, il résulte de l'expression des coordonnées (X_1, Y_1, Z_1) que les quatre surfaces (Σ) sont définies par le théorème suivant :

Considérons, parmi les huit surfaces isothermiques, un couple de surfaces (A) *et* (A′) *ayant la même représentation sphérique; si l'on mène par un point fixe un segment égal et parallèle au segment* AA′ *qui joint deux points correspondants, le milieu de ce segment décrit une surface* (Σ) *qui a même représentation sphérique que* (A) et (A′), *et qui satisfait à la relation* (6).

10. **Cas particuliers.** — En donnant à la constante c la valeur o, l'équation (6) devient

$$2\rho\rho_1(p+a) - (\rho+\rho_1)(q+b) = 0. \tag{7}$$

Remarquons que si b était égal à $(-\frac{1}{2})$, on retrouverait la relation (2) qui définit les surfaces isothermiques (M) étudiées dans ce Chapitre. Les surfaces représentées par l'équation (7) sont homothétiques des surfaces (M) par rapport à l'origine O. Les sphères, qui sont tangentes à l'une de ces surfaces et qui ont leurs centres sur la développée harmonique de la surface, coupent une sphère fixe de centre O et de rayon $\sqrt{-2b}$ sous un angle constant k défini par la relation

$$a = \sqrt{-2b}\cos k.$$

Nous allons étudier quelques cas particuliers de la formule (7) :

1° Si b *est nul*, l'équation (7) se réduit à

$$2\rho\rho_1(p+a) - (\rho+\rho_1)q = 0;$$

elle représente les inverses, par rapport à O, des surfaces à courbure moyenne constante. Les propriétés des surfaces isothermiques (M) correspondent, dans ce cas particulier, à des propriétés bien connues des surfaces à courbure moyenne constante.

Soit (A) une surface à courbure moyenne constante, on sait que sa développée harmonique (C) a la même propriété. Les sphères tangentes à (A), qui ont leurs centres sur (C), ont un rayon constant. Les nappes isothermiques (M) et (M′) du cas général sont donc remplacées par les deux surfaces isothermiques (A) et (C) qui sont parallèles et peuvent être considérées comme les deux nappes d'une enveloppe E.

L'intégration de l'équation précédente est un problème équivalent à la déformation du paraboloïde tangent au cercle de l'infini. Les rapports qui existent entre la déformation de ce paraboloïde et la détermination des surfaces à courbure moyenne constante ont été signalés pour la première fois par M. E. Cosserat.

2° Si *a est nul,* l'équation (7) devient

$$2\rho\rho_1 p - (\rho + \rho_1)(q + b) = 0.$$

Les sphères (Σ), qui sont tangentes à l'une des surfaces (P) représentées par cette équation et qui ont leurs centres sur la développée harmonique de (P), coupent orthogonalement la sphère fixe (S). La seconde nappe de leur enveloppe est donc inverse de la première par rapport au point O, et, dans ce cas particulier, la seconde nappe est aussi une surface isothermique.

Transformons la figure à l'aide d'une inversion effectuée par rapport à un point quelconque de la sphère fixe (S). Les sphères inverses des sphères (Σ) seront orthogonales à un plan fixe transformé de (S). D'après une remarque faite au n° 6, les sphères inverses ont, par rapport à la surface (P′) inverse de (P), la même relation que les sphères (Σ) par rapport à la surface (P); le plan fixe transformé de (S) sera donc la développée harmonique de (P′).

On établit facilement que la recherche des surfaces (P), ou des surfaces (P′), est un problème équivalent à la déformation du paraboloïde équilatère.

Si la développée harmonique d'une surface est un plan, cette surface est isothermique, et l'on en peut déduire, par des quadratures, une surface applicable sur le paraboloïde équilatère.

Les surfaces minima peuvent être considérées comme un cas limite de ces surfaces, lorsque le plan qui constitue la développée harmonique se confond avec le plan de l'infini.

3° Dans le cas particulier où b a la valeur $\left(-\frac{a^2}{2}\right)$, l'équation (7) devient

$$(8)\qquad 2\rho\rho_1(p+a)-(\rho+\rho_1)\left(q-\frac{a^2}{2}\right)=0.$$

Désignons par (Q) les surfaces représentées par cette équation. Les sphères (Σ), qui sont tangentes à l'une des surfaces (Q) et qui ont leurs centres sur la développée harmonique de cette surface, sont tangentes à la sphère fixe (S) de centre O et de rayon a. La surface (Q) et la sphère (S) constituent alors les deux nappes de l'enveloppe E que nous avons étudiée dans le cas général; *la surface et la sphère se correspondent donc avec similitude des éléments infiniment petits*.

On peut intégrer l'équation précédente; les surfaces (Q) que l'on obtient ainsi sont les surfaces isothermiques qui sont déterminées dans ma Thèse de Doctorat et dont on déduit les surfaces applicables sur le paraboloïde qui a un plan directeur isotrope.

Si l'on fait croître indéfiniment le rayon a de la sphère fixe (S), l'équation (8) se réduit à l'équation des surfaces minima qui peuvent être considérées comme un cas limite des surfaces (Q). Les sphères (Σ) sont alors les plans tangents aux surfaces minima, la sphère (S) est le plan de l'infini, et la propriété des surfaces (Q) devient, à la limite, la conservation des angles dans la représentation sphérique, propriété bien connue des surfaces minima.

Au contraire, si a tend vers o, l'équation (8) prend la forme

$$2\rho\rho_1 p-(\rho+\rho_1)q=0,$$

elle représente les inverses des surfaces minima par rapport à l'origine.

En supposant que le rayon a de la sphère fixe (S) ne soit ni infini ni nul, si l'on transforme par l'inversion cette sphère en un plan, les surfaces (Q) deviennent les *surfaces isothermiques* (I) qui sont étudiées dans le Chap. III.

11. Applications analytiques. — On peut interpréter analytiquement les relations qui existent entre les deux nappes d'une enveloppe E dans le cas où ces deux nappes se correspondent avec similitude des éléments infiniment petits. Conservons les notations employées au n° 4, soient (X, Y, Z) les coordonnées d'un point M de la surface (M) et (X′, Y′, Z′) les coordonnées du point correspondant M′ de la seconde nappe (M′). Posons

$$(9)\qquad \left\{\begin{array}{l} X^2+Y^2+Z^2=\dfrac{u+l}{u-l}, \qquad X'^2+Y'^2+Z'^2=\dfrac{u'+l'}{u'-l'},\\ x=X(u-l), \qquad y=Y(u-l), \qquad z=Z(u-l),\\ \qquad\qquad x'=X'(u'-l'), \qquad \ldots, \end{array}\right.$$

et soient A et A′ les points qui ont respectivement pour coordonnées (x, y, z) et (x', y', z'). Nous avons trouvé au n° 4 que x, y, z, u et x', y', z', u' étaient liés par des équations de la forme

$$\frac{\partial\Theta}{\partial\alpha}=\lambda\frac{\partial\Theta'}{\partial\alpha}, \qquad \frac{\partial\Theta}{\partial\beta}=\mu\frac{\partial\Theta'}{\partial\beta},$$

α et β étant les paramètres des lignes de courbure des deux surfaces (M) et (M′), ou les paramètres des développables de la congruence (MM′).

Les points correspondants M et M′ sont conjugués harmoniques par rapport aux points focaux de la droite MM′; on en déduit facilement que les points A et A′ sont conjugués harmoniques par rapport aux points focaux de la droite AA′, et l'on peut poser

$$(10)\qquad \lambda=-\mu.$$

Réciproquement, si cette condition est vérifiée, les points M et M′ sont conjugués harmoniques par rapport aux points focaux de la droite MM′ et, par suite, les surfaces (M) et (M′), qui sont les deux nappes d'une enveloppe E, se correspondent avec similitude des éléments infiniment petits.

On peut transformer la condition (10). Remarquons que chacune des fonctions Θ et Θ' vérifie une équation de Laplace à invariants égaux; posons

$$\lambda=-\mu=\omega^2, \qquad \Theta\omega=\sigma, \qquad \frac{\Theta'}{\omega}=\sigma';$$

on reconnaît facilement que σ et σ' vérifient des équations de la forme

$$\frac{\partial^2\sigma}{\partial\alpha\,\partial\beta} = m\sigma, \qquad \frac{\partial^2\sigma'}{\partial\alpha\,\partial\beta} = m'\sigma'.$$

La première admet cinq solutions $(\omega x, \omega y, \omega z, i\omega u, \omega l)$ dont la somme des carrés est nulle, car on déduit immédiatement des relations (9)

$$x^2 + y^2 + z^2 = u^2 - l^2.$$

De même, la seconde équation est vérifiée par les cinq solutions $\frac{x'}{\omega}$, $\frac{y'}{\omega}$, $\frac{z'}{\omega}$, $\frac{iu'}{\omega}$, $\frac{l'}{\omega}$ dont la somme des carrés est nulle. L'équation en σ est déterminée en même temps que la surface (M) correspondante et, par suite, en même temps qu'une surface applicable sur le paraboloïde. Ces remarques conduisent facilement à la proposition suivante :

Chaque surface applicable sur le paraboloïde fait connaître une équation de Laplace de la forme

$$\frac{\partial^2\sigma}{\partial\alpha\,\partial\beta} = m\sigma$$

qui satisfait à deux conditions : 1° elle est vérifiée par un groupe de cinq solutions dont la somme des carrés est nulle ; 2° si l'on applique à cette équation la transformation de M. Moutard relativement à l'une de ces cinq solutions, la somme des carrés des cinq fonctions correspondantes est nulle.

Il en résulte que *l'équation transformée aura la même définition que la première.*

Réciproquement on pourra déduire, d'une équation de Laplace possédant les deux propriétés énoncées, une surface isothermique (M) et, par suite, une surface applicable sur le paraboloïde.

La recherche des équations de Laplace qui viennent d'être définies est un problème équivalent à la déformation du paraboloïde.

Remarquons que l'on est conduit naturellement aux propositions qui précèdent en appliquant à la déformation du paraboloïde la méthode générale que j'ai exposée dans le Mémoire déjà cité.

Les deux équations en σ et σ', et, par suite, les deux surfaces isothermiques correspondantes (M) et (M′), sont déterminées par la solution ω. Cette solution doit donc être liée aux éléments géométriques des deux surfaces. En appliquant les formules (6) établies au n° 4, on trouve, en négligeant un facteur constant et en désignant par p, q, ρ, ρ_1 les éléments géométriques de la surface (M) employés déjà plusieurs fois,

$$\frac{1}{4\omega^2} = p - \cos k - \frac{q - \frac{1}{2}}{\rho} = -(p - \cos k) + \frac{q - \frac{1}{2}}{\rho_1};$$

on déduit immédiatement de cette double égalité

$$\frac{1}{\omega^2} = (2q - 1)\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho}\right).$$

Remarquons que $(2q - 1)$ est la puissance du point M par rapport à la sphère fixe (S) de centre O et de rayon 1; rappelons que cette sphère est coupée sous un angle constant h par les sphères tangentes à (M) et à (M').

La fonction ω^{-2} *est égale au produit de la différence des courbures principales en un point quelconque de la surface* (M) *par la puissance de ce point par rapport à la sphère fixe* (S).

On obtiendrait une formule analogue à la précédente en calculant ω^2 à l'aide des éléments géométriques de la surface (M'). Si l'on rapproche les deux résultats, on trouve la relation

$$(2q - 1)(2q' - 1)\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho}\right)\left(\frac{1}{\rho'_1} - \frac{1}{\rho'}\right) = -\sin^2 k.$$

Cette égalité exprime que l'équation (10) est vérifiée, *c'est donc la condition nécessaire et suffisante pour que les deux nappes d'une enveloppe* E *se correspondent avec similitude des éléments infiniment petits.*

12. Application à l'équation harmonique. — Lorsque les deux équations de Laplace correspondent à la déformation du paraboloïde général, chacune des constantes l ou l' est différente de o. Si l'une de ces constantes est nulle, l par exemple, nous avons vu au n° 4 que la surface correspondante (M) se confond avec la sphère (S) de centre O et de rayon 1. La surface (M') est alors l'une des surfaces isothermiques (Q) qui sont liées à la déformation du paraboloïde à plan directeur isotrope. Dans ce cas, l'équation

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial\alpha\,\partial\beta} = m\sigma$$

possède quatre solutions dont la somme des carrés est nulle, elle peut donc être ramenée à une *équation harmonique*.

J'avais indiqué déjà, dans ma Thèse de Doctorat, que si l'on applique à une équation harmonique la transformation de M. Moutard relative à une *solution spéciale*, on obtient l'équation de Laplace qui est vérifiée par les coordonnées pentasphériques d'une surface (Q).

Avant de compléter ce résultat, indiquons d'abord une notation que nous emploierons souvent dans la suite.

f étant une fonction d'une variable, nous représenterons, pour simplifier, par le symbole $\mathcal{F}(f)$ le résultat que l'on obtient en effectuant sur la fonction f les opérations indiquées dans l'égalité

$$\mathcal{F}(f) = \left(\frac{1}{\sqrt{f'}}\right)'' : \frac{1}{\sqrt{f'}} = \frac{3f''^2 - 2f'f'''}{4f'^2}.$$

Considérons maintenant une équation harmonique

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 \Theta}{\partial v^2} = [\mathcal{F}(\mathrm{U}) - \mathcal{F}(\mathrm{V})]\,\Theta,$$

on sait qu'elle est vérifiée par une infinité de groupes de quatre solutions dont la somme des carrés est nulle; les solutions $(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)$ de l'un de ces groupes sont

$$\theta_1 = \frac{\mathrm{P}+\mathrm{Q}}{\sqrt{\mathrm{P}'\mathrm{Q}'}}, \qquad \theta_2 = i\,\frac{\mathrm{Q}-\mathrm{P}}{\sqrt{\mathrm{P}'\mathrm{Q}'}}, \qquad \theta_3 = \frac{\mathrm{PQ}-1}{\sqrt{\mathrm{P}'\mathrm{Q}'}}, \qquad \theta_4 = i\,\frac{\mathrm{PQ}+1}{\sqrt{\mathrm{P}'\mathrm{Q}'}}.$$

La recherche de ces solutions θ, ou celle des fonctions P et Q, est un problème identique à la détermination des solutions harmoniques $\frac{1}{\sqrt{\mathrm{P}'\mathrm{Q}'}}$ de l'équation. Pour trouver les solutions θ d'une équation harmonique, il faut donc intégrer les deux équations différentielles

$$(11) \qquad \mathcal{F}(\mathrm{P}) = \mathcal{F}(\mathrm{U}) + h, \qquad \mathcal{F}(\mathrm{Q}) = \mathcal{F}(\mathrm{V}) + h,$$

pour toutes les valeurs de la constante h.

Remarquons que le symbole $\mathcal{F}(f)$ représente l'invariant différentiel du groupe projectif; l'intégrale générale de chacune des équations précédentes, pour une valeur déterminée de h, est donc reliée à une solution particulière par une relation homographique. La détermination des solutions θ est ramenée à la recherche d'*une solution* des équations (11) pour chaque valeur de h.

Il résulte de cette remarque que, si l'on effectue sur les fonctions P et Q qui figurent dans l'expression de $(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)$ une substitution homographique quelconque, on obtient quatre nouvelles solutions θ de la même équation harmonique; il est facile de vérifier que *chacune d'elles s'exprime linéairement à l'aide de* $(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)$. Nous ne considérerons pas ce deuxième groupe comme *distinct* du premier.

Soit ω l'une des solutions θ; considérons l'équation que l'on déduit de l'équation harmonique par la transformation

$$\Omega = \int \left(\Theta \frac{\partial \omega}{\partial u} - \omega \frac{\partial \Theta}{\partial u}\right) dv + \left(\Theta \frac{\partial \omega}{\partial v} - \omega \frac{\partial \Theta}{\partial v}\right) du, \tag{12}$$

et formons les solutions qui correspondent dans cette nouvelle équation à un groupe de quatre solutions θ de l'équation harmonique, par exemple au groupe

$$\lambda_1 = \frac{U+V}{\sqrt{U'V'}}, \qquad \lambda_2 = i\,\frac{V-U}{\sqrt{U'V'}}, \qquad \lambda_3 = \frac{UV-1}{\sqrt{U'V'}}, \qquad \lambda_4 = i\,\frac{UV+1}{\sqrt{U'V'}}.$$

Pour simplifier les calculs effectuons un changement de variables, et posons

$$\begin{aligned} U &= a, & U' &= m(a), & P(u) &= P_1(a), \\ V &= b, & V' &= n(b), & Q(v) &= Q_1(b), \end{aligned}$$

les équations (11) prennent la forme

$$\mathcal{F}(P_1) = \frac{h}{m^2(a)}, \qquad \mathcal{F}(Q_1) = \frac{h}{n^2(b)}. \tag{13}$$

La recherche des solutions harmoniques d'une équation harmonique est donc ramenée à l'intégration, pour toutes les valeurs de h, des deux équations précédentes que nous retrouverons dans le Chapitre III.

Supposons que ω appartienne à un groupe de solutions θ *distinct* du groupe $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$, et posons

$$\omega\sqrt{m(a)n(b)} = f(a, b).$$

Si l'on transforme l'équation harmonique à l'aide de la formule (12), au groupe $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ correspondront quatre solutions $(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4)$ définies par les formules

$$(14)\qquad \left\{\begin{aligned} \mu_1 &= (a+b)\frac{\partial^2 f}{\partial a\,\partial b} - \left(\frac{\partial f}{\partial a} + \frac{\partial f}{\partial b}\right),\\ \mu_2 &= i(b-a)\frac{\partial^2 f}{\partial a\,\partial b} - i\left(\frac{\partial f}{\partial a} - \frac{\partial f}{\partial b}\right),\\ \mu_3 &= (ab-1)\frac{\partial^2 f}{\partial a\,\partial b} - \left(a\frac{\partial f}{\partial a} + b\frac{\partial f}{\partial b} - f\right),\\ \mu_4 &= i(ab+1)\frac{\partial^2 f}{\partial a\,\partial b} - i\left(a\frac{\partial f}{\partial a} + b\frac{\partial f}{\partial b} - f\right). \end{aligned}\right.$$

On établit facilement la relation

$$(15)\qquad \mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2 + \mu_4^2 = -4,$$

et l'on peut énoncer la proposition suivante qui résulte des formules (12) et (15) :

Appliquons à une équation harmonique la transformation de M. Moutard relative à ω, solution θ de l'équation harmonique. A chaque groupe de solutions θ, distinct du groupe dont ω fait partie, on peut faire correspondre, dans l'équation transformée, un groupe de cinq solutions dont la somme des carrés est nulle.

Il est facile de *caractériser* les équations en Ω que l'on déduit par la formule (12) d'une équation harmonique. Cette formule fait correspondre, en effet, aux trois solutions θ du même groupe que ω trois fonctions qui représentent les coordonnées rectangulaires d'une surface minima rapportée à ses lignes de longueur nulle. En transformant un peu ce résultat on obtient le théorème suivant :

L'équation de Laplace à invariants égaux, que vérifient les coordonnées rectangulaires d'une surface minima rapportée à ses lignes de courbure, possède une infinité de groupes de quatre solutions dont la somme des carrés est constante.

Cette constante est différente de o d'après la formule (15); elle est nulle dans le cas limite où ω devient une solution harmonique. On sait, en effet, que si l'on applique à une équation harmonique la transformation de M. Moutard relative à une solution harmonique, l'équation transformée est harmonique.

Il résulte de la relation (15) que les quantités μ_1, μ_2, μ_3 μ_4, et 2, qui sont cinq solutions de l'équation en Ω, peuvent être considérées comme les coordonnées pentasphériques d'une surface isothermique. Les surfaces isothermiques, que l'on peut déduire par ce procédé de toutes les équations harmoniques, sont les surfaces (Q) signalées au n° 10.

Rappelons qu'à chaque surface isothermique (Q) est associée une sphère fixe (S) sur laquelle des sphères variables tangentes à (Q) et à (S) décrivent un tracé géographique de la surface (Q).

Chaque équation en Ω, qui est déterminée à l'aide de la formule (12) par une solution ω, fait connaître une infinité de surfaces (Q). On peut établir une liaison géométrique entre toutes les surfaces (Q) que l'on déduit ainsi d'une même solution ω.

Appliquons la remarque faite au n° 11 dans le cas général : *La fonction ω^{-2} est égale au produit de la différence des courbures principales en un point quelconque d'une surface* (Q) *correspondante par la puissance de ce point par rapport à la sphère* (S) *associée.*

En employant les notations du n° 11 et en désignant par r et r' les rayons des sphères associées à deux surfaces Q, on déduit de la remarque précédente que *la relation*

$$(2q - r^2)\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho}\right) = (2q' - r'^2)\left(\frac{1}{\rho'_1} - \frac{1}{\rho'}\right),$$

qui relie les éléments géométriques des deux surfaces, *est la condition nécessaire et suffisante pour que ces deux surfaces correspondent à une même solution* ω. Dans ce cas, les coordonnées pentasphériques (μ_1, μ_2, μ_3, μ_4, 2) des deux surfaces sont solutions d'une même équation en Ω.

Considérons, au contraire, toutes les surfaces isothermiques qui dérivent d'un même groupe de solutions (θ_1, θ_2, θ_3, θ_4) lorsqu'on remplace successivement, dans la formule (12), ω par toutes les solutions θ de l'équation harmonique. Parmi ces surfaces, on trouve en particulier la surface minima (M) que l'on obtient en remplaçant ω par θ_4. La proposition suivante rattache cette surface minima aux surfaces (Q) :

Les lignes de courbure de toutes les surfaces (Q) *qui dérivent d'un même groupe de solutions* θ *ont pour image, sur chaque sphère* (S) *correspondante, la représentation sphérique des lignes de courbure de la surface minima* (M) (ou bien un réseau inverse de cette représentation sphérique).

CHAPITRE III.

ÉTUDE D'UNE CLASSE DE SURFACES ISOTHERMIQUES.

13. Système particulier de coordonnées curvilignes. — Au n° 10 du Chapitre précédent, nous avons trouvé une classe de surfaces isothermiques définies par la relation

$$2\rho\rho_1(p+1)-(\rho+\rho_1)\left(q-\tfrac{1}{2}\right)=0;$$

nous avons vu que les sphères (Σ), tangentes à l'une de ces surfaces et à la sphère (S) de centre o et de rayon 1, décrivaient sur la sphère (S) un tracé géographique de la surface. Si l'on transforme la figure par inversion, le centre d'inversion étant un point quelconque de la sphère fixe (S), cette sphère se transformera en un plan (P) qui correspondra géographiquement, par sphères tangentes, aux surfaces inverses des premières; nous appellerons *surfaces* (I) ces surfaces inverses.

Dans ce Chapitre, nous montrerons que la propriété indiquée *caractérise les surfaces* (I) et nous ferons l'étude de ces surfaces qui peuvent être entièrement déterminées sans quadratures.

Il est utile d'établir auparavant des formules relatives à la correspondance par sphères tangentes entre une surface quelconque et un plan fixe; il suffira pour cela de transformer un peu les coordonnées tangentielles (α, β, ξ) employées par Ossian Bonnet.

Supposons qu'une surface quelconque (A) soit représentée par les coordonnées (α, β, ξ), c'est-à-dire soit considérée comme l'enveloppe du plan dont l'équation est

$$(\alpha+\beta)X+i(\beta-\alpha)Y+(\alpha\beta-1)Z+\xi=0.$$

Introduisons à la place de ξ une fonction φ telle que

$$\xi = -2\varphi.$$

En désignant par P et Q les dérivées premières de φ par rapport à α et à β, les coordonnées (X, Y, Z) d'un point de la surface (A) sont représentées par les formules suivantes :

$$\begin{aligned}
X &= (P+Q) - \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta+1}(P\alpha+Q\beta-\varphi),\\
Y &= i(P-Q) - \frac{i(\beta-\alpha)}{\alpha\beta+1}(P\alpha+Q\beta-\varphi),\\
Z &= (P\alpha+Q\beta-\varphi) - \frac{\alpha\beta-1}{\alpha\beta+1}(P\alpha+Q\beta-\varphi),
\end{aligned}$$

et les cosinus directeurs (C, C', C'') de la normale à la surface sont

$$C = \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta+1}, \qquad C' = \frac{i(\beta-\alpha)}{\alpha\beta+1}, \qquad C'' = \frac{\alpha\beta-1}{\alpha\beta+1}.$$

Effectuons un changement de variables équivalent à la transformation de Legendre; posons

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\beta} = a, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} = b, \qquad P\alpha+Q\beta-\varphi = f(a, b).$$

On sait qu'on en peut déduire

$$p = \frac{\partial f}{\partial a} = \beta, \qquad q = \frac{\partial f}{\partial b} = \alpha.$$

L'expression des coordonnées (X, Y, Z) en fonction de a et b est

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned}
X &= (a+b) - \frac{p+q}{pq+1}f = x - Cf,\\
Y &= i(b-a) - \frac{i(p-q)}{pq+1}f = y - C'f,\\
Z &= f - \frac{pq-1}{pq+1}f = z - C''f.
\end{aligned}\right.$$

Il résulte de la forme des équations (1) que la sphère variable (Σ), représentée par l'équation

$$(X-a-b)^2 + (Y-ib+ia)^2 + (Z-f)^2 = f^2,$$

est tangente au plan des xy et à la surface (A), qui constituent les deux nappes de son enveloppe. Le centre de la sphère (Σ) est le point C de coordonnées (x, y, z).

Pour abréger, nous donnerons le nom de *surface des centres* à la surface (C) décrite par le centre C de la sphère (Σ).

Le point du plan des xy qui a pour coordonnées (x, y) est le point de contact de la sphère variable et du plan des xy; nous dirons qu'il est la *représentation plane* du point A, où la même sphère touche la surface (A).

Les formules (1), dans lesquelles a et b sont les paramètres des droites isotropes du plan des xy, *représentent les coordonnées d'une surface quelconque rapportée aux lignes de longueur nulle de sa représentation plane*.

La surface (A) peut aussi être considérée comme l'enveloppe du plan

$$(2)\qquad \left(\frac{\partial f}{\partial a}+\frac{\partial f}{\partial b}\right)X+i\left(\frac{\partial f}{\partial a}-\frac{\partial f}{\partial b}\right)Y+\left(\frac{\partial f}{\partial a}\frac{\partial f}{\partial b}-1\right)Z-2\left(a\frac{\partial f}{\partial a}+b\frac{\partial f}{\partial b}-f\right)=0.$$

Désignons par r, s, t les dérivées secondes de la fonction f, et calculons les expressions des éléments géométriques du second ordre de la surface (A).

L'équation différentielle des lignes de courbure est

$$(3)\qquad r\,da^2-t\,db^2=0.$$

Les rayons de courbure principaux ρ et ρ_1 ont pour expression

$$(4)\qquad \rho=f-\frac{1+pq}{s+\sqrt{rt}},\qquad \rho_1=f-\frac{1+pq}{s-\sqrt{rt}}.$$

On en déduit facilement les développées de la surface (A).

L'équation des lignes asymptotiques de la surface (A) est

$$(5)\qquad (1-sZ)(r\,da^2+t\,b^2)+(2s-rtZ-s^2Z)\,da\,db=0,$$

et l'élément linéaire de la surface

$$(6)\qquad dS^2=(Z\,dq-2\,da)(Z\,dp-2\,db).$$

Indiquons enfin l'équation des lignes asymptotiques de la surface des centres (C)

$$(7)\qquad r\,da^2+2s\,da\,db+t\,db^2=0.$$

En rapprochant les formules (2) et (7), on voit que les lignes de courbure de la surface (A) correspondent à un réseau orthogonal du plan des xy et à un réseau conjugué de la surface des centres.

La remarque précédente, dont la démonstration géométrique est très simple, avait été indiquée par M. Darboux dans son Mémoire *Sur la Théorie des coordonnées curvilignes* (1878) (1).

14. Détermination des surfaces (I). — Cherchons à déterminer toutes les surfaces dont un tracé géographique est donné par la représentation plane. Il suffira d'exprimer que les lignes de longueur nulle de la surface et celles de sa représentation plane se correspondent.

L'élément linéaire d'une surface (A) rapportée aux lignes de longueur nulle de la représentation plane étant, d'après la formule (6),

$$dS^2 = (Z\,dq - 2\,da)(Z\,dp - 2\,db),$$

les équations différentielles des lignes de longueur nulle de la surface seront

$$(Zs - 2)\,da + Zt\,db = 0, \qquad (Zs - 2)\,db + Zr\,da = 0.$$

Les droites isotropes du plan des xy sont représentées par les équations

$$da = 0, \qquad db = 0.$$

On reconnaît facilement que la correspondance entre les lignes de

(1) L'analogie, que présentent les formules précédentes avec les formules correspondantes dans le système de coordonnées (α, β, ξ), conduit à supposer qu'il existe une relation géométrique entre une surface (A) dont les coordonnées d'Ossian Bonnet sont (α, β, ξ) et la surface (A′) définie, dans le même système de coordonnées, par $\left(\frac{\partial\xi}{\partial\beta}, \frac{\partial\xi}{\partial\alpha}, \alpha\frac{\partial\xi}{\partial\beta} + \beta\frac{\partial\xi}{\partial\alpha} - \xi\right)$.

La correspondance établie entre (A) et (A′) est réciproque; elle peut être obtenue en effectuant successivement les quatre opérations suivantes : 1° une dilatation; 2° une inversion par rapport à l'origine; 3° une dilatation; 4° une inversion par rapport au point de coordonnées (0, 0, 1). On peut aussi effectuer ces opérations dans l'ordre inverse.

La transformation conserve les lignes de courbure et fait correspondre une sphère à une sphère. En particulier, un plan se transforme en une sphère tangente au plan des xy; au plan de l'infini correspond le plan des xy.

Signalons les deux propriétés suivantes des deux surfaces (A) et (A′) :

La représentation plane de l'une des surfaces est inverse de la représentation sphérique de l'autre. Les *surfaces des centres* de (A) et (A′) sont polaires réciproques par rapport à un paraboloïde.

longueur nulle de la surface (A) et du plan des xy peut être établie de deux manières :

1° Si l'on suppose vérifiées les relations

$$r = t = 0,$$

la fonction $f(a, b)$ est, dans ce cas, en désignant par l, m, n des constantes,

$$f(ab) = ab + la + mb + n$$

et la surface (A) est une sphère qui correspond par inversion au plan des xy. Nous écarterons cette solution qui pouvait être prévue.

2° Il y aura aussi correspondance entre les lignes de longueur nulle si l'on a

$$Zs - 2 = 0.$$

Remplaçons Z par son expression tirée des formules (1)

$$Z = \frac{2f(a, b)}{1 + pq},$$

la relation précédente devient

$$fs = 1 + pq. \tag{8}$$

Si l'on désigne par A une fonction quelconque de a, et par B une fonction quelconque de b, l'intégrale générale de l'équation (8) peut être mise sous la forme

$$f(a, b) = \frac{1 + AB}{\sqrt{A'B'}}. \tag{9}$$

En remplaçant dans les formules (1) la fonction $f(a, b)$ par cette expression et en faisant usage de l'équation (8), on obtient les coordonnées (X, Y, Z) des surfaces qui correspondent géographiquement à leur représentation plane; ces coordonnées sont :

$$\left\{\begin{aligned} X &= a + b - \frac{p + q}{s}, \\ Y &= i(b - a) - \frac{i(p - q)}{s}, \\ Z &= \frac{2}{s}. \end{aligned}\right. \tag{10}$$

Les équations précédentes représentent les *surfaces* (I), c'est-à-dire les inverses, par rapport au point de coordonnées $(0, 0, 1)$, des surfaces isothermiques (Q) signalées au n° 10. On vérifie aisément, en effet, que les surfaces (Q) et les surfaces représentées par les équations (10) ont les mêmes coordonnées pentasphériques; ces coordonnées $(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, 2)$ sont définies par les équations (14) du n° 12.

Les surfaces (I) *sont isothermiques et l'on en peut déduire, par des quadratures, les surfaces applicables sur le paraboloïde qui a un plan directeur isotrope.*

Il résulte de la définition que l'inverse d'une surface (I) par rapport à un point du plan des xy est une surface (I).

Si l'on considère une surface (I) et la surface des centres correspondante, on déduit des propriétés des enveloppes de sphères que le plan tangent à la surface des centres en un point est bissecteur du dièdre formé par le plan des xy et le plan tangent à la surface (I) au point correspondant.

En d'autres termes, si des rayons lumineux normaux à une surface (I) sont réfléchis sur la surface des centres, ils forment un faisceau de rayons parallèles et donnent sur un plan perpendiculaire à leur direction une carte géographique de la surface (I). Cette propriété *caractérise les surfaces* (I).

15. **Détermination des surfaces (I) algébriques.** — Les formules (10), qui donnent l'expression des coordonnées d'un point d'une surface (I), renferment les dérivées p, q, s de la fonction $f(a, b)$ définie par la relation (9); dans ces formules (10) figurent donc les fonctions arbitraires A et B, et leurs dérivées premières A′ et B′. Cherchons comment on doit choisir les fonctions A et B pour que la surface (I) correspondante soit algébrique.

Remarquons que, si une surface (I) est algébrique, la surface (C), décrite par le centre des sphères tangentes à la surface (I) et au plan des xy, est aussi une surface algébrique. Les coordonnées (x, y, z) d'un point de la surface (C) étant

$$(11)\qquad x = a + b, \qquad y = i(b - a), \qquad z = f(a, b) = \frac{1 + AB}{\sqrt{A'B'}},$$

la surface (C) sera algébrique si $f(a, b)$ est une fonction algébrique de a et b. On en déduit facilement que A et B doivent être des fonctions algébriques.

Réciproquement, si les fonctions arbitraires A et B sont algébriques, les coordonnées (X, Y, Z) d'un point de la surface (I) correspondante s'expriment algébriquement à l'aide des paramètres a et b; la surface (I) est donc algébrique.

Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante, établie par un autre procédé dans ma Thèse de Doctorat :

On obtient toutes les surfaces (I) *algébriques en remplaçant dans les formules* (10) *les fonctions arbitraires* A *et* B *par des fonctions algébriques quelconques.*

16. Détermination des surfaces (I) réelles. — Cherchons à déterminer les fonctions arbitraires A et B des paramètres a et b pour que la surface (I) soit réelle.

Si une surface (I) est réelle, les sphères tangentes à cette surface et au plan des xy sont réelles et, par suite, la surface (C), lieu des centres de ces sphères, est réelle. D'après les formules (11), qui donnent les coordonnées d'un point (x, y, z) de la surface (C), les paramètres a et b doivent être imaginaires conjugués et la valeur correspondante de $f(a, b)$ doit être réelle. Il faut donc déterminer les fonctions A et B de deux paramètres imaginaires conjugués a et b de façon que la fonction

$$f(a, b) = \frac{1 + AB}{\sqrt{A'B'}}$$

soit réelle; les formules (10) représenteront alors une surface (I) réelle.

Faisons usage d'un symbole déjà employé au n° 12, et posons, pour simplifier,

$$\mathfrak{F}(A) = \left(\frac{1}{\sqrt{A'}}\right)'' : \left(\frac{1}{\sqrt{A'}}\right) = \frac{3A''^2 - 2A'A'''}{4A'^2}. \tag{12}$$

En utilisant cette notation, on peut écrire

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial a^2} = \mathfrak{F}(A) f(a, b), \qquad t = \frac{\partial^2 f}{\partial b^2} = \mathfrak{F}(B) f(a, b).$$

Les dérivées r et t étant imaginaires conjuguées, on déduit des égalités précédentes que $\mathfrak{F}(A)$ et $\mathfrak{F}(B)$ le sont aussi.

Si l'on désigne par A_1 la fonction imaginaire conjuguée de A, $\mathfrak{F}(A)$ et $\mathfrak{F}(A_1)$ sont imaginaires conjuguées et l'on obtient la relation

$$\mathfrak{F}(A_1) = \mathfrak{F}(B).$$

On déduit de l'égalité précédente que les fonctions A_1 et B sont liées par une relation homographique

$$B = \frac{mA_1 + n}{m'A_1 + n'}$$

dans laquelle nous pouvons toujours supposer que les constantes m, n, m', n' vérifient l'égalité

$$mn' - m'n = 1. \tag{13}$$

Remplaçons B par son expression en fonction de A_1 dans $f(a, b)$; nous obtiendrons

$$f(a, b) = \frac{mAA_1 + nA + m'A_1 + n'}{\sqrt{A'A'_1}}.$$

Le dénominateur de $f(a, b)$ étant réel, pour que le numérateur le soit, c'est-à-dire pour qu'il reste identique lorsque l'on change i en $-i$, *il faut et il suffit* que m' et n soient réelles et que m et n' soient imaginaires conjuguées. On reconnaît facilement que la condition (13), établie entre les constantes, peut être supprimée dans l'énoncé suivant :

On obtient toutes les surfaces (I) *réelles en associant dans les formules* (10) *à une fonction analytique quelconque* A *du paramètre a une fonction* B *du paramètre imaginaire conjugué b. Cette fonction* B *est liée à la fonction* A_1, *imaginaire conjuguée de* A, *par la relation*

$$B = \frac{mA_1 + n}{m'A_1 + n'}$$

dans laquelle les constantes m' et n sont réelles et les constantes m et n' imaginaires conjuguées.

17. **Lignes de courbure.** — Nous avons vu au n° 13 que l'équation des lignes de courbure d'une surface rapportée aux lignes de longueur

nulle de la représentation plane était

$$r\,da^2 - t\,db^2 = 0.$$

En faisant usage du symbole $\mathcal{F}(A)$ défini par la formule (12), nous avons trouvé, dans le cas des surfaces (I), les expressions suivantes de r et de t :

$$r = \mathcal{F}(A)f, \qquad t = \mathcal{F}(B)f;$$

et, par suite, les deux familles de lignes de courbure d'une surface (I) sont représentées par les équations

$$\int\sqrt{\mathcal{F}(A)}\,da \pm \int\sqrt{\mathcal{F}(B)}\,db = \text{const.} \tag{14}$$

Les paramètres a et b sont liés aux coordonnées (x, y) de la représentation plane par les formules

$$x = a + b, \qquad y = i(b - a);$$

on déduit donc facilement des équations (14) la représentation plane des lignes de courbure d'une surface (I).

Il résulte de la forme des équations (14) que cette représentation plane est un *réseau orthogonal et isotherme du plan des xy* (¹). Cette proposition, que l'on peut déduire d'une propriété des surfaces inverses (Q) définies au n° 10, est une conséquence de la définition des surfaces (I).

En effet, la correspondance établie entre une surface (I) et le plan des xy conservant les angles et la similitude des éléments infiniment petits, la représentation plane d'un réseau orthogonal et isotherme de la surface est un réseau orthogonal et isotherme du plan des xy.

(¹) Désignons par ρ et ρ_1 les rayons de courbure d'une surface, par d et d_1 les distances des centres de courbures au plan sur lequel on fait la représentation plane, et posons

$$r(\rho + \rho_1 - d - d_1) = 2\rho\rho_1 - \rho d_1 - \rho_1 d.$$

On peut énoncer la proposition suivante :

La condition nécessaire et suffisante pour que la surface ait une représentation plane isotherme est que les lignes de courbure se correspondent sur les deux nappes de l'enveloppe des sphères de rayon r tangentes à la surface.

Lorsque le rayon r est nul, la surface est une surface (I).

En particulier, la représentation plane des lignes de courbure d'une surface (I) est un réseau orthogonal et isotherme.

Les surfaces (I) sont isothermiques, et nous venons de voir que la représentation plane de leurs lignes de courbure est isotherme. *Cette double propriété ne caractérise pas les surfaces* (I).

Parmi les surfaces qui satisfont à ces deux conditions se trouvent, en effet, les surfaces de révolution dont l'axe est parallèle à Oz ou les cylindres dont les génératrices sont parallèles au plan des xy et toutes les surfaces qu'on en déduit par inversion, le centre d'inversion étant un point du plan des xy.

Signalons encore les surfaces isothermiques qui constituent la seconde nappe de l'enveloppe d'une sphère tangente au plan des xy et dont le centre a pour coordonnées

$$x = a + b, \qquad y = i(b - a), \qquad z = \sqrt{ha^2 + ka + l}\sqrt{h'b^2 + k'b + l'},$$

h, k, l, h', k', l' sont des constantes liées par la condition

$$(hl - k^2)(h'l' - k'^2) + 1 = 0.$$

Rayons de courbure. — L'expression des rayons de courbure, définie pour une surface quelconque par les formules (3), devient, dans le cas des surfaces (I),

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{f} + \frac{s}{f\sqrt{rt}}, \qquad \frac{1}{\rho_1} = \frac{1}{f} - \frac{s}{f\sqrt{rt}}. \tag{15}$$

Ajoutons membre à membre ces deux équations, nous obtenons

$$\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho_1} = \frac{2}{f}.$$

Cette relation exprime que le centre de la sphère variable, qui détermine la représentation plane d'un point M d'une surface (I), est le point qui correspond à M sur la développée harmonique de la surface.

Cette propriété caractérise les surfaces (I). Écrivons en effet, à l'aide des formules (3), que le rayon f des sphères tangentes à une surface et au plan des xy est égal à l'inverse de la courbure moyenne de cette surface; nous obtenons l'équation

$$\frac{(fs - 1 - pq)s - frt}{(fs - 1 - pq)^2 - f^2 rt} = \frac{1}{f};$$

d'où l'on déduit facilement la condition (8)

$$fs = 1 + pq,$$

qui caractérise les surfaces (I).

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une surface soit une surface (I) *est que la développée harmonique de la surface soit confondue avec la surface des centres.*

Application. — Cherchons à déterminer *les surfaces* (I) *algébriques dont les lignes de courbure sont algébriques.*

Remarquons d'abord que la représentation plane d'une courbe tracée sur une *surface algébrique* est obtenue au moyen de sphères tangentes à la surface et au plan des xy; il en résulte que la condition nécessaire et suffisante pour que la courbe soit algébrique est que la représentation plane le soit.

La représentation plane des lignes de courbure d'une surface (I) est définie par les équations (14)

$$\int \sqrt{\mathfrak{F}(A)}\, da \pm \int \sqrt{\mathfrak{F}(B)}\, db = \text{const.},$$

et les paramètres a, b sont liés aux coordonnées (x, y) d'un point de la représentation plane par les formules

$$x = a + b, \qquad y = i(b - a).$$

Si la représentation plane est algébrique, les fonctions

$$\int \sqrt{\mathfrak{F}(A)}\, da, \qquad \int \sqrt{\mathfrak{F}(B)}\, db,$$

qui dépendent des fonctions algébriques A et B, seront elles-mêmes algébriques.

La recherche des surfaces (I) algébriques dont les lignes de courbure sont algébriques est donc ramenée à la *détermination de toutes les fonctions algébriques* A *telles que*

$$\int \sqrt{\mathfrak{F}(A)}\, da$$

soit aussi une fonction algébrique.

Lorsqu'on connaîtra une fonction A satisfaisant à cette double condition, on obtiendra toutes les surfaces (I) *réelles* qui correspondent à A en associant à A une fonction B liée à la fonction imaginaire conjuguée de A par la relation homographique définie au n° 16. Chaque fonction algébrique A, qui satisfait à la condition énoncée, fait donc connaître une famille de surfaces (I) qui sont toutes algébriques et réelles, et qui ont des lignes de courbure algébriques. Cette famille de surfaces dépend de trois constantes réelles arbitraires.

On peut déduire de chacune des surfaces (I) particulières que nous avons considérées une infinité de surfaces (I) qui ont les mêmes propriétés; il suffit de transformer la première surface à l'aide d'une inversion effectuée par rapport à un point du plan des xy.

Plus généralement, désignons par A et B les fonctions qui correspondent à l'une de ces surfaces (I); si l'on effectue sur A et B une substitution homographique quelconque, les invariants différentiels $\mathfrak{F}(A)$ et $\mathfrak{F}(B)$ ne changeront pas, et, par suite, toutes les surfaces (I) algébriques que nous obtiendrons de cette manière auront leurs lignes de courbure algébriques. En désignant par k, l, m, n des constantes arbitraires, indiquons l'expression de la fonction $f(a, b)$, qui, à l'aide des formules (10), déterminerait toutes ces surfaces (I) :

$$f(a, b) = \frac{kAB + lA + mB + n}{\sqrt{kn - lm}\sqrt{A'B'}}. \tag{16}$$

De chaque surface (I) *algébrique dont les lignes de courbure sont algébriques, on peut déduire une famille de surfaces* (I) *possédant cette double propriété en substituant à la fonction* $\frac{1+AB}{\sqrt{A'B'}}$, *qui définit la première surface, la fonction* $f(a, b)$ *représentée par la formule* (16) *à l'aide de trois constantes arbitraires.*

18. **Le problème de M. Darboux.** — Dans la Communication faite le 29 mai 1899 à l'Académie des Sciences, M. Darboux a cherché les surfaces isothermiques telles que chacune constitue, avec une surface isothermique donnée (M), les deux nappes d'une enveloppe des phères, la correspondance entre les deux surfaces ayant lieu à la fois avec conservation des lignes de courbure et similitude des éléments infini-

ment petits. Ces surfaces isothermiques dépendent de quatre constantes arbitraires et leur détermination peut être ramenée à l'intégration d'un système d'équations aux dérivées partielles.

Un plan peut être considéré d'une infinité de manières comme une surface isothermique, un réseau orthogonal et isotherme du plan jouant le rôle des lignes de courbure. C'est pour cette raison que les surfaces (I), qui constituent avec le plan les deux nappes et l'enveloppe des sphères, dépendent de deux fonctions arbitraires.

Mais, si l'on se donne dans le plan un réseau orthogonal et isotherme, le problème de M. Darboux pourra être énoncé de la manière suivante :

Déterminer toutes les surfaces (I) *qui ont pour représentation plane de leurs lignes de courbure un réseau orthogonal et isotherme donné.*

L'équation différentielle du réseau orthogonal et isotherme étant

$$\varphi(a)\,da^2 - \psi(b)\,db^2 = 0,$$

si l'on considère l'équation des lignes de courbure d'une surface (I), on reconnaît immédiatement que la détermination des fonctions A et B, dont dépendent les surfaces (I) cherchées, est ramenée à l'intégration des deux équations

$$\mathcal{F}(\mathrm{A}) = h\,\varphi(a), \qquad \mathcal{F}(\mathrm{B}) = h\varphi(b), \tag{17}$$

pour toutes les valeurs de la constante h.

Les équations précédentes sont identiques aux équations (13) du nº 12 qui font connaître les solutions harmoniques d'une équation harmonique. L'intégrale de chacune des équations (17) renferme trois constantes arbitraires; les surfaces (I) correspondantes paraissent donc dépendre de sept constantes, h étant comprise. En réalité, si l'on considère l'expression de $f(a, b)$ donnée par la formule (16), on voit facilement qu'il n'y a que quatre constantes arbitraires.

Les surfaces (I), *qui ont un réseau orthogonal et isotherme donné pour représentation plane de leurs lignes de courbure, dépendent de quatre constantes arbitraires.*

La recherche de ces surfaces est un problème identique à la détermination des solutions harmoniques d'une équation harmonique.

On peut donner une autre forme à ce résultat. Considérons l'ensemble des surfaces (I), et faisons correspondre sur toutes ces surfaces les points qui ont la même représentation plane; nous ferons correspondre de cette manière les lignes de longueur nulle et les réseaux orthogonaux et isothermes. Sur l'une des surfaces (I), chaque réseau orthogonal et isotherme correspond aux lignes de courbure d'une famille de surfaces (I) dépendant de quatre constantes arbitraires; toutes les surfaces de cette famille ont la même représentation plane de leurs lignes de courbure.

Indiquons une *relation géométrique* entre deux surfaces (I) qui possèdent cette propriété. Supposons qu'elles correspondent aux valeurs h_1 et h'_1 de la constante h qui figure dans les équations (17). On peut établir l'équation suivante qui relie les rayons de courbure et les ordonnées des deux surfaces en deux points correspondants :

$$h_1 \frac{(\rho - \rho_1)\rho\rho_1 Z}{(\rho + \rho_1)^2} = h'_1 \frac{(\rho' - \rho'_1)\rho'\rho'_1 Z'}{(\rho' + \rho'_1)^2};$$

mais cette condition n'est pas suffisante.

Dans le cas particulier où les valeurs h_1 et h'_1 sont égales, les fonctions A et B qui définissent les deux surfaces correspondent dans les deux équations (17) à la même valeur de h. Les deux fonctions A, ou les deux fonctions B, sont alors liées par une relation homographique.

On déduit facilement de cette remarque le théorème suivant :

Toutes les surfaces (I), *que l'on obtient en remplaçant dans les formules* (10) *la fonction* $f(a, b)$ *par l'expression*

$$f(a, b) = \frac{k\mathrm{AB} + l\mathrm{A} + m\mathrm{B} + n}{\sqrt{kn - lm}\sqrt{\mathrm{A}'\mathrm{B}'}},$$

dans laquelle k, l, m, n *sont des constantes, ont la même représentation plane de leurs lignes de courbure.*

Cette proposition peut encore être énoncée sous une autre forme :

On peut déduire immédiatement d'une surface (I) *donnée une infinité* *de surfaces* (I), *dépendant de trois constantes arbitraires, et ayant la même représentation plane de leurs lignes de courbure que la surface donnée.*

Au n° 19, le problème de M. Darboux est entièrement résolu dans deux cas simples.

19. **Élément linéaire.** — On peut donner à l'élément linéaire d'une surface (I) les formes suivantes :

$$ds^2 = \frac{4rt}{s^2}\,da\,db = 4\left(\frac{\rho+\rho_1}{\rho-\rho_1}\right)^2 da\,db. \tag{18}$$

L'élément linéaire du plan des xy étant

$$ds^2 = 4\,da\,db,$$

le rapport d'un arc infiniment petit tracé sur une surface (I) à la représentation plane de cet arc est $\frac{\rho+\rho_1}{\rho-\rho_1}$. Lorsque ce rapport est constant, la surface (I) est développable; dans ce cas, l'un des rayons de courbure étant infini, le rapport est égal à l'unité. En d'autres termes, les courbes tracées sur la surface ont la même longueur que leur représentation plane.

Inversement, cherchons à déterminer les surfaces développables telles que la correspondance établie entre chaque surface et un plan fixe, au moyen de sphères tangentes à la surface et au plan, réalise l'application de la surface sur le plan. La correspondance conservant évidemment les lignes de longueur nulle, les surfaces cherchées sont les surfaces (I) développables que nous allons maintenant déterminer.

Surfaces (I) *développables.* — Le plan tangent à une surface développable étant le même en tous les points d'une génératrice, la représentation plane d'une génératrice sera une ligne droite. L'une des deux familles de courbes du réseau orthogonal et isotherme, qui constitue la représentation plane des lignes de courbure d'une surface (I), doit donc être formée de droites; on en déduit que l'autre famille est formée de droites ou de cercles.

Pour obtenir les surfaces cherchées, il suffira de distinguer les surfaces développables parmi les surfaces (I) dont les lignes de courbures ont pour représentation plane un réseau formé de droites ou un réseau formé de droites et de cercles. Nous avons donc à résoudre le problème de M. Darboux dans deux cas particuliers.

1° Dans le premier cas, on peut toujours supposer que les droites du réseau sont parallèles aux axes de coordonnées. Les équations (signalées au n° 18), qui déterminent les surfaces (I) correspondantes, sont dans ce cas

$$\mathcal{F}(\mathrm{A}) = h, \qquad \mathcal{F}(\mathrm{B}) = h,$$

h désignant une constante. L'intégration de ces équations s'effectue immédiatement et, en désignant par c, k, l, m, n des constantes, on trouve pour la surface des centres (C) l'équation suivante :

$$2c\sqrt{kl - mn}\, z = ke^{cx} + le^{-cx} + me^{icy} + ne^{-icy}.$$

Il résulte de la disposition du plan tangent à une surface et du plan tangent correspondant à la surface des centres que si l'une de ces deux surfaces est développable l'autre l'est aussi. Pour que la surface des centres (C) représentée par l'équation précédente soit développable, il faut que les constantes k et l ou les constantes m et n soient nulles. Le premier cas peut être rattaché au second, la surface (C) est alors un *cylindre dont la section droite est une chaînette*.

Ce résultat est une conséquence immédiate de la remarque suivante qui constitue une propriété *caractéristique* de la chaînette :

Les circonférences, qui ont leurs centres sur une chaînette et qui sont tangentes à la base de cette chaînette, enveloppent une courbe dont l'arc a la même longueur que le segment correspondant de la base.

2° Supposons que la représentation plane des lignes de courbure soit formée des cercles ayant pour centre l'origine et des rayons de ces cercles. Les fonctions A et B, qui déterminent les surfaces (I), seront les solutions des équations

$$\mathcal{F}(\mathrm{A}) = \frac{h}{a^2}, \qquad \mathcal{F}(\mathrm{B}) = \frac{h}{b^2}.$$

Après avoir intégré ces équations, on trouve que l'équation des surfaces des centres développables est :

$$(4c-2)\sqrt{-mn}\, z = m(x+yi)^c(x-yi)^{1-c} + n(x+yi)^{1-c}(x-yi)^c.$$

Cette équation représente des cônes, les surfaces (I) correspondantes sont des *cônes* ayant pour sommet l'origine. Pour que ces cônes soient algébriques, il faut et il suffit que c soit commensurable.

20. Lignes asymptotiques. — Nous avons trouvé au n° 13 l'équation des lignes asymptotiques d'une surface rapportée aux lignes de longueur nulle de la représentation plane :

$$(1 - sZ)(r\,da^2 + t\,db^2) + (2s - rtZ - s^2Z)\,da\,db = 0.$$

Supposons que la surface soit une surface (I) et remplaçons Z par la valeur $\frac{2}{s}$ tirée des formules (10), l'équation prend la forme

$$rs\,da^2 + 2rt\,da\,db + ts\,db^2 = 0. \tag{19}$$

Les asymptotiques d'une surface (I) divisent donc harmoniquement les asymptotiques de la surface des centres représentées par l'équation

$$r\,da^2 + 2s\,da\,db + t\,db^2 = 0,$$

et l'on vérifie aisément que cette propriété caractérise les surfaces (I).

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une surface soit une surface (I) *est que les asymptotiques de la surface divisent harmoniquement les asymptotiques de la surface des centres.*

Une surface (I) étant isothermique, aux lignes de courbure de la surface correspond sur la développée harmonique un réseau conjugué à invariants ponctuels égaux. De plus, la développée harmonique d'une surface (I) est confondue avec la surface des centres, donc les asymptotiques d'une surface (I) et de sa développée harmonique se divisent harmoniquement. Le réseau conjugué, qui sur chacune des deux surfaces correspond aux asymptotiques de l'autre, est un réseau à invariants tangentiels égaux.

Étant données une surface (I) *et sa développée harmonique, les asymptotiques de chacune des deux surfaces correspondent sur l'autre à un réseau conjugué à invariants tangentiels égaux.*

Le réseau conjugué de la surface (I), qui correspond aux asymptotiques de la développée harmonique, a pour représentation plane la projection orthogonale de ces asymptotiques sur le plan des xy ; cette représentation plane est donc, d'après un théorème de M. Kœnigs, un *réseau à invariants égaux*.

En un point d'une surface (I) *réelle*, les directions des lignes de courbure sont réelles; les deux couples formés par les directions asymptotiques de la surface et de sa développée harmonique sont conjugués entre eux et conjugués par rapport aux directions des lignes de courbure. Il en résulte que les directions asymptotiques de l'une des surfaces sont réelles et que les directions asymptotiques de l'autre sont imaginaires.

Une conséquence de cette remarque est qu'en deux points correspondants d'une surface (I) réelle et de sa développée harmonique, les courbures totales sont de signes contraires.

Nous venons de voir que les asymptotiques d'une surface (I) correspondent à un réseau conjugué de sa développée harmonique; établissons que cette propriété caractérise les surfaces (I) parmi les surfaces isothermiques.

Les normales à une surface isothermique forment une congruence dont les développables coupent la surface et sa développée harmonique suivant des réseaux à invariants ponctuels égaux. Si les asymptotiques de la surface correspondent à un réseau conjugué de la développée harmonique, on peut démontrer que les plans tangents aux deux surfaces en des points correspondants se coupent dans un plan fixe. La courbure moyenne de la surface en un point est alors une fonction linéaire de l'ordonnée z du point correspondant de sa développée harmonique; on en déduit facilement que la surface isothermique est une surface (I).

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une surface isothermique soit une surface (I) *est que les asymptotiques de la surface et de sa développée harmonique se divisent harmoniquement.*

La remarque qui vient d'être utilisée peut être étendue à deux surfaces conjuguées ponctuelles par rapport à une congruence. Lorsque les asymptotiques des deux surfaces se divisent harmoniquement, les plans tangents en deux points correspondants se coupent dans un plan fixe, c'est-à-dire qu'en transformant les deux surfaces par homographie on retrouve deux des douze surfaces de M. Darboux.

Application. — Cherchons à déterminer une surface (I) au moyen de la représentation plane de ses lignes asymptotiques. Cette représentation plane forme sur le plan des xy un réseau défini par l'équation différentielle (19).

$$rs\,da^2 + 2rt\,da\,db + ts\,db^2 = 0.$$

En prenant a et b comme paramètres, on déduit de l'équation différentielle du réseau donné des quantités proportionnelles à r, s, t. On peut donc calculer l'expression de $\frac{rt}{s^2}$ qui fait connaître l'élément linéaire de la surface et, par suite, la courbure totale. La valeur de cette courbure totale étant, d'après les formules (15),

$$\frac{1}{\rho\rho_1} = \frac{1}{f^2}\left(1 - \frac{s^2}{rt}\right),$$

la relation précédente fera connaître la fonction f et, par suite, la surface (I) correspondante.

Une surface (I) *est déterminée par la représentation plane de ses lignes asymptotiques.*

21. **Propriétés de la développée harmonique.** — Les coordonnées (x, y, z) d'un point de la développée harmonique (C) d'une surface (I) sont

$$x = a + b, \qquad y = i(b - a), \qquad z = \frac{AB + 1}{\sqrt{A'B'}}.$$

Considérons la surface (C′) décrite par le point qui a pour coordonnées

$$x' = \frac{A + B}{\sqrt{A'B'}}, \qquad y' = i\frac{B - A}{\sqrt{A'B'}}, \qquad z' = \frac{AB - 1}{\sqrt{A'B'}}.$$

On déduit de la relation différentielle

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = dx'^2 + dy'^2 + dz'^2,$$

que *les surfaces* (C) *et* (C′) *sont applicables*. Pour que (C) et (C′) soient des surfaces algébriques, il faut et il suffit que les fonctions A et B soient algébriques. Pour que (C) et (C′) soient des surfaces réelles, il faut et il suffit que A et B soient des fonctions imaginaires conjuguées des deux paramètres imaginaires conjugués a et b.

La surface (C′) correspond par orthogonalité des éléments à une surface minima (M).

Le réseau conjugué commun aux surfaces applicables (C) et (C′) est un réseau à invariants ponctuels égaux, il correspond aux asymptotiques de la surface minima et aux lignes de courbure de la surface (I) dont (C) est la développée harmonique.

Les lignes de longueur nulle se correspondent sur les surfaces (I) et (M).

Les sphères de rayon z, qui ont leurs centres sur (C), sont tangentes au plan des xy et enveloppent une surface (I) dont (C) est la développée harmonique. De même, les sphères de rayon z qui ont leur centre sur (C′) passent par l'origine et enveloppent une surface (I′) dont (C′) est la développée moyenne.

La surface (I′) a une représentation sphérique isotherme et possède cette propriété caractéristique que toutes les surfaces inverses par rapport à l'origine ont aussi une représentation sphérique isotherme. J'ai déterminé toutes les surfaces (I′) dans ma Thèse de Doctorat.

FIN DU TOME XVII DE LA TROISIÈME SÉRIE.