Annales scientifiques de l'É.N.S.

L. Lecornu

Sur l'équilibre d'une enveloppe ellipsoïdale soumise à une pression intérieure uniforme

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 17 (1900), p. 501-539
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1900_3_17__501_0>

SUR

L'ÉQUILIBRE D'UNE ENVELOPPE ELLIPSOÏDALE

SOUMISE

A UNE PRESSION INTÉRIEURE UNIFORME [1],

Par M. L. LECORNU.

J'ai étudié en 1880 (*Journal de l'École Polytechnique*) les conditions d'équilibre des surfaces flexibles et inextensibles sollicitées par des forces quelconques. Il résulte de cette étude que les tensions éprouvées par de pareilles surfaces sont définies au moyen d'un système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre, dont l'intégration introduit nécessairement des fonctions arbitraires. Si l'on considère seulement une portion de surface dont le contour se trouve maintenu fixe d'une manière quelconque, il est impossible de déterminer complètement ces fonctions arbitraires : l'état d'équilibre présente alors une indétermination analogue à celle qu'on rencontre en cherchant les réactions éprouvées par un solide invariable appuyé en plus de trois points. Mais, quand il s'agit d'une surface fermée, telle qu'une sphère ou un ellipsoïde, il semble probable *a priori* que la connaissance des forces directement appliquées doit déterminer l'état d'équilibre. S'il en est ainsi, que deviennent les fonctions arbitraires? Dans le travail précité, j'ai examiné à ce point de vue l'équilibre d'un ellipsoïde de révolution, soumis à une pression intérieure uniforme, et montré que les fonctions arbitraires se trouvent, dans ce cas, déterminées par la condition de ne rencontrer nulle part des forces de tension infinies. Il

---

[1] L'Académie des Sciences a voté, en 1898, l'insertion du présent Travail dans les *Mémoires présentés par divers Savants à l'Académie* (*Recueil des Savants étrangers*).

m'a semblé intéressant de rechercher s'il en est de même dans le cas, beaucoup plus compliqué, de l'ellipsoïde à trois axes inégaux, et c'est ce que nous vérifierons dans le présent travail. J'avais encore un autre motif pour développer jusqu'au bout les calculs relatifs à ce genre de surface. On sait que, sur toute surface en équilibre, il existe un réseau de lignes orthogonales dont chaque élément est soumis à une tension normale à sa direction : ce sont les *lignes de tension principales* ou LIGNES ISOSTATIQUES. Pour une surface de révolution fermée, soumise à une pression constante, les lignes isostatiques coïncident avec les méridiens et les parallèles, c'est-à-dire avec les lignes de courbure : des considérations de symétrie le montrent immédiatement. On pourrait être tenté de croire que les lignes isostatiques d'une surface fermée quelconque, soumise à une pression constante, sont encore les lignes de courbure. Mais un peu de réflexion montre qu'il n'en saurait être ainsi, car la moindre altération d'une partie quelconque de la surface doit changer, sur toute la surface, la configuration des lignes isostatiques, tandis que les lignes de courbure restent les mêmes dans toutes les parties de la surface qui ne sont pas modifiées. J'ai reconnu effectivement que les lignes isostatiques de l'ellipsoïde à trois axes inégaux ne coïncident pas avec les lignes de courbure, abstraction faite des sections principales. Nous verrons que la détermination des lignes isostatiques se ramène à une seule quadrature, opération qui peut être effectuée explicitement pour certaines valeurs relatives des axes principaux. Il y a un cas particulier remarquable, dans lequel les lignes isostatiques sont formées par les sections de l'ellipsoïde perpendiculaires au petit axe et par leurs trajectoires orthogonales. D'une manière générale, les lignes isostatiques, malgré leur définition mécanique, ont un caractère plutôt géométrique, en ce sens qu'elles dépendent de la figure de la surface, et nullement de la grandeur des pressions. Sur l'ellipsoïde à trois axes inégaux, leur disposition est analogue à celle des lignes de courbure; mais les quatre ombilics réels sont remplacés par quatre autres points situés tantôt dans le plan perpendiculaire au grand axe, tantôt dans le plan perpendiculaire à l'axe moyen; de plus, le système n'est pas isotherme.

Dans le cas particulier auquel je faisais allusion tout à l'heure, les ombilics sont au nombre de *deux* seulement et placés aux extrémités du petit axe. Il va sans dire que, si l'ellipsoïde devient de révolution autour du grand axe ou du petit axe, les ombilics se réduisent encore à deux, placés aux extrémités de l'axe de révolution.

Au point de vue de la mécanique pratique, les recherches que je vais exposer paraissent présenter un certain intérêt. Si, par exemple, l'on avait besoin de construire un aérostat ellipsoïdal, elles feraient connaître avec précision les efforts développés en chaque point de l'enveloppe, pourvu que celle-ci pût être regardée comme infiniment mince.

CHAPITRE I. — ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DE L'ÉQUILIBRE.

Nous désignerons constamment par $2a$, $2b$, $2c$ le grand axe, l'axe moyen et le petit axe de l'ellipsoïde; par u et v les coordonnées elliptiques d'un point de sa surface; par x, y, z les coordonnées cartésiennes rapportées aux trois plans principaux. On a alors les formules connues

$$x^2 = \frac{a^2(a^2-u)(a^2-v)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)},$$

$$y^2 = \frac{b^2(b^2-u)(b^2-v)}{(b^2-c^2)(b^2-a^2)},$$

$$z^2 = \frac{c^2(c^2-u)(c^2-v)}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}.$$

En posant, pour abréger,

$$S^2 = (a^2-b^2)(b^2-c^2)(a^2-c^2),$$

on peut écrire

$$x = \frac{a\sqrt{b^2-c^2}}{S}\sqrt{(a^2-u)(a^2-v)},$$

$$y = \frac{b\sqrt{c^2-a^2}}{S}\sqrt{(b^2-u)(b^2-v)},$$

$$c = \frac{c\sqrt{a^2-b^2}}{S}\sqrt{(c^2-u)(c^2-v)}.$$

On sait que les coordonnées elliptiques sont comprises, l'une entre a^2 et b^2, l'autre entre b^2 et c^2. Nous supposerons que l'on a

$$a^2 > u > b^2 > v > c^2.$$

Le carré de l'élément linéaire ds correspondant à un déplacement du, dv a pour expression

$$ds^2 = \frac{u-v}{4}\left[\frac{u\,du^2}{(a^2-u)(b^2-u)(c^2-u)} - \frac{v\,dv^2}{(a^2-v)(b^2-v)(c^2-v)}\right].$$

En posant

$$(1)\qquad d\lambda = \frac{\sqrt{u}\,du}{2\sqrt{(a^2-u)(b^2-u)(c^2-u)}},\qquad i\,d\mu = \frac{\sqrt{v}\,dv}{2\sqrt{(a^2-v)(b^2-v)(c^2-v)}},$$

on peut écrire

$$ds^2 = (u-v)(d\lambda^2 + d\mu^2).$$

Quand l'élément linéaire est exprimé par la formule générale

$$ds^2 = \mathrm{L}^2\,d\lambda^2 + \mathrm{M}^2\,d\mu^2$$

les courbures géodésiques $\frac{1}{\rho_1}$ et $\frac{1}{\rho_2}$ des lignes de coordonnées curvilignes ont pour expression

$$\frac{1}{\rho_1} = -\frac{\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \mu}}{\mathrm{LM}},\qquad \frac{1}{\rho_2} = -\frac{\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial \lambda}}{\mathrm{LM}}.$$

En remplaçant ici L et M par leur valeur commune $\sqrt{u-v}$, on trouve

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{\frac{dv}{d\mu}}{2(u-v)^{\frac{3}{2}}},\qquad \frac{1}{\rho_2} = -\frac{\frac{du}{d\lambda}}{2(u-v)^{\frac{3}{2}}}.$$

Un calcul facile montre que l'angle $d\omega$ de deux normales à la surface, aux extrémités de l'élément $d\lambda$ considéré sur la ligne $\mu = \text{const.}$, a pour expression

$$d\omega^2 = \frac{a^2 b^2 c^2}{u^3 v}(u-v)\,d\lambda^2.$$

On en déduit, pour la courbure principale correspondante $\frac{1}{\mathrm{R}_1}$,

$$\frac{1}{\mathrm{R}_1} = \frac{d\omega}{ds} = \frac{abc}{u^{\frac{3}{2}} v^{\frac{1}{2}}}.$$

De même, pour l'autre courbure principale,

$$\frac{1}{R_2} = \frac{abc}{u^{\frac{1}{2}} v^{\frac{3}{2}}}.$$

La courbure totale est

$$\frac{1}{R_1 R_2} = \frac{a^2 b^2 c^2}{u^2 v^2}.$$

On peut s'assurer que les valeurs de L, M, $\frac{1}{\rho_1}$, $\frac{1}{\rho_2}$, $\frac{1}{R_1}$, $\frac{1}{R_2}$ vérifient identiquement les équations connues

$$\frac{1}{L}\frac{d\frac{1}{R_2}}{d\lambda} + \frac{1}{\rho_2}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = 0,$$

$$\frac{1}{M}\frac{d\frac{1}{R_1}}{d\mu} + \frac{1}{\rho_1}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right) = 0,$$

$$\frac{1}{M}\frac{d\frac{1}{\rho_1}}{d\mu} + \frac{1}{L}\frac{d\frac{1}{\rho_2}}{d\lambda} - \frac{1}{\rho_1^2} - \frac{1}{\rho_2^2} = \frac{1}{R_1 R_2}.$$

Les équations générales d'équilibre, établies à la page 22 de mon Mémoire de 1880, sont

$$\frac{1}{L}\frac{dn_2}{d\lambda} - \frac{1}{M}\frac{dt}{d\mu} + \frac{n_1 - n_2}{\rho_2} + \frac{2t}{\rho_1} = F_1,$$

$$\frac{1}{M}\frac{dn_1}{d\mu} - \frac{1}{L}\frac{dt}{d\lambda} + \frac{n_2 - n_1}{\rho_1} + \frac{2t}{\rho_2} = F_2,$$

$$\frac{n_1}{R_2} + \frac{n_2}{R_1} - \frac{2t}{T} = \Phi.$$

T désigne le rayon de torsion géodésique des lignes coordonnées; cette grandeur est infinie dans le cas des lignes de courbure. Comme nous employons ici les coordonnées elliptiques, les lignes de coordonnées sont des lignes de courbure de la surface : il faut donc faire $\frac{1}{T} = 0$. D'autre part, F_1, F_2, Φ sont les composantes, relativement aux tangentes aux lignes de coordonnées et à la normale, de la force extérieure agissant sur l'élément superficiel, cette force étant rapportée à l'unité de surface.

Il faut donc faire $F_1 = F_2 = 0$ et supposer Φ égal à une constante, que nous appellerons Π : ce sera la pression par unité de surface. Les quantités n_1, n_2 sont les tensions superficielles, rapportées à l'unité de longueur, qui s'exercent normalement aux éléments $L\,d\lambda$, $M\,d\mu$; t est la tension, rapportée à l'unité de longueur, qui s'exerce sur ces éléments suivant leur propre direction et qui a, on le sait, même valeur pour tous les deux; n_1, n_2, t sont les trois inconnues du problème. On voit qu'elles doivent vérifier les trois équations aux dérivées partielles

$$\frac{1}{L}\frac{dn_2}{d\lambda} - \frac{1}{M}\frac{dt}{d\mu} + \frac{n_1 - n_2}{\rho_2} + \frac{2t}{\rho_1} = 0,$$

$$\frac{1}{M}\frac{dn_1}{d\mu} - \frac{1}{L}\frac{dt}{d\lambda} + \frac{n_2 - n_1}{\rho_1} + \frac{2t}{\rho_1} = 0,$$

$$\frac{n_1}{R_2} + \frac{n_2}{R_1} = \Pi.$$

Si nous remplaçons L, M, ρ_1, ρ_2, R_1, R_2 par leurs valeurs, ces équations prennent la forme

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} &2(u - v)\left(\frac{dn_2}{d\lambda} - \frac{dt}{d\mu}\right) - \frac{du}{d\lambda}(n_1 - n_2) + 2\frac{dv}{d\mu}t = 0,\\ &2(u - v)\left(\frac{dn_1}{d\mu} - \frac{dt}{d\lambda}\right) - \frac{dv}{d\mu}(n_1 - n_2) - 2\frac{du}{d\lambda}t = 0,\\ &n_1 u + n_2 v = \frac{\Pi}{abc}(uv)^{\frac{3}{2}}. \end{aligned}\right.$$

Il est évident que nous ne diminuerons en rien la généralité du problème en supposant provisoirement la constante $\frac{\Pi}{abc}$ égale à l'unité : il suffira ensuite, quand nous voudrons nous affranchir de cette hypothèse, de multiplier par $\frac{\Pi}{abc}$ les valeurs trouvées pour n_1, n_2 et t. La troisième équation devient, dans ces conditions,

$$(2\ bis)\qquad n_1 u + n_2 v = (uv)^{\frac{3}{2}}.$$

Nous allons maintenant effectuer une transformation qui revient, au fond, à prendre pour nouvelles lignes de coordonnées les génératrices rectilignes (imaginaires) de l'ellipsoïde

Introduisons les quantités φ_1, φ_2 définies par les deux équations

$$(3) \qquad \begin{cases} n_1 u - n_2 v + 2it\sqrt{uv} = 2\varphi_1, \\ n_1 u - n_2 v - 2it\sqrt{uv} = 2\varphi_2. \end{cases}$$

Au moyen des équations (2 *bis*) et (3), on exprime aisément n_1, n_2 et t en fonction de φ_1 et φ_2, et l'on trouve

$$(4) \qquad \begin{cases} 2n_1 u = (uv)^{\frac{3}{2}} + \varphi_1 + \varphi_2, \\ 2n_2 v = (uv)^{\frac{3}{2}} - \varphi_1 - \varphi_2, \\ 2it\sqrt{uv} = \varphi_1 - \varphi_2, \end{cases}$$

d'où, en différentiant et se rappelant que u dépend uniquement de λ, et v uniquement μ,

$$\begin{aligned} 2u\frac{dn_1}{d\mu} &= \frac{3}{2}u^{\frac{3}{2}}v^{\frac{1}{2}}\frac{dv}{d\mu} + \frac{d\varphi_1}{d\mu} + \frac{d\varphi_2}{d\mu}, \\ 2v\frac{dn_2}{d\lambda} &= \frac{3}{2}u^{\frac{1}{2}}v^{\frac{3}{2}}\frac{du}{d\lambda} - \frac{d\varphi_1}{d\lambda} - \frac{d\varphi_1}{d\lambda}, \\ 2i\frac{dt}{d\lambda} &= -\frac{1}{2u\sqrt{uv}}(\varphi_1 - \varphi_2)\frac{du}{d\lambda} + \frac{1}{\sqrt{uv}}\left(\frac{d\varphi_1}{d\lambda} - \frac{d\varphi_2}{d\lambda}\right), \\ 2i\frac{dt}{d\mu} &= -\frac{1}{2v\sqrt{uv}}(\varphi_1 - \varphi_2)\frac{dv}{d\mu} + \frac{1}{\sqrt{uv}}\left(\frac{d\varphi_1}{d\mu} - \frac{d\varphi_2}{d\mu}\right). \end{aligned}$$

La substitution dans les deux premières équations (1) donne

$$\begin{aligned} &\frac{3}{4}u^{\frac{1}{2}}v^{\frac{1}{2}}\frac{du}{d\lambda} - \frac{1}{2v}\left(\frac{d\varphi_1}{d\lambda} + \frac{d\varphi_2}{d\lambda}\right) - \frac{i}{4v\sqrt{uv}}(\varphi_1 - \varphi_2)\frac{dv}{d\mu} + \frac{i}{2\sqrt{uv}}\left(\frac{d\varphi_1}{d\lambda} - \frac{d\varphi_2}{d\mu}\right) \\ &\quad + \frac{1}{2(u-v)}\left[\frac{\sqrt{uv}(u-v)}{2} - \frac{u+v}{2uv}(\varphi_1 + \varphi_2)\right]\frac{du}{d\lambda} - \frac{i}{2(u-v)}(\varphi_1 - \varphi_2)\frac{dv}{d\mu} = 0, \\ &\frac{3}{4}u^{\frac{1}{2}}v^{\frac{1}{2}}\frac{dv}{d\mu} + \frac{1}{2u}\left(\frac{d\varphi_1}{d\mu} + \frac{d\varphi_2}{d\mu}\right) - \frac{i}{4u\sqrt{uv}}(\varphi_1 - \varphi_2)\frac{du}{d\lambda} + \frac{i}{2\sqrt{uv}}\left(\frac{d\varphi_1}{d\lambda} - \frac{d\varphi_2}{d\lambda}\right) \\ &\quad + \frac{1}{2(u-v)}\left[\frac{\sqrt{uv}(u-v)}{2} - \frac{u+v}{2uv}(\varphi_1 + \varphi_2)\right]\frac{dv}{d\mu} + \frac{i}{2(u-v)}(\varphi_1 - \varphi_2)\frac{du}{d\lambda} = 0. \end{aligned}$$

Éliminons φ_1 en multipliant la première équation par $\frac{i}{\sqrt{u}}$, la seconde par $-\frac{1}{\sqrt{v}}$ et ajoutant. Les dérivées $\frac{d\varphi_1}{d\lambda}$, $\frac{d\varphi_1}{d\mu}$ disparaissent en même temps que φ_1, et il reste simplement

$$-\frac{i}{v\sqrt{u}}\frac{d\varphi_1}{d\lambda}-\frac{1}{u\sqrt{v}}\frac{d\varphi_1}{d\mu}+\frac{u+v}{2u^{\frac{3}{2}}v^{\frac{3}{2}}(u-v)}\left(\sqrt{u}\frac{dv}{d\mu}-i\sqrt{v}\frac{du}{d\lambda}\right)\varphi_1$$
$$+\left(i\sqrt{v}\frac{du}{d\lambda}-\sqrt{u}\frac{dv}{d\mu}\right)=0.$$

On peut, par un procédé semblable, former une équation analogue renfermant la seule inconnue φ_2 : les inconnues se trouvent donc séparées. Si nous posons maintenant

$$d\alpha=\frac{d\lambda}{\sqrt{u}}+i\frac{d\mu}{\sqrt{v}},$$
$$d\beta=\frac{d\lambda}{\sqrt{u}}+i\frac{d\mu}{\sqrt{v}},$$

nous avons, en appelant φ l'une quelconque des fonctions φ_1, φ_2,

$$\frac{d\varphi}{d\lambda}=\frac{1}{\sqrt{u}}\left(\frac{d\varphi}{d\alpha}+\frac{d\varphi}{d\beta}\right),\qquad \frac{d\varphi}{d\mu}=\frac{i}{\sqrt{v}}\left(\frac{d\varphi}{d\alpha}-\frac{d\varphi}{d\alpha}\right),$$

et, de même,

$$\frac{du}{d\lambda}=\frac{1}{\sqrt{u}}\left(\frac{du}{d\alpha}+\frac{du}{d\beta}\right),\qquad \frac{du}{d\mu}=0=\frac{i}{\sqrt{v}}\left(\frac{du}{d\alpha}-\frac{du}{d\beta}\right),$$
$$\frac{dv}{d\lambda}=0=\frac{1}{\sqrt{u}}\left(\frac{dv}{d\alpha}+\frac{dv}{d\beta}\right),\qquad \frac{dv}{d\mu}=\frac{i}{\sqrt{v}}\left(\frac{dv}{d\alpha}-\frac{du}{d\beta}\right).$$

Les équations en φ_1, φ_2 prennent ainsi la forme

$$(5)\qquad\left\{\begin{aligned}&\frac{d\varphi_1}{d\alpha}+\frac{u+v}{2(u-v)}\left(\frac{\frac{du}{d\alpha}}{u}-\frac{\frac{dv}{d\alpha}}{v}\right)\varphi_1=u^{\frac{3}{2}}v^{\frac{3}{2}}\left(\frac{\frac{du}{d\alpha}}{u}-\frac{\frac{dv}{d\alpha}}{v}\right),\\&\frac{d\varphi_2}{d\beta}+\frac{u+v}{2(u-v)}\left(\frac{\frac{du}{d\beta}}{u}-\frac{\frac{dv}{d\beta}}{v}\right)\varphi_2=u^{\frac{3}{2}}v^{\frac{3}{2}}\left(\frac{\frac{du}{d\beta}}{u}-\frac{\frac{dv}{d\beta}}{v}\right).\end{aligned}\right.$$

Ce sont deux équations linéaires, renfermant chacune une seule inconnue et une seule variable, l'autre variable devant être traitée, pour l'intégration, comme un paramètre constant.

CHAPITRE II. — Intégration des équations différentielles.

L'intégration des équations (5) s'effectue immédiatement, et donne

$$
(6) \quad \begin{cases} \varphi_1 = \dfrac{\sqrt{uv}}{u-v}\left[\displaystyle\int (u-v)\left(v\frac{du}{d\alpha} - u\frac{dv}{d\alpha}\right)d\alpha + F_1(\beta)\right], \\ \varphi_2 = \dfrac{\sqrt{uv}}{u-v}\left[\displaystyle\int (u-v)\left(v\frac{du}{d\beta} - u\frac{dv}{d\beta}\right)d\beta + F_2(\alpha)\right], \end{cases}
$$

F_1 et F_2 désignant des fonctions arbitraires.

Il ne reste plus qu'à exécuter les deux opérations de quadrature qui sont manifestement identiques à part le nom de la variable.

La première méthode qui se présente à l'esprit est la suivante :

Considérons, par exemple, la quadrature qui figure dans l'expression de φ_1, et écrivons-la simplement

$$\int (u-v)(v\,du - u\,dv),$$

en n'oubliant pas que u et v sont ici des fonctions de la seule variable α, l'autre variable indépendante, β, devant rester constante. L'équation différentielle des lignes asymptotiques rapportées aux lignes de courbure est, comme l'on sait,

$$\frac{L^2\,d\lambda^2}{R_1} + \frac{M^2\,d\mu^2}{R_2} = 0,$$

ce qui donne ici

$$\frac{d\lambda^2}{u} + \frac{d\mu^2}{v} = 0 \qquad \text{ou} \qquad d\alpha\,d\beta = 0.$$

Les lignes $\alpha = \text{const.}$, $\beta = \text{const.}$ sont donc les génératrices rectilignes de l'ellipsoïde. Mais, si un point mobile M décrit l'une de ces génératrices, G, de paramètre β, et si S désigne sa distance à un point fixe de G, les coordonnées cartésiennes de M sont des fonctions linéaires de S, qui lui-même est fonction de α.

En outre, les coordonnées elliptiques u, v sont les deux racines de l'équation du second degré en w,

$$\frac{x^2}{a^2-w} + \frac{y^2}{b^2-w} + \frac{z^2}{c^2-w} = 1 \qquad \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{c^2}{z^2} = 1\right),$$

ce qui donne, avec une notation évidente,

$$u + v = \Sigma (a^2 - x^2),$$
$$uv = \Sigma b^2 c^2 - \Sigma (b^2 + c^2) x^2,$$

$u + v$ et uv sont donc des fonctions entières de x, y, z et, par suite, de S. Posons

$$u + v = \mathrm{E}, \qquad uv = \mathrm{F}.$$

Nous avons identiquement

$$(u - v)(v\,du - u\,dv) = 2\mathrm{F}\,d\mathrm{E} - \mathrm{E}\,d\mathrm{F}.$$

Cette expression est donc la différentielle d'une fonction entière de S, et la quadrature est dès lors immédiate.

Jusqu'ici, aucune difficulté; malheureusement, quand on veut, après avoir obtenu ainsi φ_1 et φ_2 en fonction de α et β, revenir aux coordonnées réelles u et v, on se heurte à des calculs presque inextricables. Une autre méthode, moins naturelle au premier abord, m'a conduit bien plus rapidement au but.

Cette nouvelle méthode nécessite l'emploi des fonctions elliptiques, mais disons dès maintenant que ces fonctions disparaissent entièrement à la fin du calcul.

Il s'agit, en somme, d'effectuer la quadrature

$$\mathrm{J} = \int (u - v)(v\,du - u\,dv)$$

dans l'hypothèse

$$\frac{d\lambda}{\sqrt{u}} = i\frac{d\mu}{\sqrt{v}}.$$

Si nous posons pour abréger

$$(7) \qquad \begin{cases} \sqrt{(a^2 - u)(b^2 - u)(c^2 - u)} = \mathrm{U}, \\ \sqrt{(a^2 - v)(b^2 - v)(c^2 - v)} = \mathrm{V}, \end{cases}$$

les équations (1) nous donnent

$$d\lambda = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{u}}{\mathrm{U}}\,du, \qquad i\,d\mu = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{v}}{\mathrm{V}}\,dv,$$

de telle sorte que u et v sont liés ici par la condition

$$\frac{du}{\mathrm{U}} = \frac{dv}{\mathrm{V}}.$$

Posant

$$\sqrt{c^2 - u} = i\omega, \qquad \text{d'où} \qquad u = c^2 + \omega^2,$$

nous avons

$$\frac{du}{\mathrm{U}} = \frac{du}{\sqrt{(a^2 - u)(b^2 - u)(c^2 - u)}} = -\frac{i\,d\omega}{\sqrt{(a^2 - c^2 - \omega^2)(b^2 - c^2 - \omega^2)}}.$$

Faisons encore

$$\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2} = k^2 \qquad \text{et} \qquad \frac{\omega}{\sqrt{b^2 - c^2}} = \sin\varpi.$$

Il vient

$$\frac{du}{\mathrm{U}} = -\frac{i\,d\varpi}{\sqrt{a^2 - c^2}\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varpi}}.$$

Introduisant enfin la notation

$$\varphi = \int_0^{\varpi} \frac{d\varpi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varpi}},$$

d'où

$$\varpi = \operatorname{am}\varphi \quad \text{et} \quad \sin\varpi = \operatorname{sn}\varphi,$$

nous avons

$$\frac{du}{\mathrm{U}} = -i\frac{d\varphi}{\sqrt{a^2 - c^2}}.$$

Un calcul identique effectué sur l'expression $\frac{dv}{\mathrm{V}}$ nous donnerait

$$\frac{dv}{\mathrm{V}} = -i\frac{d\psi}{\sqrt{a^2 - c^2}}.$$

On voit ainsi que la relation

$$\frac{du}{\mathrm{U}} = \frac{dv}{\mathrm{V}}$$

équivaut à cette autre

$$\varphi - \psi = \text{const.},$$

les nouvelles variables φ et ψ étant liées aux premières par les équations

$$(8) \qquad u = c^2 + (b^2 - c^2)\operatorname{sn}^2\varphi, \qquad v = c^2 + (b^2 - c^2)\operatorname{sn}^2\psi.$$

Revenons à l'intégrale J, que nous pouvons écrire

$$(9)\qquad J=\int(u-v)\left(\overline{v-c^2}\,du-\overline{u-c^2}\,dv\right)+\frac{c^2}{2}(u-v)^2.$$

En laissant provisoirement de côté le dernier terme, nous avons à considérer l'expression

$$(10)\qquad H=\int(u-v)\left(\overline{v-c^2}\,du-\overline{u-c^2}\,dv\right).$$

Mais

$$u-c^2=(b^2-c^2)\operatorname{sn}^2\varphi,\qquad v-c^2=(b^2-c^2)\operatorname{sn}^2\psi,$$

d'où

$$du=2(b^2-c^2)\operatorname{sn}\varphi\operatorname{cn}\varphi\operatorname{dn}\varphi\,d\varphi,\qquad dv=2(b^2-c^2)\operatorname{sn}\psi\operatorname{cn}\psi\operatorname{dn}\psi\,d\psi,$$
$$u-v=(b^2-c^2)(\operatorname{sn}^2\varphi-\operatorname{sn}^2\psi).$$

Par suite, en faisant $d\varphi=d\psi$,

$$H=2(b^2-c^2)^3\int(\operatorname{sn}^2\varphi-\operatorname{sn}^2\psi)\operatorname{sn}\varphi\operatorname{sn}\psi(\operatorname{sn}\psi\operatorname{cn}\varphi\operatorname{dn}\varphi-\operatorname{sn}\varphi\operatorname{cn}\psi\operatorname{dn}\psi)\,d\varphi.$$

Soit

$$\varphi-\psi=2p,\qquad \varphi+\psi=2q,$$

l'intégration doit être faite dans l'hypothèse $p=$ const., d'où

$$d\varphi=d\psi=dq.$$

On a d'ailleurs

$$\frac{\operatorname{sn}\psi\operatorname{cn}\varphi\operatorname{dn}\varphi-\operatorname{sn}\varphi\operatorname{cn}\psi\operatorname{dn}\psi}{1-k^2\operatorname{sn}^2\varphi\operatorname{sn}^2\psi}=\operatorname{sn}(\psi-\varphi)=-\operatorname{sn}2p,$$

puis

$$\operatorname{sn}\varphi-\operatorname{sn}\psi=\frac{2\operatorname{sn}p\operatorname{cn}q\operatorname{dn}q}{1-k^2\operatorname{sn}^2p\operatorname{sn}^2q},\qquad \operatorname{sn}\varphi+\operatorname{sn}\psi=\frac{2\operatorname{sn}q\operatorname{cn}p\operatorname{dn}p}{1-k^2\operatorname{sn}^2p\operatorname{sn}^2q};$$

d'où

$$(11)\qquad \operatorname{sn}^2\varphi\operatorname{sn}^2\psi=\frac{4\operatorname{sn}p\operatorname{cn}p\operatorname{dn}p\times\operatorname{sn}q\operatorname{cn}q\operatorname{dn}q}{(1-k^2\operatorname{sn}^2p\operatorname{sn}^2q)^2}.$$

$$(12)\qquad 4\operatorname{sn}\varphi\operatorname{sn}\psi=\frac{4(\operatorname{sn}^2p\operatorname{cn}^2q\operatorname{dn}^2q-\operatorname{sn}^2q\operatorname{cn}^2p\operatorname{dn}^2p)}{(1-k^2\operatorname{sn}^2p\operatorname{sn}^2q)^2}=\frac{4(\operatorname{sn}^2q-\operatorname{sn}^2p)}{1-k^2\operatorname{sn}^2p\operatorname{sn}^2q}.$$

Il vient ainsi

$$H=-8(b^2-c)^3\int\frac{\operatorname{sn}p\operatorname{cn}p\operatorname{dn}p\operatorname{sn}q\operatorname{cn}q\operatorname{dn}q(\operatorname{sn}^2q-\operatorname{sn}^2p)}{(1-k^2\operatorname{sn}^2p\operatorname{sn}^2q)^3}\left[1-k^2\left(\frac{\operatorname{sn}^2q-\operatorname{sn}^2p}{1-k^2\operatorname{sn}^2p\operatorname{sn}^2q}\right)^2\right]\operatorname{sn}2p\,dq.$$

Posons maintenant

$$t = 1 - k^2 \operatorname{sn}^2 p \operatorname{sn}^2 q;$$

d'où

$$\operatorname{sn}^2 q - \operatorname{sn}^2 p = \frac{1 - t - k^2 \operatorname{sn}^4 p}{k^2 \operatorname{sn}^2 p} \quad \text{et} \quad \frac{dt}{dq} = -2k^2 \operatorname{sn}^2 p \operatorname{sn} q \operatorname{cn} q \operatorname{dn} q,$$

et nous avons

$$H = 4(b^2 - c^2)^3 \int \frac{\operatorname{cn} p \operatorname{dn} p \operatorname{sn} 2p}{k^2 t^3 \operatorname{sn}^2 p} \left(\frac{1 - t - k^2 \operatorname{sn}^4 p}{k^2 \operatorname{sn}^2 p}\right) \left[1 - \frac{(1 - t - k^2 \operatorname{sn}^4 p)^2}{k^2 \operatorname{sn}^4 p - t^2}\right) dt,$$

ou bien, comme $\operatorname{sn} 2p = \dfrac{2 \operatorname{sn} p \operatorname{cn} p \operatorname{dn} p}{1 - k^2 \operatorname{sn}^4 p}$,

$$H = \frac{2(b^2 - c^2)^3 \operatorname{sn}^2 2p (1 - k^2 \operatorname{sn}^4 p)}{k^6 \operatorname{sn}^8 p} \int \frac{(1 - t - k^2 \operatorname{sn}^4 p)(1 - k^2 \operatorname{sn}^4 p - 2t + t^2)}{t^5} dt.$$

Sous cette forme, l'intégration est immédiate. On a

$$\begin{aligned}
&\frac{(1 - t - k^2 \operatorname{sn}^4 p)(1 - k^2 \operatorname{sn}^4 p - 2t + t^2)}{t^5} \\
&\quad = \frac{(1 - k^2 \operatorname{sn}^4 p)^2}{t^5} - \frac{3(1 - k^2 \operatorname{sn}^4 p)}{t^4} + \frac{3 - k^2 \operatorname{sn}^4 p}{t^3} - \frac{1}{t};
\end{aligned}$$

d'où

$$H = \frac{2(b^2 - c^2)^3 \operatorname{sn}^2 2p (1 - k^2 \operatorname{sn}^4 p)^2}{k^6 \operatorname{sn}^8 p} \left[\frac{(1 - k^2 \operatorname{sn}^4 p)^2}{4t^4} - \frac{1 - k^2 \operatorname{sn}^4 p}{t^3} + \frac{3 - k^2 \operatorname{sn}^4 p}{2t^2} - \frac{1}{t}\right].$$

En remplaçant $\operatorname{sn} 2p$ par sa valeur et k^2 par $\dfrac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}$, nous pouvons encore écrire

$$(13) \quad H = 8(a^2 - c^2)^3 \frac{\operatorname{cn}^2 p \operatorname{dn}^2 p}{\operatorname{sn}^6 p} \left[\frac{(1 - k^2 \operatorname{sn}^4 p)^2}{4t^4} - \frac{1 - k^2 \operatorname{sn}^4 p}{t^3} + \frac{3 - k^2 \operatorname{sn}^4 p}{2t^2} - \frac{1}{t}\right],$$

expression à laquelle s'ajoute une fonction arbitraire de p. Comment choisir cette dernière?

CHAPITRE III. — Détermination des fonctions arbitraires.

Nous admettrons qu'en aucun point de la surface de l'ellipsoïde il ne peut se produire des tensions infinies. Cette hypothèse ne serait nullement nécessaire si l'on entendait se tenir dans le domaine de la pure abstraction. Mais elle s'impose du moment où l'on veut que les résultats fournis par la Mécanique rationnelle concordent, au moins approximativement, avec ceux que pourrait donner l'expérience. Nous avons considéré la surface comme inextensible et dénuée d'élasticité. En réalité, ainsi que je l'ai fait remarquer en 1880, les conditions d'équilibre sont les mêmes pour une surface extensible et élastique : car, du moment où l'équilibre est atteint, on peut, par la pensée, sans troubler cet équilibre, supprimer l'extensibilité et l'élasticité; cela revient simplement à introduire de nouvelles liaisons. Si une enveloppe ellipsoïdale extensible et élastique est brusquement soumise à une pression intérieure, elle commence par se déformer et atteint bientôt son état d'équilibre. A ce moment, la figure diffère de celle d'un ellipsoïde; mais elle en diffère d'autant moins que l'extensibilité est plus faible. Si donc la membrane considérée est très peu extensible, et si la pression n'est pas trop grande, on peut, sans erreur sensible, admettre que la forme définitive est encore ellipsoïdale. Dans ces conditions, les calculs qui nous occupent s'appliquent sans modification. Mais alors, les tensions sont partout finies, sans quoi l'enveloppe se déchirerait immédiatement. On voit bien par là quel est l'intérêt de traiter le problème abstrait en excluant toute valeur infinie des tensions.

Les équations (3) et (4) montrent que, si les tensions n_1, n_2, t demeurent finies sur toute la surface de l'ellipsoïde, il en est de même des fonctions φ_1, φ_2, et réciproquement. Les équations (6), (9) et (10) indiquent que, pour cela, la fonction H et celle qui s'en déduit par la permutation de p avec q doivent rester partout finies, et, de plus, tendre vers zéro en même temps que la différence $u - v$, c'est-à-dire quand le point considéré s'approche d'un ombilic de la surface. Or, en vertu des équations (8) et (11), l'on a

$$u - v = (b^2 - c^2)(\operatorname{sn}^2\varphi - \operatorname{sn}^2\psi) = 4(b^2 - c^2)\frac{\operatorname{sn}p \operatorname{cn}p \operatorname{dn}p \times \operatorname{sn}q \operatorname{cn}q \operatorname{dn}q}{(1 - k^2\operatorname{sn}^2 p \operatorname{sn}^2 q)^2},$$

ce que nous pouvons écrire

$$(14) \qquad u - v = (b^2 - c^2)\operatorname{sn}2p \operatorname{sn}2q \times \frac{(1 - k^2\operatorname{sn}^2 p)(1 - k^2\operatorname{sn}^2 q)}{(1 - k^2\operatorname{sn}^2 p \operatorname{sn}^2 q)^2}.$$

Il faut donc d'abord que la valeur (13) de H, augmentée d'une certaine fonction p, tende vers zéro en même temps que $\mathrm{sn}\,p$. Pour réaliser cette condition, développons l'expression

$$E = \mathrm{cn}^2 p\, \mathrm{dn}^2 p \left[\frac{(1-k^2 \mathrm{sn}^4 p)^2}{4t^4} - \frac{1-k^2\mathrm{sn}^4 p}{t^3} + \frac{3-k^2\mathrm{sn}^4 p}{2t^2} - \frac{1}{t}\right],$$

suivant les puissances croissantes de $\mathrm{sn}^2 p$. En posant, pour abréger,

$$\mathrm{sn}^2 p = \xi, \qquad \mathrm{sn}^2 q = \eta \qquad \text{d'où} \qquad t = 1 - k^2\xi\eta,$$

l'on a

$$E = (1-\xi)(1-k^2\xi)\left[\frac{(1-k^2\xi^2)^2}{4(1-k^2\xi\eta)^4} - \frac{1-k^2\xi^2}{(1-k^2\xi\eta)^3} + \frac{3-k^2\xi^2}{2(1-k^2\xi\eta)^2} - \frac{1}{1-k^2\xi\eta}\right];$$

d'ailleurs

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-k^2\xi\eta} &= 1 + k^2\xi\eta + k^4\xi^2\eta^2 + k^6\xi^3\eta^3 + \ldots,\\
\frac{1}{(1-k^2\xi\eta)^2} &= 1 + 2k^2\xi\eta + 3k^4\xi^2\eta^2 + 4k^6\xi^3\eta^3 + \ldots,\\
\frac{1}{(1-k^2\xi\eta)^3} &= 1 + 3k^2\xi\eta + 6k^4\xi^2\eta^2 + 10k^6\xi^3\eta^3 + \ldots,\\
\frac{1}{(1-k^2\xi\eta)^4} &= 1 + 4k^2\xi\eta + 10k^4\xi^2\eta^2 + 20k^6\xi^3\eta^3 + \ldots.
\end{aligned}$$

Nous supposons ici $\mathrm{mod}\, k^2\xi\psi < 1$, ce qui a toujours lieu pour les valeurs assez petites de ξ : car on verra bientôt que, si ξ est infiniment petit, η diffère infiniment peu de l'unité.

A l'aide de ces formules, on trouve sans peine

$$E = -\tfrac{1}{4}(1-\xi)(1-k^2\xi) + \varepsilon^4,$$

en désignant par ε^4 l'ensemble des termes qui sont au moins de degré 4 par rapport à ξ, et conséquemment de degré 8 par rapport à $\mathrm{sn}\,p$. Nous sommes ainsi conduits à mettre H sous la forme

$$H = -\frac{2(a^2-c^2)^3}{\mathrm{sn}^6 p}\left[(1-\mathrm{sn}^2 p)(1-k^2\mathrm{sn}^2 p) + \mathrm{sn}^8 p\, f(p,q)\right] + F(p),$$

dans laquelle $f(p,q)$ est une fonction qui est de même finie quand $\mathrm{sn}\,p$ tend vers zéro. Dès lors, pour que $\frac{H}{\mathrm{sn}\,p}$ soit fini quand $\mathrm{sn}\,p$ tend vers zéro, il suffit que la fonction arbitraire $F(p)$ soit prise égale à

$$\frac{2(a^2-c^2)^3}{\mathrm{sn}^6 p}(1-\mathrm{sn}^2 p)(1-k^2\mathrm{sn}^2 p).$$

En résumé, nous sommes conduits à ajouter à l'expression (13) de H la quantité

$$\frac{2(a^2-c^2)^3}{\operatorname{sn}^6 p}\operatorname{cn}^2 p \operatorname{dn}^2 p,$$

ce qui donne

$$(15)\quad \mathrm{H}=2(a^2-c^2)^3\frac{\operatorname{cn}^2 p\operatorname{dn}^2 p}{\operatorname{sn}^6 p}\left[1-\frac{4}{1-k^2\operatorname{sn}^2 p\operatorname{sn}^2 q}+\frac{6-2k^2\operatorname{sn}^4 p}{(1-k^2\operatorname{sn}^2 p\operatorname{sn}^2 q)^2}\right.$$
$$\left.-\frac{4(1-k^2\operatorname{sn}^4 p)}{(1-k^2\operatorname{sn}^2 h\operatorname{sn}^2 q)^3}+\frac{(1-k^2\operatorname{sn}^4 p)^2}{(1-k^2\operatorname{sn}^2 p\operatorname{sn}^2 q)^4}\right].$$

La quantité qui figure entre crochets au second membre est le carré de l'expression

$$1-\frac{2}{1-k^2\operatorname{sn}^2 p\operatorname{sn}^2 q}+\frac{1-k^2\operatorname{sn}^4 p}{(1-k^2\operatorname{sn}^2 p\operatorname{sn}^2 q)^2},$$

qui peut elle-même s'écrire

$$\frac{k^2\operatorname{sn}^4 p(k^2\operatorname{sn}^4 q-1)}{(1-k^2\operatorname{sn}^2 p\operatorname{sn}^2 q)^2}.$$

On a donc

$$\mathrm{H}=2(a^2-c^2)^3k^4\frac{\operatorname{sn}^2 p\operatorname{cn}^2 p\operatorname{dn}^2 p(1-k^2\operatorname{sn}^4 q)^2}{(1-k^2\operatorname{sn}^2 p\operatorname{sn}^2 q)^4},$$

ou bien

$$(16)\qquad \mathrm{H}=\frac{(a^2-c^2)(b^2-c^2)^2}{2}\operatorname{sn}^2 2p\frac{(1-k^2\operatorname{sn}^4 p)^2(1-k^2\operatorname{sn}^4 q)^2}{(1-k^2\operatorname{sn}^2 p\operatorname{sn}^2 q)^4}.$$

On en déduit, en vertu de l'équation (14),

$$(17)\qquad \frac{\mathrm{H}}{u-v}=\frac{(a^2-c^2)(b^2-c^2)}{2}\,\frac{\operatorname{sn}2p}{\operatorname{sn}2q}\,\frac{(1-k^2\operatorname{sn}^4 p)(1-k^2\operatorname{sn}^4 q)}{(1-k^2\operatorname{sn}^2 p\operatorname{sn}^2 q)^2}.$$

Nous devons maintenant faire remarquer que, *pour les points réels de la surface*, les variables imaginaires p et q ne sont pas indépendantes. Les équations (8) montrent en effet que $\operatorname{sn}^2\varphi$ est réel et compris entre 1 et $\frac{1}{k}$, tandis que $\operatorname{sn}^2\psi$ est réel et compris entre 0 et 1. Donc φ est réel et ψ est de la forme $(2m+1)\omega+ih$, où h désigne une quantité réelle, et 4ω la période du sinus amplitude. On tire de là

$$2p=\varphi-\psi=\varphi-(2m+1)\omega-ih,$$
$$2q=\varphi+\psi=\varphi+(2m+1)\omega+ih.$$

Soit p' l'imaginaire conjuguée de p. On a

$$2p' = \varphi - (2m+1)\omega + ih$$

d'où

$$2(q-p') = (4m+2)\omega, \qquad q-p' = (2m+1)\omega$$

et par suite

$$\operatorname{sn} 2q = -\operatorname{sn} 2p', \qquad \operatorname{sn} q = \pm \operatorname{cn} p'.$$

Dans ces conditions, le rapport $\frac{\operatorname{sn} 2p}{\operatorname{sn} 2q}$ a un module égal à l'unité, et en outre, si $\operatorname{sn} p$ est infini, $\operatorname{sn} q$ est infini de même ordre. D'autre part, la différence $1 - k^2 \operatorname{sn}^2 p \operatorname{sn}^2 q$ n'est jamais nulle : car, $\operatorname{sn}\varphi$ et $\operatorname{sn}\psi$ n'étant jamais infinis, la relation $1 - k^2 \operatorname{sn}^2 p \operatorname{sn}^2 q = 0$ entraînerait, en vertu de (12), l'égalité de $\operatorname{sn}^2 p$ et $\operatorname{sn}^2 q$. On aurait alors

$$\operatorname{sn}^2 q = \pm \frac{1}{k},$$

d'où

$$\operatorname{cn} q = \sqrt{1 \mp \frac{1}{k}} \qquad \text{et} \qquad \operatorname{dn} q = \sqrt{1 \mp k}.$$

Mais, d'autre part, nous avons trouvé

$$\operatorname{sn}\varphi - \operatorname{sn}\psi = \frac{2 \operatorname{sn} p \operatorname{cn} q \operatorname{dn} q}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 p \operatorname{sn}^2 q}.$$

Cette différence serait infinie, ce qui, nous venons de le dire, est impossible.

Cela posé, on reconnaît immédiatement que la valeur de $\frac{\mathrm{H}}{u-v}$, telle que la donne l'équation (17), est finie sur toute la surface de l'ellipsoïde.

Remarquons encore que, si l'on appelle, pour abréger, *triangle positif*, l'aire triangulaire déterminée sur l'ellipsoïde par l'ensemble des points dont les trois coordonnées cartésiennes sont positives, à une valeur arbitrairement choisie de $\operatorname{sn} p$ correspond toujours un point réel de ce triangle, et un seul. Soit, en effet, $p_0 = \alpha + i\beta$ l'une des valeurs de p répondant à la valeur que l'on attribue à $\operatorname{sn} p$. En négligeant les multiples des périodes, qui ne jouent ici aucun rôle, les valeurs de p

pour lesquelles $\operatorname{sn} p$ est le même sont

$$p_0 = \alpha + i\beta,$$
$$p = 2\omega - \alpha - i\beta.$$

Les valeurs correspondantes de q sont, comme on vient de le dire,

$$q_0 = \omega + \alpha - i\beta,$$
$$q = 3\omega - \alpha + i\beta.$$

De là, pour φ les deux valeurs

$$\varphi_0 = p_0 + q_0 = \omega + 2\alpha,$$
$$\varphi = p + q = 5\omega - 2\alpha,$$

et pour ψ les deux valeurs

$$\psi_0 = q_0 - p_0 = \omega - 2i\beta,$$
$$\psi = q - p = \omega - 2i\beta.$$

Par conséquent $\operatorname{sn}\varphi_0 = \operatorname{sn}\varphi$ et $\operatorname{sn}\psi_0 = \operatorname{sn}\psi$. Les fonctions $\operatorname{sn}\varphi$, $\operatorname{sn}\psi$ sont donc complètement déterminées, et il en est de même, en vertu de (8), de u et v : ce qui démontre la proposition.

A chaque valeur de $\operatorname{sn} p$ correspond également une valeur unique de $\operatorname{sn}^2 q$, savoir $\operatorname{cn}^2 p'$, et par conséquent, en vertu de l'équation (16), une seule valeur de H. Les équations (6), (9) et (10) montrent d'ailleurs que la fonction désignée dans le Chapitre précédent par φ_1 est liée à H par l'équation

$$\varphi_1 = \frac{\sqrt{uv}}{u - v}\left[\frac{c^2}{2}(u - v)^2 + \mathrm{H}\right].$$

Le radical $\sqrt{uv}$, qui ne s'annule jamais, a un signe bien déterminé. La fonction φ_1, aussi bien que u, v, H, est donc complètement déterminée dès que $\operatorname{sn} p$ est connu.

Nous sommes maintenant en mesure d'établir que l'expression trouvée pour H est la seule qui réponde aux conditions du problème. Supposons, en effet, qu'il existe une autre solution H' : elle s'obtiendra, comme nous le savons, en ajoutant à H une certaine fonction de p, que nous pouvons écrire $F(\operatorname{sn} p)$. Cette fonction, pour chaque valeur de $\operatorname{sn} p$, n'est susceptible que d'une seule valeur; car, quel que soit l'état d'équilibre réalisé sur l'ellipsoïde, les tensions n_1, n_2, t ont en chaque point de la surface des valeurs déterminées. En vertu de la première équation (3) il en est de même de φ_1, et par suite de H.

D'autre part, nous savons que chaque valeur de $\operatorname{sn} p$ détermine un point, et un seul, du triangle positif. Donc la différence $H' - H$ ne peut prendre qu'une seule valeur pour chaque valeur de $\operatorname{sn} p$, autrement dit, $F(\operatorname{sn} p)$ *est une fonction uniforme de* $\operatorname{sn} p$. En outre, cette fonction ne devient jamais infinie, et elle s'annule, ainsi que H et H', aux ombilics de l'ellipsoïde.

La théorie générale des fonctions nous permet de conclure que $F(\operatorname{sn} p)$ est identiquement nulle.

En résumé, la valeur de H donnée par l'équation (16) est la seule qui remplisse toutes les conditions du problème, et nous avons

$$\varphi_1 = \frac{c^2}{2}(u - v)\sqrt{uv} + \frac{(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)}{2}\sqrt{uv}\,\frac{\operatorname{sn} 2p}{\operatorname{sn} 2q}\,\frac{(1 - k^2 \operatorname{sn}^4 p)(1 - k^2 \operatorname{sn}^4 q)}{(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 p \operatorname{sn}^2 q)^2}.$$

La permutation de p avec q fait connaître φ_2. On peut écrire plus simplement, en tenant compte de l'équation (14),

$$(18)\qquad \left\{\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{(u - v)\sqrt{uv}}{2}\left(c^2 + \frac{a^2 - c^2}{\operatorname{sn}^2 2q}\right), \\ \varphi_2 &= \frac{(u - v)\sqrt{uv}}{2}\left(c^2 + \frac{a^2 - c^2}{\operatorname{sn}^2 2p}\right). \end{aligned}\right.$$

CHAPITRE IV. — Calcul des tensions.

En remplaçant, dans l'équation

$$\operatorname{sn} 2p = \operatorname{sn}(\varphi - \psi) = \frac{\operatorname{sn}\varphi \operatorname{cn}\psi \operatorname{dn}\psi - \operatorname{sn}\psi \operatorname{cn}\varphi \operatorname{dn}\varphi}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2\varphi \operatorname{sn}^2\psi},$$

les fonctions elliptiques $\operatorname{sn}\varphi$, $\operatorname{sn}\psi$ par leurs valeurs $\sqrt{\frac{u - c^2}{b^2 - c^2}}$, $\sqrt{\frac{v - c^2}{b^2 - c^2}}$, mettant à la place de k son équivalent $\sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}}$ et tenant compte des notations (7), on trouve aisément

$$\operatorname{sn} 2p = \frac{i\sqrt{a^2 - c^2}}{\sqrt{(u - c^2)(v - c^2)}}\,\frac{(c^2 - u)V - (c^2 - v)U}{(b^2 - c^2)(a^2 - c^2) - (u - c^2)(v - c^2)}$$

et de même

$$\operatorname{sn} 2q = \frac{i\sqrt{a^2 - c^2}}{\sqrt{(u - c^2)(v - c^2)}} \, \frac{(c^2 - u)\,\mathrm{V} + (c^2 - v)\,\mathrm{U}}{(b^2 - c^2)(a^2 - c^2) - (u - c^2)(v - c^2)}.$$

Par conséquent,

$$\frac{1}{\operatorname{sn}^2 2p} + \frac{1}{\operatorname{sn}^2 2q} = -\frac{2(u - c^2)(v - c^2)}{a^2 - c^2} \left[(b^2 - c^2)(a^2 - c^2) - (u - c^2)(v - c^2)\right]^2 \frac{(c^2 - u)^2 \mathrm{V}^2 + (c^2 - v)^2 \mathrm{U}^2}{[(c^2 - u)^2 \mathrm{V}^2 - (c^2 - v)^2 \mathrm{U}^2]}$$

mais

$$(c^2 - u)^2 \mathrm{V}^2 - (c^2 - v)^2 \mathrm{U}^2 = -(u - c^2)(v - c^2)(u - v)\left[(b^2 - c^2)(a^2 - c^2) - (u - c^2)(v - c^2)\right],$$

d'où

$$\frac{1}{\operatorname{sn}^2 2p} + \frac{1}{\operatorname{sn}^2 2q} = \frac{2uv(u + v) - 4uv(a^2 + b^2) - 2c^2(u^2 + v^2) + 2(u + v)\,\varepsilon a^2 b^2 - 4a^2 b^2 c^2}{(a^2 - c^2)(u - v)^2}.$$

Posons pour abréger

$$\Sigma a^2 = \mathrm{P}, \qquad \Sigma a^2 b^2 = 2\mathrm{Q}, \qquad a^2 b^2 c^2 = \mathrm{R},$$

et les équations (18) nous conduisent à ce résultat :

$$\varphi_1 + \varphi_2 = \frac{\sqrt{uv}}{u - v}\left[uv(u + v) - 2\mathrm{P}uv + 2\mathrm{Q}(u + v) - 2\mathrm{R}\right].$$

Nous voyons ici renaître la symétrie par rapport aux trois lettres a, b, c, symétrie qui avait disparu au moment où nous avions introduit les fonctions elliptiques. C'est une vérification de l'exactitude des calculs. D'autre part,

$$\frac{1}{\operatorname{sn}^2 2p} - \frac{1}{\operatorname{sn}^2 2q} = -\frac{4\mathrm{UV}}{(a^2 - c^2)(u - v)^2},$$

d'où

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{2\sqrt{uv}}{u - v} \times \mathrm{UV},$$

expression également symétrique par rapport aux axes de l'ellipsoïde.

Portant enfin ces valeurs de $\varphi_1 + \varphi_2$ et $\varphi_1 - \varphi_2$ dans les équations (4), remplaçant U et V par leurs valeurs (7) et rétablissant le facteur constant $\frac{\Pi}{abc}$, nous avons

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned} n_1 &= \frac{\Pi}{abc}\frac{\sqrt{uv}}{u(u-v)}[u^2v - \mathrm{P}uv + \mathrm{Q}(u+v) - \mathrm{R}],\\ n_2 &= -\frac{\Pi}{abc}\frac{\sqrt{uv}}{v(u-v)}[uv^2 - \mathrm{P}uv + \mathrm{Q}(u+v) - \mathrm{R}],\\ t &= -\frac{\Pi}{abc}\times\frac{1}{u-v}\sqrt{(a^2-u)(u-b^2)(u-c^2)}\sqrt{(a^2-v)(b^2-v)(v-c^2)}. \end{aligned}\right.$$

En tenant compte des équations (1), on peut s'assurer directement que ces valeurs des tensions satisfont aux équations différentielles (2). On peut aussi, en supposant b^2 égal soit à a^2, soit à c^2, retrouver les formules relatives à l'ellipsoïde de révolution, formules qu'il est aisé d'établir sans aucune intégration. On remarque enfin que la tension tangentielle t est nulle pour chacune des sections principales et que, par suite, celles-ci sont bien, comme la symétrie l'exige, des lignes isostatiques.

On constate d'ailleurs que t s'annule uniquement pour $u=a^2$, $u=b^2$, $v=b^2$, $v=c^2$, c'est-à-dire qu'en dehors des sections principales, les lignes de courbure ne coïncident jamais avec les lignes isostatiques, et même ne leur sont nulle part tangentes.

Voyons comment varient les tensions normales n_1 et n_2 le long de chaque section principale.

Plan des axes b et c. — Pour annuler la coordonnée cartésienne x, il faut faire $u=a^2$, ce qui donne

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned} n_1 &= \frac{\Pi}{2a^2bc}(a^2b^2+a^2c^2-b^2c^2)\sqrt{v},\\ n_2 &= \frac{\Pi}{bc}\left(a^2\sqrt{v} - \frac{1}{2}\,\frac{a^2b^2+a^2c^2-b^2c^2}{\sqrt{v}}\right). \end{aligned}\right.$$

La variable v, qui figure seule dans ces formules, a une signification géométrique très simple : elle est égale au produit des deux rayons vecteurs focaux dans le plan de la section considérée. La tension n_1 est perpendiculaire à l'élément linéaire pour lequel u varie seul, c'est-à-dire, ici, à l'élément orthogonal à la section principale. La tension n_2

est perpendiculaire à la section principale et, par conséquent, elle est parallèle au grand axe de l'ellipsoïde. n_2 mesure donc l'*effort d'arrachement* exercé sur le contour de la section principale. On voit que cet effort n'est pas constant. Maximum à l'extrémité du petit axe, c'est-à-dire pour $\nu = b^2$, ce qui donne

$$n_2 = \frac{\Pi a^2 c}{2}\left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right),$$

il devient minimum à l'extrémité de l'axe moyen, c'est-à-dire pour $\nu = c^2$, ce qui donne

$$n_2 = \frac{\Pi a^2 b}{2}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}\right).$$

Il est à remarquer que si l'expression $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}$ est négative, la tension n_2 est négative à l'extrémité de l'axe moyen, et alors, malgré l'existence d'une pression intérieure, l'enveloppe tend à s'écraser en ce point. Si l'on désigne par $d\sigma$ l'élément linéaire de la section principale et si l'on calcule l'intégrale $\int n_2\, d\sigma$ étendue à tout le contour, on trouve, comme cela devait être,

$$\pi bc \times \Pi.$$

Pour des valeurs données de b et de c, la valeur moyenne de n_2 sur le contour dépend uniquement de Π; mais la *distribution* des tensions dépend essentiellement de a. Si, laissant b et c constants ainsi que Π, on fait croître indéfiniment a, la valeur absolue des tensions extrêmes augmente indéfiniment, de telle façon qu'un aérostat de forme indéfiniment allongée finirait toujours par se rompre suivant sa section moyenne, même sous l'action de pression intérieure très faible, à moins que b et c ne fussent rigoureusement égaux. On voit à quelles erreurs énormes on s'exposerait en considérant les efforts comme uniformément répartis sur le pourtour de la section.

Plan des axes a et b. — Il faut annuler la coordonnée z et faire par conséquent $\nu = c^2$. En permutant, dans les formules précédentes,

a avec c, u avec v, n_1 avec n_2, on a immédiatement

$$(21)\qquad \begin{cases} n_1 = \dfrac{\Pi}{ab}\left(c^2\sqrt{u} - \dfrac{1}{2}\,\dfrac{b^2c^2 + a^2c^2 - a^2b^2}{\sqrt{u}}\right), \\[2ex] n_2 = \dfrac{\Pi}{2\,abc^2}(b^2c^2 + a^2c^2 - a^2b^2)\sqrt{u}. \end{cases}$$

La discussion se fait de la même manière; mais, comme les deux expressions $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2}$ et $\frac{1}{c^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}$ sont toujours positives, il ne peut jamais y avoir de tendance à l'écrasement.

Plan des axes a et c. — Pour obtenir la totalité de la section principale comprise dans ce plan, il faut faire successivement $u = b^2$ (v variant de b^2 à c^2) et $v = b^2$ (u variant de b^2 à a^2). Pour $u = b^2$, on a

$$(22)\qquad \begin{cases} n_1 = \dfrac{\Pi}{2\,ab^2c}(a^2b^2 + b^2c^2 - a^2c^2)\sqrt{v}, \\[2ex] n_2 = \dfrac{\Pi}{ac}\left(b^2\sqrt{v} - \dfrac{a^2b^2 + b^2c^2 - a^2c^2}{2\sqrt{v}}\right). \end{cases}$$

Ces formules conviennent aux parties de la section principale comprise entre les extrémités du grand axe et les ombilics; n_1 est la tension dirigée dans le plan de la section et n_2 est la tension normale à cette section. Pour $v = b^2$, on a de même

$$(23)\qquad \begin{cases} n_1 = \dfrac{\Pi}{ac}\left(b^2\sqrt{u} - \dfrac{a^2b^2 + b^2c^2 - a^2c^2}{2\sqrt{u}}\right), \\[2ex] n_2 = \dfrac{\Pi}{2\,ab^2c}(a^2b^2 + b^2c^2 - a^2c^2)\sqrt{u}, \end{cases}$$

formules qui conviennent au reste de la section. Ici, c'est n_1 qui désigne la tension dirigée dans le plan de la section et n_2, la tension normale à la section. Au passage d'un ombilic, n_1 se permute avec n_2, mais cette discontinuité n'est qu'apparente; elle tient aux singularités que présentent, aux ombilics, les coordonnées elliptiques. En réalité, la tension normale à la section est représentée, en tous les points de cette section, par la formule

$$n = \frac{\Pi}{2\,ab^2c}(a^2b^2 + b^2c^2 - a^2c^2)\sqrt{w},$$

dans laquelle ϖ désigne le produit des rayons vecteurs focaux. La seconde tension principale varie également d'une manière continue. Au point de vue des tensions, les ombilics géométriques ne jouent donc aucun rôle particulier.

Ombilics mécaniques. — Cherchons maintenant s'il existe des ombilics mécaniques, c'est-à-dire des points pour lesquels les tensions principales soient égales entre elles. On sait qu'en pareil cas la composante tangentielle t de la tension est nulle quelle que soit la direction de l'élément linéaire tracé sur la surface, et que, pour deux directions rectangulaires quelconques, les tensions normales sont égales. Les formules (19) doivent donc donner $t = 0$, et l'on en conclut que les ombilics mécaniques, s'ils existent, ne peuvent se trouver que sur l'une des sections principales : autrement dit, en un pareil point, l'une des coordonnées u, v doit atteindre l'une de ses limites. Examinons successivement les diverses hypothèses possibles.

1° $u = a^2$. — Les tensions normales sont données par les formules (20), et, en écrivant qu'elles sont égales, on obtient l'équation

$$2a^4 v - (a^2 b^2 + a^2 c^2 - b^2 c^2)(v + a^2) = 0.$$

Faisons successivement dans le premier membre $v = b^2$, $v = c^2$. La substitution $v = b^2$ donne

$$(a^2 b^2 - c^2 a^2 - c^2 b^2)(a^2 - b^2).$$

Le signe est celui de $a^2 b^2 - a^2 c^2 - b^2 c^2$. La substitution $v = c^2$ donne

$$(a^2 c^2 - a^2 b^2 - b^2 c^2)(a^2 - c^2) \quad \text{ou bien} \quad -[a^2(b^2 - c^2) + b^2 c^2](a^2 - c^2),$$

résultat négatif. D'après cela :

Il y a quatre ombilics mécaniques dans la section perpendiculaire au grand axe si la quantité $a^2 b^2 - a^2 c^2 - b^2 c^2$ est positive ; il n'y en a pas dans le cas contraire.

On remarque que, dans le cas limite $a^2 = b^2$ (ellipsoïde de révolution aplati) on aurait deux ombilics pour $v = b^2$, c'est-à-dire pour $y = 0$ (extrémité de l'axe de révolution).

2° $u = b^2$. — On doit recourir aux formules (22) qui ne diffèrent des formules (20) que par la permutation de a avec b. L'équation à vérifier est

$$2b^4 v - (a^2 b^2 + b^2 c^2 - a^2 c^2)(v + b^2) = 0.$$

La substitution $v = c^2$ donne

$$(b^2c^2 - a^2b^2 - a^2c^2)(b^2 - c^2),$$

quantité négative, car

$$b^2c^2 - a^2b^2 - a^2c^2 = - b^2(a^2 - c^2) - a^2c^2.$$

La substitution $v = b^2$ donne

$$- 2b^2(a^2 - b^2)(b^2 - c^2),$$

quantité également négative. Exclusion faite des ellipsoïdes de révolution, il n'y a donc pas d'ombilics mécaniques répondant à cette hypothèse.

3° $v = b^2$. — Les formules (23), qui conviennent à ce cas, se déduisent des formules (20) par la permutation de a avec b, de u avec v, de n_1 avec n_2. L'équation à vérifier est alors

$$2b^4u - (a^2b^2 + b^2c^2 - a^2c^2)(u + b^2) = 0.$$

Les substitutions $u = a^2$ et $u = b^2$ donnent respectivement

$$(a^2 - b^2)(a^2c^2 + b^2c^2 - a^2b^2) \quad \text{et} \quad - 2b^2(a^2 - b^2)(a^2 - c^2).$$

La seconde est négative. La première a le signe de $a^2c^2 + b^2c^2 - a^2b^2$.

Donc, pour que l'hypothèse $v = b^2$ fournisse des ombilics mécaniques, il faut et il suffit que l'expression $a^2b^2 - a^2c^2 - b^2c^2$ soit négative.

Les ombilics mécaniques ainsi obtenus sont compris entre les deux ombilics géométriques et les extrémités du petit axe. On voit en même temps que, pour un ellipsoïde à trois axes inégaux, les ombilics mécaniques ne peuvent coïncider avec les ombilics géométriques.

4° $v = c^2$. — Il faut recourir aux formules (21), et l'on obtient l'équation

$$2c^4 - (b^2c^2 + a^2c^2 - a^2b^2)(c^2 + u) = 0.$$

Les substitutions $u = a^2$, $u = b^2$ donnent respectivement

$$(a^2 - c^2)(a^2b^2 + b^2c^2 - a^2c^2) \quad \text{et} \quad (b^2 - c^2)(a^2b^2 + a^2c^2 - b^2c^2).$$

Toutes les deux sont positives; il n'y a donc jamais d'ombilics mécaniques dans le plan perpendiculaire au petit axe (exclusion faite de l'hypothèse $b^2 = c^2$).

En résumé :

Il existe toujours quatre ombilics mécaniques, symétriques par rapport aux plans principaux. Ces ombilics sont dans le plan perpendiculaire au grand axe, ou dans le plan perpendiculaire à l'axe moyen suivant que l'expression $a^2b^2 - a^2c^2 - b^2c^2$ *est positive ou négative. Dans ce dernier cas, les ombilics mécaniques sont situés entre les ombilics géométriques et les extrémités du petit axe.*

Dans le cas particulier où $a^2b^2 = c^2(a^2 + b^2)$ *les ombilics se réduisent à deux, placés aux extrémités du petit axe.*

CHAPITRE V. — Lignes isostatiques.

Les lignes de tension principales, ou lignes isostatiques, jouent, au point de vue mécanique, un rôle analogue à celui des lignes de courbure au point de vue géométrique; elles sont définies par la condition d'être partout tangentes aux directions principales de tension.

Soit α l'angle sous lequel une ligne isostatique croise la ligne de courbure $v =$ const. En procédant comme pour la recherche des directions principales d'une conique, on trouve sans peine

$$\operatorname{tang} 2\alpha = \frac{2t}{n_1 - n_2} = \frac{-2i\mathrm{UV}\sqrt{uv}}{2u^2v^2 - \mathrm{P}uv(u+v) + \mathrm{Q}(u+v)^2 + \mathrm{R}(u+v)}.$$

D'autre part, si $\frac{dv}{du}$ est la dérivée de v par rapport à u pour un déplacement effectué suivant la ligne isostatique, on a, en vertu des équations (1) et (7),

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{\mathrm{U}}{i\mathrm{V}}\frac{\sqrt{v}\,dv}{\sqrt{u}\,du},$$

d'où

$$\operatorname{tang} 2\alpha = -2i\frac{\mathrm{UV}\sqrt{uv}\,du\,dv}{\mathrm{V}^2u\,du^2 + \mathrm{U}^2v\,dv^2}.$$

La comparaison de ces deux valeurs de $\tan 2\alpha$ donne

$$
(24)\qquad \begin{aligned} &V^2 u\,du^2 + U^2 v\,dv^2 \\ &\quad - du\,dv\,[2u^2v^2 - Puv(u+v) + Q(u+v)^2 - R(u+v)] = 0. \end{aligned}
$$

Posant pour abréger

$$
uv = s, \qquad u + v = t,
$$

on trouve

$$
du = \frac{u\,dt - ds}{u - v}, \qquad dv = \frac{-v\,dt + ds}{u - v},
$$

$$
V^2 u\,du^2 + U^2 v\,dv^2 = \frac{1}{(u-v)^2}[(V^2u^3 + U^2v^3)\,dt^2 - 2(V^2u^2 + U^2v^2)\,ds\,dt + (V^2u + U^2v)\,ds^2],
$$

$$
\begin{aligned}
V^2u^3 + U^2v^3 &= Rt(t^2 - 3s) - 2Qs(t^2 - 2s) + Ps^2t - 2s^3, \\
V^2u^2 + U^2v^2 &= R\,(t^2 - 2s) - 2Qst + 2Ps^2 - s^2t, \\
V^2u + U^2v &= Rt - 4Qs + Pst - s(t^2 - 2s),
\end{aligned}
$$

d'où, en substituant dans l'équation (24), et supprimant le facteur commun $t^2 - 4s$,

$$
R\,dt(t\,dt - ds) - Q(s\,dt^2 + t\,ds\,dt - ds^2) + Ps\,ds\,dt - s\,ds^2 = 0,
$$

ou bien

$$
(25)\qquad (Rt - Qs)\,dt^2 - (R + Qt - Ps)\,ds\,dt + (Q - s)\,ds^2 = 0.
$$

Telle est l'équation différentielle des lignes isostatiques. On vérifie immédiatement qu'elle admet trois solutions particulières de la forme

$$
t = k + \frac{s}{k},
$$

k étant l'une des racines de l'équation

$$
R - 2Qk + Pk^2 - k^3 = 0,
$$

ou, ce qui revient au même,

$$
(a^2 - k)(b^2 - k)(c^2 - k) + 0.
$$

Si l'on prend, par exemple, $k = a^2$, on a

$$
t = a^2 + \frac{s}{a^2} \qquad \text{ou bien} \qquad (a^2 - u)(a^2 - v) = 0,
$$

d'où $u = a^2$, ce qui donne l'une des sections principales. Les trois racines a^2, b^2, c^2 correspondent ainsi aux trois sections principales.

L'équation (25), résolue par rapport à s, donne

$$s = \frac{R - Q\dfrac{ds}{dt}}{\left(\dfrac{ds}{dt}\right)^2 - P\dfrac{ds}{dt} + Q}\left(t - \frac{ds}{dt}\right).$$

C'est une équation de la forme

$$s = t\varphi\left(\frac{ds}{dt}\right) + \psi\left(\frac{ds}{dt}\right),$$

c'est-à-dire une équation de Clairaut. On pourrait l'intégrer par la méthode connue ; mais on simplifie les calculs en procédant de la manière suivante :

Posons

$$\frac{ds}{dt} = \theta \qquad \text{et} \qquad s - t\theta = \omega,$$

d'où

$$(26) \qquad t = -\frac{d\omega}{dt}, \qquad s = \omega - \theta\frac{d\omega}{d\theta}.$$

L'équation devient

$$\frac{d\omega}{d\theta} - \frac{\omega}{\theta - f(\theta)} - \frac{\theta f(\theta)}{\theta - f(\theta)} = 0 \qquad \left[f(\theta) = \frac{R - Q\theta}{\theta^2 - P\theta + Q}\right].$$

L'intégrale générale de cette équation linéaire est, avec une constante arbitraire k,

$$\omega = e^{\int\frac{d\theta}{\theta - f(\theta)}}\left[k + \int\frac{\theta f(\theta)}{\theta - f(\theta)}\, e^{-\int\frac{d\theta}{\theta - f(\theta)}}\, d\theta\right],$$

mais

$$\frac{1}{\theta - f(\theta)} = \frac{\theta^2 - P\theta + Q}{\theta^3 - P\theta^2 + 2Q\theta - R}.$$

En se reportant à la définition de P, Q, R, on constate que les racines du dénominateur sont a^2, b^2, c^2, et l'on peut écrire

$$\frac{1}{\theta - f(\theta)} = \frac{A}{\theta - a^2} + \frac{B}{\theta - b^2} + \frac{C}{\theta - c^2},$$

A, B, C sont trois constantes définies par les équations

$$(27)\qquad \left\{\begin{aligned} &A + B + C = 1,\\ &A(b^2+c^2) + B(c^2+a^2) + C(a^2-b^2) = P,\\ &A\,b^2c^2 \quad + B\,c^2a^2 \quad + C\,a^2b^2 \quad = Q.\end{aligned}\right.$$

Alors

$$e^{\int \frac{d\theta}{\theta - f(\theta)}} = (\theta - a^2)^A(\theta - b^2)^B(\theta - c^2)^C.$$

D'ailleurs

$$\frac{\theta f(\theta)}{\theta - f(\theta)} = \frac{\theta(R - Q\theta)}{(\theta - a^2)(\theta - b^2)(\theta - c^2)}.$$

Donc

$$(28)\quad \omega = (\theta - a^2)^A(\theta - b^2)^B(\theta - c^2)^C\left[k + \int \frac{\theta(R - Q\theta)\,d\theta}{(\theta - a^2)^{A+1}(\theta - b^2)^{B+1}(\theta - c^2)^{C+1}}\right].$$

Cette valeur de ω, portée dans les équations (26), fait connaître s et t en fonction de la constante arbitraire k et du paramètre auxiliaire θ. On calcule ensuite les coordonnées elliptiques par les formules

$$uv = s, \qquad u + v = t.$$

En résumé, la détermination des lignes isostatiques dépend d'une seule quadrature, qui pourra même être effectuée explicitement pour certaines valeurs des constantes A, B, C. Ces constantes sont déterminées au moyen des équations (27). Si l'on se rappelle que

$$P = a^2 + b^2 + c^2 \qquad \text{et} \qquad 2Q = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2,$$

on trouve sans peine

$$A = \frac{1}{2}\,\frac{b^2c^2 - a^2(b^2+c^2)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)},$$

$$B = \frac{1}{2}\,\frac{c^2a^2 - b^2(c^2+a^2)}{(b^2-c^2)(b^2-a^2)},$$

$$C = \frac{1}{2}\,\frac{a^2b^2 - c^2(a^2+b^2)}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}.$$

Un cas particulièrement remarquable est celui dans lequel on a

$$a^2b^2 - c^2(a^2+b^2) = 0 \qquad \text{ou bien} \qquad \frac{1}{c^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}.$$

Nous savons déjà que les ombilics sont alors placés aux extrémités du petit axe. La constante C est nulle, et

$$A = -\frac{b^2}{a^2 - b^2}, \qquad B = \frac{a^2}{a^2 - b^2}, \qquad A + B = 1.$$

Cherchons ce que devient l'intégrale

$$I = \int \frac{\theta(R - Q\theta)\, d\theta}{(\theta - a^2)^{A+1}(\theta - b^2)^{B+1}(\theta - c^2)^{C+1}}.$$

On a

$$R = a^2 b^2 c^2 = \frac{a^4 b^4}{a^2 + b^2},$$

$$2Q = a^2 b^2 + c^2(a^2 + b^2) = 2a^2 b^2,$$

d'où

$$\frac{R}{Q} = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} = c^2.$$

Le facteur $\theta - c^2$ peut alors être supprimé au numérateur et au dénominateur, et comme $C = 0$, il reste

$$I = -a^2 b^2 \int \frac{\theta\, d\theta}{(\theta - a^2)^{A+1}(\theta - b^2)^{B+1}} = -a^2 b^2 \int \left(\frac{\theta - b^2}{\theta - a^2}\right)^{A+1} \frac{\theta\, d\theta}{(\theta - b^2)^3}.$$

Posant

$$\frac{\theta - a^2}{\theta - b^2} = \chi,$$

d'où

$$\theta = \frac{a^2 - \chi b^2}{1 - \chi}, \qquad d\theta = -\frac{(a^2 - b^2)\, d\chi}{(1 - \chi)^2},$$

il vient

$$I = -\frac{a^2 b^2}{(a^2 - b^2)^2} \int \frac{(a^2 - \chi b^2)\, d\chi}{\chi^{A+1}} = \frac{a^4 b^2}{A(a^2 - b^2)^2} \chi^{-A} + \frac{a^2 b^4}{(1 - A)(a^2 - b^2)^2} \chi^{1-A},$$

ce qu'on peut écrire

$$I = -\frac{1}{a^2 - b^2}\left[a^4 \left(\frac{\theta - b^2}{\theta - a^2}\right)^A - b^4 \left(\frac{\theta - a^2}{\theta - b^2}\right)^B\right].$$

On trouve ensuite

$$\begin{aligned}\omega &= (\theta - a^2)^A (\theta - b^2)^B \left[k + \frac{1}{a^2 - b^2} \frac{(b^4 - a^4)\theta - a^2 b^2 (b^2 - a^2)}{(\theta - a^2)^A (\theta - b^2)^B}\right] \\ &= k(\theta - a^2)^A (\theta - b^2)^B + a^2 b^2 - (a^2 + b^2)\theta,\end{aligned}$$

et par conséquent

$$t = -\frac{d\omega}{d\theta} = a^2 + b^2 + k\frac{a^2+b^2-\theta}{(\theta-a^2)^{\mathrm{B}}(\theta-b^2)^{\mathrm{A}}},$$

$$s = \omega - \theta\frac{d\omega}{d\theta} = a^2b^2 + k\frac{a^2b^2}{(\theta-a^2)^{\mathrm{B}}(\theta-b^2)^{\mathrm{A}}}.$$

En combinant ces équations, on obtient

$$\frac{t-a^2-b^2}{s-a^2b^2} = \frac{a^2+b^2-\theta}{a^2b^2} = \frac{t-\theta}{s},$$

$$\theta - a^2 = \frac{b^2(a^4+s-a^2t)}{s-a^2b^2}, \qquad \theta - t^2 = \frac{a^2(b^4+s-b^2t)}{s-a^2b^2},$$

d'où

$$a^{2\mathrm{A}}b^{2\mathrm{B}}(a^4+s-a^2t)^{\mathrm{B}}(b^4+s-b^2t)^{\mathrm{A}} = ka^2b^2,$$

ce qui revient à écrire

$$[uv - a^2(u+v) + a^4]^{a^2}[uv - b^2(u+v) + b^2]^{-b^2} = \text{const.},$$

ou

$$\frac{(u-a^2)(v-a^2)^{a^2}}{(u-b^2)(v-b^2)^{b^2}} = \text{const.},$$

ou enfin

$$x^{a^2} = my^{b^2},$$

m désignant une constante arbitraire. On reconnaît dans cette équation celle des trajectoires orthogonales, dans le plan xOy, des ellipses homothétiques représentées par l'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \text{const.}$$

Par conséquent, en convenant de placer verticalement le petit axe, on peut dire que :

L'un des systèmes de lignes isostatiques est constitué par les lignes de plus grande pente de l'ellipsoïde.

L'autre système est nécessairement formé par les lignes de niveau; mais il n'est pas fourni par l'intégrale générale. Cela vient de ce que, en prenant comme variable la quantité $\theta = \frac{ds}{dt}$, nous avons exclu le cas où cette dérivée est constante. Or les lignes de niveau ont pour équation

$$(u - c^2)(v - c^2) = \text{const.},$$

ou bien

$$s - c^2 t = \text{const.},$$

d'où

$$\frac{ds}{dt} = c^2.$$

Pour faire apparaître les lignes de niveau, il faut se reporter à l'équation primitive (25). Si l'on effectue la substitution $s = kt + h$, k et h désignant deux constantes, on trouve

$$t(R - 2Qk + Pk^2 - k^3) = h(Q - Pk + k^2) + k(R - Qk).$$

Pour que ceci soit une identité, on doit d'abord avoir

$$R - 2Qk + Pk^2 - k^3 = 0.$$

Prenons pour k l'une des trois racines de cette équation, alors

$$Q - Pk + k^2 = \frac{R - Qk}{k},$$

et la seconde constante h doit, par suite, vérifier la condition

$$(R - Qk)\left(k + \frac{h}{k}\right) = 0.$$

En général, $R - Qk$ est différent de zéro, et alors

$$h = -k^2, \qquad \text{d'où} \qquad s = kt - k^2,$$

ou bien

$$t = \frac{s}{k} + k^2,$$

ce qui fournit, comme nous l'avons dit précédemment, les trois sections principales. Mais, lorsque $R - Qk$ est nul, h est indéterminé, et l'on obtient alors le système de lignes $s - kt = h$ dans lequel h devient une constante arbitraire. Or

$$R - Qk = a^2 b^2 c^2 - \tfrac{1}{2} k (a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2).$$

Suivant que l'on fait k égal à a^2, à b^2 ou à c^2, il vient

$$\frac{a^2}{2}(b^2c^2 - a^2b^2 - a^2c^2)$$

ou

$$\frac{b^2}{2}(c^2a^2 - b^2c^2 - b^2a^2)$$

ou

$$\frac{c^2}{2}(a^2b^2 - c^2a^2 - c^2b^2).$$

De ces trois expressions, nous savons déjà que la dernière seule peut être nulle, et c'est justement le cas particulier dont nous nous occupons. On retrouve bien ainsi le système $s - c^2 t = \text{const.}$, qui constitue les lignes de niveau de l'ellipsoïde.

En résumé :

Quand l'inverse du carré du petit axe (placé verticalement) est égal à la somme des inverses du carré des autres axes, les lignes isostatiques sont les lignes de niveau et de plus grande pente.

Revenant au cas général, cherchons à préciser la nature des lignes isostatiques. Nous emploierons à cet effet une représentation auxiliaire, en faisant correspondre, dans un plan, à chaque point du triangle positif de l'ellipsoïde le point dont les coordonnées cartésiennes orthogonales sont s et t. Les trois sections principales, qui limitent le triangle positif, sont figurées par les trois droites

$$s = a^2 t - a^4, \qquad s = b^2 t - b^4, \qquad s = c^2 t - c^4.$$

Il est aisé de voir que les points du triangle positif sont figurés par des points situés à l'intérieur du triangle ABC formé par ces trois droites et que les deux triangles se correspondent point par point.

Pour chaque point (s, t) du triangle rectiligne, l'équation (25), mise sous la forme

$$(29) \qquad Rt - Qs - (R + Qt - Ps)\theta + (Q - s)\theta^2 = 0 \qquad \left(\theta = \frac{ds}{dt}\right),$$

donne deux valeurs de θ. Le lieu des points (s, t) pour lesquels θ a une valeur donnée est une droite, tangente à la conique

$$(R + Qt - Ps)^2 - 4(Rt - Qs)(Q - s) = 0.$$

Le discriminant de cette conique est

$$(PQ - 2R)^2 - Q^2(P^2 - 4Q) \quad \text{ou} \quad 4(Q^3 - PQR + R^2).$$

Un calcul facile montre que ce discriminant se décompose en trois facteurs, et que sa valeur est

$$4[b^2c^2 - a^2(b^2 + c^2)][c^2a^2 - b^2(c^2 + a^2)][a^2b^2 - c^2(a^2 + b^2)].$$

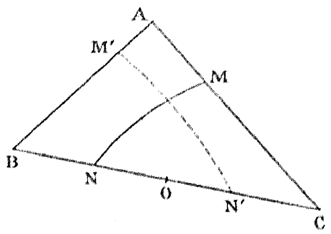
De ces trois facteurs, les deux premiers sont négatifs. La conique est donc une ellipse ou une hyperbole suivant que l'expression

$$a^2b^2 - c^2(a^2 + b^2)$$

est négative ou positive. Nous retrouvons ici en présence les deux hypothèses que nous avons déjà eu à examiner.

Supposons d'abord que $a^2b^2 - c^2(a^2 + b^2)$ soit une quantité positive. Les ombilics mécaniques sont alors dans le plan perpendiculaire au grand axe. Ils sont figurés par un point O du côté BC (*fig.* 1).

Fig. 1.



Appelons premier système de lignes isostatiques celui qui comprend la section principale représentée par AB, et deuxième système, celui qui comprend la section principale figurée par AC. Alors OC appartient au premier système, tandis que OB appartient au second. Les courbes figuratives du premier système passent par un déplacement continu de la position initiale AB à la position finale OC. L'une quelconque d'entre elles, MN, est comprise entre un point M situé sur AC et un point N situé sur OB. Au point M, l'une des valeurs de θ est égale au coefficient angulaire b^2, de la droite AC. La seconde valeur θ_1, qui appartient à MN, est, en vertu de l'équation (29),

$$\theta_1 = \frac{Rt - Qs}{Q - s} \frac{1}{b^2}.$$

Mais, le point M étant sur AC, on a pour ce point $s = b^2 t - b^4$. D'ailleurs $R = a^2 b^2 c^2$. On trouve ainsi

$$\theta_1 = \frac{Q - a^2 c^2}{b^2} + \frac{a^4 c^4 - b^4(a^2 - c^2)^2}{4(Q - s) b^2}.$$

Quand M va de A en C, s varie de $b^2 c^2$ à $b^2 a^2$, et θ_1 varie, toujours dans le même sens, de c^2 à a^2. Mais une variable a deux manières de passer de c^2 à a^2 ($c^2 < a^2$). Elle peut le faire en restant comprise dans cet intervalle, ou bien, au contraire, en décroissant de c^2 à $-\infty$ pour revenir de $+\infty$ à a^2. Il est aisé de voir que θ_1 se trouve dans le second cas. En effet, s passe continûment, et en restant fini, de $b^2 c^2$ à $b^2 a^2$ ($b^2 c^2 < b^2 a^2$), mais Q est compris entre $b^2 c^2$ et $b^2 a^2$, car

$$Q - b^2 c^2 = \tfrac{1}{2}[b^2(a^2 - c^2) + a^2 c^2] > 0$$

et

$$Q - a^2 b^2 = \tfrac{1}{2}[c^2(a^2 + b^2) - a^2 b^2] < 0 \qquad \text{(par hypothèse).}$$

Il y a donc une position de M pour laquelle $Q - s = 0$, et à ce moment θ_1 est infini.

Par un raisonnement analogue, on verra que, quand le point final N décrit le segment de droite BO, la valeur correspondante, θ_2, de la dérivée $\frac{ds}{dt}$ varie encore de c^2 à a^2 en passant par l'infini.

Remarquons encore que, pour aucun point de MN, θ ne peut atteindre l'une des valeurs a^2 ou c^2. En effet, en vertu de l'équation (29), le lieu des points pour lesquels $\theta = a^2$ se compose exclusivement de la droite BC, et le lieu des points pour lesquels $\theta = c^2$ est la droite AB. Donc, pour avoir la totalité de l'arc MN, il faudra faire varier θ entre deux valeurs extérieures à l'intervalle (a^2, c^2), en passant par l'infini. On procédera de la manière suivante. Soient s_1, t_1 les coordonnées du point M, choisi à volonté sur AB. L'équation (29) fait connaître la valeur initiale, θ_1, de θ, et l'équation $s_1 - t_1 \theta_1 = \omega_1$ donne la valeur initiale, ω_1, de ω. L'équation (28), dans laquelle l'intégrale indéfinie doit être prise égale à zéro pour cette position initiale, donne

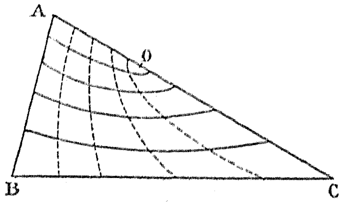
$$k = \frac{\omega_1}{(\theta_1 - a^2)^{A}(\theta_1 - b^2)^{B}(\theta_1 - c^2)^{C}}.$$

L'état initial étant ainsi connu, on fera varier θ progressivement depuis θ_1 jusqu'à $+\infty$ (si $\theta_1 > a^2$) et depuis θ_1 jusqu'à $-\infty$ (si $\theta_1 < c^2$), puis on reviendra de $-\infty$ vers c^2 ou de $+\infty$ vers a^2. Pour chaque valeur de θ_1, on connaît ω par la formule (28), dans laquelle l'intégration est faite de θ_1 à θ, et l'on obtient ensuite s et t par les formules (26). On s'arrêtera quand le point figuratif aura atteint la droite BC, c'est-à-dire quand les variables s, t vérifieront la relation $s = a^2 t - a^4$.

Pour une ligne isostatique du second système, il faut partir d'un point M' intermédiaire entre A et B, et aboutir à un point N' intermédiaire entre O et C. En raisonnant d'une manière analogue, on trouve qu'en M', comme en N', θ est compris entre a^2 et b^2. Ici, le passage de la valeur initiale à la valeur finale s'effectue à l'intérieur de l'intervalle (a^2, b^2).

Supposons maintenant que $a^2 b^2 - c^2(a^2 + b^2)$ soit une quantité négative. Les ombilics mécaniques se trouvent dans le plan perpendiculaire à l'axe moyen. Ils sont figurés par un point O du côté AC (*fig.* 2).

Fig. 2.



L'un des systèmes de lignes figuratives passe, par une déformation progressive, de la position AB à la position OC; l'autre passe de même de la position BC à la position AO. Pour le premier système, θ reste constamment compris entre c^2 et b^2; pour le second, il reste compris entre b^2 et a^2. On détermine d'ailleurs, comme dans le cas précédent, la constante k, ainsi que les valeurs initiale et finale de θ afférentes à chaque ligne.

En résumé, on voit qu'en dehors des trois sections principales on n'a jamais à envisager, dans l'emploi de l'équation (28), les valeurs a^2, b^2, c^2 de θ; il est donc inutile d'examiner les singularités qui pourraient résulter pour ω de l'emploi de ces valeurs.

La discussion précédente montre que la disposition des lignes isostatiques est tout à fait analogue à celle des lignes de courbure, les ombilics mécaniques étant simplement substitués aux ombilics géométriques.

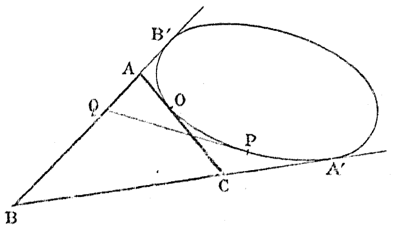
Les lignes isostatiques jouissent-elles, comme les lignes de courbure, de la propriété de former sur l'ellipsoïde un système isotherme? La vérification directe serait fort laborieuse; mais on peut, sans l'entreprendre, répondre négativement. Il y a, en effet, nous l'avons vu, un cas particulier dans lequel les lignes isostatiques sont constituées par les lignes de niveau et les lignes de plus grande pente; or on s'assure sans peine qu'un pareil système n'est pas isotherme.

Nous avons dit que le lieu des points pour lesquels θ a une valeur donnée est représenté, dans le plan, par la droite (29) tangente à la conique

$$(R + Qt - Ps)^2 - 4(Rt - Qs)(Q - s) = 0.$$

Par chaque point du plan passent deux tangentes à cette conique. Chacune d'elles coupe sous un angle constant les courbes figuratives de l'un des systèmes de lignes isostatiques. Plaçons-nous, pour fixer les idées, dans le cas où l'expression $a^2b^2 - c^2(a^2 + b^2)$ est négative. La conique enveloppe est alors une ellipse, et une discussion bien simple montre que la disposition générale est celle de la *fig.* 3 : le

Fig. 3.



triangle ABC est circonscrit extérieurement à l'ellipse; le point de contact du côté AC est le point O déjà envisagé, qui correspond à l'ombilic. Les deux autres côtés la touchent en des points A', B' situés sur leurs prolongements. Une tangente telle que PQ, dont le point de contact est entre O et A', rencontre sous un même angle les lignes figuratives du système qui comprend AO et BC. Une tangente dont le point de contact serait entre O et B' rencontrerait sous un même angle les lignes figuratives de l'autre système, qui comprend BC et OC. On peut déduire de là que la connaissance d'une seule ligne figurative, autre que les côtés du triangle, permet de construire facilement les autres lignes du même système. On arrive au même résultat par le calcul suivant.

Dans l'équation (28), qui détermine ω, la limite inférieure de l'intégrale peut, sans inconvénient, être regardée comme fixe, car on peut comprendre dans la constante arbitraire k la portion de cette intégrale qui est prise entre la valeur initiale de θ, précédemment calculée, et la limite fixe que nous voulons maintenant adopter. Dans ces conditions, on a une expression de la forme

$$\omega = \mathrm{M} + k\mathrm{N},$$

dans laquelle M et N sont des fonctions de θ, indépendantes de k. Ceci posé, et en appelant M′, N′ les dérivées de M et N, les formules (26) donnent

$$t = -\mathrm{M}' - k\mathrm{N}', \qquad s = \mathrm{M} - \mathrm{M}'\theta + k(\mathrm{N} - \mathrm{N}'\theta).$$

Considérons une autre ligne isostatique du même système. Soit k_1 la nouvelle valeur de k. Soient t_1, s_1 les valeurs de t et s correspondant à la même valeur de θ. On a

$$t_1 = -\mathrm{M}' - k_1\mathrm{N}', \qquad s_1 = \mathrm{M} - \mathrm{M}'\theta + k_1(\mathrm{N} - \mathrm{N}'\theta);$$

d'où

$$t_1 - t = (k - k_1)\mathrm{N}', \qquad s_1 - s = (k_1 - k)(\mathrm{N} - \mathrm{N}'\theta),$$

mais

$$\mathrm{N} = (\theta - a^2)^{\mathrm{A}}(\theta - b^2)^{\mathrm{B}}(\theta - c^2)^{\mathrm{C}}.$$

Donc, à chaque point de la première ligne k on peut, sans aucune intégration, faire correspondre un point de la ligne k_1. C'est ce que nous voulions établir.

On voit en même temps que le rapport $\frac{s_1 - s}{t_1 - t}$ est indépendant des paramètres k et k_1 : il dépend uniquement de θ. C'est-à-dire que le lieu des points, pris sur les isostatiques d'un même système, pour lesquels θ a la même valeur, est une ligne droite : résultat déjà obtenu d'une autre manière.

La valeur du rapport $\frac{s_1 - s}{t_1 - t}$ est

$$\frac{N}{N'} - \theta,$$

mais

$$\frac{N'}{N} = \frac{A}{\theta - a^2} + \frac{B}{\theta - b^2} + \frac{C}{\theta - c^2}.$$

$\frac{s_1 - s}{t_1 - t}$ est donc une fonction rationnelle de θ.

Si l'on considère une troisième ligne, définie par la valeur k_2 du paramètre, et, si l'on appelle s_2, t_2 les coordonnées du point correspondant encore à la même valeur de θ, on a

$$\frac{s_2 - s}{t_2 - t} = \frac{s_1 - s}{t_1 - t}.$$

Nous pouvons donc, en terminant, énoncer ce théorème :

Les lignes isostatiques d'un même système sont figurées dans le plan par des courbes qui interceptent sur les tangentes à la conique de base des segments proportionnels.