ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

ÉTIENNE DELASSUS

Sur les systèmes articulés gauches

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 17 (1900), p. 445-499

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1900_3_17__445_0>

SUR LES

SYSTÈMES ARTICULÉS GAUCHES,

Par M. Étienne DELASSUS,

CHARGÉ DE COURS A L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE.

PREMIÈRE PARTIE.

I.

Les polygones articulés.

La transmission de mouvement entre deux corps solides par contact direct peut se faire de plusieurs façons : soit par contact ponctuel, comme dans les engrenages à roulement ou la vis sans fin, soit par contact linéaire, comme dans les engrenages ordinaires, soit enfin par contact superficiel, ce qui veut dire que deux surfaces identiques tracées dans les deux corps sont assujetties à rester toujours en coïncidence.

Nous dirons dans ce cas que les deux corps solides sont *articulés*, généralisant un peu de cette façon la définition ordinaire qui ne considère pas la vis comme une articulation.

La surface de jonction des deux corps doit posséder la propriété de pouvoir se déplacer d'une façon continue sans cesser de coïncider avec elle-même; elle ne peut être qu'un hélicoïde, une surface de révolution, un cylindre ou un prisme. Mais il y a une distinction à faire suivant le nombre de paramètres dont dépend le mouvement de glissement de la surface sur elle-même.

Les hélicoïdes, les surfaces de révolution autres que le cylindre, les cylindres non de révolution et, en particulier, les prismes n'ont qu'un mouvement à un paramètre; ils donnent ce que nous appellerons les *articulations simples*, à savoir :

1° La *vis;*

2° Le *rotoïde* (¹), formé par une surface de révolution autre qu'un cylindre et qui peut avantageusement être considéré comme une vis dont le *pas* serait nul;

3° La *glissière rectiligne,* ou tout simplement *glissière,* formée par un cylindre non de révolution ou par un prisme. Nous considérerons souvent cette glissière comme une vis de pas arbitraire et dont l'axe est rejeté à l'infini dans un plan perpendiculaire à la direction de cette glissière, ou même quelquefois comme une vis de pas infini dont l'axe est indéterminé parallèlement à cette direction.

Le cylindre de révolution possède un mouvement à deux paramètres; ce sera une *articulation double* que nous appellerons *verrou.*

Enfin, la sphère et le plan ont des mouvements à trois paramètres, ils donnent des *articulations triples*, à savoir :

1° Le *genou* dans le cas de la sphère;

2° La *glissière plane* dans le cas du plan.

Nous dirons que deux articulations joignant deux corps sont *équivalentes* si elles permettent les mêmes mouvements relatifs de ces deux corps, comme, par exemple, deux surfaces de révolution ayant même axe. Nous ne les considérerons pas comme distinctes.

Une articulation simple étant une surface invariable restant en coïncidence avec elle-même par un mouvement à un paramètre, sa *position géométrique* dépend de $6-1$, c'est-à-dire 5 paramètres.

De même, une articulation double dépendra de 4 paramètres et une articulation triple de 3 paramètres.

Supposons qu'une articulation d'ordre p se déplace et dépende de q paramètres ($p \leqq 3$, $q \leqq 6-p$) et qu'un corps puisse jouer librement sur cette articulation pendant qu'elle se déplace, je dis que la position du corps dépendra de $p+q$ paramètres. Il est d'abord évident que ce nombre ne peut être supérieur à $p+q$, ensuite il ne peut être infé-

(¹) Ce terme est emprunté à Reuleaux, *Cinématique.*

rieur, car en fixant l'articulation on introduirait q relations distinctes entre les paramètres, et il en resterait moins de p pour le mouvement du corps autour de cette articulation.

Réciproquement, si le corps dépendant de r paramètres peut jouer librement sur une articulation d'ordre p, c'est que cette articulation dépend de $r-p$ paramètres.

Il est inutile de définir ce que nous devons entendre par polygone articulé ou, en employant le langage de Reuleaux, par *chaîne simple* ouverte ou fermée. Les chaînes gauches présentent avec les chaînes planes une différence essentielle; dans ces dernières, toutes les articulations sont des rotoïdes parallèles et le nombre de paramètres dont dépend la déformation de la chaîne est une fonction très simple et bien connue du nombre des articulations, tandis que dans les systèmes gauches ce nombre de paramètres dépend aussi de la disposition des articulations; par exemple pour les hexagones fermés, nous trouverons 0, 1, 2, 3 paramètres suivant les cas.

Le but que je me propose ici étant l'étude rigoureuse de la déformation des chaînes articulées, il est nécessaire de faire certaines remarques permettant de simplifier les discussions.

Soient deux corps S, S′ réunis par une articulation double, un verrou dont l'axe est une ligne L tracée dans S. Imaginons un corps S″ lié à S par un rotoïde ayant L pour axe et lié à S′ par une glissière parallèle à L. On voit immédiatement que S′, lié à S par l'intermédiaire de S″, sera dans les mêmes conditions que lié directement à S par le verrou. On pourrait, d'une façon plus générale, remplacer le verrou par deux vis de même axe, mais ayant des pas différents, la solution précédente correspondant au cas où les deux pas seraient 0 et ∞.

Si les deux corps sont liés par un genou ayant O pour centre, nous introduirons deux corps intermédiaires S″ et S‴, S et S″ étant liés par un rotoïde dont l'axe passe par O, S″ et S‴ liés également par un rotoïde d'axe passant par O, et enfin S‴ et S′ étant aussi liés par un troisième rotoïde dont l'axe passe encore par O.

Si les deux corps sont liés par une glissière plane, on introduira encore deux corps intermédiaires avec trois rotoïdes perpendiculaires à la glissière, ou deux rotoïdes perpendiculaires et une glissière rectiligne parallèle, ou enfin un rotoïde perpendiculaire et deux glissières parallèles à la glissière plane, mais non parallèles entre elles.

Nous voyons ainsi que, par l'adjonction de membres nouveaux et sans changer en quoi que ce soit le mouvement relatif des membres qui appartenaient à l'ancienne chaîne, toute chaîne possédant des articulations multiples peut se remplacer par une chaîne à articulations simples.

Il en résulte cette conséquence que, pour l'étude théorique des chaînes articulées, nous pouvons sans restreindre la généralité nous borner aux chaînes dont toutes les articulations sont simples.

En outre, il faut dans une chaîne à articulations multiples distinguer le nombre apparent et le nombre réel de membres, le premier s'évaluant au moyen du nombre des articulations et le second au moyen du nombre de ces articulations calculé en tenant compte de leur degré de multiplicité. Ainsi, le joint Clémens, qui possède une articulation sphérique, est un pentagone apparent, tandis qu'en réalité c'est un heptagone s'il est disposé non symétriquement et un hexagone s'il y a symétrie.

Dans la pratique, c'est souvent l'opération inverse qui se fait : on remplace plusieurs articulations consécutives et convenablement disposées par une articulation multiple; de cette façon il y a réduction apparente du nombre des membres, ce qui est souvent un avantage.

Par opposition à ces réductions apparentes, il y a les réductions effectives.

Considérons une chaîne à articulations simples et ouverte ou fermée, supposons que trois corps consécutifs S, S′, S″ soient liés de telle façon que les deux articulations soient *équivalentes* dans le corps intermédiaire S′. Il est évident que le corps S″ est exactement dans les mêmes conditions que s'il était relié directement à S par l'articulation qui y réunit S′; le corps S′ est donc un membre surabondant qu'on peut supprimer sans introduire d'articulations multiples, c'est-à-dire sans que la chaîne cesse d'être complète et, en outre, sans changer en aucune façon les mouvements relatifs de tous les autres membres. Ces membres surabondants ne doivent pas être comptés. On en trouve un exemple bien simple dans la réalisation pratique de la charnière, qui est une chaîne à deux membres réunis par un rotoïde et possède généralement trois membres et deux rotoïdes ayant même axe.

Nous supposerons toujours que les deux articulations d'un même membre de la chaîne ne sont jamais équivalentes, c'est-à-dire ne sont jamais deux vis de même axe et de même pas, et, comme cas particulier, ne sont jamais deux rotoïdes de même axe ou deux glissières parallèles.

Il y a un autre cas de réduction beaucoup plus important, mais qui n'existe que dans les chaînes fermées.

Soient $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ les paramètres qui définissent les mouvements relatifs des corps consécutifs autour des articulations qui les lient. Il est évident que si la chaîne est ouverte les ε peuvent varier arbitrairement et indépendamment les uns des autres; il n'en est plus de même si la chaîne se ferme. Coupons cette chaîne par un de ses membres, de façon à obtenir une chaîne ouverte dont les deux membres extrêmes seront les deux portions d'un même corps. Fixons le premier membre de la chaîne ouverte, le dernier membre a une position variable dépendant effectivement des ε; pour retrouver la chaîne fermée, il faut le fixer de façon qu'il constitue avec le premier, qui est déjà fixé, un même corps solide; on établit donc entre les ε des relations effectives. Il peut alors arriver que, de ces relations, résulte que l'un des ε a une valeur constante, ce qui veut dire que, dans toutes les déformations possibles de notre chaîne fermée, les deux corps consécutifs correspondants seront toujours en repos relatif; on pourra les souder ensemble sans changer la déformation de la chaîne et alors ces deux membres n'en formeront, en réalité, qu'un seul. C'est l'articulation qui ne joue pas et qu'on supprime; à cause de cela, nous dirons que cette articulation est *surabondante*. La recherche de ces articulations étant en rapport intime avec d'autres questions et exigeant des préliminaires assez considérables, sera faite ultérieurement.

II.

Étude de certains mouvements à plusieurs paramètres d'un corps solide.

Supposons un corps solide S dont la position dépend de p paramètres ($p < 6$). Traçons dans ce corps une articulation simple, c'est-à-dire un hélicoïde, une surface de révolution ou une surface prismatique; on conçoit très bien que, dans le déplacement à p paramètres, cette articulation ne dépende que de $p-1$ paramètres : il suffit pour le concevoir de supposer que l'articulation dépende de $p-1$ paramètres et que le corps puisse librement jouer sur elle; il faut remarquer que toutes les articulations équivalentes à la précédente et tracées dans le corps S dépendront aussi de $p-1$ paramètres. Nous allons nous proposer alors le problème suivant :

Un corps à p paramètres peut-il posséder deux articulations non équivalentes ne dépendant chacune que de p — 1 paramètres ?

Désignons, pour abréger, par A et A′ ces deux articulations, par $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'$ les mouvements autour de ces articulations, et enfin par a_1, a_2, ..., a_p, les p paramètres du corps S.

A dépend de $p-1$ paramètres qui sont des fonctions distinctes de a_1, a_2, ... a_p; si nous fixons A, nous introduisons $p-1$ relations distinctes entre a_1, a_2, ..., a_p, de sorte que la position du corps dépend encore d'un paramètre, ce qui indique, puisque A est fixe, que le corps peut librement prendre le mouvement $\mathcal{M}$; il peut de même prendre librement le mouvement $\mathcal{M}'$.

Au lieu de considérer le corps solide comme ayant un mouvement à p paramètres, considérons l'ensemble Σ de toutes les positions que prend ce corps quand on fait varier d'une façon arbitraire ces paramètres, par $\mathcal{A}$ l'ensemble de toutes les positions de A et par $\mathcal{A}'$ l'ensemble de toutes les positions de A′.

Partons d'une position initiale S_0, A_0, A'_0, donnons au corps tous les mouvements $\mathcal{M}$ autour de A_0, toutes les positions obtenues appartiendront à Σ et A'_0 prendra une infinité de positions appartenant à $\mathcal{A}'$. Prenons toutes ces positions S et donnons à chacune d'elles tous les mouvements $\mathcal{M}'$ autour de A′. Prenons toutes ces nouvelles positions de S et donnons à chacune d'elles tous les mouvements $\mathcal{M}$ autour de A, et ainsi de suite, indéfiniment, en alternant les mouvements $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'$.

Nous obtiendrons ainsi un ensemble de positions de S appartenant toutes à Σ, cet ensemble est Σ ou est une partie de Σ. S'il dépend de moins de p paramètres, c'est que Σ sera constitué par une suite infinie de tels systèmes.

Nous sommes ainsi amenés à étudier les *mouvements spéciaux* d'un corps solide définis comme il suit :

Un corps solide a un mouvement spécial à p paramètres si, en partant d'une position initiale et lui donnant indéfiniment et alternativement les mouvements $\mathfrak{M}$ *et* $\mathfrak{M}'$ *d'amplitudes arbitraires autour de ses articulations* A *et* A′, *on obtient toutes les positions qu'il peut prendre en vertu de ses p paramètres et rien qu'elles.*

Pour la commodité du langage, convenons de représenter de la façon suivante, en indiquant leurs amplitudes, les mouvements successifs $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}'$ qui font passer de la position initiale S_0 à une autre position

$$S \qquad \begin{array}{c|cccccc} \mathfrak{M} & \mu_0 & & \mu_2 & & \mu_4 & \\ \hline \mathfrak{M}' & & \mu_1 & & \mu_3 & & \mu_5 \end{array}.$$

Considérons alors deux positions qui diffèrent seulement par la valeur de μ_0. On voit facilement de proche en proche que l'une se déduit de l'autre par un mouvement $\mathfrak{M}$ autour de A_0 et d'amplitude égale à la différence des μ_0, d'où résulte immédiatement que l'ensemble Σ des positions occupées par le corps S ne change pas par un mouvement $\mathfrak{M}$ d'amplitude arbitraire autour de A_0.

Considérons la position S indiquée plus haut, on peut l'écrire

$$S \qquad \begin{array}{c|ccccccc} \mathfrak{M} & & \mu_0 & & \mu_2 & & \mu_4 & \\ \hline \mathfrak{M}' & 0 & & \mu_1 & & \mu_3 & & \mu_5 \end{array},$$

de sorte qu'elle fait partie des positions qu'on peut obtenir en partant de S_0, mais commençant par un mouvement $\mathfrak{M}'$. Réciproquement, toute position obtenue de cette façon

$$S \qquad \begin{array}{c|ccccc} \mathfrak{M} & & \nu_1 & & \nu_3 & \\ \hline \mathfrak{M}' & \nu_0 & & \nu_2 & & \nu_4 \end{array}$$

peut s'écrire

$$S \qquad \begin{array}{c|cccccc} \mathfrak{M} & 0 & & \nu_1 & & \nu_3 & \\ \hline \mathfrak{M}' & & \nu_0 & & \nu_2 & & \nu_4 \end{array},$$

et, par conséquent, peut être considérée comme obtenue en partant de S_0 et commençant par un mouvement $\mathfrak{M}$.

Il y a donc identité entre les deux systèmes obtenus en partant de S_0 et donnant les mouvements alternatifs en commençant par $\mathfrak{M}$ ou par $\mathfrak{M}'$, et de là résulte que le système Σ reste invariable par un mouvement $\mathfrak{M}'$ d'amplitude arbitraire autour de A'_0.

On peut aller plus loin.

Considérons une position quelconque S_1 du système Σ

$$S_1 \qquad \begin{array}{c|cccc} \mathfrak{M} & \nu_1 & & \nu_3 & \\ \hline \mathfrak{M}' & & \nu_2 & & \nu_4 \end{array},$$

et une autre position arbitraire

$$S \qquad \begin{array}{c|cccc} \mathfrak{M} & & \mu_2 & & \mu_4 \\ \hline \mathfrak{M}' & \mu_1 & & \mu_3 & \end{array},$$

S_1 étant indiquée en prenant A_0 pour point de départ et S en prenant A'_0.

Partons de S_1 et appliquons au corps la suite des mouvements

$$\begin{array}{c|cccccccc} \mathfrak{M} & & -\nu_3 & & -\nu_1 & & \mu_2 & & \mu_4 \\ \hline \mathfrak{M}' & -\nu_4 & & -\nu_2 & & \mu_1 & & \mu_3 & \end{array},$$

les quatre premiers font passer de S_1 à S_0 et les suivants de S_0 à S, ce qui montre que toute position S peut être obtenue par des mouvements alternatifs $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}'$ en partant de S_1. Réciproquement, considérons une position S quelconque obtenue de cette façon en partant de S_1,

$$\begin{array}{c|ccccc} \mathfrak{M} & \mu_1 & & \mu_3 & & \mu_5 \\ \hline \mathfrak{M}' & & \mu_2 & & \mu_4 & \end{array},$$

il est évident que je puis l'obtenir en partant de S_0 par la succession de mouvements

$$\begin{array}{c|ccccccccc} \mathfrak{M} & \nu_1 & & \nu_3 & & \mu_1 & & \mu_3 & & \mu_5 \\ \hline \mathfrak{M}' & & \nu_2 & & \nu_4 & & \mu_2 & & \mu_4 & \end{array},$$

puisque les quatre premiers font passer de S_0 à S_1 et les suivants de S_1 à S, d'où cette conclusion que le système Σ s'engendre de la même façon par des mouvements alternatifs $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}'$ en prenant comme position initiale du corps une quelconque de ses positions, et il en résulte :

Quand un corps a un mouvement spécial, l'ensemble Σ de toutes les *positions de ce corps, l'ensemble* $\mathcal{A}$ *de toutes les positions de son articulation* A *et l'ensemble* $\mathcal{A}'$ *de toutes les positions de son articulation* A' *restent invariables par tout mouvement* $\mathfrak{M}$ *autour d'une quelconque des positions de* A *et par tout mouvement* $\mathfrak{M}'$ *autour d'une quelconque des positions de* A'.

C'est cette propriété fondamentale des systèmes spéciaux qui va nous permettre de les déterminer. Mais, pour ne pas interrompre la discussion, nous commencerons par établir la propriété suivante :

La condition nécessaire et suffisante pour que deux mouvements hélicoïdaux infiniment petits, dont on donne les axes et les pas, fournissent par leur composition un mouvement hélicoïdal de pas constant quelles que soient leurs amplitudes, est que leurs pas soient égaux et leurs axes concourants ou parallèles.

La condition d'égalité des pas est évidente, puisque, suivant que l'un ou l'autre des deux mouvements simultanés a une amplitude nulle, on obtient l'un ou l'autre pas.

Supposons donc deux vis de même pas

$$\mathrm{V} \quad \begin{cases} \mathrm{XYZ}, & \mathrm{L\ M\ N}, \\ \mathrm{o\,o\,o}, & h\mathrm{X}\,h\mathrm{Y}\,h\mathrm{Z}, \end{cases}$$

$$\mathrm{V}' \quad \begin{cases} \mathrm{X'Y'Z'}, & \mathrm{L'\ M'\ N'}, \\ \mathrm{o\ o\ o}, & h\mathrm{X'}\,h\mathrm{Y'}\,h\mathrm{Z'}. \end{cases}$$

Soient λ un facteur indiquant l'amplitude du premier mouvement et λ' un autre pour le second mouvement, le mouvement résultant aura pour coordonnées

$$\begin{aligned} \mathfrak{X} &= \lambda\mathrm{X} + \lambda'\mathrm{X}', & \mathfrak{L} &= \lambda\mathrm{L} + \lambda'\mathrm{L}' + h(\lambda\mathrm{X} + \lambda'\mathrm{X}'), \\ \mathfrak{Y} &= \lambda\mathrm{Y} + \lambda'\mathrm{Y}', & \mathfrak{M} &= \lambda\mathrm{M} + \lambda'\mathrm{M}' + h(\lambda\mathrm{Y} + \lambda'\mathrm{Y}'), \\ \mathfrak{Z} &= \lambda\mathrm{Z} + \lambda'\mathrm{Z}', & \mathfrak{N} &= \lambda\mathrm{N} + \lambda'\mathrm{N}' + h(\lambda\mathrm{Z} + \lambda'\mathrm{Z}'), \end{aligned}$$

et l'on doit avoir, quels que soient λ et λ',

$$\frac{\mathfrak{L}\mathfrak{X} + \mathfrak{M}\mathfrak{Y} + \mathfrak{N}\mathfrak{Z}}{\mathfrak{X}^2 + \mathfrak{Y}^2 + \mathfrak{Z}^2} = h,$$

égalité qui se réduit à

$$\begin{aligned} (\lambda\mathrm{X} + \lambda'\mathrm{X}')(\lambda\mathrm{L} + \lambda'\mathrm{L}') + (\lambda\mathrm{Y} + \lambda'\mathrm{Y}')(\lambda\mathrm{M} + \lambda'\mathrm{M}') \\ + (\lambda\mathrm{Z} + \lambda'\mathrm{Z}')(\lambda\mathrm{N} + \lambda'\mathrm{N}') = \mathrm{o}. \end{aligned}$$

Les coefficients de λ^2 et λ'^2 sont nuls en vertu d'identités bien connues, et il reste à annuler le coefficient de $\lambda\lambda'$ qui est précisément le moment des deux segments XYZLMN et X'Y'Z'L'M'N', et cela exprime que les lignes d'action de ces deux segments, c'est-à-dire les axes de nos deux mouvements hélicoïdaux, doivent être dans un même plan.

Dans la recherche des mouvements spéciaux, nous allons distinguer plusieurs cas.

Premier cas. — *L'une des deux articulations, A par exemple, est une vis ou un rotoide dépendant de $p-1$ paramètres et dont l'axe est une droite dépendant aussi de $p-1$ paramètres.*

Le corps S, dépendant de p paramètres $a_1, a_2, \ldots, a_p$, possède des déplacements infiniment petits à partir d'une position quelconque et qui dépendent de $da_1, da_2, \ldots, da_p$. Ces déplacements infiniment petits sont des mouvements hélicoïdaux qui se font sur des vis dépendant linéairement de $p-1$ paramètres, les rapports de $p-1$ des différentielles da à la dernière. Mais, d'autre part, nous connaissons *a priori* les déplacements infiniment petits constitués par des mouvements $\mathfrak{M}$ autour des différentes positions de A. Ces vis ayant un axe dépendant de $p-1$ paramètres dépendent également de $p-1$ paramètres, de sorte qu'il doit y avoir identité entre ces deux séries de vis. Plus rigoureusement, on peut raisonner de la façon suivante :

Soient $u_1, u_2, \ldots, u_{p-1}$ les rapports de $p-1$ des da au dernier, le mouvement instantané se fait sur une vis dont les coordonnées sont des fonctions linéaires des u et dont le pas est une fonction rationnelle du second degré de ces paramètres. Or, parmi ces vis dépendant de $p-1$ paramètres, nous en connaissons qui dépendent également de $p-1$ paramètres et, par conséquent, pour lesquelles les u sont arbitraires et dont le pas a une valeur constante h; la fraction rationnelle qui exprime le pas est donc indépendante des u, de sorte que *tout mouvement infiniment petit du corps solide est un mouvement hélicoïdal de pas h.*

Considérons alors deux positions quelconques A_0 et A_1 de A, deux mouvements $\mathfrak{M}$ infiniment petits et d'amplitudes arbitraires effectués autour de A_0 et A_1 seront des déplacements infiniment petits du corps. En composant ces deux mouvements hélicoïdaux de même pas h, on aura encore un déplacement infiniment petit du corps solide et, par conséquent, un mouvement hélicoïdal qui devra avoir le pas h, de sorte que, par l'application du lemme, les axes de A_0 et A_1 devront être concourants ou parallèles; ce qui nous montre déjà que, dans le déplacement à p paramètres du corps solide, l'axe de l'articulation A passe par un point fixe, reste dans un plan fixe ou garde une direction fixe. Comme, par hypothèse, cet axe dépend rigoureusement de $p-1$ paramètres, on voit que l'on ne pourra jamais avoir que

$$p \leqq 3.$$

En outre, les mouvements $\mathfrak{M}'$ sont aussi des mouvements infiniment petits du corps, de sorte qu'ils doivent avoir h comme pas et que leur combinaison avec tout mouvement $\mathfrak{M}$ doit aussi avoir h comme pas. De là résulte que les A′ sont des vis de même pas que les A et dont les axes passent par le même point fixe que ceux des A, sont dans le même plan fixe ou sont parallèles à la même direction fixe et, comme cas limite, les A′ sont des glissières dont les directions sont perpendiculaires à tous les axes des A, ce qui ne peut arriver que pour les deux dernières dispositions de ces axes.

Étudions d'abord le cas où les axes de tous les A et A′ passent par un point fixe O. Nous remarquerons qu'une droite subissant un mouvement hélicoïdal dont le pas n'est pas nul ne peut jamais passer par un point fixe à distance finie. Prenons deux positions quelconques A_0 et A_1 de l'articulation A, leurs axes passant par O, et donnons à A_0 un mouvement $\mathfrak{M}$ arbitraire autour de A_1. Nous obtiendrons une nouvelle position de A qui appartiendra encore à l'ensemble $\mathcal{A}$, mais dont l'axe cessera de passer par O à moins que l'on n'ait $h = 0$.

Ainsi le corps a un point fixe et les deux articulations doivent être des rotoïdes dont les axes passent par ce point.

Si $p = 3$, le corps a un mouvement arbitraire autour d'un point fixe, et tout rotoïde dont l'axe passe par ce point dépend bien de deux paramètres.

Peut-on avoir $p = 2$? Les articulations A auraient des axes formant un cône qui devrait être de révolution autour de chacune de ses génératrices, ce qui est impossible.

On ne peut également avoir $p = 1$, car les deux rotoïdes non équivalents A et A′ seraient fixes, ce qui est absurde, puisque le rotoïde A peut tourner autour de A′ et ne reste pas fixe dans ce mouvement.

Le cas où tous les axes des A seraient dans un même plan fixe ne peut jamais se présenter, car prenant A_0 et A_1 quelconques et dont les axes sont dans ce plan, en donnant à A_0 un mouvement $\mathfrak{M}$ quelconque autour de A_1, on obtiendrait encore une articulation de l'ensemble $\mathcal{A}$, mais dont l'axe sortirait du plan considéré, et cela quelle que soit la valeur finie de h. Ce cas ne peut donc se présenter.

Il ne nous reste à étudier alors que celui où tous les A et les A′ ont leurs axes parallèles à une direction fixe. Le même raisonnement que précédemment nous montre que le seul cas possible est celui de $p = 3$. Pour voir nettement le mouvement du corps, il nous faut tracer dans ce corps un plan P perpendiculaire à la direction fixe et une droite D dans ce plan; le corps se déplace de telle façon que ce plan reste parallèle à lui-même et que la droite tourne d'un angle proportionnel au déplacement de ce plan. Soit h le déplacement pour lequel la droite tourne de $360°$. Toute vis de pas h et d'axe perpendiculaire au plan dépendra de deux paramètres, et il en sera de même pour toute glissière parallèle à ce plan.

Comme cas particulier, nous avons celui de $h = 0$; le corps a un plan fixe et les articulations dépendant de deux paramètres sont les rotoïdes perpendiculaires à ce plan et les glissières qui lui sont parallèles.

Il est à remarquer que le cas de $p = 1$ avec les axes de A et A′ confondus ne peut jamais se présenter, car A et A′ seraient deux articulations équivalentes.

Supposons maintenant, pour continuer la discussion générale, qu'aucune des deux articulations ne soit une vis ou un rotoïde à $p - 1$ paramètres, et dont l'axe dépende aussi de $p - 1$ paramètres.

En premier lieu, nous allons admettre que l'une des deux articulations, A, par exemple, est une vis ou un rotoïde pouvant glisser sur son axe de façon que cet axe ne dépende que de $p - 2$ paramètres, l'autre articulation étant une vis ou un rotoïde dans les mêmes conditions, ou bien une glissière. L'axe de A dépend de $p-2$ paramètres et le corps S peut prendre une translation arbitraire le long de cet axe en même temps qu'une rotation arbitraire autour de lui. L'axe de A est donc pour le corps S un verrou à $p-2$ paramètres autour duquel il peut librement jouer; pour cela, nous le désignerons par W. L'ensemble des droites W restera invariable par tout mouvement de verrou autour d'une quelconque d'entre elles.

Supposons que les droites W ne soient pas toutes parallèles à une même direction, je vais montrer qu'il existe forcément une droite W coïncidant avec une droite D donnée à l'avance.

Nous pouvons, en effet, trouver deux droites W, soient W_1 et W_2, non parallèles entre elles et non parallèles à D; si ces deux droites ne sont pas concourantes, donnons à W_1 un mouvement de rotation arbitraire autour de W_2, ce qui donnera W_3 non parallèle à W_1, puis faisons glisser W_3 parallèlement à W_2 jusqu'à ce qu'elle rencontre W_1, ce qui est possible, car W_3 va décrire un plan parallèle à W_2, et comme le plan mené par W_2 parallèlement à W_3 a une position arbitraire autour de W_2, on peut le choisir de façon qu'il ne soit pas parallèle à W_1. Nous arrivons ainsi à deux droites W_1 et W_4 qui sont concourantes en un certain point O. Nous savons qu'en faisant tourner alternativement et arbitrairement ces deux droites l'une autour de l'autre, nous obtenons toutes les droites issues de O, lesquelles sont ainsi des droites W; en particulier, considérons une droite D′ menée par O parallèlement à D et une droite D″ passant par O et rencontrant D; D′ et D″ sont des droites W, et comme on passe de D′ à D par une translation parallèle à D″, il en résulte que D est aussi une droite W.

Les droites W dépendraient donc de quatre paramètres, de sorte qu'on aurait $p=6$: c'est le cas banal que nous écartons toujours.

Puisque les droites W doivent rester parallèles à une direction fixe, elles dépendent au plus de deux paramètres, et l'on a

$$p \leqq 4.$$

Quant au corps, il a un mouvement dans lequel une de ses droites D conserve une direction fixe, et si la seconde articulation est une vis ou un rotoïde, son axe doit être parallèle à D, car les droites W subissant un mouvement de verrou autour d'une droite non parallèle à D ne resteraient plus parallèles à cette direction.

Examinons d'abord le cas le plus général, $p=4$, le corps est soumis à l'unique condition que la droite D garde une direction constante. Toute vis ou rotoïde dépendant de trois paramètres devra être parallèle à D qui est la seule direction fixe du corps, et la réciproque est vraie, car tout mouvement autour d'une telle articulation ne change pas la direction de D et, par suite, est un mouvement possible du corps. On voit, en outre, qu'il en est de même pour une glissière quelconque.

Supposons en second lieu $p=3$. Les droites W décriront un cylindre qui doit rester invariable par un mouvement de verrou arbitraire autour d'une quelconque de ses génératrices W. C'est impossible.

Enfin, voyons le cas de $p=2$. La droite W est fixe. La seconde articulation doit donc donner un mouvement qui n'altère pas la position de cette droite, elle doit donc être une vis ou un rotoïde ayant également W pour axe, ou encore une glissière parallèle à W; le corps a alors une droite fixe, les articulations dépendant d'un paramètre sont les vis et rotoïdes admettant cet axe et les glissières qui lui sont parallèles.

Le seul cas qui nous reste maintenant à étudier est celui où A et A′ seraient deux glissières que nous ne devons pas supposer parallèles, sans quoi elles seraient équivalentes. Tous les mouvements $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}'$ étant des translations, on voit que le corps se déplace en gardant une orientation invariable et qu'on a, par conséquent,

$$p \leqq 3.$$

Si $p=3$, il est évident que toute glissière dépend de deux paramètres, car le corps peut, sans changer son orientation, glisser sur elle.

Si $p=2$, le corps se déplace parallèlement à lui-même de façon qu'un plan P parallèle aux deux glissières A, A′ reste fixe et, réciproquement, toute glissière parallèle à ce plan ne dépendra que d'un paramètre, car le corps pourra librement glisser sur elle, toute autre glissière déplacerait le plan P, donc dépendrait de deux paramètres.

Enfin, le cas de $p=1$ ne peut pas se présenter, car deux translations arbitraires suivant des directions distinctes donnent toujours un mouvement à deux paramètres.

Pour récapituler commodément les résultats obtenus nous représenterons le solide S par un trièdre trirectangle $Oxyz$ dont nous définirons la position par rapport à un trièdre fixe OXYZ (position particulière et fixe de $Oxyz$) au moyen des coordonnées ξ, η, ζ de O et des trois angles d'Euler θ, φ, ψ.

Nous ferons, d'ailleurs, remarquer que, s'il y a deux articulations distinctes dépendant de $p-1$ paramètres, il y en a forcément une infinité, leur nombre ne peut être que o, 1 ou ∞.

Nous obtenons alors le Tableau suivant :

Tableau I.

Mouvements spéciaux à p paramètres possédant une infinité d'articulations simples distinctes à $p-1$ paramètres.

Nombre de paramètres.	Désignation conventionnelle.	Nature du mouvement.	Articulations à $p-1$ paramètres.
4	Σ_4^1	$\theta = 0, \quad \psi = 0$	Toutes les V parallèles à Oz. Tous les R parallèles à Oz. Toutes les G.
	Σ_3^1	$\theta = 0, \quad \varphi = 0, \quad \zeta = \frac{h}{2\pi}\varphi$	Toutes les V de pas h parallèles à Oz. Toutes les G parallèles à xOy.
3	σ_3^1 Cas particulier de Σ_3^1	$\theta = 0, \quad \psi = 0, \quad \zeta = 0,$	Tous les R parallèles à Oz. Toutes les G parallèles à xOy.
	Σ_3^2	$\xi = 0, \quad \eta = 0, \quad \zeta = 0$	Tous les R dont l'axe passe par O.
	Σ_3^3	$\theta = 0, \quad \varphi = 0, \quad \psi = 0$	Toutes les G.
2	Σ_2^1	$\xi = 0, \quad \eta = 0$ $\theta = 0, \quad \psi = 0$	Toutes les V ayant Oz pour axe. Le R ayant Oz pour axe. Toutes les G parallèles à Oz.
	Σ_2^2	$\zeta = 0$ $\theta = 0, \quad \varphi = 0, \quad \psi = 0$	Toutes les G parallèles à xOy.

Ayant déterminé ainsi *tous* les mouvements spéciaux, il est facile d'obtenir tous les mouvements à p paramètres qui possèdent plusieurs articulations simples à $p-1$ paramètres.

Prenons le trièdre de référence OXYZ et, au lieu de le considérer comme fixe, donnons-lui un mouvement quelconque à q paramètres; si le trièdre $Oxyz$ avait un mouvement spécial à p paramètres il aura maintenant un mouvement absolu à $p+q$ paramètres et ses articulations dépendront de $p+q-1$ paramètres.

Par exemple, pour obtenir tous les mouvements à quatre paramètres, on pourra prendre Σ_4 avec OXYZ fixe ou bien un Σ_3 avec le trièdre OXYZ ayant un mouvement à un paramètre, ou, enfin, un Σ_2 avec un mouvement à deux paramètres de OXYZ.

Réciproquement, on reconnaîtra si un mouvement non spécial à p paramètres possède des articulations à $p-1$ paramètres si l'on peut établir entre ces paramètres des relations

$$\begin{gathered} f_1(a_1, a_2, \ldots, a_p) = \alpha_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_i(a_1, a_2, \ldots, a_p) = \alpha_i, \end{gathered}$$

telles que tout mouvement à $p-i$ paramètres, correspondant à des valeurs constantes des α, soit un mouvement spécial ou encore, à un point de vue plus géométrique, si l'on peut trouver un trièdre mobile tel que le mouvement relatif du corps solide par rapport à ce trièdre soit un mouvement spécial.

Ces nouveaux mouvements étant composés avec des mouvements spéciaux, nous les appellerons des *mouvements spéciaux complexes*.

III.

Étude de certains mouvements à plusieurs paramètres avec des articulations multiples.

1. *Mouvements spéciaux pour une articulation simple et une articulation multiple.* — Nous nous proposons de rechercher si un corps solide à p paramètres peut posséder une articulation simple à $p-1$ paramètres et une articulation d'ordre i à $p-i$ paramètres.

Le corps peut alors jouer librement autour de l'articulation A′, de sorte que nous avons des mouvements M′ dépendant de i paramètres.

Nous pouvons répéter, sans en changer un mot, tout ce que nous avons dit dans le Chapitre précédent à propos de la réduction aux systèmes spéciaux, de la formation et des propriétés d'invariance de ces systèmes par tous les mouvements $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}'$.

Considérons d'abord le cas d'un verrou W.

Le cas où l'articulation A aurait un axe dépendant de $p-1$ paramètres ne peut se présenter, puisque tous les mouvements instantanés devraient avoir même pas et que les $\mathfrak{M}'$ peuvent avoir des pas quelconques.

Dans les autres cas, le corps aura deux droites à $p-2$ paramètres ou une droite à $p-2$ paramètres avec une glissière à $p-1$ paramètres; nous avons fait complètement leur étude dans le Chapitre précédent et nous tombons sur les systèmes Σ_4^1 et Σ_2^1, le premier admettant tous les verrous parallèles à Oz, et le second l'unique verrou ayant Oz pour axe.

Supposons maintenant que A' soit une articulation triple, c'est-à-dire un genou Γ ou une glissière plane P. Si l'axe de A dépend de $p-1$ paramètres, nous avons vu que A est un rotoïde dont l'axe passe par un point fixe O et que l'on a $p \leqq 3$, ou que A est une vis ou un rotoïde dont l'axe reste parallèle à une direction fixe avec $p \leqq 3$. A' étant un genou, c'est le premier cas seul qui peut se présenter avec $p=3$ et le genou fixe ayant O pour centre : c'est le système Σ_3^2.

A' étant une glissière plane, le second cas seul peut se présenter avec $p=3$, cette glissière étant perpendiculaire à la direction fixe et le pas de A étant o, car tous les mouvements $\mathfrak{M}'$ sont des rotations perpendiculaires à P : c'est le système σ_3^1.

Si A étant une vis ou un rotoïde, son axe dépend de $p-2$ paramètres, nous savons que, ou bien $p=2$, alors cet axe est fixe, ce qui est incompatible avec l'existence des mouvements $\mathfrak{M}'$ à trois paramètres, ou bien cet axe doit rester parallèle à une direction fixe et $p \leqq 4$. Cette hypothèse est incompatible avec l'existence d'un genou à $p-3$ paramètres, mais est compatible avec celle d'une glissière plane perpendiculaire à l'axe de A; il faudra forcément $p=4$, et nous obtiendrons le système Σ_4^1.

Enfin, si A est une glissière et A' un genou, par suite des mouvements $\mathfrak{M}'$, le corps posséderait des mouvements de translation dans des directions arbitraires qui, combinés avec les mouvements $\mathfrak{M}'$, lui donneraient une position absolument arbitraire. On constate également ce fait en donnant alternativement au corps des mouvements $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}'$. Ce cas ne peut donc se présenter.

La glissière plane peut exister en même temps que la glissière rectiligne, les mouvements alternatifs $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}'$ montrent alors que la normale à P conserve une direction constante et que toute position du corps satisfaisant à cette condition peut être atteinte : c'est le système Σ_4^1 qui admet toutes les glissières planes perpendiculaires à Oz.

Il y a exception si la glissière G est parallèle à P, car on voit alors que dans les mouvements alternatifs $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}'$ le plan P reste fixe : c'est le système σ_3^1.

Nous pouvons résumer ces résultats par le Tableau suivant :

Tableau II.

Mouvements spéciaux à p paramètres ayant des articulations simples à p — 1 paramètres et des articulations d'ordre i à p — i paramètres.

Nombre de paramètres.	Désignation conventionnelle.	Articulations simples à $p-1$ paramètres.	Articulations doubles à $p-2$ paramètres	Articulations triples à $p-3$ paramètres.
4	Σ_4^1	Toutes les V parallèles à Oz. Tous les R parallèles à Oz. Toutes les G.	Tous les W parallèles à Oz.	P perpendiculaire à Oz.
3	σ_3^1	Tous les R parallèles à Oz. Toutes les G parallèles à xOy.		P perpendiculaire à Oz.
	Σ_3^2	Tous les R dont l'axe passe par O.		G ayant O pour centre.
2	Σ_2^1	Toutes les V ayant Oz pour axe. Le R ayant Oz pour axe. Toutes les G parallèles à Oz.	W ayant Oz pour axe.	

Les mouvements complexes formés avec ces systèmes posséderont évidemment les mêmes propriétés.

2. *Mouvements mixtes.* — Nous dirons qu'un corps a un mouvement mixte quand, dépendant de p paramètres, il possède une articulation simple à $p - 1$ paramètres et une articulation multiple d'ordre i dont le nombre des paramètres est supérieur à $p - i$ et inférieur à p, de sorte que le corps puisse prendre un certain mouvement $\mathfrak{M}'$ autour de cette articulation, sans que ce mouvement soit le plus général correspondant.

Les raisonnements faits dans le Chapitre précédent ne sont plus applicables, car la nature du mouvement $\mathfrak{M}'$ est maintenant variable avec la position du corps.

Le problème que nous nous proposons est indispensable pour la suite, car nous aurons constamment à chercher de combien de paramètres dépend une droite, un point ou un plan d'un corps qui joue librement autour d'une articulation simple variable. On pourrait croire *a priori* qu'en considérant la droite comme un verrou, le point comme un genou, et le plan comme une glissière plane, puis remplaçant l'articulation multiple par plusieurs articulations simples, on arriverait, par l'application des résultats du premier Chapitre, à faire l'étude complète de la question actuelle. Il est facile de voir qu'il y a là un cercle vicieux. Prenons, par exemple, le cas d'un verrou à $p - 1$ paramètres.

Imaginons S′ lié à S par ce verrou et pouvant librement jouer autour de lui; la condition nécessaire et suffisante pour que W dépende de $p - 1$ paramètres est que S′ ne dépende que de $p + 1$ paramètres.

Soit D la ligne de S qui est l'axe de W, imaginons un corps intermédiaire S″ lié à S par un rotoïde R ayant D pour axe, et à S′ par une glissière G parallèle à D. La liaison de S′ à S par l'intermédiaire de S″ sera identique à la liaison directe par le verrou. En outre, comme S devait jouer librement autour du verrou, S″ peut tourner librement autour du rotoïde R et S′ glisser librement le long de la glissière G. Nous avons donc une chaîne ouverte

$$\begin{array}{cccccc} & \mathrm{S} & & \mathrm{S''} & & \mathrm{S'} \\ \mathrm{A} & & \mathrm{R} & & \mathrm{G} & \end{array}$$

le premier membre dépendant de p paramètres et le dernier de $p + 1$.

Supposons que ni S ni S″ n'aient des *mouvements spéciaux* simples ou complexes, A dépendant de $p-1$ paramètres et S de p, R dépendra forcément de p paramètres, et S″ de $p+1$; donc G dépendra de $p+1$ paramètres et S′ de $p+2$. Il faut donc que S ou S″ aient uu mouvement spécial. Les cas où ce serait S qui aurait un tel mouvement s'étudieraient sans aucune difficulté d'après ce qui a été dit dans le premier Chapitre. Mais il n'en est plus de même du second cas; alors S″ doit avoir un mouvement spécial formé avec Σ_4^1 ou Σ_2^1 et pour reconnaître un tel mouvement de S″, il faut savoir de combien de paramètres dépend l'axe de R dans le mouvement de S, de sorte qu'on est ramené au problème proposé.

Mais on peut se demander si, parmi tous les procédés qui permettent de remplacer une articulation double par deux simples, il n'en existe pas toujours un, tel que ce soit le premier corps de la chaîne, c'est-à-dire S, qui ait un mouvement spécial.

Soient A, A″ et A′ les trois articulations consécutives $\mathfrak{M}$, m'', m' les mouvements correspondants. On obtient tous les mouvements autour du verrou W en combinant un mouvement m'' d'amplitude quelconque avec un mouvement m' d'amplitude également quelconque; en particulier, les mouvements m'' peuvent être considérés comme des mouvements à un paramètre autour du verrou W. Mais S, dans son mouvement, peut prendre librement le mouvement m'' qui est alors précisément le mouvement $\mathfrak{M}'$, de sorte que tous les mouvements $\mathfrak{M}'$ infiniment petits auraient un pas constant, et il en résulterait que le mouvement $\mathfrak{M}'$ fini serait un mouvement hélicoïdal de pas invariable.

Réciproquement, supposons que le mouvement $\mathfrak{M}'$ satisfasse toujours à cette condition, soit h' son pas; considérons une vis V′ tracée dans le corps S, ayant même axe que le verrou et ayant h' pour pas. Le mouvement $\mathfrak{M}'$ étant précisément le mouvement autour de cette vis, le corps S aura un mouvement spécial pour les deux articulations simples A et V′.

Enfin, considérons un mouvement spécial quelconque relatif à deux articulations simples A et A′, l'axe de A′ dépend de $p-1$ paramètres et il en est de même du verrou défini par cet axe.

Nous avons écarté le cas où la première articulation du verrou serait équivalente à A, c'est-à-dire où l'axe de A serait aussi celui du verrou;

il y a identité entre le mouvement $\mathfrak{M}$ et le mouvement $\mathfrak{M}'$, et le mouvement du corps est composé avec le mouvement hélicoïdal à un paramètre.

Nous arrivons à cette conclusion : *Les résultats du premier Chapitre nous fournissent tous les mouvements mixtes relatifs au verrou pour lesquels le mouvement $\mathfrak{M}'$ est toujours hélicoïdal et de pas constant, et ils ne peuvent fournir que ces mouvements.*

Pour montrer l'utilité de la discussion un peu pénible qui va suivre, et sans attendre les résultats auxquels elle conduira, il suffit de donner un exemple de mouvement mixte ne satisfaisant pas aux conditions précédentes.

Considérons le mouvement suivant à trois paramètres

$$\theta = 0, \qquad \psi = 0, \qquad \zeta = F(\xi, \eta);$$

le mouvement $\xi = \text{const.}$, $\eta = \text{const.}$ est une rotation autour de Oz, de sorte que le rotoïde ayant Oz pour axe dépend de deux paramètres. Toute droite parallèle à Oz conserve une direction invariable, donc dépend de deux paramètres. Nous avons bien un mouvement mixte pour le rotoïde ayant Oz pour axe et pour les verrous parallèles à Oz. Or prenons le corps dans une quelconque de ses positions et un verrou W parallèle à Oz. Dans le mouvement $\mathfrak{M}'$ le point O décrira l'intersection de la surface $\zeta = F(\xi, \eta)$ avec un cylindre de révolution ayant même axe que W; si la surface est choisie arbitrairement, cette courbe ne sera pas une hélice, donc le mouvement $\mathfrak{M}'$ ne sera même pas hélicoïdal, les mouvements $\mathfrak{M}'$ infiniment petits n'auront pas un pas constant.

Il est donc indispensable de faire une étude directe de la question, et cette étude nous conduira forcément à retrouver tous les systèmes spéciaux du premier Chapitre et à en introduire de nouveaux.

On pourrait développer des remarques analogues à propos des mouvements mixtes relatifs à une articulation triple, mais nous ne le ferons pas, les considérant comme inutiles après ce qui vient d'être dit.

3. *Généralités sur la recherche des mouvements mixtes pour le verrou.* — Considérons un corps solide ayant un mouvement à p paramètres

$a_1, a_2, \ldots, a_p$ et les différents mouvements instantanés qu'il peut prendre à partir d'une de ses positions.

A la variation de chacun des paramètres correspondra un mouvement hélicoïdal μ_i ayant pour coordonnées

$$(\mu_i) \qquad \mathfrak{X}_i, \quad \mathfrak{Y}_i, \quad \mathfrak{Z}_i, \quad \mathfrak{L}_i, \quad \mathfrak{M}_i, \quad \mathfrak{N}_i,$$

et tout mouvement instantané du corps aura pour coordonnées

$$\Sigma\lambda_i\mathfrak{X}_i, \quad \Sigma\lambda_i\mathfrak{Y}_i, \quad \Sigma\lambda_i\mathfrak{Z}_i, \quad \Sigma\lambda_i\mathfrak{L}_i, \quad \Sigma\lambda_i\mathfrak{M}_i, \quad \Sigma\lambda_i\mathfrak{N}_i.$$

Pour abréger, nous dirons que c'est le mouvement

$$\Sigma\lambda_i\mu_i,$$

et il est impossible de trouver les λ non tous nuls, de façon que ce mouvement soit nul, car le corps n'aurait alors que $p-1$ mouvements distincts, et, par suite, ne dépendrait effectivement que de $p-1$ paramètres.

Ceci posé, considérons un corps solide ayant un mouvement hélicoïdal par rapport à un trièdre fixe T et une droite D de ce corps dont la perpendiculaire commune et l'angle avec l'axe du mouvement sont δ et ω.

En choisissant convenablement le trièdre fixe T, on verra que les coordonnées du mouvement hélicoïdal seront

$$(\mu_0) \qquad 0, \quad 0, \quad r, \quad 0, \quad 0, \quad t,$$

et que les coordonnés d'un mouvement hélicoïdal quelconque autour d'une quelconque des positions de D seront

$$)\left\{\begin{array}{ll} \mathfrak{X} = -u\sin\omega\sin r\alpha, & \mathfrak{L} = u(\delta\cos\omega\sin r\alpha - t\alpha\sin\omega\cos r\alpha) - v\sin\omega\sin r\alpha, \\ \mathfrak{Y} = u\sin\omega\cos r\alpha, & \mathfrak{M} = u(-\delta\cos\omega\cos r\alpha - t\alpha\sin\omega\sin r\alpha) + v\sin\omega\cos r\alpha, \\ \mathfrak{Z} = u\cos\omega, & \mathfrak{N} = u\delta\sin\omega + v\cos\omega, \end{array}\right.$$

α étant le paramètre de position de la droite D, et u et v deux paramètres quelconques.

Ceci posé, supposons qu'on donne au trièdre T un mouvement à $p-1$ paramètres dont les déplacements instantanés distincts seront

$$\mu_1, \quad \mu_2, \quad \ldots, \quad \mu_{p-1},$$

le corps S aura un mouvement résultant qui dépendra au plus de p paramètres $a_1, a_2, \ldots, a_{p-1}$ et α, mais qui dans certains cas pourra ne dépendre que de $p-1$ paramètres. On reconnaîtra ce fait à ce qu'il existera constamment une relation

$$\lambda_0\mu_0 + \lambda_1\mu_1 + \ldots + \lambda_{p-1}\mu_{p-1} = 0$$

entre les p mouvements instantanés $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_{p-1}$ qui appartiennent bien au mouvement du corps solide, et qui, par définition, donnent sûrement, par leur composition, tous les mouvements de ce corps.

Mais si D est un verrou à $p-1$ paramètres, parmi les déplacements instantanés du corps, il doit y en avoir qui sont hélicoïdaux autour de D; autrement dit, il doit y avoir un mouvement μ résultant de la combinaison des mouvements $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_{p-1}$; on pourra donc certainement déterminer $u, v, \lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{p-1}$ non tous nuls, de façon que

$$\mu = \lambda_0\mu_0 + \lambda_1\mu_1 + \ldots + \lambda_{p-1}\mu_{p-1},$$

et cela doit être vrai, quels que soient les paramètres $a_1, \ldots, a_{p-1}$ et α dont dépend la position du corps solide. En remarquant que les coordonnées de $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_{p-1}$ sont indépendantes de α, et écrivant qu'il y a identité pour cette variable, nous obtiendrons les conditions nécessaires et suffisantes que doivent remplir les mouvements instantanés du trièdre mobile, ce qui nous permettra de déterminer ce mouvement qui, combiné avec μ_0, nous donnera finalement le mouvement mixte cherché du corps solide.

La relation entre $\mu, \mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_{p-1}$ équivaut à six équations linéaires et homogènes aux inconnues $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{p-1}, u, v$. Si l'on forme le Tableau rectangulaire des coefficients, on obtient

$$\mathcal{T}\left\{\begin{array}{cccccc}
0 & \mathfrak{X}_1 & \ldots & \mathfrak{X}_{p-1} & -\sin\omega\sin\beta & 0\\
0 & \mathfrak{Y}_1 & \ldots & \mathfrak{Y}_{p-1} & \sin\omega\cos\beta & 0\\
r & \mathfrak{Z}_1 & \ldots & \mathfrak{Z}_{p-1} & \cos\omega & 0\\
0 & \mathfrak{L}_1 & \ldots & \mathfrak{L}_{p-1} & \delta\cos\omega\sin\beta - t\alpha\sin\omega\cos\beta & -\sin\omega\sin\beta\\
0 & \mathfrak{M}_1 & \ldots & \mathfrak{M}_{p-1} & -\delta\cos\omega\cos\beta - t\alpha\sin\omega\sin\beta & \sin\omega\cos\beta\\
t & \mathfrak{N}_1 & \ldots & \mathfrak{N}_{p-1} & \delta\sin\omega & \cos\omega
\end{array}\right.$$

qui a au plus six colonnes, car les verrous à $p-1$ paramètres n'existent comme cas de réduction que si $p-1<4$, et dans lequel, pour abréger, nous avons mis β à la place de $r\alpha$.

Il nous faut écrire que tous les déterminants d'ordre $p+2$ formés avec ce Tableau sont nuls quel que soit α.

Or considérons les deux Tableaux

$$\varpi' \quad \left\{\begin{array}{cccccc} 0 & \mathcal{X}_1 & \ldots & \mathcal{X}_{p-1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{Y}_1 & \ldots & \mathcal{Y}_{p-1} & 0 & 0 \\ r & \mathcal{Z}_1 & \ldots & \mathcal{Z}_{p-1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{L}_1 & \ldots & \mathcal{L}_{p-1} & -\cos\beta & -\sin\omega\sin\beta \\ 0 & \mathcal{M}_1 & \ldots & \mathcal{M}_{p-1} & -\sin\beta & \sin\omega\cos\beta \\ t & \mathcal{N}_1 & \ldots & \mathcal{N}_{p-1} & 0 & \cos\omega \end{array}\right.$$

et

$$\varpi'' \quad \left\{\begin{array}{cccccc} 0 & \mathcal{X}_1 & \ldots & \mathcal{X}_{p-1} & -\sin\omega\sin\beta & 0 \\ 0 & \mathcal{Y}_1 & \ldots & \mathcal{Y}_{p-1} & \sin\omega\cos\beta & 0 \\ r & \mathcal{Z}_1 & \ldots & \mathcal{Z}_{p-1} & \cos\omega & 0 \\ 0 & \mathcal{L}_1 & \ldots & \mathcal{L}_{p-1} & \delta\cos\omega\sin\beta & -\sin\omega\sin\beta \\ 0 & \mathcal{M}_1 & \ldots & \mathcal{M}_{p-1} & -\delta\cos\omega\cos\beta & \sin\omega\cos\beta \\ t & \mathcal{N}_1 & \ldots & \mathcal{N}_{p-1} & \delta\sin\omega & \cos\omega \end{array}\right.$$

On voit que tout déterminant d'ordre $p+2$ pris dans ϖ sera de la forme

$$D = t\alpha\sin\omega\, D' + D'',$$

D' et D'' étant les deux déterminants analogues pris dans ϖ' et ϖ''.

Si $t=0$, D se réduira à D'' et comme r n'est pas nul, β est arbitraire; donc il faut annuler tous les déterminants D'', quel que soit β. On voit, d'ailleurs, qu'on peut alors dans ϖ'' supprimer la première colonne et la troisième ligne et prendre seulement les déterminants d'ordre $p+1$ de ce nouveau Tableau

$$\varpi''_1 \quad \left\{\begin{array}{ccccc} \mathcal{X}_1 & \ldots & \mathcal{X}_{p-1} & -\sin\omega\sin\beta & 0 \\ \mathcal{Y}_1 & \ldots & \mathcal{Y}_{p-1} & \sin\omega\cos\beta & 0 \\ \mathcal{L}_1 & \ldots & \mathcal{L}_{p-1} & \delta\cos\omega\sin\beta & -\sin\omega\sin\beta \\ \mathcal{M}_1 & \ldots & \mathcal{M}_{p-1} & -\delta\cos\omega\cos\beta & \sin\omega\sin\beta \\ \mathcal{N}_1 & \ldots & \mathcal{N}_{p-1} & \delta\sin\omega & \cos\omega \end{array}\right.$$

Si $t=0$, $\omega=0$, il faut encore annuler les déterminants D'' avec cette particularité qu'on peut, dans ϖ'', supprimer les colonnes de rangs 1 et $p+2$ ainsi que les lignes 3 et 6, et annuler les déterminants d'ordre p du Tableau ainsi modifié.

On remarque que si $\delta = 0$ tous ces déterminants sont nuls, de sorte que $t = 0$, $\omega = 0$, $\delta = 0$ donnent un mouvement mixte, quel que soit celui du trièdre T.

Si $t \neq 0$, $\omega = 0$, il suffit encore de considérer les déterminants D″; mais il y a encore deux cas à considérer. Si r n'est pas nul, on voit qu'on peut supprimer la dernière colonne et la dernière ligne de ϖ'', puis la 1re colonne et la 3me ligne. On retombe sur le même résultat que précédemment, c'est-à-dire que si $\omega = 0$, $r \neq 0$, que t soit ou ne soit pas nul, il suffit d'annuler les déterminants d'ordre p du Tableau

$$\varpi'' \qquad \left\{ \begin{array}{cccc} \mathcal{X}_1 & \ldots & \mathcal{X}_{p-1} & 0 \\ \mathcal{Y}_1 & \ldots & \mathcal{Y}_{p-1} & 0 \\ \mathcal{L}_1 & \ldots & \mathcal{L}_{p-1} & \delta \sin\beta \\ \mathcal{M}_1 & \ldots & \mathcal{M}_{p-1} & -\delta\cos\beta \end{array} \right.$$

ce qui montre, en particulier, que $\omega = 0$, $\delta = 0$, $r \neq 0$ donnent toujours un mouvement mixte.

Mais si ω étant nul, il en est de même de r, l'angle β n'est plus variable, il est constamment nul, on doit encore annuler les déterminants D″ en y faisant $\beta = 0$, et l'on peut supprimer la dernière colonne et la dernière ligne, ce qui revient à annuler les déterminants d'ordre $p+1$ du Tableau ϖ'' ainsi modifié; il a alors une première colonne qui ne contient que des zéros; donc $\omega = 0$, $r = 0$ donnent un mouvement mixte, quel que soit le mouvement du trièdre T.

Enfin, si $t\omega \neq 0$, la forme des déterminants D montre qu'ils ne peuvent être nuls, quel que soit α, que si D′ et D″ sont nuls quel que soit cet angle ou, ce qui revient au même, quel que soit β. Il faut donc annuler identiquement tous les déterminants d'ordre $p+2$ des Tableaux ϖ' et ϖ''.

Mais si $r = 0$, β est constamment nul et il faut faire $\beta = 0$ dans les Tableaux ϖ' et ϖ''. On remarque qu'en vertu des hypothèses $\beta = 0$, $t\omega \neq 0$ on peut, dans ϖ', supprimer la 1re colonne et la 6e ligne, puis la $(p+1)^{\text{ième}}$ colonne et la 4e ligne; puis enfin, la $(p+2)^{\text{ième}}$ colonne et la 5e ligne; de même, on peut dans ϖ'' supprimer la 1re colonne et la 6e ligne, puis la $(p+2)^{\text{ième}}$ colonne et la 5e ligne ; nous obtenons pour le cas considéré le Tableau

$$\mathfrak{T}'_0 \qquad \left\{\begin{array}{cccc} \mathfrak{X}_1 & \mathfrak{X}_2 & \ldots & \mathfrak{X}_{p-1} \\ \mathfrak{Y}_1 & \mathfrak{Y}_2 & \ldots & \mathfrak{Y}_{p-1} \\ \mathfrak{Z}_1 & \mathfrak{Z}_2 & \ldots & \mathfrak{Z}_{p-1} \end{array}\right.$$

dont il faut annuler tous les déterminants d'ordre $p-1$ et le Tableau

$$\mathfrak{T}''_0 \qquad \left\{\begin{array}{cccc} \mathfrak{X}_1 & \ldots & \mathfrak{X}_{p-1} & 0 \\ \mathfrak{Y}_1 & \ldots & \mathfrak{Y}_{p-1} & \sin\omega \\ \mathfrak{Z}_1 & \ldots & \mathfrak{Z}_{p-1} & \cos\omega \\ \mathfrak{L}_1 & \ldots & \mathfrak{L}_{p-1} & 0 \end{array}\right.$$

dont il faut annuler tous les déterminants d'ordre p.

Nous constatons déjà l'existence de plusieurs mouvements qui sont tous ceux pour lesquels $\omega = 0$, $r\delta = 0$. On voit que dans cette condition n'entrent pas les différents mouvements du trièdre $\mathfrak{T}$, et il en résulte que nous pouvons prendre le plus simple de tous, celui pour lequel $p = 1$, et dire que tous les autres sont des mouvements mixtes complexes formés avec lui. Nous avons ainsi des mouvements mixtes à un paramètre :

Σ_1^1 Mouvement hélicoïdal défini par $\theta = 0$, $\psi = 0$, $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = \frac{h}{2\pi}\varphi$ admettant comme articulation simple fixe la vis de pas h ayant Oz pour axe et comme articulation double fixe le verrou ayant Oz pour axe ;

σ_1^1 Cas particulier du précédent, mouvement de rotation défini par $\theta = 0$, $\psi = 0$, $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$ admettant comme articulations fixes le rotoïde, et le verrou ayant Oz pour axe ;

Σ_1^2 Mouvement de translation rectiligne défini par $\theta = 0$, $\psi = 0$, $\varphi = 0$, $\xi = 0$, $\eta = 0$ admettant comme articulations fixes la glissière parallèle à Oz et tous les verrous parallèles à Oz.

Nous pourrons donc, à partir de ce moment, supposer que, si ω est nul, $r\delta$ ne l'est pas.

4. *Mouvements mixtes pour le verrou dans le cas de* $\omega = 0$, $r\delta \neq 0$. — Il nous faut annuler le Tableau $\mathfrak{T}'''$ dans la dernière colonne duquel on a supprimé le facteur δ.

1° $p = 1$. $\mathfrak{T}'''$ n'a qu'une colonne, sa dernière, et ne peut être identiquement nul.

2° $p = 2$. $\mathfrak{T}'''$ a deux colonnes, et en annulant tous ses déterminants on trouve

$$\mathcal{X}_1 = 0, \qquad \mathcal{Y}_1 = 0, \qquad \mathcal{L}_1 = 0, \qquad \mathcal{M}_1 = 0,$$

le mouvement du trièdre T étant alors constamment un mouvement hélicoïdal autour de Oz, cette droite qui est fixe dans le trièdre mobile reste fixe dans l'espace ; le corps S a donc un mouvement à deux paramètres dans lequel une droite reste fixe, c'est le mouvement Σ_2^1 du premier Chapitre, et il admet comme verrous à un paramètre tous ceux qui sont parallèles à Oz.

3° $p = 3$. $\mathfrak{T}'''$ a trois colonnes ; en employant une notation bien évidente, on trouve

$$\begin{aligned} \Delta(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = 0, \qquad & \Delta(\mathcal{X}, \mathcal{L}) = 0, \qquad \Delta(\mathcal{Y}, \mathcal{L}) = 0, \\ & \Delta(\mathcal{X}, \mathcal{M}) = 0, \qquad \Delta(\mathcal{Y}, \mathcal{M}) = 0. \end{aligned}$$

Il en résulte que $\Delta(\mathcal{L}, \mathcal{M})$ est aussi nul ou que $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_2$, $\mathcal{Y}_1$, $\mathcal{Y}_2$ sont nuls.

Dans le premier cas, on voit immédiatement qu'on peut déterminer λ_1 et λ_2 non nuls tous les deux, de telle façon que les coordonnées $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$ du mouvement

$$\lambda_1 \mu_1 + \lambda_2 \mu_2$$

soient nulles. Ce mouvement sera donc hélicoïdal autour de Oz.

Soient a_1 et a_2 les deux paramètres du trièdre T ; tout mouvement infiniment petit de ce trièdre est défini par un système de valeurs de da_1 et da_2 qui, en réalité, sont les valeurs de λ_1 et λ_2 ; les quatre équations linéaires et homogènes définissent λ_1 et λ_2 à un facteur près, c'est-à-dire définissent leur rapport qui est une fonction de a_1 et a_2. On a donc, pour ce déplacement spécial,

$$\frac{da_1}{da_2} = f(a_1, a_2) ;$$

soit

$$F(a_1, a_2) = \text{const.},$$

l'intégrale générale de cette équation différentielle ; tout mouvement à un paramètre défini par $F = \text{const.}$ sera un mouvement hélicoïdal du trièdre T autour de son axe des z. Considérons alors le corps S qui dépend de a_1, a_2 et α, tout mouvement défini par $F = \text{const.}$ sera tel que la droite Oz qui est fixe dans ce corps reste fixe dans l'espace; il en résulte clairement que le mouvement de S sera un mouvement complexe formé avec Σ_2^1, de sorte que nous n'obtenons rien de nouveau.

L'hypothèse $\mathcal{X}_1 = 0$, $\mathcal{X}_2 = 0$, $\mathcal{Y}_1 = 0$, $\mathcal{Y}_2 = 0$ s'étudie plus facilement, car les deux mouvements principaux étant hélicoïdaux parallèlement à Oz, il en résulte que cette droite Oz gardera une direction constante pendant tout le mouvement; cette droite ne peut rester fixe, car S ne dépendrait que de deux paramètres; si elle dépendait d'un paramètre, S serait librement mobile autour d'un verrou qui aurait un mouvement à un paramètre, ce qui donnerait un mouvement complexe formé avec Σ_2^1; finalement elle peut dépendre de deux paramètres, ce qui revient à dire que O décrit une surface autre qu'un cylindre parallèle à la direction fixe et à chaque position du point O sur cette surface correspond une position bien définie du trièdre T, et réciproquement tout mouvement du trièdre défini de cette façon satisfait constamment aux conditions $\mathcal{X}_1 = 0$, $\mathcal{X}_2 = 0$, $\mathcal{Y}_1 = 0$, $\mathcal{Y}_2 = 0$. Si, sur ce mouvement, on greffe le mouvement relatif de S par rapport à T, on trouve un nouveau mouvement à trois paramètres Σ_4^3 qui défini, comme nous l'avons toujours fait, sera

$$\theta = 0, \qquad \psi = 0, \qquad \zeta = F(\xi, \eta) + t\alpha. \qquad \varphi = \Phi(\zeta, \eta) + r\alpha,$$

α étant un paramètre variable.

4° $p = 4$. ϖ''' a quatre colonnes et ne donne qu'un déterminant; en l'annulant identiquement, on obtient

$$\Delta(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{L}) = 0, \qquad \Delta(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{M}) = 0.$$

Supposons d'abord que les trois déterminants

$$\begin{vmatrix} \mathcal{X}_1 & \mathcal{X}_2 \\ \mathcal{Y}_1 & \mathcal{Y}_2 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} \mathcal{X}_2 & \mathcal{X}_3 \\ \mathcal{Y}_2 & \mathcal{Y}_3 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} \mathcal{X}_3 & \mathcal{X}_1 \\ \mathcal{Y}_3 & \mathcal{Y}_1 \end{vmatrix}$$

ne soient pas tous nuls, alors on voit qu'on peut déterminer λ_1, λ_2, λ_3 non tous nuls, de façon que le mouvement

$$\lambda_1 \mu_1 + \lambda_2 \mu_2 + \lambda_3 \mu_3$$

ait ses coordonnées $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$ nulles, c'est-à-dire se réduise à un mouvement hélicoïdal autour de Oz.

En raisonnant comme dans le cas précédent, on verra que ce mouvement est fourni par

$$\frac{da_1}{A_1(a_1, a_2, a_3)} = \frac{da_2}{A_2(a_1, a_2, a_3)} = \frac{da_3}{A_3(a_1, a_2, a_3)},$$

dont l'intégrale générale sera

$$F_1(a_1, a_2, a_3) = \text{const.},$$
$$F_2(a_1, a_2, a_3) = \text{const.},$$

et il en résultera que le mouvement considéré du corps solide S est un mouvement complexe formé avec Σ_2^1.

Supposons maintenant que ce soit la seconde hypothèse qui soit vérifiée, c'est-à-dire qu'on puisse toujours se donner arbitrairement deux des λ, de façon que le mouvement

$$\lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2 + \lambda_3\mu_3$$

soit hélicoïdal parallèlement à Oz.

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sont alors, à un facteur près, des fonctions connues de a_1, a_2, a_3 et les mouvements instantanés qui ont leur axe parallèle à Oz sont définis par une équation

$$(1) \qquad A_1(a_1, a_2, a_3)\,da_1 + A_2(a_1, a_2, a_3)\,da_2 + A_3(a_1, a_2, a_3)\,da_3 = 0.$$

Je vais montrer que le premier membre admet un facteur intégrant. Pour cela, je suppose que le mouvement du trièdre T soit défini au moyen des six paramètres d'Euler ξ, η, ζ, θ, φ, ψ qui sont des fonctions de a_1, a_2, a_3, et j'imagine un trièdre auxiliaire pour lequel ξ, η, ζ sont constamment nuls et θ, φ, ψ ont les mêmes expressions que pour T. De ce que θ, φ, ψ sont les mêmes pour les deux trièdres, résulte que leurs déplacements infiniment petits correspondant à un même système de valeurs de da_1, da_2, da_3 ont les mêmes $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, de sorte que l'équation (1) a la même signification pour T′ que pour T. Le trièdre T′ ayant son origine O′ fixe aura pour mouvements principaux μ'_1, μ'_2, μ'_3 des rotations passant par O′; si ces trois rotations forment un trièdre, il résulte immédiatement de ce qu'on sait sur la décomposition d'un segment suivant trois directions concourantes que, pour avoir un mouvement de rotation autour de $O'z'$, il faudra que da_1, da_2, da_3 soient proportionnels à des quantités bien déterminées, ce qui serait en contradiction avec ce qu'indique l'équation (1). Il faut donc que μ'_1, μ'_2, μ'_3 soient dans un même plan passant par $O'z'$; tout déplacement infiniment petit de T' sera une rotation arbitraire autour d'une droite arbitraire de ce plan ; il ne dépendra que de deux arbitraires, donc T' aura un mouvement à deux paramètres.

Soient b_1 et b_2 ces deux paramètres fonctions de a_1, a_2, a_3; les mouvements de T' se réduisant à une rotation autour de $O'z'$ seront donnés par une relation

$$F(b_1, b_2) = \text{const.},$$

qui, lorsqu'on y remplacera b_1 et b_2 en fonction de a_1, a_2, a_3, devra être équivalente à (1). Cette équation (1) aux différentielles totales est donc complètement intégrable et a pour intégrale

$$\Phi(a_1, a_2, a_3) = \text{const.}$$

Si donc on considère le corps solide S qui dépend des quatre paramètres a_1, a_2, a_3 et α, on voit que tous les mouvements à trois paramètres, définis par $\Phi = \text{const.}$, sont précisément les mouvements Σ_3^4 étudiés dans le cas précédent. Nous obtenons ainsi les mouvements complexes formés avec le mouvement mixte Σ_3^4.

5. *Mouvements mixtes pour le verrou dans le cas $t = 0$, $r\omega \neq 0$.*

1° $p = 1$. Le Tableau ϖ''_1 n'a que ses deux dernières colonnes, et comme $\omega \neq 0$, ses déterminants ne peuvent pas tous être nuls.

2° $p = 2$. ϖ''_1 a trois colonnes. En annulant tous ses déterminants, on trouve

$$\mathcal{X}_1 = 0, \qquad \mathcal{Y}_1 = 0, \qquad \mathcal{L}_1 = 0, \qquad \mathcal{M}_1 = 0, \qquad \mathcal{N}_1 = 0,$$

le mouvement instantané est une rotation autour de Oz, de sorte que T a un mouvement de rotation autour d'une droite fixe qui est son axe des z, le corps S aurait alors deux mouvements de rotation simultanés autour de la même droite fixe, et il ne dépendrait que d'un paramètre, ce qui est contraire à l'hypothèse.

3° $p = 3$. ϖ_1'' a quatre colonnes, il y a cinq déterminants à annuler identiquement, on trouve

$$\Delta(\mathcal{X}, \mathcal{L}) = 0, \quad \Delta(\mathcal{Y}, \mathcal{M}) = 0, \quad \Delta(\mathcal{L}, \mathcal{N}) = 0,$$

$$\Delta(\mathcal{X}, \mathcal{N}) = 0, \quad \Delta(\mathcal{Y}, \mathcal{N}) = 0, \quad \Delta(\mathcal{M}, \mathcal{N}) = 0, \quad \Delta(\mathcal{X}, \mathcal{M}) + \Delta(\mathcal{Y}, \mathcal{L}) = 0,$$

$$\delta\,\Delta(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = 0.$$

$$\delta\,\Delta(\mathcal{Y}, \mathcal{L}) - \sin\omega\cos\omega\,\Delta(\mathcal{L}, \mathcal{M}) = 0.$$

Supposons d'abord que $\mathcal{N}_1$ et $\mathcal{N}_2$ ne soient pas nuls tous deux, les six premières équations montrent que les cinq équations linéaires et homogènes obtenues en égalant à o les coordonnées $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ du mouvement

$$\lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2$$

se réduisent à une seule, alors tous les déterminants Δ sont nuls et toutes les équations sont vérifiées. Le trièdre T admet dans ce cas une rotation autour de Oz, et l'on en conclut, par un raisonnement déjà fait et parce que $t = 0$, que le solide S ne dépendrait que de deux paramètres, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Il nous faut donc supposer $\mathcal{N}_1 = 0$, $\mathcal{N}_2 = 0$, et il ne nous reste que les cinq équations

$$\Delta(\mathcal{X}, \mathcal{L}) = 0, \quad \Delta(\mathcal{Y}, \mathcal{M}) = 0, \quad \Delta(\mathcal{X}, \mathcal{M}) + \Delta(\mathcal{Y}, \mathcal{L}) = 0,$$

$$\delta\,\Delta(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = 0, \quad \delta\,\Delta(\mathcal{Y}, \mathcal{L}) - \sin\omega\cos\omega\,\Delta(\mathcal{L}, \mathcal{M}) = 0.$$

Supposons d'abord $\delta \neq 0$, on aura

$$\Delta(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = 0.$$

Considérons alors les quatre équations linéaires obtenues en égalant à zéro les coordonnées $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$ du mouvement

$$\lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2.$$

Si $\mathcal{X}_1$ et $\mathcal{X}_2$ ne sont pas toutes deux nulles, ainsi que $\mathcal{Y}_1$ et $\mathcal{Y}_2$, il résulte de $\Delta(\mathcal{X}, \mathcal{L}) = 0$, $\Delta(\mathcal{Y}, \mathcal{M}) = 0$, $\Delta(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = 0$ que ces quatre équations se réduisent à une seule.

Si $\mathcal{X}_1$ et $\mathcal{X}_2$ sont nuls tous les deux sans qu'il en soit de même de $\mathcal{Y}_1$ et $\mathcal{Y}_2$, la première des quatre équations linéaires est une identité, et les trois dernières se réduisent à une seule, car $\Delta(\mathcal{Y}, \mathcal{M})$ est nul, et, en vertu de la troisième équation de condition, $\Delta(\mathcal{Y}, \mathcal{L})$ l'est aussi.

Si $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_2$, $\mathcal{Y}_1$, $\mathcal{Y}_2$ sont tous nuls, les deux premières sont des identités et il ne reste que les deux dernières qui, en vertu de la dernière équation de condition, seront distinctes si $\omega = \frac{\pi}{2}$, et se réduiront à une seule si $\omega \neq \frac{\pi}{2}$.

Les quatre équations linéaires se réduisent à une seule si les quatre quantités $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_2$, $\mathcal{Y}_1$, $\mathcal{Y}_2$ ne sont pas toutes nulles ou si, l'étant toutes, ω n'est pas égal à $\frac{\pi}{2}$. Tous les Δ sont nuls et les équations de condition vérifiées. Le trièdre T possède un mouvement infiniment petit qui est une rotation autour de Oz, et l'on retombe sur l'impossibilité qui avait été constatée quand $\mathcal{N}_1$ et $\mathcal{N}_2$ n'étaient pas tous deux nuls.

Il nous faut donc supposer les $\mathcal{X}$ et les $\mathcal{Y}$ tous nuls avec $\omega = \frac{\pi}{2}$. Les coordonnées $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ et $\mathcal{N}$ des mouvements μ_1 et μ_2 étant nulles, ces mouvements sont des rotations parallèles à Oz. Si l'on y ajoute la rotation de S autour de Oz, on voit que le mouvement infiniment petit de S se compose de trois rotations perpendiculaires à Oz, lesquelles laissent fixe le plan xOy qui est attaché à S par suite de l'hypothèse $t = 0$. Ce plan a donc une position fixe dans l'espace, et S a, en réalité, le mouvement à trois paramètres produit par une glissière plane fixe; c'est le système σ_3^1 trouvé dans le premier Chapitre admettant comme verrous à deux paramètres ceux qui sont parallèles au plan xOy.

Enfin, il nous faut examiner l'hypothèse $\delta = 0$; il reste les quatre équations de condition

$$\Delta(\mathcal{X}, \mathcal{L}) = 0, \quad \Delta(\mathcal{Y}, \mathcal{M}) = 0, \quad \Delta(\mathcal{X}, \mathcal{M}) + \Delta(\mathcal{Y}, \mathcal{L}) = 0, \quad \cos\omega\,\Delta(\mathcal{Z}, \mathcal{M}) = 0.$$

Si $\cos\omega$ n'étant pas nul, les quatre quantités $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$, $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$ ne sont pas toutes nulles, on retombe encore sur le cas d'impossibilité qui correspond aux trois rotations autour de Oz; supposons que $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$, $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ soient toutes nulles, μ_1 et μ_2 seront des rotations autour d'axes passant par O et nous tomberons, pour S, sur le mouvement Σ_3^2 qui admet tous les verrous passant par O.

Si, en dernier lieu, nous supposons $\omega = \frac{\pi}{2}$ il ne reste que les trois premières équations de condition. De l'équation $\Delta(\mathfrak{X}, \mathfrak{L}) = 0$, résulte qu'il existe un déplacement composé d'une rotation R_1 passant par O, et située dans le plan des yz et d'une translation T_1 suivant Oy; de même, au moyen de l'équation $\Delta(\mathfrak{Y}, \mathfrak{M}) = 0$, on constate l'existence d'un autre mouvement composé d'une rotation R_2 passant par O dans xOz et d'une translation T_2 suivant Ox.

Ces deux déplacements sont distincts, car, s'ils ne l'étaient pas, celui suivant lequel ils sont confondus aurait ses coordonnées $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ nulles et conduirait à une rotation autour de Oz, cas qui a déjà été écarté. Tout déplacement infiniment petit du trièdre T s'obtient donc par la combinaison des deux mouvements (T_1, R_1) et (T_2, R_2). En particulier, tout déplacement infiniment petit de son origine O s'obtiendra en composant les deux translations T_1, T_2 de grandeurs arbitraires et dirigées suivant Ox et Oy.

Si $T_1 = 0$, $T_2 = 0$ le point O est fixe; le corps S a le mouvement le plus général autour d'un point fixe, c'est le système Σ_3^2 qui avait déjà été trouvé pour $\delta = 0$, quelle que fût la valeur de ω.

Si $T_2 = 0$ l'origine a un déplacement à un seul paramètre, donc décrit une courbe Γ dont la tangente est la direction de T_1, c'est-à-dire Oy. Le trièdre T dépendant de deux paramètres prendra toutes les positions dans lesquelles son axe des y sera tangent par son origine à la courbe Γ; en outre, la droite D tourne librement autour de O dans xOy, il en résulte que la droite D aura un mouvement dans lequel elle sera uniquement assujettie à rencontrer la courbe Γ. Cette droite dépendra de trois paramètres, de sorte que nous tombons sur une impossibilité.

Si T_1 et T_2 ne sont pas nuls le point O a un déplacement à deux paramètres, il décrit une surface Σ, et Ox et Oy sont deux tangentes. Comme la droite D tourne librement autour de O dans xOy, plan tangent à Σ en O, la droite D peut venir coïncider avec n'importe quelle tangente à Σ. Or les tangentes d'une surface forment toujours un complexe, de sorte que nous retombons encore sur une impossibilité à moins que cette surface ne soit un plan, c'est-à-dire que xOy ne reste fixe, ce qui donne le mouvement σ_3^1.

En réalité, nous venons de montrer, par un raisonnement géométrique un peu détourné mais très simple, que les deux mouvements μ_1

et μ_2 d'un trièdre à deux paramètres ne peuvent satisfaire aux cinq conditions

$$\Delta(\mathcal{X}, \mathcal{L}) = 0, \quad \Delta(\mathcal{Y}, \mathcal{M}) = 0, \quad \Delta(\mathcal{X}, \mathcal{M}) + \Delta(\mathcal{Y}, \mathcal{L}) = 0, \quad \mathcal{N}_1 = 0, \quad \mathcal{N}_2 = 0,$$

que si ce trièdre a son origine fixe, ou a son plan des xy fixe, ou admet constamment un mouvement infiniment petit se réduisant à une rotation autour de son axe des z, c'est-à-dire à un mouvement complexe formé avec le mouvement de rotation autour d'un axe. Les relations entre les coordonnées de μ_1 et μ_2 qui nous étaient imposées ne pouvaient pas nous fournir ces conclusions; il aurait fallu, pour employer une méthode directe, faire intervenir les relations différentielles [1] que doivent remplir ces douze quantités et montrer leur incompatibilité (sauf dans les cas mentionnés plus haut) avec les trois équations de condition. Cette marche aurait été beaucoup plus pénible que celle que nous avons adoptée.

4° $p = 4$. $\mathfrak{C}''_1$ a cinq colonnes et ne forme qu'un déterminant. En l'annulant identiquement, on trouve

$$(1) \quad \begin{cases} \Delta(\mathcal{X}, \mathcal{L}, \mathcal{N}) = 0, \qquad \Delta(\mathcal{Y}, \mathcal{M}, \mathcal{N}) = 0, \\ \Delta(\mathcal{X}, \mathcal{M}, \mathcal{N}) + \Delta(\mathcal{Y}, \mathcal{L}, \mathcal{N}) = 0; \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} \delta\Delta(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{L}) = \sin\omega\cos\omega\,\Delta(\mathcal{X}, \mathcal{L}, \mathcal{M}), \\ \delta\Delta(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{M}) = \sin\omega\cos\omega\,\Delta(\mathcal{Y}, \mathcal{L}, \mathcal{M}). \end{cases}$$

Pour étudier ces équations nous ferons une remarque essentielle.

Cette remarque consiste en ce fait que les équations (1) ne dépendent ni de δ, ni de ω, et que si δ et $\cos\omega$ sont nuls les cinq équations de condition se réduisent aux trois équations (1). Il en résulte que nous devons commencer par étudier ce cas particulier, et que c'est parmi les mouvements particuliers que nous trouverons ainsi, que nous devrons chercher ceux qui satisfont aux équations (2) quand la droite ne satisfera plus aux conditions $\delta = 0$, $\cos\omega = 0$.

Étudions donc ce cas.

Supposons d'abord que le point O dépende d'un seul paramètre,

---

(1) *Voir* Kœnigs, *Leçons de Cinématique*, Chapitre X.

c'est-à-dire décrive une courbe Γ; la droite D, qui passe par O, rencontrera toujours Γ, donc décrira un complexe et les équations (1) seront certainement vérifiées. Nous ne ferons pas figurer ce mouvement dans nos Tableaux, car c'est un mouvement complexe formé avec Σ_3^2, et qui n'est assujetti à aucune restriction.

Si le point O dépend de deux paramètres, c'est-à-dire décrit une surface, à chaque point M de cette surface correspond une simple infinité de positions du trièdre T, positions dont l'axe des z est essentiellement variable; le plan xOy peut être amené à passer par n'importe quelle droite issue de O, et la droite D qui tourne librement autour de O dans ce plan viendra coïncider avec la droite considérée. La droite D pouvant venir coïncider avec toute droite rencontrant la surface lieu de O ne décrirait pas un complexe.

Il reste à étudier le cas où le point O dépend de trois paramètres, c'est-à-dire est arbitraire dans l'espace. A chaque position de O correspond une position bien déterminée du plan xOy, et l'ensemble de toutes les droites issues de O dans le plan xOy doit décrire un complexe.

Supposons d'abord que le plan xOy ne dépende que d'un seul paramètre; soit P une de ses positions : forcément, pour tous les points O situés dans ce plan, le plan xOy sera précisément le plan P. Les droites D étant arbitraires dans un plan dépendant d'un seul paramètre dépendront bien de trois paramètres. Mais le mouvement ainsi obtenu est un mouvement complexe formé avec σ_3^1.

Pour aller plus loin, nous remarquerons qu'à chaque position de O correspondent un ou plusieurs plans xOy et qu'il peut exister des points formant des courbes ou des surfaces pour lesquelles deux déterminations du plan xOy viennent se confondre. Imaginons une région R à trois dimensions qui ne soit traversée par aucune de ces courbes ou surfaces singulières, et faisons mouvoir le corps S d'une façon continue en satisfaisant uniquement à la condition que son point O ne sorte pas de R. Si nous partons d'une position quelconque M_0 de R avec la détermination P_0 pour le plan xOy, nous garderons toujours cette détermination et nous reviendrons forcément en M_0 avec la détermination P_0. Ainsi à chaque point M de R correspond un et un seul plan P et le corps S partant de la position initiale M_0P_0, quel que soit son mouvement dans R, lorsque O arrivera en M, le plan xOy viendra en coïncidence avec P.

Soient alors M et M′ deux points de R, P et P′ leurs plans. Supposons que M′ soit dans le plan P. Partons de la position MP, nous pouvons faire tourner S autour de Oz, de façon que la droite D vienne en coïncidence avec MM′, et ensuite donner à S le mouvement à un paramètre qu'il doit sûrement posséder autour de D devenue MM′.

Il peut arriver que ce mouvement autour de D soit constamment une rotation; alors le corps posséderait les deux rotoïdes Oz et D concourants, rectangulaires et ne dépendant que de trois paramètres : ce serait le mouvement complexe formé avec Σ_3^2. Écartons-le.

Dans le mouvement de S autour de D, le point M variera sur D et le plan P tournera autour de D. Il arrivera un moment où M viendra en M′, et, par suite, P en P′; il en résulte que P′ contient MM′, c'est-à-dire M.

La correspondance du point M et du plan P possède la propriété caractéristique suivante :

A chaque point M *de* R *correspond un et un seul plan* P : *si un point* M′ *est dans le plan* P *du point* M, M *est aussi dans le plan* P′ *du point* M′.

Prenons alors un point M et son plan P. Si P ne dépendait que de deux paramètres, il y aurait dans P une ligne de points M auxquels correspondrait ce même plan P. Tout autre point M′ du plan P devrait avoir un plan P′ contenant M′ et toute cette ligne de points M, ce plan serait confondu avec P, de sorte que tous les points de ce plan P l'admettraient comme plan xOy. Le plan P dépendrait, en réalité, d'un seul paramètre et nous retomberions sur un cas déjà examiné.

Le plan P doit donc dépendre de trois paramètres. Partons de M_0, P_0, et prenons dans P_0 deux points M_1 et M_2 dont les plans P_1 et P_2 soient distincts de P_0 et distincts entre eux, ces deux points n'étant, d'ailleurs, pas en ligne droite avec M_0. Les trois plans P_0, P_1, P_2 forment un trièdre ayant M_0 comme sommet. Les deux arêtes dans P_0 sont M_0M_1 et M_0M_2; soit Δ la troisième arête, désignons, pour abréger, la droite M_1M_2 par Δ' et remarquons que, d'après les hypothèses faites, les deux droites Δ et Δ' ne sont pas dans un même plan. Prenons un point quelconque M sur Δ, il est dans P_1 et P_2, donc son plan P passe par M_1 et M_2, c'est-à-dire par Δ'. Prenons un point quelconque M' sur Δ', il est dans les plans P de tous les points de Δ, donc son plan P' contient tous ces points, c'est-à-dire la droite Δ.

Prenons enfin un point quelconque N et considérons les deux plans $N\Delta$ et $N\Delta'$ rencontrant Δ' et Δ respectivement en M' et M; N étant dans $N\Delta'$ qui est le plan P de M et dans le plan $N\Delta$ qui est le plan P de M', son plan doit passer par M et M'; c'est le plan NMM'.

Nous voyons qu'au moyen des deux droites Δ et Δ' et uniquement par leur moyen, nous pouvons définir *complètement* la correspondance de P et de M. Mais nous remarquons que le complexe linéaire qui aurait Δ et Δ' comme droites conjuguées, définirait précisément la même correspondance.

Nous pouvons donc affirmer que, dans ce cas, le mouvement de S est tel que *le plan xOy soit constamment le plan polaire du point* O *relativement à un complexe linéaire non spécial*. C'est un nouveau mouvement Σ_4^2 défini par

$$\frac{\cot\theta}{k} = \frac{\sin\psi}{\eta} = \frac{\cos\psi}{\xi},$$

k étant une constante qui n'est ni nulle ni infinie.

En définitive, nous ne trouvons dans le cas de $\delta = 0$, $\omega = \frac{\pi}{2}$ que trois sortes de mouvements, à savoir : les mouvements complexes formés avec Σ_3^2, les mouvements complexes formés avec σ_3^1, et enfin le mouvement Σ_4^2. Il nous faut maintenant voir si ces mouvements sont acceptables dans le cas où l'on n'aurait pas à la fois $\delta = 0$, $\omega = \frac{\pi}{2}$.

Le système Σ_3^2 est un système mixte pour les droites $\delta = 0$; dans ce cas les droites D dépendent de deux paramètres, et en introduisant un nouveau paramètre pour former avec Σ_3^2 un mouvement complexe à quatre paramètres, on a des droites D qui dépendent bien de trois paramètres. Mais si δ n'est pas nul, les droites D de Σ_3^2 forment un complexe, le complexe des tangentes à une sphère de rayon δ; en introduisant un nouveau paramètre, cette sphère, dont le centre décrit alors une courbe, peut devenir tangente à n'importe quelle droite, qui peut ainsi être considérée comme une droite D; ces droites ne forment donc pas un complexe. Ainsi, les systèmes complexes formés avec Σ_3^2 sont mixtes pour les droites $\delta = 0$. Le système σ_3^1 est mixte pour les droites perpendiculaires à son plan fixe, c'est-à-dire pour les droites $\omega = 0$, que nous ne devons pas considérer actuellement. Il l'est aussi pour les droites $\omega = \frac{\pi}{2}$, il en sera de même pour tout mouvement complexe formé avec σ_3^1. Supposons alors que ω soit différent de $\frac{\pi}{2}$, on constate immédiatement que, dans le mouvement σ_3^1, la droite D décrit le complexe des droites qui font l'angle ω avec la normale au plan fixe. Si dans un mouvement complexe formé avec Σ_3^1 la droite D ne dépend encore que de trois paramètres, c'est que le complexe précédent est indépendant du nouveau paramètre que l'on a introduit, et, par conséquent, que la direction du plan fixe, direction qui suffit à le définir, reste invariable. C'est un mouvement complexe particulier formé avec σ_3^1, et c'est le mouvement Σ_4^1 que nous avons déjà considéré, il est mixte pour n'importe quelle droite D du corps S.

Il nous reste enfin à étudier le cas du mouvement Σ_4^2 défini par un complexe linéaire non spécial.

Définissons la position de O par ses coordonnées semi-polaires, ρ, α et ζ; on aura, pour le mouvement du trièdre T,

$$\varphi = 0, \qquad \psi = \alpha, \qquad \theta = \operatorname{arc\,tang} \frac{\rho}{k},$$

et l'on en déduit

$$\begin{array}{lll}
\mathcal{X}_1 = \dfrac{k}{k^2+\rho^2}, & \mathcal{X}_2 = 0, & \mathcal{X}_3 = 0, \\[2ex]
\mathcal{Y}_1 = 0, & \mathcal{Y}_2 = \dfrac{\rho}{\sqrt{\rho^2+k^2}}, & \mathcal{Y}_3 = 0, \\[2ex]
\mathcal{L}_1 = 1, & \mathcal{L}_2 = 0, & \mathcal{L}_3 = 0, \\[2ex]
\mathfrak{M}_1 = 0, & \mathfrak{M}_2 = \rho, & \mathfrak{M}_3 = \dfrac{\rho}{\sqrt{\rho^2+k^2}}, \\[2ex]
\mathfrak{N}_1 = 0, & \mathfrak{N}_2 = 0, & \mathfrak{N}_3 = \dfrac{k}{\sqrt{\rho^2+k^2}}.
\end{array}$$

Portons ces valeurs dans les équations de condition (2), les seules qui restent à vérifier. On trouve que la première est identiquement vérifiée, mais que la seconde se réduit à

$$\frac{\partial k\rho^2}{(k^2+\rho^2)^2} + \sin\omega\cos\omega\,\frac{k\rho}{\rho^2+k^2} = 0,$$

et ne peut être identiquement vérifiée que si $k = 0$ ou si l'on a simultanément

$$\delta = 0, \qquad \sin\omega \cos\omega = 0,$$

ce qui n'arrive pas, par hypothèse.

6. *Mouvements mixtes pour le verrou dans le cas $r = 0$, $t\omega \neq 0$.* — Il faut alors annuler les deux Tableaux $\mathfrak{T}'_0$ et $\mathfrak{T}''_0$:

1° $p = 0$. Le Tableau $\mathfrak{T}''_0$ se réduit à sa dernière colonne et ne peut pas être identiquement nul, donc aucun mouvement mixte;

2° $p = 2$. On obtient immédiatement, en annulant les deux Tableaux, les conditions

$$\mathfrak{X}_1 = 0, \qquad \mathfrak{Y}_1 = 0, \qquad \mathfrak{Z}_1 = 0, \qquad \mathfrak{L}_1 = 0\,;$$

le mouvement du trièdre se réduit à une translation perpendiculaire à Ox. En la combinant avec la translation de S sur Oz on voit que le corps possède un mouvement de translation plane, c'est Σ_2^2 admettant comme verrous à un paramètre tous ceux qui sont parallèles au plan xOy.

3° $p = 3$. On obtient immédiatement les conditions

$$\Delta(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) = 0, \qquad \Delta(\mathfrak{X}, \mathfrak{Z}) = 0, \qquad \Delta(\mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}) = 0, \qquad \Delta(\mathfrak{X}, \mathfrak{L}) = 0,$$
$$\sin\omega\, \Delta(\mathfrak{Z}, \mathfrak{L}) - \cos\omega\, \Delta(\mathfrak{Y}, \mathfrak{L}) = 0.$$

Supposons d'abord que $\mathfrak{X}_1$ et $\mathfrak{X}_2$ ne soient pas tous deux nuls, les quatre premières équations de condition montrent que les équations linéaires et homogènes obtenues en égalant à zéro les coordonnées $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{L}$ du mouvement

$$\lambda_1 \mu_1 + \lambda_2 \mu_2$$

se réduisent à une. Alors les déterminants $\Delta(\mathfrak{Z}, \mathfrak{L})$ et $\Delta(\mathfrak{Y}, \mathfrak{L})$ sont nuls et la dernière équation de condition est vérifiée. Dans ce cas il existe un déplacement instantané de T qui se réduit à une translation perpendiculaire à Ox; en le combinant avec la translation suivant Oz, on voit que S possède une infinité de translations laissant fixe le plan yOz parallèle à D. On obtient alors un mouvement complexe formé avec Σ_2^2.

Nous devons maintenant supposer $\mathfrak{X}_1 = 0$, $\mathfrak{X}_2 = 0$ et il ne reste à vérifier que la troisième et la cinquième équation qui montrent l'existence d'un mouvement μ'_1 réduit à une translation et d'un autre mouvement μ'_2 formé par une rotation parallèle à D et une translation parallèle à Ox. Ces deux mouvements sont distincts, sans quoi ils seraient confondus en une translation perpendiculaire à Ox et l'on retomberait sur le mouvement complexe formé avec Σ_2^2.

Les mouvements μ'_1, μ'_2 et la translation Oz laissant invariable la direction de la droite D du corps S, nous pouvons définir le mouvement obtenu en disant que le corps S glisse librement sur une glissière G qui possède un mouvement à deux paramètres, tel qu'une direction invariablement liée à G reste fixe. Nous désignerons ce mouvement par Σ_3^5.

4° $p = 4$. On trouve immédiatement les deux conditions

$$\Delta(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}) = 0,$$
$$\sin\omega\,\Delta(\mathcal{X}, \mathcal{Z}, \mathcal{L}) - \cos\omega\,\Delta(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{L}) = 0.$$

Ces équations prouvent l'existence d'un mouvement μ'_1 réduit à une translation et d'un mouvement μ'_2 composé d'une rotation parallèle à D et d'une translation perpendiculaire à Ox. Ces deux mouvements sont distincts ou bien se confondent en une translation perpendiculaire à Ox; en y ajoutant la translation G également perpendiculaire à Ox, le corps S aurait une infinité de translations laissant fixe le plan xOy, on tomberait dans ce cas sur un mouvement complexe formé avec Σ_2^2. Supposons donc μ'_1 et μ'_2 distincts, ils laissent inaltérée la direction de D, il en est de même par la translation G, de sorte que la direction de D ne dépend que d'un paramètre au plus. Si elle est fixe, le corps S possède le mouvement Σ_4^1 qui admet tous les verrous parallèles à Oz, ainsi que toutes les glissières.

Pour aller plus loin, nous remarquerons que nous pouvons toujours supposer que le mouvement du corps autour de D n'est pas constamment une translation, sans quoi le corps posséderait les deux translations Oz et D perpendiculaires à Ox et l'on retomberait sur le mouvement complexe formé avec Σ_2^2.

Définissons alors le corps S au moyen d'un trièdre ayant D pour axe des z et un point O comme origine. Nous pouvons toujours supposer que le mouvement de ce trièdre est défini par un paramètre a_1 définissant la direction de Oz, c'est-à-dire dont θ et ψ sont des fonctions, par deux paramètres a_2, a_3, achevant de définir la position géométrique de la droite Oz quand a_1 est donné, et enfin par un quatrième paramètre a_4 définissant le mouvement de S autour de Oz, ce dernier paramètre pouvant être l'angle φ puisque le mouvement autour de D n'est pas une translation. Soient $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ les quatre mouvements paramétriques; μ_1 et μ_4 sont des mouvements hélicoïdaux dont la rotation n'est pas constamment nulle; μ_2 et μ_3 sont des translations, car, dans ces deux mouvements, θ, ψ, φ restent constants.

Considérons le corps S' qui n'est que S dont on ramène constamment le point O en une position fixe. S' admet comme mouvements paramétriques ceux de S réduits à leurs rotations, il admet donc deux rotations μ'_1 et μ'_4; la seconde a lieu autour de la droite D' fixe dans S' et qui décrit un cône C non réduit à une droite. Si l'on considère le mouvement sphérique correspondant, on voit qu'on a le mouvement d'une figure sphérique qui tourne librement autour d'un de ses points D' pendant que ce point se meut librement sur une courbe sphérique C. Il y a deux centres de rotation instantanée, d'abord D', puis le centre de courbure sphérique de C, soit I. Comme la courbe C décrite par D' n'est pas un point, les deux points I et D ne sont pas toujours confondus. Il en résulte que les rotations μ'_1 et μ'_4 ont des directions qui ne sont pas constamment confondues, de sorte qu'il est impossible de trouver λ_1 et λ_4 fonctions des paramètres a, telles que le mouvement

$$\lambda_1 \mu_1 + \lambda_4 \mu_4$$

se réduise toujours à une translation.

Pour une position arbitrairement choisie de S, les seuls mouvements instantanés se réduisant à des translations seront tous ceux de la forme

$$\lambda_2 \mu_2 + \lambda_3 \mu_3$$

et nous savons que l'on pourra trouver des valeurs de λ_2 et λ_3 fonctions des paramètres a, telles que cette translation soit précisément la translation G, ainsi

$$G \equiv \lambda_2 \mu_2 + \lambda_3 \mu_3.$$

Parmi toutes les positions de S, considérons toutes celles pour lesquelles on a $a_1 = a_1^0$; nous n'avons plus qu'un mouvement à trois paramètres a_2, a_3, a_4. Dans ce mouvement, la droite D reste parallèle à une direction fixe et prend toutes les positions parallèles à cette direction; les mouvements paramétriques sont μ_2, μ_3 et μ_4 et l'égalité précédente ayant lieu quels que soient a_1, a_2, a_3, a_4 aura lieu pour $a_1 = a_1^0$ quels que soient a_2, a_3, a_4; ce qui montre que, dans ce mouvement à trois paramètres, le corps, dans chacune de ses positions, possédera toujours un mouvement instantané se réduisant à une translation suivant la glissière G. La droite D et la glissière G ne dépendront chacune que de deux paramètres, de sorte que le mouvement $a_1 = a_1^0$ sera un de ceux qui ont été trouvés pour $p = 3$. Le mouvement à quatre paramètres de S n'est donc qu'un mouvement complexe formé avec eux.

7. *Mouvements mixtes pour le verrou dans le cas $rt\omega \neq 0$.* — Il faut annuler ϖ' et ϖ'' :

1° $p = 1$. Un des déterminants de ϖ' se réduit à $r \sin\omega$ et n'est pas nul, donc aucun mouvement mixte;

2° $p = 2$. En annulant ϖ' on trouve

$$\mathcal{X}_1 = \mathcal{Y}_1 = \mathcal{L}_1 = \mathcal{M}_1 = 0, \qquad \frac{\mathcal{Z}_1}{r} = \frac{\mathcal{N}_1}{t}$$

et les deux premières colonnes de ϖ'' ayant leurs éléments proportionnels, tous les déterminants de ce Tableau sont nuls. Les égalités précédentes montrent que le mouvement instantané du trièdre ne serait pas distinct du mouvement du corps autour de Oz, de sorte que S n'aurait qu'un mouvement à un paramètre. Il n'y a donc aucun mouvement mixte.

3° $p = 3$. Si l'on annule identiquement tous les déterminants de ϖ' et de ϖ'', on trouve, par un calcul un peu long mais ne présentant aucune difficulté, que si ω n'est pas égal à $\frac{\pi}{2}$, en considérant le Tableau

$$\begin{matrix} 0 & \mathcal{X}_1 & \mathcal{X}_2, \\ 0 & \mathcal{Y}_1 & \mathcal{Y}_2, \\ r & \mathcal{Z}_1 & \mathcal{Z}_2, \\ 0 & \mathcal{L}_1 & \mathcal{L}_2, \\ 0 & \mathcal{M}_1 & \mathcal{M}_2, \\ t & \mathcal{N}_1 & \mathcal{N}_2, \end{matrix}$$

tous ses déterminants à trois lignes et trois colonnes sont nuls, sauf ceux qui s'obtiennent en combinant les lignes 1, 2, 3 ou 3, 4, 5. Mais ceux-ci sont aussi nuls, car ils se réduisent à $r\Delta(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ et $t\Delta(\mathfrak{L}, \mathfrak{M})$, quantités qui sont nulles, car elles sont aussi les valeurs des déterminants, nuls d'après les conditions obtenues, qui résultent de la combinaison de lignes 1, 2, 6 et 3, 4, 5.

Soient μ le mouvement de S autour de Oz, μ_1 et μ_2 les deux mouvements paramétriques du trièdre; μ, μ_1 et μ_2 peuvent être considérés comme les trois mouvements paramétriques de S et, puisque tous les déterminants du Tableau sont nuls, c'est qu'il existe $\lambda, \lambda_1, \lambda_2$ non tous nuls et tels que

$$\lambda\mu + \lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2 = 0.$$

Ces trois mouvements ne seraient pas distincts et S ne dépendrait que de deux paramètres.

Il faut donc supposer $\omega = \frac{\pi}{2}$. Dans ce cas, on trouve que les équations de condition peuvent s'écrire

$$(1)\qquad \begin{cases} \Delta(\mathfrak{X},\ r\mathfrak{N} - t\mathfrak{Z}) = 0, \\ \Delta(\mathfrak{Y},\ r\mathfrak{N} - t\mathfrak{Z}) = 0, \\ \Delta(\mathfrak{L},\ r\mathfrak{N} - t\mathfrak{Z}) = 0, \\ \Delta(\mathfrak{M},\ r\mathfrak{N} - t\mathfrak{Z}) = 0, \end{cases}$$

$$(2)\qquad \begin{cases} \Delta(\mathfrak{X},\ \mathfrak{Y}) = 0, \\ \Delta(\mathfrak{X},\ \mathfrak{L}) = 0, \\ \Delta(\mathfrak{Y},\ \mathfrak{M}) = 0, \end{cases}$$

$$(3)\qquad \Delta(\mathfrak{X},\ \mathfrak{M}) + \Delta(\mathfrak{Y},\ \mathfrak{L}) = 0,$$

$$(4)\qquad \begin{cases} \partial\Delta(\mathfrak{X},\ \mathfrak{M}) = 0, \\ \partial\Delta(\mathfrak{Y},\ \mathfrak{L}) = 0. \end{cases}$$

Supposons que les quantités $r\mathfrak{N}_1 - t\mathfrak{Z}_1$ et $r\mathfrak{N}_2 - t\mathfrak{Z}_2$ ne soient pas toutes deux nulles, les conditions (1) expriment que si l'on considère le mouvement

$$\lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2$$

les valeurs de λ_1 et λ_2 qui annulent la quantité $r\mathfrak{N} - t\mathfrak{Z}$ de ce mouvement annulent aussi ses coordonnées $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{L}, \mathfrak{M}$; il existe donc un mouvement instantané satisfaisant aux conditions

$$\mathcal{X} = 0, \qquad \mathcal{Y} = 0, \qquad \mathcal{L} = 0, \qquad \mathcal{M} = 0, \qquad \frac{\mathcal{N}}{\mathcal{Z}} = \frac{t}{r},$$

c'est-à-dire qui est identique au mouvement μ. On retomberait sur la même conclusion que dans le cas de $\omega \neq \frac{\pi}{2}$, S ne dépendrait que de deux paramètres. Il nous faut donc supposer

$$\frac{\mathcal{N}_1}{\mathcal{Z}_1} = \frac{\mathcal{N}_2}{\mathcal{Z}_2} = \frac{t}{r} \tag{5}$$

et alors tout mouvement $\lambda_1 \mu_1 + \lambda_2 \mu_2$ satisfait à la condition

$$\frac{\mathcal{N}}{\mathcal{Z}} = \frac{t}{r}. \tag{6}$$

Supposons alors que $\mathcal{X}_1$ et $\mathcal{X}_2$ ne soient pas nulles toutes les deux ainsi que $\mathcal{Y}_1$ et $\mathcal{Y}_2$, les équations (2) montrent qu'il existe un mouvement $\lambda_1 \mu_1 + \lambda_2 \mu_2$ dont les coordonnées $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{L}, \mathcal{M}$ seront nulles; par suite de l'égalité (6), ce mouvement serait identique à celui de S autour de Oz et S ne dépendrait encore que de deux paramètres.

Supposons maintenant que les deux coordonnées $\mathcal{X}_1$ et $\mathcal{X}_2$ soient nulles, mais pas $\mathcal{Y}_1$ et $\mathcal{Y}_2$. Tout mouvement $\lambda_1 \mu_1 + \lambda_2 \mu_2$ aura son $\mathcal{X}$ nul et la troisième équation (2) jointe à l'équation (3) montre que l'on pourra déterminer λ_1 et λ_2 de façon que ses coordonnées $\mathcal{Y}, \mathcal{L}, \mathcal{M}$ soient nulles. On retombe encore sur la même conclusion.

Il faut donc supposer

$$\mathcal{X}_1 = 0, \qquad \mathcal{Y}_1 = 0, \qquad \mathcal{X}_2 = 0, \qquad \mathcal{Y}_2 = 0. \tag{7}$$

Les trois mouvements paramétriques μ, μ_1, μ_2 du corps S sont trois mouvements hélicoïdaux parallèles à la direction Oz fixe dans le corps et, en vertu de (5), ils ont même pas. On retombe sur le système Σ_3^1 sans aucune condition supplémentaire, car, d'après les conditions (7), les équations (2), (3), (4) sont toutes vérifiées. Ce système Σ_3^1 admet tous les verrous parallèles au plan xOy.

4° $p = 4$. En annulant ϖ' et ϖ'', on trouve des équations qui, en posant

$$\mathcal{P}_i = r\mathcal{N}_i - t\mathcal{Z}_i,$$

peuvent s'écrire dans le cas général où $\omega \neq \frac{\pi}{2}$

$$\begin{array}{lll} \Delta(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{L}) = 0, & \Delta(\mathcal{X}, \mathcal{L}, \mathcal{M}) = 0, & \Delta(\mathcal{Y}, \mathcal{L}, \mathcal{M}) = 0, \\ \Delta(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{M}) = 0, & \Delta(\mathcal{X}, \mathcal{L}, \mathcal{P}) = 0, & \Delta(\mathcal{Y}, \mathcal{M}, \mathcal{P}) = 0, \\ \Delta(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{P}) = 0, & \multicolumn{2}{r}{\Delta(\mathcal{X}, \mathcal{M}, \mathcal{P}) + \Delta(\mathcal{Y}, \mathcal{L}, \mathcal{P}) = 0.} \end{array}$$

Si alors on considère les cinq équations linéaires et homogènes à trois inconnues,

$$\begin{aligned} \lambda_1 \mathcal{X}_1 + \lambda_2 \mathcal{X}_2 + \lambda_3 \mathcal{X}_3 &= 0, \\ \lambda_1 \mathcal{Y}_1 + \lambda_2 \mathcal{Y}_2 + \lambda_3 \mathcal{Y}_3 &= 0, \\ \lambda_1 \mathcal{L}_1 + \lambda_2 \mathcal{L}_2 + \lambda_3 \mathcal{L}_3 &= 0, \\ \lambda_1 \mathcal{M}_1 + \lambda_2 \mathcal{M}_2 + \lambda_3 \mathcal{M}_3 &= 0, \\ \lambda_1 \mathcal{P}_1 + \lambda_2 \mathcal{P}_2 + \lambda_3 \mathcal{P}_3 &= 0, \end{aligned}$$

on constate par une discussion facile que, si l'on n'a pas

$$\mathcal{X}_1 = \mathcal{X}_2 = \mathcal{X}_3 = \mathcal{Y}_1 = \mathcal{Y}_2 = \mathcal{Y}_3 = 0, \tag{1}$$

ces cinq équations se réduisent à deux, de sorte qu'il existe un mouvement $\lambda_1 \mu_1 + \lambda_2 \mu_2 + \lambda_3 \mu_3$ dont les $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{P}$ sont nuls, c'est-à-dire qui est identique au mouvement μ autour de Oz. Le corps S ne dépendrait alors que de trois paramètres.

Il faut donc supposer les conditions (1) réalisées, et alors toutes les équations de condition sont vérifiées. Mais, dans ce cas, les mouvements μ_1, μ_2 et μ_3 sont hélicoïdaux parallèlement à Oz; de même que μ, ils n'altèrent pas la direction de cette droite, de sorte que nous retombons sur le système Σ_4^1 admettant n'importe quel verrou.

Il nous reste, en dernier lieu, à examiner le cas de $\omega = \frac{\pi}{2}$. Les conditions se réduisent et prennent la forme

$$\left\{ \begin{aligned} &\Delta(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{P}) = 0, \\ &\Delta(\mathcal{X}, \mathcal{L}, \mathcal{P}) = 0, \\ &\Delta(\mathcal{Y}, \mathcal{M}, \mathcal{P}) = 0, \\ &\Delta(\mathcal{X}, \mathcal{M}, \mathcal{P}) + \Delta(\mathcal{Y}, \mathcal{L}, \mathcal{P}) = 0. \end{aligned} \right. \tag{1}$$

$$\left\{ \begin{aligned} &\partial \Delta(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{L}) = 0, \\ &\partial \Delta(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{M}) = 0. \end{aligned} \right. \tag{2}$$

Les équations (1) étant les conditions nécessaires et suffisantes si ∂

est nul et étant nécessaires si δ n'est pas nul, nous commencerons par chercher les mouvements satisfaisant à ces conditions, et, pour étudier le cas où δ n'est pas nul, nous chercherons parmi eux ceux qui satisfont aux conditions (2).

Considérons les cinq équations linéaires déjà écrites pour le cas où ω n'est pas égal à $\frac{\pi}{2}\cdot$ Les équations (1) montrent facilement qu'elles se réduisent à deux, pourvu que les mineurs de la forme $\Delta(\mathcal{X}, \mathcal{P})$ et $\Delta(\mathcal{Y}, \mathcal{P})$ ne soient pas tous nuls. Il existe alors un mouvement

$$\lambda_1 \mu_1 + \lambda_2 \mu_2 + \lambda_3 \mu_3,$$

pour lequel $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{P}$ sont nuls, mouvement qui n'est autre que μ.

Supposons donc que tous ces mineurs soient nuls, sans que les $\mathcal{P}$ soient tous nuls; il en résulte que tous les mouvements

$$\lambda_1 \mu_1 + \lambda_2 \mu_2 + \lambda_3 \mu_3$$

dont le $\mathcal{P}$ est nul ont aussi leurs $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ nuls.

Ces mouvements sont déterminés par une équation de la forme

$$A_1\, da_1 + A_2\, da_2 + A_3\, da_3 = 0, \tag{3}$$

les A étant des fonctions déterminées des paramètres a. Faisons le changement de paramètres

$$\begin{aligned} b_1 &= f_1(a_1, a_2, a_3), \\ b_2 &= f_2(a_1, a_2, a_3), \\ b_3 &= f_3(a_1, a_2, a_3); \end{aligned}$$

donnons-nous arbitrairement b_1 et prenons pour b_2 et b_3 deux intégrales du système

$$\frac{da_1}{A_2 \dfrac{\partial b_1}{\partial a_3} - A_3 \dfrac{\partial b_1}{\partial a_2}} = \frac{da_2}{A_3 \dfrac{\partial b_1}{\partial a_1} - A_1 \dfrac{\partial b_1}{\partial a_3}} = \frac{da_3}{A_1 \dfrac{\partial b_1}{\partial a_2} - A_2 \dfrac{\partial b_1}{\partial a_1}}.$$

On aura trois nouveaux mouvements paramétriques μ'_1, μ'_2, μ'_3, et l'on voit facilement que μ'_1 et μ'_2 satisferont à l'équation (3), c'est-à-dire auront leurs $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ et $\mathcal{P}$ nuls. Si alors, dans le mouvement de S, on laisse constant le paramètre b_1, S n'a plus qu'un mouvement à trois paramètres, les trois mouvements paramétriques μ'_2, μ'_3, μ étant hélicoïdaux de même pas et parallèles à la direction fixe Oz du corps S; c'est le mouvement Σ_3^1, de sorte qu'en réalité, nous trouvons le mouvement complexe formé avec Σ_3^1.

Si les $\mathfrak{P}$ des trois mouvements paramétriques sont nuls, il nous faut avoir recours aux équations différentielles.

Ne prenons que les dernières de chaque groupe et écrivons-les sous la forme

$$\frac{\partial \mathcal{N}_i}{\partial a_j} - \frac{\partial \mathcal{N}_j}{\partial a_i} - \Delta_{ij}(\mathcal{X}, \mathcal{M}) + \Delta_{ij}(\mathcal{Y}, \mathcal{L}) = 0,$$
$$\frac{\partial \mathcal{Z}_i}{\partial a_j} - \frac{\partial \mathcal{Z}_j}{\partial a_i} - \Delta_{ij}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = 0.$$

Les $\mathfrak{P}$ étant nuls, on a

$$r\mathcal{N}_i - t\mathcal{Z}_i = 0,$$

r et t étant des constantes. Si nous multiplions la première équation par r, la seconde par t et retranchons, nous obtenons

$$(E_{ij}) \qquad t\Delta_{ij}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) - r\Delta_{ij}(\mathcal{X}, \mathcal{M}) + r\Delta_{ij}(\mathcal{Y}, \mathcal{L}) = 0.$$

Formons les deux combinaisons

$$\mathcal{X}_1 E_{23} + \mathcal{X}_2 E_{31} + \mathcal{X}_3 E_{12} = 0,$$
$$\mathcal{Y}_1 E_{23} + \mathcal{Y}_2 E_{31} + \mathcal{Y}_3 E_{12} = 0.$$

Elles se réduisent à

$$(4) \qquad \Delta(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{L}) = 0, \qquad \Delta(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{M}) = 0.$$

Formons de même les deux combinaisons

$$\mathcal{L}_1 E_{23} + \mathcal{L}_2 E_{31} + \mathcal{L}_3 E_{12} = 0,$$
$$\mathcal{M}_1 E_{23} + \mathcal{M}_2 E_{31} + \mathcal{M}_3 E_{12} = 0.$$

En vertu de (4), elles se réduisent à

$$(5) \qquad \Delta(\mathcal{X}, \mathcal{L}, \mathcal{M}) = 0, \qquad \Delta(\mathcal{Y}, \mathcal{L}, \mathcal{M}) = 0.$$

Les équations (4) et (5) expriment qu'on peut trouver un mouvement $\lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2 + \lambda_3\mu_3$ pour lequel $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$ seront nuls; comme le $\mathfrak{P}$ est forcément nul, ce mouvement coïnciderait avec μ.

Nous ne trouvons donc qu'une seule sorte de mouvement pour le cas de $\delta = 0$, c'est le mouvement complexe formé avec Σ_3^1. Ce mouvement Σ_3^1 donnant une congruence, même si δ n'est pas nul, tout mouvement complexe formé avec lui donnera un complexe, même dans le cas où δ ne serait pas nul.

Il est, d'ailleurs, facile de le vérifier directement, car les $\mathfrak{P}$ n'étaient pas tous nuls, et les mineurs $\Delta(\mathfrak{x}, \mathfrak{P})$ et $\Delta(\mathfrak{y}, \mathfrak{P})$ étaient tous nuls, de sorte que tous les mineurs $\Delta(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ l'étaient forcément, ce qui montre que les équations (4) étaient vérifiées.

8. La discussion générale qui précède est longue et pénible; elle semble conduire à un grand nombre de cas distincts. Mais, si l'on examine successivement ces cas, on constate facilement que la plupart d'entre eux rentrent dans la catégorie étudiée au § 2 du Chapitre actuel, c'est-à-dire sont tels que le mouvement $\mathfrak{M}'$ à un paramètre autour du verrou D soit, en réalité, un mouvement autour d'une articulation simple contenue dans le verrou ou, comme nous dirons maintenant, *portée par la droite* D, en convenant d'exprimer ainsi que l'articulation est une vis ou un rotoïde ayant D pour axe ou une glissière parallèle à D.

Les résultats peuvent alors se résumer de la façon suivante :

TABLEAU III.

Mouvements mixtes pour une articulation simple A *et un verrou* W *ayant* D *pour axe. On suppose que la droite* D *dépend de plus de* $p - 2$ *paramètres, c'est-à-dire que l'on n'est pas dans les conditions du Tableau II.*

PREMIER CAS. — *L'articulation* A *est portée par la droite* D.

DEUXIÈME CAS. — *Le corps a un mouvement simple ou complexe relatif à l'articulation* A *et à une articulation fictive* A' *portée par* D.

TROISIÈME CAS. — p *étant au moins égal à* 3, *la direction de la droite* D *ne dépend que de* $p - 3$ *paramètres, cette droite étant forcément parallèle à l'axe de* A *si cette articulation est une vis ou un rotoïde.*

QUATRIÈME CAS. — A *est un rotoïde,* D *rencontre l'axe de* A *en un point* O *et lui est perpendiculaire;* P *étant le plan perpendiculaire à cet axe en* O, *le rotoïde* A *possède un mouvement à trois paramètres tel que* P *soit toujours le plan polaire de* O *dans un complexe linéaire non spécial.*

9. *Mouvements mixtes pour les articulations triples.* — Pour les articulations triples, il y a deux sortes de mouvements mixtes :

Mouvement mixte de première espèce si le corps dépendant de p paramètres, et possédant déjà une articulation simple à $p-1$ paramètres, a, en outre, une articulation triple dépendant aussi de $p-1$ paramètres, et *mouvement mixte de seconde espèce* si l'articulation triple ne dépend que de $p-2$ paramètres.

Il est, d'ailleurs, bien évident qu'un mouvement de première espèce exige $p<4$ et qu'un mouvement de seconde espèce exige $p<5$.

On pourrait étudier ces mouvements mixtes par une méthode tout à fait analogue à celle qui nous a servi pour le cas du verrou, mais la complication du problème étant infiniment moins grande, nous pouvons traiter la question par de simples raisonnements géométriques dont voici l'idée générale :

L'axe des z d'un trièdre T étant l'articulation simple autour de laquelle tourne librement le corps S, un point G (articulation triple) de ce corps décrit par rapport à T une trajectoire relative Γ qui est une hélice, un cercle ou une droite, suivant que Oz est une vis, un rotoïde ou une glissière; un plan P du corps S enveloppe une surface Σ qui est hélicoïdale, conique ou rejetée à l'infini. On donne à T un mouvement à $p-1$ paramètres tel que S ait un mouvement à p paramètres et il s'agit de voir ce qu'engendrent la courbe Γ ou la développable Σ dans ce mouvement.

Il est, en outre, utile de faire la remarque suivante :

Considérons un mouvement mixte de seconde espèce à p paramètres, son articulation triple dépend de $p-2$ paramètres. Imaginons une relation entre les p paramètres, relation définissant un mouvement particulier, à $p-1$ paramètres, du corps S; dans ce mouvement, l'articulation triple dépendra de $p-2$ ou $p-3$ paramètres et, si la relation posée n'exprime pas que le paramètre du mouvement de S autour de l'articulation simple Oz reste constant, on voit que le mouvement particulier de S est un mouvement mixte à $p-1$ paramètres. Si, d'autre part, on remarque que tout mouvement complexe formé avec un mouvement mixte de première espèce est encore mixte de première espèce, et que tout mouvement complexe formé avec un mouvement mixte de seconde espèce est encore mixte et de seconde espèce, on voit que les mouvements mixtes de seconde espèce à p paramètres peuvent être considérés d'une infinité de façons comme mouvement complexe formé avec un mouvement mixte de première espèce, car nous laissons évidemment de côté les mouvements complexes ordinaires.

Nous désignerons par δ la distance d'un point G à l'axe Oz, par ω l'angle d'un plan P avec cet axe, et nous continuerons, comme précédemment, à désigner par r et t les rotations et translations de S autour de Oz, constituant le mouvement μ.

10. *Mouvements mixtes pour le genou dans le cas* $rt\delta \neq 0$. — La courbe Γ est alors une véritable hélice.

1° $p = 1$. G décrit Γ et dépend de un paramètre, donc pas de mouvements mixtes;

2° $p = 2$. Le mouvement du trièdre T étant distinct de μ, ne laisse pas Γ en coïncidence avec elle-même, Γ décrit une surface, G dépend de deux paramètres et il n'y a aucun mouvement mixte;

3° $p = 3$. Comme le trièdre T ne possède pas μ, la *position géométrique* de l'hélice Γ dépend effectivement de deux paramètres et ne peut pas engendrer une surface, donc aucun mouvement mixte;

4° $p = 4$. Il ne pourrait exister que des mouvements de seconde espèce, mais c'est impossible, car il n'existe pas de mouvements de première espèce pour $p = 3$. En résumé, si $rt\delta$ n'est pas nul, il n'existe aucun mouvement mixte.

11. *Mouvements mixtes pour le genou dans le cas* $t = 0$, $\delta \neq 0$. — Γ est alors un véritable cercle.

On voit, comme dans le cas précédent, que $p = 1$ et $p = 2$ ne donnent aucun mouvement mixte. Il suffit, par conséquent, d'étudier les mouvements mixtes de première espèce dans le cas de $p = 3$, et ceux de seconde espèce dans le cas de $p = 4$.

p étant égal à 3, pour avoir un mouvement mixte de première espèce, il faut que le cercle Γ, dont la position géométrique dépend effectivement de deux paramètres, décrive une surface qui ne peut être qu'une sphère ou un plan et l'on trouve ainsi, pour S, soit le mouvement Σ_3^2 soit le mouvement σ_3^1.

p étant égal à 4, il ne peut exister comme mouvements mixtes de seconde espèce que ceux qui sont des mouvements complexes formés avec des mouvements mixtes de première espèce du cas $p = 3$, c'est-à-dire avec Σ_3^2 ou σ_3^1; mais dans ces deux mouvements G décrit une surface (sphère ou plan), et dans le mouvement complexe, G devrait encore décrire une surface, de sorte que la surface décrite par G dans Σ_3^2 ou σ_3^1 devrait rester en coïncidence avec elle-même, et S ne posséderait qu'un mouvement à trois paramètres.

En résumé, nous ne trouvons que deux mouvements mixtes, Σ_3^2 ou σ_3^1, qui sont de première espèce et qui admettent n'importe quel point du corps comme genou à deux paramètres.

12. *Mouvements mixtes pour le genou dans le cas de* $r\delta = 0$. — La courbe Γ est une droite parallèle ou confondue avec l'axe Oz.

$p = 1$ ne donne évidemment aucun mouvement mixte, de sorte que $p = 2$ ne peut en donner de seconde espèce. Pour avoir, dans ce cas, un mouvement de première espèce, il faut et il suffit que le mouvement à un paramètre du trièdre T laisse fixe la droite Γ; mais, que l'on considère l'hypothèse $r = 0$ ou l'hypothèse $\delta = 0$, cette droite est fixe dans S, donc S a un mouvement à deux paramètres dans lequel une de ses droites reste fixe, c'est-à-dire le mouvement Σ_2^1 qui admet comme genou à un paramètre tout point de l'axe Oz (notations du Tableau I).

$p = 3$ ne peut donner aucun mouvement de seconde espèce, car G devrait décrire une courbe, de sorte que le mouvement complexe formé avec Σ_2^1 serait tel que l'axe Oz de ce mouvement reste fixe, le mouvement obtenu ne différerait pas de Σ_2^1 et ne dépendrait que de deux paramètres.

Pour avoir, dans ce cas, des mouvements de première espèce autres que les mouvements complexes formés avec Σ_2^1 il faut que le mouvement à deux paramètres de T, qui fait dépendre la position géométrique de Γ de deux paramètres effectifs, fasse décrire à cette droite une surface qui, admettant une double infinité de génératrices rectilignes, ne pourra être qu'un plan.

Nous obtenons ainsi un mouvement assez compliqué et que nous n'avons pas encore rencontré. Nous l'appellerons Σ_3^6 et nous le définirons en disant que c'est *un mouvement autour d'une articulation simple* (vis ou rotoïde) *dépendant de deux paramètres de telle façon que son axe reste dans un plan fixe.*

Dans le cas de $p = 4$, les mouvements mixtes de seconde espèce ne peuvent être que des mouvements complexes formés avec Σ_2^1 et Σ_3^4. Dans les deux cas il faut que Γ décrive un plan, et nous tombons sur le mouvement Σ_4^2 qui n'a pas encore été rencontré et qui est défini par la condition qu'*une droite du corps* S *est assujettie à rester dans un plan fixe.*

13. *Mouvements mixtes pour le genou dans le cas $t = 0$, $\delta = 0$.* — Γ se réduit alors à un point et G dépend au plus des $p - 1$ paramètres du trièdre T, de sorte que tout mouvement du trièdre T fournit certainement un mouvement mixte qui est au moins de première espèce. Ces mouvements sont tous les mouvements complexes formés avec le simple mouvement de rotation σ_1^1.

Il nous reste à chercher, parmi ces mouvements, ceux qui sont de seconde espèce. Pour cela il faut et il suffit que le trièdre T ait un mouvement à $p - 1$ paramètres tel que le point G, qui est un point de l'axe des z de ce trièdre, ne dépende que de $p - 2$ paramètres. En réalité, nous ne devons attacher aucune importance aux mouvements que nous trouvons dans le cas actuel, car, au point de vue des mouvements qui se produisent dans les chaînes cinématiques, le point G que nous étudions ne doit pas être considéré comme appartenant au corps S, mais plutôt comme appartenant au corps qui précède S dans la chaîne, puisque le mouvement relatif de S, par rapport à ce corps, n'a aucun effet sur le point G. C'est le fait analogue à celui qui se passe pour la droite dans le cas $\omega = 0$, $t\delta = 0$.

14. *Mouvements mixtes pour la glissière plane dans le cas*

$$rt\omega\left(\omega - \frac{\pi}{2}\right) \neq 0.$$

La surface Σ enveloppée par le plan P est une véritable surface hélicoïdale. On constate, comme dans le premier cas relatif au genou, soit par un raisonnement géométrique, soit par un calcul direct du genre de ceux qui ont été utilisés pour l'étude du verrou, qu'il n'existe aucun mouvement mixte.

15. *Mouvements mixtes pour la glissière plane dans le cas* $\omega = 0$, $r \neq 0$. — La surface Σ est alors un cylindre de révolution qui peut se réduire à une droite.

Si $p = 1$, P dépend forcément de un paramètre, donc aucun mouvement mixte.

Si $p = 2$, il n'y a aucun mouvement de seconde espèce et il ne peut y en avoir de première espèce que si le mouvement de T laisse le cylindre Σ en coïncidence avec lui-même, de sorte que, dans le mouvement total de S, la droite Oz reste immobile; c'est Σ_2^1.

Si $p = 3$, les cylindres Σ doivent, pour donner un mouvement de seconde espèce, avoir une seule infinité de plans tangents; donc Σ devrait rester fixe par le mouvement à deux paramètres du trièdre T, ce qui est impossible, car S ne dépendrait plus que de deux paramètres. Pour avoir un mouvement mixte de première espèce il faut que les cylindres Σ ne dépendent, en réalité, que d'un paramètre, ce qui donne le mouvement complexe formé avec Σ_2^1, ou aient tous même direction, ce qui conduit au mouvement Σ_3^1, mouvement déjà rencontré à propos du verrou.

Les mouvements de seconde espèce dans le cas de $p = 4$ ne peuvent être que des mouvements complexes formés avec Σ_2^1 ou Σ_3^1. Dans le premier cas, on a une double infinité de cylindres Σ (ils dépendent effectivement de deux paramètres, sans quoi on aurait $p = 3$), leurs plans tangents ne peuvent dépendre de deux paramètres que si ces cylindres Σ ont leurs axes parallèles à une direction fixe, et l'on trouve pour S le mouvement Σ_4^1; le mouvement Σ_3^1 fournit tous les plans parallèles à la direction fixe de Oz; pour qu'un mouvement complexe formé avec Σ_3^1 ne fournisse que des plans dépendant de deux paramètres, il faut donc que la direction de Oz reste encore fixe dans ce mouvement complexe, ce qui conduit encore à Σ_4^1.

16. *Mouvements mixtes pour la glissière plane dans le cas* $t = 0$, $\omega\left(\omega - \frac{\pi}{2}\right) \neq 0$. — La surface Σ est alors un cône de révolution d'axe Oz;

$p = 1$ ne donne évidemment aucun mouvement mixte et il en résulte que $p = 2$ n'en donne aucun de seconde espèce. De ce que le cône ne reste en coïncidence avec lui-même que par le seul mouvement μ

autour de Oz résulte qu'il n'en existe pas non plus de première espèce. Si $p=3$, les cônes Σ dépendent effectivement de deux paramètres ; si leurs plans tangents ne dépendent que de deux paramètres, c'est qu'ils seront les plans tangents d'une surface à laquelle seront circonscrits tous ces cônes de révolution égaux, cette surface ne pourra être qu'une sphère, de sorte que le corps S aura un point fixe sur l'axe des z et l'on a le mouvement Σ_3^2. Il n'y a évidemment pas de mouvement de seconde espèce puisqu'il n'en existe pas dans le cas de $p=2$.

$p=4$ ne donne pas de mouvement de seconde espèce, car ce serait un mouvement complexe formé avec Σ_3^2 et pour n'avoir que des plans dépendant de deux paramètres, le point qui est fixe pour Σ_3^2 devrait rester fixe dans le mouvement complexe, de sorte que l'on n'aurait pas un mouvement distinct de Σ_3^2 et, par suite, on n'aurait pas $p=4$.

17. *Mouvements mixtes pour la glissière plane dans le cas* $r=0$, $\omega \neq 0$ *ou* $rt \neq 0$, $\omega = \frac{\pi}{2}$. — Dans le mouvement μ, le plan P se déplace parallèlement à lui-même; dans l'une ou l'autre des deux hypothèses, il y a une droite attachée au trièdre T et qui reste perpendiculaire au plan P. Si la direction de cette droite dépend de q paramètres, le plan P dépend forcément de $q+1$ paramètres.

18. *Mouvements mixtes pour la glissière plane dans le cas* $t=0$, $\omega = \frac{\pi}{2}$ *ou* $r=0$, $\omega=0$. — Par le mouvement μ, le plan P reste fixe, de sorte qu'on peut le considérer comme attaché au trièdre T.

19. Les résultats de cette nouvelle discussion peuvent se résumer dans le Tableau suivant, où nous supposons essentiellement que pour les mouvements mixtes de seconde espèce on ait écarté les cas donnés par le Tableau II, pour lesquels l'articulation triple dépendrait de $p-3$ paramètres et que, pour les mouvements mixtes de première espèce, on ait écarté les cas limites qui donneraient des mouvements de seconde espèce.

Tableau IV.

Mouvements mixtes pour une articulation simple A *et une articulation triple, genou* O *ou glissière plane* P.

1. Mouvements de seconde espèce pour le genou.

1° A *est un rotoïde qui se déplace de façon qu'un point marqué sur son axe ne dépende que de* $p - 2$ *paramètres.* O *est confondu avec ce point.*

2° *On a* $p = 4$. *Une droite du corps, confondue avec l'axe de* A *si* A *n'est pas une glissière, reste dans un plan fixe.* O *est situé sur cette droite.*

2. Mouvements de première espèce pour le genou.

1° A *est un rotoïde dont l'axe passe par* O.

2° *Le corps a un mouvement spécial simple ou complexe relatif à l'articulation* A *et à un rotoïde dont l'axe passe par* O.

3° *Une droite du corps, confondue avec l'axe de* A *si* A *n'est pas une glissière, reste constamment dans un plan qui ne dépend que de* $p - 3$ *paramètres.* O *est sur cette droite.*

3. Mouvements de seconde espèce pour la glissière plane.

1° A *est un rotoïde qui se déplace de façon qu'un plan perpendiculaire à son axe et entraîné avec lui ne dépende que de* $p - 1$ *paramètres.* P *est confondu avec ce plan.*

2° A *est une glissière qui se déplace de façon qu'un plan qui lui est parallèle et qui est entraîné avec elle ne dépende que de* $p - 1$ *paramètres.* P *est confondu avec ce plan.*

3° *Une droite du corps, confondue avec l'axe de* A *si* A *n'est pas une glissière, a une direction qui ne dépend que de* $p - 3$ *paramètres.* P *est perpendiculaire à cette droite.*

4° *On a* $p = 4$. *Une droite du corps, confondue avec l'axe de* A *si* A *n'est pas une glissière, a une direction fixe.* P *est quelconque.*

4. Mouvements de première espèce pour la glissière plane.

1° A *est un rotoïde perpendiculaire à* P *ou une glissière parallèle à* P.

2° *Le corps a un mouvement spécial simple ou complexe relatif à* A *et à un rotoïde perpendiculaire à* P *ou à une glissière parallèle à* P.

3° *Une droite du corps, confondue avec l'axe de* A *si* A *n'est pas une glissière, a une direction ne dépendant que de* $p - 2$ *paramètres.* P *est perpendiculaire à cette droite.*

4° *Une droite du corps, confondue avec l'axe de* A *si* A *n'est pas une glissière, a une direction ne dépendant que de* $p - 3$ *paramètres.* P *est parallèle à cette droite.*