ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

E. LACOUR

Formules elliptiques pour l'étude des mouvements de Poinsot

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 17 (1900), p. 283-294

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1900_3_17__283_0>

FORMULES ELLIPTIQUES

POUR

L'ÉTUDE DES MOUVEMENTS DE POINSOT,

PAR M. E. LACOUR,

PROFESSEUR ADJOINT A L'UNIVERSITÉ DE NANCY.

Je me propose, dans cette Note, de retrouver les formules pour la rotation d'un corps solide exprimées à l'aide des fonctions de Weierstrass et, en particulier, de reprendre, avec ces nouvelles notations, l'une des méthodes indiquées par M. Hermite [1] pour déduire des équations de l'herpolhodie les cosinus des angles que font, avec les axes fixes, les axes liés au corps.

1. Le problème peut être posé de la façon suivante :

Une surface du second ordre, à centre unique, mobile autour de son centre supposé fixe, roule et pivote sans glisser sur un plan fixe, de façon que la rotation instantanée varie proportionnellement au rayon du point de contact, c'est-à-dire que, si O est le centre fixe et m le point de contact avec le plan fixe (II), la rotation instantanée Ω est donnée par la formule

$$\Omega = f.om,$$

f désignant une constante.

Nous allons d'abord reprendre rapidement les calculs qui conduisent aux équations différentielles du problème, afin de rappeler la signification des constantes dont dépendent ces équations. Prenons pour

---

[1] HERMITE, *Sur quelques applications des fonctions elliptiques*, p. 35.

origine le point fixe O, pour axes fixes trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz, tels que Oz est la droite qui va de O au pied P de la perpendiculaire abaissée de O sur le plan (II), pour axes liés au corps les axes de symétrie de la quadrique. Soient x, y, z les coordonnées du *pôle* m dans le système mobile; p, q, r les projections de la rotation instantanée sur les axes de ce système; on a constamment par hypothèse

$$\frac{p}{x} = \frac{q}{y} = \frac{r}{z} = f. \tag{1}$$

Soit de plus

$$A x^2 + B y^2 + C z^2 = 1, \tag{2}$$

l'équation de la quadrique rapportée à ses axes Ox, Oy, Oz; le lieu du pôle m sur cette surface se trouve immédiatement en écrivant que la distance du point fixe au plan tangent en m est constante et égale à OP, ce qui donne

$$A^2 x^2 + B^2 y^2 + C^2 z^2 = D \qquad \left(D = \frac{1}{OP^2}\right). \tag{3}$$

La courbe définie par les équations (2) et (3) se nomme la *polhodie*.

Pour obtenir les équations différentielles qui donnent la loi du mouvement, il suffit d'exprimer que le pied P de la perpendiculaire abaissée de O sur le plan tangent en m a une position fixe dans l'espace. Les coordonnées du point P dans le système mobile sont $\frac{Ax}{D}$, $\frac{By}{D}$, $\frac{Cz}{D}$; en écrivant que la vitesse absolue de ce point est nulle et en tenant compte des relations (1), on trouve

$$\left\{\begin{aligned} A\frac{dx}{dt} + f(C - B)yz &= 0, \\ B\frac{dy}{dt} + f(A - C)zx &= 0, \\ C\frac{dz}{dt} + f(B - A)xy &= 0. \end{aligned}\right. \tag{4}$$

2. On appelle *herpolhodie* le lieu du pôle m sur le plan (II). Soient ρ et χ les coordonnées polaires du point m dans le plan (II) quand l'on

prend pour origine la projection P du centre fixe O sur ce plan. Cherchons les expressions de ρ et de χ en fonction du temps.

On voit d'abord que x^2, y^2, z^2 s'obtiendront en fonction linéaire de ρ^2, en résolvant les trois équations (¹)

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= \rho^2 + \frac{1}{D},\\ Ax^2 + By^2 + Cz^2 &= 1,\\ A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2 &= D,\end{aligned}\right.$$

dont la première exprime que $Om^2 = Pm^2 + \overline{OP}^2$ et dont les dernières sont les équations de la polhodie. On trouve

$$(6)\qquad x^2 = \frac{BC(C-B)}{\Delta}(\rho^2 - \mathrm{a}),\qquad y^2 = \frac{CA(A-C)}{\Delta}(\rho^2 - \mathrm{b}),$$

$$z^2 = \frac{AB(B-A)}{\Delta}(\rho^2 - \mathrm{c}),$$

en posant

$$\Delta = (B-C)(C-A)(A-B),\qquad \mathrm{a} = -\frac{(B-D)(C-D)}{BCD},$$

$$\mathrm{b} = -\frac{(C-D)(A-D)}{CAD},\qquad \mathrm{c} = -\frac{(A-D)(B-D)}{ABD}.$$

Cela posé, l'équation différentielle qui définit ρ en fonction de t s'obtient en différentiant la première des équations (5), ce qui donne

$$\rho\frac{d\rho}{dt} = x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} + z\frac{dz}{dt},$$

et, en remplaçant $x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ par leurs valeurs en fonction de ρ tirées des équations (5) et (6), il vient

$$\rho\frac{d\rho}{dt} = f\sqrt{(\mathrm{a}-\rho^2)(\mathrm{b}-\rho^2)(\mathrm{c}-\rho^2)},$$

puis, en multipliant les deux membres par 2 et faisant le changement

(¹) *Voir* APPELL, *Traité de Mécanique rationnelle*, t. II, p. 222 et suivantes.

de notation $f = \mu\sqrt{D}$,

$$\frac{d(\rho^2)}{dt} = \mu\sqrt{D}\sqrt{4(a-\rho^2)(b-\rho^2)(c-\rho^2)}. \tag{7}$$

L'équation différentielle qui définit l'angle polaire χ en fonction de t s'obtient en considérant les deux cônes lieux de l'axe instantané dans l'espace et dans le système mobile et en écrivant que le second cône roule sans glisser sur le premier ([1]). Il suffit pour cela, m' étant une position du pôle infiniment voisine du point m, d'égaler les deux expressions suivantes du volume du tétraèdre $OPmm'$ (multiplié par 6)

$$\frac{1}{\sqrt{D}}\rho^2 d\chi, \qquad \begin{vmatrix} \frac{Ax}{D} & \frac{By}{D} & \frac{Cz}{D} \\ x & y & z \\ \frac{dx}{dt} & \frac{dy}{dt} & \frac{dz}{dt} \end{vmatrix} dt.$$

Il est facile, au moyen des relations du paragraphe précédent, d'exprimer en fonction de ρ les éléments du déterminant, et l'on obtient ainsi l'équation différentielle

$$\rho^2\frac{d\chi}{dt} = \mu(\rho^2 + E) \qquad \text{où} \qquad E = \frac{(A-D)(B-D)(C-D)}{ABCD}. \tag{8}$$

Les équations différentielles (7) et (8) vont nous permettre d'exprimer ρ et χ en fonction de t.

3. Cherchons d'abord l'expression de ρ. Pour cela dans l'équation (7) faisons le changement de variable

$$\rho^2 = M^2(pv - pu),$$

u étant la nouvelle variable, M et v des constantes. On a d'abord

$$\left\{\begin{aligned} a-\rho^2 &= M^2(pu - e_\alpha), \\ b-\rho^2 &= M^2(pu - e_\beta), \\ c-\rho^2 &= M^2(pu - e_\gamma), \end{aligned}\right. \tag{9}$$

([1]) *Voir* une Note de M. Darboux à la fin du *Traité de Mécanique* de Despeyrous, t. II, p. 491.

avec

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{a} &= M^2(\wp v - e_\alpha),\\ \mathfrak{b} &= M^2(\wp v - e_\beta),\\ \mathfrak{c} &= M^2(\wp v - e_\gamma),\end{aligned}\right.$$

et l'équation (7) devient

$$-M^2\wp' u \frac{du}{dt} = \pm M^3 \mu\sqrt{D}\,\wp' u,$$

ou

$$\frac{du}{dt} = n, \qquad u = nt + \text{const.},$$

en posant

$$\mp M\mu\sqrt{D} = n \qquad \text{ou} \qquad M^2 = \frac{n^2}{D\mu^2}.$$

Dans ce qui suit, c'est u que nous prendrons comme variable et nous remplacerons M^2 par sa valeur en fonction de n.

L'expression cherchée de ρ^2 est

$$(11)\qquad \rho^2 = \frac{n^2}{D\mu^2}(\wp v - \wp u).$$

Nous connaissons déjà la valeur de $\wp v$, celle de $\wp'^2 v$ se déduit des relations (10) qu'on peut écrire

$$(12)\qquad \left\{\begin{aligned} \wp v - e_\alpha &= -\frac{\mu^2}{n^2}\frac{(B-D)(C-D)}{BC},\\ \wp v - e_\beta &= -\frac{\mu^2}{n^2}\frac{(C-D)(A-D)}{CA},\\ \wp v - e_\gamma &= -\frac{\mu^2}{n^2}\frac{(A-D)(B-D)}{AB},\end{aligned}\right.$$

on trouve de suite

$$\wp'^2 v = -4\frac{\mu^6}{n^6}\left[\frac{(A-D)(B-D)(C-D)}{ABC}\right]^2,$$

puis

$$(13)\qquad \wp' v = 2i\frac{\mu^3}{n^3}DE,$$

en se rappelant la valeur (8) de E et en choisissant convenablement le signe du second membre.

Pour obtenir l'expression de χ, remplaçons ρ^2 par sa valeur (11), dans l'équation

$$\frac{d\chi}{dt} = \mu + \frac{\mu E}{\rho^2},$$

équivalente à l'équation (8); il vient

$$\frac{d\chi}{dt} = \mu + \frac{\mu^2}{n^2}\frac{DE}{pv - pu},$$

ou, d'après l'expression (13) de $p'v$ et la valeur $du = n\,dt$,

$$2i\,d\chi = 2i\frac{\mu}{n}du + \frac{p'v\,du}{pv - pu}.$$

On intègre facilement, en tenant compte de la formule connue

$$\frac{p'v}{pv - pu} = \zeta(u+v) - \zeta(u-v) - 2\zeta v,$$

et, en passant des logarithmes aux nombres, on trouve l'égalité (¹)

$$e^{2i\chi} = \frac{\sigma(u+v)}{\sigma(u-v)} e^{2(lu+l')} \qquad \left(l = \frac{i\mu}{n} - \zeta v\right), \tag{14}$$

où l' désigne une constante d'intégration dont la forme sera précisée dans la suite.

Les formules (11) et (14) montrent que ρ^2 et $e^{2i\chi}$ sont des fonctions uniformes de u. Mais pour avoir l'expression de $x_1 + iy_1$, x_1 et y_1 désignant les coordonnées variables du pôle dans le système fixe, c'est le produit $\rho e^{i\chi}$ que l'on doit calculer : il est remarquable que ce dernier produit est aussi une fonction uniforme de u. En effet, en multipliant membre à membre les équations (11) et (14) on trouve

$$\rho^2 e^{2i\chi} = \frac{n^2}{D\mu^2}\frac{\sigma^2(u+v)}{\sigma^2 u\,\sigma^2 v} e^{2(lu+l')},$$

et par suite

$$x_1 + iy_1 = \frac{n}{\mu\sqrt{D}}\frac{\sigma(u+v)}{\sigma u\,\sigma v} e^{lu+l'}. \tag{15}$$

(¹) *Voir* GREENHILL, *Fonctions elliptiques*, p. 158.

4. Il faut maintenant préciser la détermination des quantités e_α, e_β, e_γ, des arguments u et v et de la constante d'intégration l'.

Les relations (12) jointes à l'égalité $e_\alpha + e_\beta + e_\gamma = 0$ permettent de déterminer les quatre inconnues e_α, e_β, e_γ et pv. On voit d'abord que e_α, e_β, e_γ sont réelles. Afin de reconnaître dans quel ordre les indices α, β, γ représentent les nombres 1, 2, 3, calculons les différences $e_\beta - e_\gamma$, $e_\gamma - e_\alpha$, $e_\alpha - e_\beta$ en nous servant des relations (12), il vient

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{n^2}{D\mu^2}(e_\beta - e_\gamma) &= -\frac{(B-C)(A-D)}{ABC},\\ \frac{n^2}{D\mu^2}(e_\gamma - e_\alpha) &= -\frac{(C-A)(B-D)}{ABC},\\ \frac{n^2}{D\mu^2}(e_\alpha - e_\beta) &= -\frac{(A-B)(C-D)}{ABC}. \end{aligned}\right.$$

On voit alors que le choix des indices

$$\alpha = 1, \qquad \beta = 3, \qquad \gamma = 2,$$

a pour effet de supposer les quantités

$$A, \quad D, \quad B, \quad C,$$

rangées par ordre de grandeur, c'est-à-dire de faire correspondre la lettre B à l'axe moyen et la lettre A à l'axe qui est l'essieu de la polhodie. C'est de cette façon que nous choisirons les indices, pour rester en concordance avec Halphen (*Fonctions elliptiques*, t. II, p. 51), et nous poserons

$$\omega_\alpha = \omega, \qquad \omega_\beta = \omega', \qquad \omega_\gamma = \omega'' \qquad (\omega'' = \omega + \omega').$$

Pour l'argument v, on sait déjà que pv est réel, $p'v$ purement imaginaire; les relations (12) montrent, en outre, que pv est compris entre e_α et e_γ, c'est-à-dire entre e_1 et e_2. Donc, si l'on pose

$$v = \omega + iv',$$

ω étant la demi-période réelle, v' sera réel.

Pour l'argument u, on sait déjà que $u = nt +$ const., puis l'expression (11) de ρ^2 montre que pu doit être réel et plus petit que pv, par suite plus petit que e_1. Donc, $u - \omega'$ est réel.

Il nous est facile maintenant de préciser la forme de la constante d'intégration l'. Pour cela, reportons-nous à l'équation (14) et écrivons-la :

$$e^{2i\chi} = -\mathrm{N}^2 \frac{\sigma(u+v)}{\sigma(u-v)} e^{2l(u-\omega')},$$

N^2 étant un facteur constant qu'on peut toujours supposer réel et positif, car si l'on fait tourner les axes ox_1, oy_1 d'un angle χ_0, $e^{2i\chi}$ est remplacé par $e^{2i(\chi-\chi_0)}$, et l'on peut se servir de l'indéterminée χ_0 pour obtenir le résultat énoncé.

La valeur de N se déduit de l'égalité évidente

$$e^{2i\chi} e^{-2i\chi} = 1,$$

ce qui donne

$$\mathrm{N} = e^{-\eta'(v-\omega)}.$$

La forme de la constante d'intégration l' est donc complètement définie et nous pouvons remplacer les égalités (14) et (15) par les suivantes :

$$(17) \quad \left\{ \begin{aligned} e^{2i\chi} &= -\mathrm{G}^2 \frac{\sigma(u+v)}{\sigma(u-v)}, \\ x_1 + iy_1 &= \frac{ni}{\mu\sqrt{\mathrm{D}}} \mathrm{G} \frac{\sigma(u+v)}{\sigma u\, \sigma v}, \end{aligned} \right. \qquad \mathrm{G} = e^{\left(\frac{i\mu}{n} - \zeta v\right)(u-\omega') - \eta'(v-\omega)}.$$

L'expression de $x_1 - iy_1$ se déduit de la précédente en y changeant i en $-i$; par ce changement,

$$u, \qquad v, \qquad \mathrm{G}$$

deviennent

$$u - 2\omega', \quad 2\omega - v, \quad \frac{1}{\mathrm{G}} e^{-2\eta(u-\omega') - 2\eta'(v-\omega)}.$$

On trouve alors

$$x_1 - iy_1 = -\frac{ni}{\mu\sqrt{\mathrm{D}}} \frac{1}{\mathrm{G}} \frac{\sigma(u-v)}{\sigma u\, \sigma v}.$$

Comme vérification, si l'on forme le produit $(x_1 + iy_1)(x_1 - iy_1)$, on trouve bien l'expression (11) de ρ^2.

5. *Cosinus des angles que font, avec les axes fixes, les axes liés au corps.* — Soient a, b, c les cosinus directeurs de ox; a', b', c' ceux de oy; a'', b'', c'' ceux de oz. On obtient de suite les cosinus c, c', c''

des angles que fait oz avec les axes mobiles en remarquant que ce sont les cosinus directeurs de la perpendiculaire OP abaissée du point O sur le plan tangent au point x, y, z de la quadrique

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1,$$

de sorte que l'on a

$$\frac{c}{Ax} = \frac{c'}{By} = \frac{c''}{Cz} = \frac{1}{\sqrt{D}}.$$

Dans l'expression correspondante de c^2, remplaçons x^2 par sa valeur en fonction de u, tirée des équations (6) et (11),

$$(18) \qquad c^2 = \frac{A^2}{D} x^2 = \frac{n^2}{\mu^2} \frac{A^2}{D^2} \frac{BC(B-C)}{\Delta} (\wp u - e_\alpha).$$

Or, des relations (12) et (16), on tire

$$(19) \qquad \frac{n^2}{\mu^2 D^2} \frac{(e_\alpha - e_\beta)(e_\alpha - e_\gamma)}{\wp v - e_\alpha} = \frac{(A-B)(C-A)}{A^2 BC}.$$

Multiplions membre à membre les égalités (18) et (19), il vient

$$c^2 \frac{(e_\alpha - e_\beta)(e_\alpha - e_\gamma)}{\wp v - e_\alpha} = \wp u - e_\alpha,$$

ou encore

$$(20) \qquad c^2 = \frac{(\wp u - e_\alpha)(\wp v - e_\alpha)}{(e_\alpha - e_\beta)(e_\alpha - e_\gamma)} = \frac{\wp u - e_\alpha}{\wp(v - \omega_\alpha) - e_\alpha}.$$

Le second membre de la formule (20) est le carré d'une fonction uniforme : cette fonction nous donne la valeur de c. Nous la faisons suivre des valeurs de c', c'' obtenues par des calculs analogues :

$$(21) \qquad \left\{ \begin{aligned} c &= \frac{1}{\sqrt{(e_\alpha - e_\beta)(e_\alpha - e_\gamma)}} \frac{\sigma_\alpha u \, \sigma_\alpha v}{\sigma u \, \sigma v}, \\ c' &= \frac{1}{\sqrt{(e_\beta - e_\gamma)(e_\beta - e_\alpha)}} \frac{\sigma_\beta u \, \sigma_\beta v}{\sigma u \, \sigma v}, \\ c'' &= \frac{1}{\sqrt{(e_\gamma - e_\alpha)(e_\gamma - e_\beta)}} \frac{\sigma_\gamma u \, \sigma_\gamma v}{\sigma u \, \sigma v}. \end{aligned} \right.$$

6. Des expressions de c, c', c'' et de $x_1 + iy_1$, formules (21) et (17), nous allons tirer en même temps $a + ib$, $a' + ib'$, $a'' + ib''$, en résolvant

les trois équations, linéaires par rapport à ces inconnues,

$$(22)\quad \begin{cases} c(a+ib)+c'(a'+ib')+c''(a''+ib'')=0, \\ i(a+ib)-c''(a'+ib')+c'(a''+ib'')=0, \\ x(a+ib)+y(a'+ib')+z(a''+ib'')=0, x_1+iy_1; \end{cases}$$

les deux premières sont des conséquences des relations d'orthogonalité et la troisième s'obtient en projetant sur ox_1, puis sur oy_1, le contour des coordonnées x, y, z du pôle m. Des deux premières on déduit

$$(23)\quad \begin{cases} a'+ib'=(a+ib)\dfrac{cc'-ic''}{c^2-1}, \\ a''+ib''=(a+ib)\dfrac{cc''+ic'}{c^2-1}, \end{cases}$$

et en portant ces valeurs dans la troisième équation (22) :

$$(24)\quad \frac{(a+ib)}{c^2-1}[x(c^2-1)+y(cc'-ic'')+z(cc''+ic')]=x_1+iy_1.$$

Simplifions, en tenant compte des relations

$$\frac{c}{\mathrm{A}x}=\frac{c'}{\mathrm{B}y}=\frac{c''}{\mathrm{C}z}=\frac{1}{\sqrt{\mathrm{D}}}, \qquad cx+c'y+c''z=\frac{1}{\sqrt{\mathrm{D}}},$$

il vient

$$(25)\quad \frac{a+ib}{c^2-1}\left[c\left(\frac{1}{\mathrm{D}}-\frac{1}{\mathrm{A}}\right)+ic'c''\left(\frac{1}{\mathrm{C}}-\frac{1}{\mathrm{B}}\right)\right]=\frac{x_1+iy_1}{\sqrt{\mathrm{D}}}.$$

Les valeurs des coefficients $\frac{1}{\mathrm{D}}-\frac{1}{\mathrm{A}}$, $\frac{1}{\mathrm{C}}-\frac{1}{\mathrm{B}}$ en fonction des constantes elliptiques résultent des égalités suivantes, conséquences des relations (12) et (16) :

$$\left(\frac{1}{\mathrm{D}}-\frac{1}{\mathrm{A}}\right)\left(\frac{1}{\mathrm{C}}-\frac{1}{\mathrm{B}}\right)=\frac{n^2}{\mu^2\mathrm{D}^2}(e_\beta-e_\gamma),$$

$$\frac{\dfrac{1}{\mathrm{D}}-\dfrac{1}{\mathrm{A}}}{\dfrac{1}{\mathrm{C}}-\dfrac{1}{\mathrm{B}}}=-\frac{(pv-e_\beta)(pv-e_\gamma)}{(e_\beta-e_\gamma)(pv-e_\alpha)},$$

qui donnent

$$\frac{1}{\mathrm{D}}-\frac{1}{\mathrm{A}}=\frac{ni}{\mu\mathrm{D}}\frac{\sigma_\beta v\,\sigma_\gamma v}{\sigma v\,\sigma_\alpha v}, \qquad \frac{1}{\mathrm{C}}-\frac{1}{\mathrm{B}}=\frac{ni}{\mu\mathrm{D}}(e_\beta-e_\gamma)\frac{\sigma_\alpha v\,\sigma v}{\sigma_\beta v\,\sigma_\gamma v}.$$

Il est alors facile de calculer la valeur du coefficient de $\frac{a+ib}{c^2-1}$ dans l'équation (25), on trouve

$$(26)\qquad c\left(\frac{1}{D}-\frac{1}{A}\right)+ic'c''\left(\frac{1}{C}-\frac{1}{B}\right) = \frac{ni}{\mu D}\,\frac{1}{\sqrt{(e_\alpha-e_\beta)(e_\alpha-e_\gamma)}}\,\frac{\sigma u\,\sigma_\alpha u\,\sigma_\beta v\,\sigma_\gamma v+\sigma v\,\sigma_\alpha v\,\sigma_\beta u\,\sigma_\gamma u}{\sigma^2 u\,\sigma^2 v},$$

ou, en transformant le second membre d'après une formule connue [WEIERSTRASS, *Formules et propositions* (trad. Padé), p. 51, formule (8)],

$$(27)\qquad c\left(\frac{1}{D}-\frac{1}{A}\right)+ic'c''\left(\frac{1}{C}-\frac{1}{B}\right)=\frac{ni}{\mu D}\,\frac{1}{\sqrt{(e_\alpha-e_\beta)(e_\alpha-e_\gamma)}}\,\frac{\sigma_\alpha(u-v)\,\sigma(u+v)}{\sigma^2 u\,\sigma^2 v},$$

D'autre part, on a, formule (20) :

$$(28)\qquad c^2-1=\frac{pu-p(v-\omega_\alpha)}{p(v-\omega_\alpha)-e_\alpha}=\frac{1}{(e_\alpha-e_\beta)(e_\alpha-e_\gamma)}\,\frac{\sigma_\alpha(v-u)\,\sigma_\alpha(v+u)}{\sigma^2 u\,\sigma^2 v}.$$

En tenant compte des égalités (27), (28) et en remplaçant, dans l'équation (25), x_1+iy_1 par sa valeur (17), on trouve $a+ib$, puis les équations (23) donnent $a'+ib'$ et $a''+ib''$:

$$(29)\qquad \left\{\begin{aligned} a+ib &= \frac{G}{\sqrt{(e_\alpha-e_\beta)(e_\alpha-e_\gamma)}}\,\frac{\sigma_\alpha(u+v)}{\sigma u\,\sigma v},\\ a'+ib' &= \frac{G}{\sqrt{(e_\beta-e_\alpha)(e_\beta-e_\gamma)}}\,\frac{\sigma_\beta(u+v)}{\sigma u\,\sigma v}, \qquad G=e^{\left(\frac{i\mu}{n}-\zeta v\right)(u-\omega')+\eta'(v-\omega)}.\\ a''+ib'' &= \frac{G}{\sqrt{(e_\gamma-e_\alpha)(e_\gamma-e_\beta)}}\,\frac{\sigma_\gamma(u+v)}{\sigma u\,\sigma v},\end{aligned}\right.$$

Enfin, en changeant i en $-i$, et en appliquant les formules relatives à l'addition d'une période

$$(30)\qquad \left\{\begin{aligned} a-ib &= -\frac{1}{G}\,\frac{1}{\sqrt{(e_\alpha-e_\beta)(e_\alpha-e_\gamma)}}\,\frac{\sigma_\alpha(u-v)}{\sigma u\,\sigma v},\\ a'-ib' &= -\frac{1}{G}\,\frac{1}{\sqrt{(e_\beta-e_\alpha)(e_\beta-e_\gamma)}}\,\frac{\sigma_\beta(u-v)}{\sigma u\,\sigma v},\\ a''-ib'' &= -\frac{1}{G}\,\frac{1}{\sqrt{(e_\gamma-e_\alpha)(e_\gamma-e_\beta)}}\,\frac{\sigma_\gamma(u-v)}{\sigma u\,\sigma v}.\end{aligned}\right.$$

Les formules (21), (29), (30) donnent pour les neuf cosinus des valeurs qui concordent avec celles qui sont indiquées par Halphen (*Fonctions elliptiques,* t. II, p. 3).

Comme vérification, assurons-nous que les valeurs calculées pour $a+ib$, $a-ib$ et c satisfont à la relation

$$(a+ib)(a-ib)+c^2=1,$$

nous sommes conduits à la formule

$$\sigma_\alpha(u+v)\,\sigma_\alpha(u-v)-\sigma_\alpha^2 u\,\sigma_\alpha^2 v=-(e_\alpha-e_\beta)(e_\alpha-e_\gamma)\sigma^2 u\,\sigma^2 v.$$

Or cette formule se trouve dans les *Formules et propositions de Weierstrass*, p. 51 [formule (3)].