ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

ÉMILE COTTON

Sur les invariants différentiels de quelques équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 17 (1900), p. 211-244

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1900_3_17__211_0>

SUR

LES INVARIANTS DIFFÉRENTIELS

DE

QUELQUES ÉQUATIONS LINÉAIRES

AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU SECOND ORDRE,

PAR M. ÉMILE COTTON,

PROFESSEUR AU LYCÉE DE TOULOUSE.

Introduction.

Je désigne par $\mathcal{F}(u)$ une expression de la forme suivante :

$$\mathcal{F}(u) = \sum_{ij} B_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + 2\sum_k C_k \frac{\partial u}{\partial x_k} + D u.$$

u représente une fonction arbitraire des n variables x; les coefficients B_{ij}, C_k, D peuvent eux-mêmes dépendre de ces variables, mais je suppose essentiellement que le déterminant $|B_{ij}|$ n'est pas identiquement nul.

Soit de même $\mathcal{F}'(u')$ une expression analogue relative à la fonction u' des n variables x'.

Je me propose, dans ce travail, de résoudre les trois problèmes suivants :

I. *Les expressions $\mathcal{F}(u)$, $\mathcal{F}'(u')$ étant données, chercher un changement de variables exprimant les x en fonction des x' et donnant lieu aux identités*

$$u = u', \qquad \mathcal{F}(u) = \mathcal{F}'(u').$$

II. *Les expressions $\mathcal{F}(u)$, $\mathcal{F}'(u')$ étant données, chercher un change-*

ment de variables et une fonction λ *des variables* x *donnant lieu aux identités*

$$\lambda u = u', \qquad \frac{\mathcal{F}(\lambda u)}{\lambda} = \mathcal{F}'(u').$$

III. *Les expressions* $\mathcal{F}(u)$, $\mathcal{F}'(u')$ *étant données, chercher un changement de variables et deux fonctions* ρ, λ, *des variables* x *donnant lieu aux identités*

$$\lambda u = u', \qquad \rho\,\frac{\mathcal{F}(\lambda u)}{\lambda} = \mathcal{F}'(u').$$

A chacun de ces trois problèmes correspond une classification des expressions $\mathcal{F}(u)$; le dernier donne, en outre, une classification des équations

$$\mathcal{F}(u) = 0.$$

Ces problèmes reviennent à la détermination de certains invariants différentiels des expressions $\mathcal{F}(u)$. On ramène cette détermination à la recherche des invariants différentiels du système formé par une *variété* x, ds^2 et des fonctions des variables x et de leurs différentielles. Pour cela, on considère l'ensemble des termes du second ordre de $\mathcal{F}(u)$ comme le commencement du développement d'un paramètre différentiel du second ordre, ce qui détermine complètement la variété x, ds^2 attachée à l'expression $\mathcal{F}(u)$.

Je donne, au début, l'expression de quelques invariants différentiels du système formé par une variété x, ds^2, et une expression de Pfaff $l(dx)$ données. Le nom de *paramètres différentiels de l'expression de Pfaff* m'a semblé commode pour désigner ces invariants différentiels, fort utiles pour la suite.

Je montre ensuite que les systèmes différentiels, dont dépend la solution des problèmes posés, ne diffèrent de ceux qui interviennent dans l'application ou la représentation conforme de deux variétés, que par l'adjonction d'équations nouvelles. D'ailleurs, cette adjonction facilite, en général, l'étude des systèmes différentiels. Les résultats que l'on connaît sur les variétés à deux ou trois dimensions permettent de considérer les trois problèmes posés comme entièrement résolus dans les cas où le nombre des variables x est deux ou trois. Ces cas sont les plus importants.

La méthode suivie s'applique à la recherche des transformations I, II, III, laissant invariante une expression donnée $\mathcal{F}(u)$. Il suffit de prendre pour $\mathcal{F}'(u')$ l'expression déduite de $\mathcal{F}(u)$ en remplaçant partout x par x'. Les problèmes I, II, III sont alors toujours possibles, et les équations du changement de variables intervenant dans chacun d'eux sont alors celles d'un groupe G toujours fini, à une exception bien connue près, et en général discontinu.

Il y a donc lieu de classer à part les expressions $\mathcal{F}(u)$ telles que G soit continu. J'indique une méthode pour construire des types canoniques correspondant à ces classes remarquables; et j'effectue cette construction dans le cas de deux variables. Je retrouve et je complète ainsi des résultats dus à M. Lie.

J'ai particulièrement insisté, au cours de ce Travail, sur les expressions $\mathcal{F}(u)$ à deux variables [1], qui se présentent à la fois en Géométrie et en Physique mathématique. Les résultats indiqués à leur sujet ne sont pas tous nouveaux; mais la méthode suivie pour cette étude n'avait pas été développée jusqu'ici, à ma connaissance, du moins.

L'étude des équations

$$(a) \qquad \mathcal{F}(u) = \frac{\partial u}{\partial t}$$

[t désigne une variable ne figurant pas dans les coefficients de $\mathcal{F}(u)$] et des équations

$$(b) \qquad \mathcal{F}(u) = 0$$

a été suggérée par la Théorie de la chaleur. Bien qu'il ne soit nullement question, dans ce Mémoire, de l'intégration des équations (a) et (b) [2], je dirai un mot à son sujet, pour terminer cette Introduction.

On peut d'abord se proposer la *construction effective* (par des séries, par exemple) des solutions des équations (a) et (b) satisfaisant à des conditions de continuité et des conditions limites déterminées. Ce

---

(1) Quelques résultats relatifs à ces expressions ont fait l'objet de deux Notes aux *Comptes rendus*, 30 novembre 1896 - 5 avril 1897.

(2) *Voir*, pour cette question et pour l'historique des nombreux travaux qui lui ont été consacrés, le Mémoire de M. Le Roy : *Sur l'intégration des équations de la chaleur* (*Annales de l'École Normale*, 3e série, t. XIV et XV; 1897-1898).

problème n'a été traité que pour des expressions $\mathcal{F}(u)$ et des domaines particulièrement simples. L'étude des classes remarquables d'expressions $\mathcal{F}(u)$, signalées plus haut, m'a conduit à l'étude de cas nouveaux où le problème semble possible. C'est là un point sur lequel j'espère revenir plus tard.

On peut, en second lieu, se proposer d'établir l'*existence de solutions* des équations (a) et (b) satisfaisant à des conditions convenablement choisies. A ce point de vue, l'étude des équations précédentes a donné des résultats fort intéressants pour certains types spéciaux d'expressions $\mathcal{F}(u)$ à deux ou trois variables. Mais on verra, au cours de ce Travail (n[os] 14 et 16), que si une expression $\mathcal{F}(u)$ à deux variables peut toujours être ramenée par des transformations I, II ou III à ces types spéciaux, il n'en est plus de même, en général, pour une expression $\mathcal{F}(u)$ à trois variables; l'étude des équations (a) et (b), correspondant au cas général, est donc encore à faire.

Paramètres différentiels.

1. Nous appellerons *variété à n dimensions* l'ensemble de n variables x_i, et d'une forme quadratique de leurs différentielles, à discriminant différent de zéro, le ds^2 de la variété. Nous supposerons connues les notions principales relatives aux invariants, aux covariants, aux paramètres différentiels d'une variété [1]. Nous rappellerons seulement l'expression des paramètres différentiels des deux premiers ordres.

Soient

$$ds^2 = \sum_{ij} a_{ij}\,dx_i\,dx_j, \qquad a_{ij} = a_{ji} \tag{1}$$

le ds^2 de la variété, Δ son discriminant, supposé différent de zéro, A_{ij} le coefficient de a_{ij} dans le développement de Δ. Soient u, v deux fonctions des variables x; le *paramètre différentiel du premier ordre de la*

---

[1] Ces notions sont résumées dans ma Thèse : *Sur les variétés à trois dimensions*, insérée aux *Annales de Toulouse*, 2e série, t. I; 1899. Les renvois à ce Travail seront désignés, dans la suite, par le mot : *Thèse*.

fonction u par rapport à ds^2 a pour expression

$$\Delta u = \sum_{ij} \frac{A_{ij}}{\Delta} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j}. \tag{2}$$

Le *paramètre différentiel mixte* (du premier ordre) *des deux fonctions u, v* par rapport à ds^2 est

$$\Delta(u, v) = \sum_{ij} \frac{A_{ij}}{\Delta} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j}. \tag{3}$$

Le *paramètre différentiel du second ordre* [1] de la fonction u par rapport à ds^2 est

$$\Delta_2 u = \Delta^{-\frac{1}{2}} \sum_{ij} \frac{\partial \left(A_{ij} \Delta^{-\frac{1}{2}} \dfrac{\partial u}{\partial x_j} \right)}{\partial x_i}. \tag{4}$$

Soient f et φ deux fonctions des variables u et v, considérées elles-mêmes comme fonctions des variables x; on a

$$\Delta f = \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 \Delta u + 2 \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial v} \Delta(u, v) + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2 \Delta v, \tag{5}$$

$$\Delta(f, \varphi) = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial u} \Delta u + \left(\frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right) \Delta(u, v) + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial \varphi}{\partial v} \Delta v, \tag{6}$$

$$\Delta_2 f = \frac{\partial f}{\partial u} \Delta_2 u + \frac{\partial f}{\partial v} \Delta_2 v + \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \Delta u + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \Delta(u, v) + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \Delta v. \tag{7}$$

2. Nous nous servirons également des invariants différentiels du système obtenu en adjoignant à ds^2 une expression de Pfaff [2].

Soit

$$l(dx) = \sum_i l_i dx_i, \tag{8}$$

une pareille expression. Égalons à zéro le discriminant de la forme quadratique

$$-\lambda\, ds^2 + [l(dx)]^2.$$

---

(1) Il existe d'autres paramètres différentiels du second ordre; mais nous n'utiliserons que celui donné par l'expression (4).

(2) Quelques-uns de ces résultats ont été déjà indiqués par M. Ricci : *Résumé de quelques travaux*, etc. (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 2e série, t. XVI; 1892).

L'équation en λ obtenue admet une seule racine non nulle; et cette racine est évidemment un invariant différentiel du système ds^2, $l(dx)$. Nous désignerons par $\Delta(l)$ cette racine, dont l'expression est :

$$\Delta(l) = \sum_{ij} \frac{A_{ij}}{\Delta} l_i l_j, \tag{9}$$

et nous l'appellerons *paramètre différentiel du premier ordre de l'expression* $l(dx)$. Si $l(dx)$ est la différentielle d'une fonction u, l'expression (9) donne bien le paramètre différentiel Δu.

Adjoignons à ds^2 deux expressions de Pfaff

$$l^1(dx) = \sum_i l_i^1 \, dx_i, \qquad l^2(dx) = \sum l_i^2 \, dx_i,$$

et formons le paramètre différentiel (9) de l'expression

$$l^1(dx) + \theta l^2(dx),$$

où θ est considéré comme une constante. Développons suivant les puissances de θ, et dans le résultat obtenu considérons le coefficient de 2θ :

$$\Delta[(l^1), (l^2)] = \sum_{ij} \frac{A_{ij}}{\Delta} l_i^1 l_j^2. \tag{10}$$

Ce coefficient est un invariant différentiel du système ds^2, $l^1(dx)$, $l^2(dx)$. Nous l'appellerons *paramètre différentiel mixte des deux expressions* $l^1(dx)$, $l^2(dx)$. En général, nous supposerons que $l^2(dx)$ est la différentielle d'une fonction u; l'expression précédente devient alors le *paramètre différentiel mixte d'une expression de Pfaff* $l(dx)$ *et d'une fonction* u.

$$\Delta[(l), u] = \sum_{ij} \frac{A_{ij}}{\Delta} l_i \frac{\partial u}{\partial x_j}. \tag{11}$$

Ce paramètre différentiel est une fonction linéaire des dérivées de u. Réciproquement, soit :

$$Xu = \sum_j b_j \frac{\partial u}{\partial x_j}, \tag{12}$$

une forme linéaire donnée des dérivées de u. On peut toujours déterminer une expression de Pfaff $l(dx)$ telle que l'on ait

$$Xu = \Delta[(l), u]$$

et cette détermination n'est possible que d'une seule façon. Il suffit de prendre

$$(13) \qquad \begin{cases} l(dx) = \sum_i l_i\, dx_i, \\ l_i = \sum_j a_{ij}\, b_j. \end{cases}$$

Signalons enfin la formule suivante, où v désigne une fonction des variables x :

$$(14) \qquad \Delta[(l), uv] = v\,\Delta[(l), u] + u\,\Delta[(l), v].$$

3. Nous définirons encore un invariant différentiel du système $ds^2, l(dx)$, analogue au paramètre différentiel du second ordre (4) d'une fonction u.

On sait (¹) qu'au système $ds^2, l(dx)$ est attaché un covariant bilinéaire, à deux systèmes de différentielles, d, δ

$$(15) \qquad \psi(dx, \delta x) = \sum_{ij} l_{ij}\, dx_i\, \delta x_j,$$

où

$$l_{ij} = \frac{\partial l_i}{\partial x_j} - \sum_\lambda \begin{Bmatrix} ij \\ \lambda \end{Bmatrix} l_\lambda,$$

$\begin{Bmatrix} ij \\ \lambda \end{Bmatrix}$ désignant les symboles à trois indices de seconde espèce, introduits par Christoffel. Comme

$$\sum_j \frac{\partial ds^2}{\partial dx_j}\, \delta x_j = \sum a_{ij}\, dx_i\, \delta x_j$$

est aussi un covariant de ds^2, les fonctions symétriques des racines de l'équation en λ, obtenue en égalant à zéro le discriminant de la forme bilinéaire

$$\lambda \sum_j \frac{\partial ds^2}{\partial dx_j}\, \delta x_j + \psi(dx, \delta x),$$

sont des invariants du système $ds^2, l(dx)$. Nous utiliserons seulement

(¹) *Thèse*, n° 4.

le suivant

$$\Delta_2(l) = \sum_{ij} \frac{A_{ij}}{\Delta} \frac{\partial l_i}{\partial x_j} - \sum_{ij\lambda} \frac{A_{ij}}{\Delta} \begin{Bmatrix} ij \\ \lambda \end{Bmatrix} l_\lambda,$$

que nous appellerons *paramètre différentiel du second ordre* de l'expression $l(dx)$.

A l'aide des identités relatives aux symboles $\begin{Bmatrix} ij \\ \lambda \end{Bmatrix}$, on peut transformer [1] l'expression précédente dans la suivante :

$$(15) \qquad \Delta_2(l) = \Delta^{-\frac{1}{2}} \sum_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(A_{ij} \Delta^{-\frac{1}{2}} l_j\right)$$

tout à fait analogue à l'expression (4).

D'ailleurs si $l(dx)$ est la différentielle d'une fonction u, $\Delta_2(l)$ se réduit à $\Delta_2 u$.

Problème I.

4. Soit

$$(16) \qquad \mathcal{F}(u) = \sum_{ij} B_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_k C_k \frac{\partial u}{\partial x_k} + Du,$$

une fonction linéaire et homogène d'une fonction u des n variables x, et de ses dérivées des deux premiers ordres. Nous pouvons supposer les coefficients B_{ij} et B_{ji} égaux. En outre nous supposerons toujours que *le déterminant*

$$B = \begin{vmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1n} \\ B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{n1} & B_{n2} & \dots & B_{nn} \end{vmatrix}$$

n'est pas identiquement nul.

Il est alors possible, et d'une seule manière, de *déterminer un ds^2 tel que le paramètre différentiel $\Delta_2 u$ correspondant ait en commun, avec l'expression précédente, l'ensemble des termes du second ordre.* En conservant les notations du n° 1, on voit qu'il faut prendre

$$\frac{A_{ij}}{\Delta} = B_{ij},$$

---

(1) Les calculs sont identiques à ceux qui concernent la transformation du paramètre différentiel du second ordre $\Delta_2 u$, et qui sont exposés par M. Bianchi à la page 45 de ses *Lezioni di Geometria differenziale*.

ce qui donne

$$(17)\qquad ds^2 = -\frac{1}{B}\begin{vmatrix} B_{11} & \dots & B_{1n} & dx_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{n1} & \dots & B_{nn} & dx_n \\ dx_1 & \dots & dx_n & 0 \end{vmatrix} = \sum_{ij} a_{ij}\, dx_i\, dx_j.$$

Il résulte de là que l'on pourra toujours calculer des coefficients b_k tels que l'expression $\mathcal{F}(u)$ prenne la forme

$$\mathcal{F}(u) = \Delta_2 u + 2\sum_k b_k \frac{\partial u}{\partial x_k} + c u$$

(on prendra $c = D$).

En transformant la seconde somme, comme il a été dit au n° 2, nous voyons enfin que l'on peut écrire

$$(18)\qquad \mathcal{F}(u) = \Delta_2 u + 2\Delta[(l), u] + cu,$$

$l(dx)$ désignant une expression de Pfaff bien déterminée.

Nous dirons que la forme (18) est la *forme type* de l'expression $\mathcal{F}(u)$; et que ds^2, $l(dx)$, c sont *les invariants différentiels de* $\mathcal{F}(u)$ *relatifs au problème I.*

Dans le Tableau suivant, nous donnons les expressions de ds^2, $l(dx)$ et c pour une expression $\mathcal{F}(u)$ à deux variables.

TABLEAU I.

$$\mathcal{F}(u) = B_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + 2B_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + B_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + 2C_1\frac{\partial u}{\partial x_1} + 2C_2\frac{\partial u}{\partial x_2} + D u,$$

$$ds^2 = \frac{B_{22}dx_1^2 - 2B_{12}dx_1 dx_2 + B_{11}dx_2^2}{B_{11}B_{22} - B_{12}^2},$$

$$\begin{aligned} l(dx) = {} & \frac{1}{4} d\log(B_{11}B_{22} - B_{12}^2) \\ & + \frac{2(B_{22}C_1 - B_{12}C_2) + B_{12}\left(\dfrac{\partial B_{12}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial B_{22}}{\partial x_2}\right) - B_{22}\left(\dfrac{\partial B_{11}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial B_{12}}{\partial x_2}\right)}{2(B_{11}B_{22} - B_{12}^2)} dx_1 \\ & + \frac{2(B_{11}C_2 - B_{12}C_1) + B_{12}\left(\dfrac{\partial B_{12}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial B_{11}}{\partial x_1}\right) - B_{11}\left(\dfrac{\partial B_{22}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial B_{12}}{\partial x_1}\right)}{2(B_{11}B_{22} - B_{12}^2)} dx_2 \\ = {} & l_1 dx_1 + l_2 dx_2. \end{aligned}$$

$$c = D.$$

5. Une expression $\mathfrak{F}(u)$ est entièrement définie par la variété x, ds^2, l'expression de Pfaff $l(dx)$ et la fonction c correspondante. Effectuons un changement de variables; désignons par $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ les nouvelles variables, par u' ce que devient u, par $\mathfrak{F}'(u')$ ce que devient $\mathfrak{F}(u)$. Ramenons $\mathfrak{F}'(u')$ à la forme type; soient x', ds'^2, $l'(dx')$, c' la variété, l'expression de Pfaff et la fonction correspondantes.

Il est bien évident que le changement de variables réalise l'application des variétés x, ds^2 et x', ds'^2, et transforme en outre $l(dx)$ en $l'(dx')$, et c en c'. Il sera souvent plus commode, pour obtenir $\mathfrak{F}'(u')$, de calculer d'abord ds'^2, $l'(dx')$ et c' au lieu d'effectuer directement le changement de variables.

Ce qui précède donne la solution du problème I de l'Introduction :

Étant données deux expressions $\mathfrak{F}(u)$, $\mathfrak{F}'(u')$, l'une relative aux n variables x, l'autre aux n variables x', chercher s'il existe un changement de variables les transformant l'une dans l'autre, et si le problème est possible, déterminer la transformation de passage.

Nous sommes évidemment ramenés à reconnaître si deux variétés x, ds^2; x', ds'^2 sont applicables, la transformation de passage devant en outre transformer l'une dans l'autre deux expressions de Pfaff $l(dx)$, $l'(dx')$, et deux fonctions c et c'.

Rappelons quelques résultats relatifs au problème de l'application de deux variétés x, ds^2; x', ds'^2.

Le degré de difficulté de ce problème dépend essentiellement de la nature du groupe de transformations de l'une des variétés (x, ds^2 par exemple) en elle-même.

Dans le cas le plus général où les équations de ce groupe ne contiennent aucune constante arbitraire, on peut toujours, par un nombre fini d'opérations effectuables, reconnaître si l'application est possible, et dans ce cas déterminer la transformation de passage ([1]).

Si le groupe précédent est continu, on peut, par une suite d'opérations effectuables, suivie dans certains cas de l'intégration d'un sys-

([1]) Pour ce qui concerne le problème de l'application des variétés, *voir* le Mémoire de Christoffel (*Journal de Crelle*, t. 70) pour le cas le plus général; voir *Thèse*, Chap. II, pour les autres cas. Si l'on ne considère que deux variables, se reporter au Chap. II du Livre VII, t. III des *Leçons sur la Théorie des surfaces* de M. Darboux.

tème différentiel relatif aux variables x de l'une seule des deux variétés, former un système Σ d'équations linéaires aux différentielles totales. Ces équations sont de la forme suivante :

$$(\Sigma) \qquad l_i(dx) = l'_i(dx'), \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Dans les premiers membres figurent les seules variables x, dans les seconds les seules variables x'. Il peut arriver que l'on ait à considérer des équations finies, formant avec les équations Σ un système S complètement intégrable, si les recherches précédentes n'ont pas montré l'impossibilité du problème. L'intégration de S donne alors la transformation de passage. D'ailleurs, on peut remplacer les équations aux différentielles totales Σ, par le système d'équations linéaires aux dérivées partielles équivalent.

6. Adjoignons maintenant aux variétés x, ds^2 ; x', ds'^2 les expressions de Pfaff $l(dx)$, $l'(dx')$, les fonctions c et c'. Si le groupe de transformations de l'une des variétés en elle-même est discontinu, on détermine, comme précédemment, la transformation de passage si elle existe, et l'on vérifie sans peine si elle transforme alors $l(dx)$ et c respectivement en $l'(dx')$ et c'.

Si ce groupe est continu, on adjoindra les équations

$$(19) \qquad l(dx) = l'(dx'), \qquad c = c'$$

aux équations de S; on ajoutera également les équations pouvant dériver des précédentes par des opérations effectuables de même nature que celles qui servent à former le système S. Bien entendu l'adjonction des équations (19) pourra se faire avant que le système S n'ait été entièrement constitué; il y aurait souvent avantage à procéder ainsi. De toute façon, on sera ramené, soit à reconnaître l'impossibilité du problème, soit à intégrer un système de même nature que S.

Les indications précédentes ([1]) montrent que les restrictions appor-

---

([1]) On pourrait examiner complètement les divers cas possibles, au sujet du problème I, lorsque le nombre n des variables est trois.

Dans ce cas, on pourra substituer à la forme $l(dx)$ attachée à $\mathcal{F}(u)$ l'expression $\Delta[(l), u]$ du n° 4 [et éviter ainsi le calcul de $l(dx)$]. On procéderait alors en suivant la méthode des n^{os} 8, 9, 10 de ma Thèse.

tées (n° 5) au problème de l'application de deux variétés ne le compliquent en aucune façon; et elles le simplifieront même souvent.

Nous pouvons donc considérer comme résolu le problème I.

Afin d'éviter, dans la suite, des répétitions inutiles, ajoutons maintenant que l'on traiterait d'une manière analogue le problème : Chercher une transformation de passage réalisant l'application de deux variétés données x, ds^2; x', ds'^2, et transformant des fonctions $F_i(x, dx, \delta x, \ldots)$ des variables x et de leurs différentielles dx, δx, ..., dans des fonctions homologues $F'_i(x', dx', \delta x', \ldots)$ des variables x' et de leurs différentielles. Ici encore, les restrictions ne pourront que simplifier le problème d'application.

Examinons enfin le cas particulier suivant, dont l'importance apparaîtra plus loin (n° 15) : Les variétés données x, ds^2; x', ds'^2 sont à deux dimensions; on adjoint à la première une fonction I des variables x, à la seconde une fonction I' des x'. Résumons la solution de ce problème bien connu [1].

On calcule les courbures totales J, J', des deux variétés. On calcule ensuite les paramètres différentiels de I et de J et leurs paramètres différentiels mixtes; on calcule les éléments homologues relatifs à I', J'; on obtient alors une série d'équations de la forme

$$\text{(E)} \qquad I_h = I'_h,$$

I_h dépendant de x_1, x_2 seuls, I'_h de x'_1, x'_2 seuls. Divers cas sont possibles :

1° Les équations (E) sont incompatibles, le problème est impossible;

2° Les équations (E) sont compatibles et déterminent le changement de variables;

3° Les équations (E) compatibles se réduisent à une seule;

4° Les équations E se réduisent à des identités.

Rappelons enfin que M. Darboux a montré que l'étude du système (E) se ramène à l'étude de cinq de ses équations convenablement choisies.

Dans les trois derniers cas le problème est possible, et de plus sa

---

(1) *Voir* DARBOUX, *Leçons sur la Théorie des surfaces*, t. III, p. 218.

solution comporte une constante arbitraire dans le cas 3°, trois dans le cas 4°.

Les cas 3° et 4° ne se peuvent présenter que si les variétés données admettent une ou trois transformations infinitésimales en elles-mêmes, ou, comme nous dirons encore, si les ds^2 sont de révolution ou à courbure constante. D'une façon plus précise, en supposant le problème possible :

Le cas 3° est caractérisé par un ds^2 de révolution, l'équation $\mathrm{I} = \text{const.}$ étant soit une identité, soit l'équation des parallèles d'une surface de révolution admettant ds^2 comme élément linéaire. La solution du problème posé exige une quadrature, en plus des opérations indiquées plus haut.

Le cas 4° est caractérisé par un ds^2 à courbure constante et par le fait que I est une constante. Le problème posé est identique à celui de l'application de deux variétés à courbure constante : si cette courbure est nulle, le problème s'achève par quadratures; sinon il faudra intégrer une équation de Riccati.

7. On pourra appliquer les méthodes précédentes (n° 5) à la recherche des changements de variables transformant une expression donnée $\mathcal{F}(u)$ en elle-même. On obtiendra ainsi les équations d'un groupe en général discontinu. Il est facile de construire des types canoniques pour les expressions $\mathcal{F}(u)$ auxquelles correspond un groupe continu. (Ce groupe est nécessairement fini.)

Tout revient évidemment à construire des types canoniques pour une variété x, ds^2, une expression de Pfaff $l(dx)$, une fonction c des variables x, lorsqu'un pareil ensemble admet un groupe continu G de transformations en lui-même. La méthode est identique à celle du problème analogue concernant une variété prise isolément ([1]). Résumons brièvement la marche à suivre.

On forme d'abord tous les types possibles de groupes Γ à n variables, dont les transformations infinitésimales $\mathrm{X}_i f$ sont formes linéaires indépendantes des dérivées de f. On construit, pour chacun de ces types, un système de n expressions de Pfaff $l_i(dx)$ invariantes vis-à-vis de Γ. On prendra alors pour ds^2 une forme quadratique des

([1]) *Voir* Thèse, Ch. IV et V.

$l_i(dx)$; pour $l(dx)$ une forme linéaire de ces mêmes expressions; les coefficients de ces deux formes seront pris fonctions des invariants de Γ (que l'on peut supposer connus); il en sera de même pour la fonction c. Enfin on simplifie les expressions obtenues au moyen des substitutions S changeant en lui-même l'ensemble des expressions $l_i(dx)$.

On classera ensuite les résultats obtenus, en cherchant dans quels cas les systèmes $x, ds^2, l(dx), c$ ainsi formés admettent un groupe G plus grand que Γ. Pour cette dernière recherche on utilisera les méthodes indiquées aux numéros précédents.

8. Les calculs peuvent être entièrement effectués, lorsque le nombre des variables est deux ou trois; nous allons donner ici les résultats relatifs au cas de deux variables.

Les groupes Γ du numéro précédent ont alors un ou deux paramètres; les groupes G en ont trois au plus. Nous donnons d'abord les transformations infinitésimales correspondant aux divers types possibles de groupes Γ, et les expressions $l_1(dx)$, $l_2(dx)$, ds^2, $l(dx)$, c, qui leur correspondent. Nous indiquons ensuite, pour chacun des groupes Γ à deux paramètres, les groupes G à trois paramètres qui lui correspondent. (La recherche analogue est inutile pour un groupe Γ à un paramètre, tout groupe continu admettant, en effet, des sous-groupes à deux paramètres.)

Quelques types ont été répétés plusieurs fois sous des formes analytiques différentes. Cela permet d'employer une substitution réelle, pour réduire les éléments types d'une expression $\mathcal{F}(u)$ à coefficients réels, admettant un groupe continu, à l'une des formes suivantes :

TABLEAU II.

Groupe Γ à un paramètre :

$$(\Gamma_\alpha) \qquad \mathrm{X}f = \frac{\partial f}{\partial x_1}, \qquad l_1(dx) = dx_1, \qquad l_2(dx) = dx_2,$$

$$(\alpha) \quad ds^2 = f(x_2)\,dx_1^2 + dx_2^2, \qquad l(dx) = \varphi(x_2)\,dx_1 + \psi(x_2)\,dx_2 \qquad c = c(x_2)$$

(ds^2 de révolution),

$$(\alpha') \quad ds^2 = dx_1\,dx_2, \qquad l(dx) = \varphi(x_2)\,dx_1 + \psi(x_2)\,dx_2, \qquad c = c(x_2)$$

(ds^2 euclidien).

Groupes Γ *à deux paramètres. — Type I :*

$$(\Gamma_\beta)\quad X_1 f = \frac{\partial f}{\partial x_1},\qquad X_2 f = \frac{\partial f}{\partial x_2},\qquad l_1(dx) = dx_1,\qquad l_2(dx) = dx_2,$$

$$(\beta)\qquad ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2,\qquad l(dx) = a\,dx_1,\qquad c$$

ds^2 euclidien; a et c sont des constantes;

$$(\beta')\qquad ds^2 = dx_1\,dx_2,\qquad l(dx) = a\,dx_1 + b\,dx_2,\qquad c$$

ds^2 euclidien; a, b, c sont des constantes; on pourra prendre, suivant les cas,

$$b = 0,\qquad b = a,\qquad b = -a.$$

Si $l(dx) = 0$, (β) et (β') admettent les *groupes à trois paramètres suivants :*

$$(G_{\beta,1})\qquad X_1 f = \frac{\partial f}{\partial x_1},\qquad X_2 f = \frac{\partial f}{\partial x_2},\qquad X_3 f = x_1\frac{\partial f}{\partial x_2} - x_2\frac{\partial f}{\partial x_1},$$

$$(\beta, 1)\qquad ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2,\qquad l(dx) = 0,\qquad c = \text{const.},$$

$$(G_{\beta',2})\qquad X_1 f = \frac{\partial f}{\partial x_1},\qquad X_2 f = \frac{\partial f}{\partial x_2},\qquad X_3 f = x_1\frac{\partial f}{\partial x_1} - x_2\frac{\partial f}{\partial x_2},$$

$$(\beta', 2)\qquad ds^2 = dx_1\,dx_2,\qquad l(dx) = 0,\qquad c = \text{const.}$$

Groupes Γ *à deux paramètres. — Type II :*

$$(\Gamma_\gamma)\qquad X_1 f = \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2},\qquad X_2 f = x_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial f}{\partial x_2},$$

$$l_1(dx) = \frac{dx_1}{x_1 - x_2},\qquad l_2(dx) = \frac{dx_2}{x_1 - x_2},$$

$$(\gamma)\qquad ds^2 = a\,\frac{dx_1\,dx_2}{(x_1 - x_2)^2},\qquad l(dx) = \frac{b_1\,dx_1 + b_2\,dx_2}{x_1 - x_2},\qquad c$$

ds^2 à courbure constante; a, b_1, b_2, c sont des constantes.

Autre forme

$$(\Gamma\gamma')\quad X_1 f = \frac{\partial f}{\partial x_1},\quad X_2 f = x_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial f}{\partial x_2};\quad l_1(dx) = \frac{dx_1}{x_2},\quad l_2(dx) = \frac{dx_2}{x_2},$$

$$(\gamma')\qquad ds^2 = a\,\frac{dx_1^2 + dx_2^2}{x_2^2},\qquad l(dx) = \frac{b_1\,dx_1 + b_2\,dx_2}{x_2},\qquad c$$

ds^2 à courbure constante; a, b_1, b_2, c sont des constantes.

Lorsque $l(dx)=0$, (γ) et (γ') admettent des *groupes à trois paramètres,* savoir

$$(\mathrm{G}_{\gamma,1})\qquad \left\{\begin{array}{l} \mathrm{X}_1 f = \dfrac{\partial f}{\partial x_1} + \dfrac{\partial f}{\partial x_2}, \qquad \mathrm{X}_2 f = x_1 \dfrac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \dfrac{\partial f}{\partial x_2}, \\ \mathrm{X}_3 f = x_1^2 \dfrac{\partial f}{\partial x_1} + x_2^2 \dfrac{\partial f}{\partial x_2}, \end{array}\right.$$

$$(\gamma, 1)\qquad ds^2 = a\frac{dx_1\,dx_2}{(x_1-x_2)^2}, \qquad l(dx)=0, \qquad c=\text{const.}$$

$$(\mathrm{G}_{\gamma',1})\qquad \left\{\begin{array}{l} \mathrm{X}_1 f = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \qquad \mathrm{X}_2 f = x_1 \dfrac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \dfrac{\partial f}{\partial x_2}, \\ \mathrm{X}_3 f = (x_1^2 - x_2^2)\dfrac{\partial f}{\partial x_1} + 2x_1 x_2 \dfrac{\partial f}{\partial x_2}, \end{array}\right.$$

$$(\gamma', 1)\qquad ds^2 = a\frac{dx_1^2 + dx_2^2}{x_2^2}. \qquad l(dx)=0, \qquad c=\text{const.}$$

Le groupe suivant est une autre forme des précédents, mais il n'admet pas de sous-groupe réel à deux paramètres

$$(\mathrm{G}_{\gamma'',1})\qquad \left\{\begin{array}{l} \mathrm{X}_1 f = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \\ \mathrm{X}_2 f = \sin x_1 \dfrac{\partial f}{\partial x_2} + \cot x_2 \cos x_1 \dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \\ \mathrm{X}_3 f = \cos x_1 \dfrac{\partial f}{\partial x_2} - \cot x_2 \sin x_1 \dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \end{array}\right.$$

$$(\gamma'', 1)\qquad ds^2 = a(\sin^2 x_2\, dx_1^2 + dx_2^2), \qquad l(dx)=0,$$

a et c sont des constantes; ds^2 à courbure constante.

Problème II.

9. Avant de passer au problème II de l'Introduction, nous chercherons *quelles relations existent entre les éléments* ds^2, $l(dx)$, c, *d'une expression* $\mathcal{F}(u)$, *et les éléments homologues,* ds_1^2, $l_1(dx)$, c_1, *relatifs à l'expression*

$$(20)\qquad \mathcal{F}_1(u_1) = \frac{\mathcal{F}(\lambda u)}{\lambda},$$

λ étant une fonction quelconque des variables indépendantes.

Posons

$$\mathcal{F}(u) = \Delta_2 u + 2\Delta[(l), u] + cu; \tag{21}$$

il vient, en vertu des formules du n° 1,

$$\mathcal{F}_1(u_1) = \frac{\mathcal{F}(\lambda u_1)}{\lambda} = \Delta_2 u_1 + 2\Delta(\log\lambda, u_1) + 2\Delta[(l), u_1] + u_1 \frac{\mathcal{F}(\lambda)}{\lambda}.$$

Par suite

$$\mathcal{F}_1(u_1) = \Delta_2 u_1 + 2\Delta[(l_1), u_1] + c_1 u_1, \tag{22}$$

en posant

$$ds_1^2 = ds^2, \qquad l_1(dx) = l(dx) + d\log\lambda, \qquad c_1 = \frac{\mathcal{F}(\lambda)}{\lambda}. \tag{23}$$

Proposons-nous maintenant le problème suivant :

Étant données deux expressions $\mathcal{F}(u)$, $\mathcal{F}_1(u_1)$, relatives aux mêmes variables et au même ds^2, voir s'il existe une fonction λ donnant lieu à l'identité (20) *et, dans ce cas, la déterminer.*

Les conditions de possibilité du problème s'obtiennent en éliminant λ entre les deux dernières équations (23). Nous avons d'abord

$$l_1(dx) - l(dx) = d\log\lambda. \tag{24}$$

La différence $l_1(dx) - l(dx)$ doit être une différentielle exacte. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que le covariant bilinéaire bien connu [1]

$$\delta[l_1(dx) - l(dx)] - d[l_1(\delta x) - l(\delta x)], \tag{25}$$

à deux systèmes d, δ, de différentielles, soit identiquement nul. *On doit donc avoir identiquement*

$$\delta[l_1(dx)] - d[l_1(\delta x)] = \delta[l(dx)] - d[l(\delta x)]. \tag{26}$$

Supposons cette condition remplie, λ *est déterminé* (*à un facteur constant près*) *par la relation* (24).

---

(1) LIPSCHITZ, *Journal de Crelle*, t. 70.

Considérons maintenant la dernière équation (23), que nous écrirons

$$(27) \qquad c_1 - c = \frac{\Delta_2 \lambda}{\lambda} + 2\Delta[(l), \log\lambda].$$

On a facilement, en vertu de la formule (7) (n° 1),

$$\frac{\Delta_2 \lambda}{\lambda} = \Delta_2 \log\lambda + \Delta \log\lambda.$$

Nous écrirons alors l'équation (27) sous la forme suivante :

$$c_1 - c = \Delta_2(d\log\lambda) + \Delta[(2l + d\log\lambda), (d\log\lambda)].$$

Dans cette relation remplaçons $d\log\lambda$ par sa valeur tirée de (24), il vient

$$\begin{aligned} c_1 - c &= \Delta_2(l_1 - l) + \Delta[(l_1 + l), (l_1 - l)] \\ &= \Delta_2(l_1) - \Delta_2(l) + \Delta[(l_1), (l_1)] - \Delta[(l), (l)], \end{aligned}$$

ce que nous écrirons enfin

$$(28) \qquad \Delta_2(l_1) + \Delta(l_1) - c_1 = \Delta_2(l) + \Delta(l) - c.$$

En résumé, *les relations* (26) *et* (28) *sont les conditions demandées.*

10. Nous adopterons les notations suivantes :

$$(29) \qquad L(\delta x, dx) = \delta[l(dx)] - d[l(\delta x)],$$

$$(30) \qquad K = \Delta_2(l) + \Delta(l) - c,$$

et nous conviendrons de dire que ds^2, $L(\delta x, dx)$, K sont les *invariants différentiels de l'expression* $\mathcal{F}(u)$, *relatifs au problème II.*

Lorsque le covariant bilinéaire L est identiquement nul, on peut déterminer λ de façon que dans l'expression $\mathcal{F}_1(u_1)$, définie par la relation (20), aucune dérivée de u_1 ne figure en dehors de $\Delta_2 u_1$.

En généralisant une locution de M. Le Roy (1), *nous appellerons*

---

(1) Le Roy, *Sur l'intégration des équations de la chaleur* (*Annales de l'École Normale,* 3e série, t. XIV, 1898; n° 14). Les ds^2 des expressions $\mathcal{F}(u)$ considérées par M. Le Roy sont euclidiens, ceux que nous considérons sont quelconques.

L'expression que M. Le Roy désigne par f_1, au n° 17 du Mémoire précédent, est précisément l'invariant K de l'expression $\mathcal{F}(u)$ qu'il étudie.

expressions réductibles les expressions $\mathcal{F}(u)$ *dont le covariant bilinéaire est identiquement nul.*

Si une expression $\mathcal{F}(u)$ est réductible, si de plus son invariant K est nul, on peut déterminer λ de façon que $\mathcal{F}_1(u_1)$, définie par (20), se réduise au paramètre différentiel $\Delta_2 u_1$.

Lorsque le nombre des variables est deux, on peut substituer un invariant au covariant bilinéaire. On a alors, en posant

$$\mathrm{H} = \frac{\partial l_1}{\partial x_2} - \frac{\partial l_2}{\partial x_1},$$

$$\mathrm{L}(dx, \delta x) = \mathrm{H}(dx_1 \delta x_2 - dx_2 \delta x_1).$$

Observons que le binome $dx_1 \delta x_2 - dx_2 \delta x_1$ se transforme, par un changement de variables, dans le binome homologue multiplié par le déterminant fonctionnel de la substitution. Nous savons que $\sqrt{\Delta}$ jouit d'une propriété analogue. Par suite $\frac{\mathrm{H}}{\sqrt{\Delta}}$ est l'invariant demandé.

Avec les notations du Tableau I

$$\frac{\mathrm{H}}{\sqrt{\Delta}} = \sqrt{\mathrm{B}_{11}\mathrm{B}_{22} - \mathrm{B}_{12}^2}\left(\frac{\partial l_1}{\partial x_2} - \frac{\partial l_2}{\partial x_1}\right).$$

11. Indiquons maintenant la solution du problème II de l'Introduction : *Étant données deux expressions* $\mathcal{F}(u)$, $\mathcal{F}'(u')$, *relatives, l'une aux n variables* x, *l'autre aux n variables* x', *chercher s'il existe un changement de variables et une fonction* λ *des* x', *tels que l'on ait identiquement*

$$\mathcal{F}(u) = \frac{\mathcal{F}'(\lambda u')}{\lambda}.$$

D'après les numéros précédents tout revient évidemment à *chercher s'il existe un changement de variables, réalisant l'application des variétés* x, ds^2; x', ds'^2 *relatives à* $\mathcal{F}(u)$ *et* $\mathcal{F}'(u')$, *et transformant en outre les invariants* $\mathrm{L}(dx, \delta x)$ *et* K *de* $\mathcal{F}(u)$ *dans les invariants homologues* $\mathrm{L}'(dx', \delta x')$ et K' de $\mathcal{F}'(u')$.

Le problème ainsi posé rentre dans la catégorie de ceux dont nous avons parlé à la fin du n° 6, et peut être alors considéré comme résolu.

Une expression $\mathcal{F}(u)$ est toujours transformable en elle-même de la façon qui vient d'être indiquée; mais le groupe dont les équations sont celles du changement de variables correspondant est, en général, discontinu.

Il est aisé de *former des types canoniques pour les expressions $\mathcal{F}(u)$, telles que les équations du changement de variables du problème II soient celles d'un groupe continu.* On suivra pour cela une méthode analogue à celle du n° 7; il suffit de remplacer $l(dx)$ par la forme bilinéaire $\mathrm{L}(dx, \delta x)$.

Le cas de deux variables est particulièrement simple, car on peut alors remplacer le covariant bilinéaire L par l'invariant $\frac{\mathrm{H}}{\sqrt{\Delta}}$ défini au n° 10. On obtient ainsi les résultats suivants, complétant ceux du Tableau II :

1° ds^2 de révolution (α). Groupe à un paramètre Γ_α. $\frac{\mathrm{H}}{\sqrt{\Delta}}$ et K fonctions de x_2;

2° ds^2 euclidien (α'). Groupe à un paramètre Γ_α. $\frac{\mathrm{H}}{\sqrt{\Delta}}$ et K fonctions de x_2;

3° ds^2 euclidien (β) ou (β'). Groupes à deux paramètres $\mathrm{G}_{\beta,1}$ ou $\mathrm{G}_{\beta',1}$. $\frac{\mathrm{H}}{\sqrt{\Delta}}$ et K sont des constantes;

4° ds^2 à courbure constante non nulle (γ) ou (γ'), ou $(\gamma'', 1)$. Groupes à trois paramètres $\mathrm{G}_{\gamma,1}$ ou $\mathrm{G}_{\gamma',1}$ ou $\mathrm{G}_{\gamma'',1}$. $\frac{\mathrm{H}}{\sqrt{\Delta}}$ et K sont des constantes.

Problème III.

12. Nous allons *chercher les relations existant entre les invariants différentiels précédemment définis des deux expressions $\mathcal{F}(u)$, $\rho\mathcal{F}(u)$, ρ étant une fonction quelconque des variables x.*

Soient toujours ds^2, $l(dx)$, $\mathrm{L}(dx, \delta x)$, c, K, les covariants et invariants différentiels de $\mathcal{F}(u)$, relatifs aux problèmes I et II. Nous désignerons les covariants et invariants correspondants de $\rho\mathcal{F}(u)$ respectivement par $d\sigma^2$, $\lambda(dx)$, $\Lambda(dx, \delta x)$, γ, $\mathcal{K}$. Enfin nous emploierons la lettre D, au lieu de Δ, pour les paramètres différentiels relatifs à $d\sigma^2$.

On a d'abord aisément

$$d\sigma^2 = \frac{ds^2}{\rho} \tag{31}$$

et

$$\rho\Delta[(l), u] = \mathrm{D}[(l), u]. \tag{32}$$

L'expression (4) du paramètre différentiel $\Delta_2 u$ conduit à la relation

$$\rho\Delta_2 u = \mathrm{D}_2 u + \frac{n-2}{2}\mathrm{D}(\log\rho, u) \tag{33}$$

(n désigne toujours le nombre des variables).
En tenant compte des relations (32) et (33) et de

$$\rho\mathcal{F}(u) = \mathrm{D}_2 u + 2\mathrm{D}[(\lambda), u] + \gamma u,$$

on a

$$d\sigma^2 = \frac{ds^2}{\rho}, \qquad \lambda(dx) = l(dx) + \frac{n-2}{4}\,d\log\rho, \qquad \gamma = c\rho. \tag{34}$$

Par suite

$$\Lambda(dx, \delta x) = \mathrm{L}(dx, \delta x). \tag{35}$$

Passons au calcul de $\mathcal{K}$. On a d'abord

$$\mathrm{D}_2(\lambda) = \rho\Delta_2(\lambda) - \frac{n-2}{2}\rho\Delta[\log\rho, (\lambda)].$$

Remplaçons $\lambda(dx)$ par $l(dx) + \dfrac{n-2}{4}\,d\log\rho$, il vient

$$\begin{aligned}\mathrm{D}_2(\lambda) = {} & \rho\Delta_2(l) + \frac{n-2}{4}\rho\Delta_2\log\rho \\ & - \frac{n-2}{2}\rho\Delta[(\log\rho, (l)] - \frac{n-2}{2}\cdot\frac{n-2}{4}\rho\Delta\log\rho.\end{aligned} \tag{36}$$

De même

$$\mathrm{D}(\lambda) = \rho\Delta(\lambda) = \rho\Delta(l) + \frac{n-2}{2}\rho\Delta\,[\log\rho, (l)] + \left(\frac{n-2}{4}\right)^2\rho\Delta\log\rho. \tag{37}$$

Dans l'expression

$$\mathcal{K} = \mathrm{D}_2(\lambda) + \mathrm{D}(\lambda) - \gamma$$

remplaçons $D_2(\lambda)$ et $D(\lambda)$ à l'aide de (36) et (37), il vient

$$\mathcal{K} = \rho K + \frac{n-2}{4} \rho \Delta_2 \log \rho - \left(\frac{n-2}{4}\right)^2 \rho \Delta \log \rho. \tag{38}$$

A l'aide de la formule (7) on transforme aisément cette formule dans la suivante

$$\mathcal{K} = \rho^{\frac{n+2}{4}} \left(K \rho^{\frac{2-n}{4}} - \Delta_2 \rho^{\frac{2-n}{4}} \right). \tag{39}$$

Lorsque le nombre des variables est *deux*, les formules précédentes se simplifient. On a alors

$$\left\{ \begin{aligned} \mathcal{K} &= \rho K, \\ \frac{\mathcal{H}}{\sqrt{\Phi}} &= \frac{\rho H}{\sqrt{\Delta}}. \end{aligned} \right. \tag{40}$$

13. Passons au problème III :

Deux expressions $\mathcal{F}(u)$, $\mathcal{F}'(u')$ étant données, relatives l'une aux n variables x, l'autre aux n variables x', chercher s'il existe deux fonctions λ et ρ des variables x, et un changement de variables donnant lieu à l'identité

$$\mathcal{F}'(u') = \rho \frac{\mathcal{F}(\lambda u)}{\lambda}. \tag{41}$$

Pour le résoudre, nous aurons à *éliminer* ρ *entre les relations* (31), (35) *et* (39).

Cette élimination est immédiate pour $n = 2$; nous étudierons plus loin ce cas important.

Supposons $n > 2$. Nous distinguerons encore deux cas selon que $\mathcal{F}(u)$ est *irréductible* ou *réductible* (n° 10).

Si $\mathcal{F}(u)$ est irréductible, le covariant $L(dx, \delta x)$ n'est pas identiquement nul. Envisageons alors l'équation en θ obtenue en égalant à zéro le discriminant de la forme bilinéaire

$$\sum_i \theta \frac{\partial\, ds^2}{\partial\, dx_i} \delta x_i - L(dx, \delta x).$$

Cette équation en θ admet au moins deux racines non nulles.

Les fonctions symétriques élémentaires (de poids pair) des racines de cette équation ne sont pas toutes nulles non plus. Soit I l'une de ces fonctions différentes de zéro, désignons par $2p$ son poids.

Construisons la fonction $\mathfrak{I}$ homologue de I dans le système $d\sigma^2$, $\Lambda(dx, \delta x)$. On vérifie aisément que

$$\mathfrak{I} = \mathrm{I}\rho^{2p},$$

ce qui donne

$$\mathfrak{I}^{\frac{1}{2p}}\, d\sigma^2 = \mathrm{I}^{\frac{1}{2p}}\, ds^2.$$

Posons alors

$$ds_1^2 = \mathrm{I}^{\frac{1}{2p}}\, ds^2$$

et *désignons par* K_1 *ce que devient* $\mathfrak{K}$ *lorsqu'on remplace* ρ *par* $\mathrm{I}^{\frac{-1}{2p}}$.

Le résultat de l'élimination est alors le suivant : *Les expressions* ds_1^2, $\mathrm{L}(dx, \delta x)$, K_1 *sont les mêmes pour* $\mathcal{F}(u)$ *et* $\rho\mathcal{F}(u)$, *quel que soit* ρ.

Nous dirons que ds_1^2, $\mathrm{L}(dx, \delta x)$, K_1 sont les *covariants et l'invariant de* $\mathcal{F}(u)$ *relatifs au problème III*. Nous dirons aussi que ce sont les *invariants de l'équation* $\mathcal{F}(u) = 0$.

Soient $\mathcal{F}(u)$, $\mathcal{F}'(u')$ les expressions données, pour lesquelles on veut traiter le problème III. Supposons $\mathcal{F}(u)$ irréductible; pour que le problème soit possible, il est nécessaire que $\mathcal{F}'(u')$ le soit aussi. Formons alors les covariants ds_1^2, $\mathrm{L}(dx, \delta x)$ et l'invariant K_1 de $\mathcal{F}(u)$, que nous venons de définir, et calculons de la même façon les invariants homologues $ds_1'^2$, $\mathrm{L}'(dx', \delta x')$, K_1' de $\mathcal{F}'(u')$. Nous sommes alors ramenés au problème traité au n° 11 : Reconnaître s'il existe une transformation permettant de passer de ds_1^2, $\mathrm{L}(dx, \delta x)$, K_1 respectivement à $ds_1'^2$, $\mathrm{L}'(dx', \delta x')$, K_1'. Le problème III peut donc être considéré comme résolu.

Il serait aisé d'ailleurs, connaissant la transformation de passage, de déterminer ρ et λ.

Enfin, on construit des types canoniques pour les expressions $\mathcal{F}(u)$ telles que la transformation de passage du problème III dépende de constantes arbitraires, par une marche analogue à celle du n° 7. D'ailleurs toute solution du problème du n° 11 donnerait une solution du problème actuel.

Nous remarquerons que les équations $\mathcal{F}(u) = 0$, correspondant à des expressions ainsi obtenues, possèdent la propriété suivante, qui les rapproche des équations d'Euler et de Poisson :

Soit $u(x)$ une solution de l'équation

$$\mathcal{F}(u) = 0, \tag{42}$$

et

$$x'_i = f_i(x, a)$$

les équations finies du groupe continu précédent, dépendant des paramètres a, l'expression

$$\lambda(x, a)\, u(x'),$$

où λ est une fonction déterminée, indépendante de u, est aussi solution de l'équation (42).

Les remarques précédentes s'appliquent également aux cas du numéro suivant.

14. Abordons maintenant le cas des équations *réductibles*. Nous nous limiterons au cas des expressions $\mathcal{F}(u)$ *à trois variables, à coefficients réels, à ds^2 défini positif*.

Il y a encore deux cas à distinguer. Si la variété x, ds^2 correspondant à $\mathcal{F}(u)$ n'est pas susceptible d'une représentation conforme sur l'espace euclidien ordinaire, on développera une théorie analogue à celle du numéro précédent, à la construction près de l'invariant I. Dans le cas particulier qui nous occupe, on prendra pour I l'invariant, formé avec la seule variété x, ds^2 qui sert à définir la *variété principale* attachée à x, ds^2, pour le problème de la représentation conforme (1).

Supposons, en second lieu, que l'on puisse effectuer la représentation conforme de x, ds^2 sur l'espace euclidien. Nous comparerons encore les invariants ds^2, K et $d\sigma^2$, $\mathcal{K}$ relatifs à $\mathcal{F}(u)$ et $\rho\mathcal{F}(u)$; mais afin de ramener les notations à celles dont nous avons fait usage ailleurs, nous poserons

$$\rho = e^{-2R}. \tag{43}$$

(1) *Thèse*, n° 19.

La formule (39) devient alors, en observant que $n=3$,

$$\mathcal{K} = e^{-2R}(K - \tfrac{1}{2}\Delta_2 R - \tfrac{1}{4}\Delta R). \tag{44}$$

Il est facile de vérifier que $\Delta_2 R + \frac{1}{2}\Delta R$ est lié d'une façon simple à un invariant de $d\sigma^2$ (ou $e^{2R}ds^2$). Considérons à cet effet le covariant quadratique $\lambda(dx)$ de $d\sigma^2$ utilisé dans le problème de la représentation conforme ([1]). Soit $\mathfrak{J}$ l'invariant de $d\sigma^2$, somme des racines de l'équation en θ obtenue en annulant le discriminant de

$$\theta\, d\sigma^2 + \lambda(dx)$$

et soit J ce que devient $\mathfrak{J}$ pour $R=0$; J est un invariant de ds^2 facile à construire directement. Un calcul simple montre que

$$-\mathfrak{J} = e^{-2R}(\Delta_2 R + \tfrac{1}{2}\Delta R - J). \tag{45}$$

En combinant les relations (44) et (45) on a enfin

$$\mathcal{K} - \tfrac{1}{2}\mathfrak{J} = e^{-2R}(K - \tfrac{1}{2}J) = \rho(K - \tfrac{1}{2}J). \tag{46}$$

Cette égalité nous montre que $K - \frac{1}{2}J$ pourra être substitué à l'invariant I du n° 13.

Le problème III s'achève alors comme au n° 13.

Le seul cas où l'*égalité* (46) *serait inutilisable* est celui où $K - \frac{J}{2}$ *est nul*. C'est ici seulement qu'intervient l'hypothèse de la possibilité de représenter conformément x, ds^2 sur l'espace euclidien. Considérons R comme arbitraire, on a toujours

$$\mathcal{K} = \tfrac{1}{2}\mathfrak{J}.$$

Soient $R_1, \mathcal{K}_1, \mathfrak{J}_1$ les valeurs de $R, \mathcal{K}, \mathfrak{J}$ correspondant à une variété *euclidienne* $e^{2R_1}ds^2$. Pour cette variété, le covariant analogue à $\lambda(dx)$ est nul, $\mathfrak{J}_1$ l'est donc aussi.

L'expression $\mathcal{F}_1(u) = e^{-2R_1}\mathcal{F}(u)$ est réductible, son invariant

---

([1]) *Thèse*, n^{os} 17, 18. Le calcul indiqué dans le texte se fait aisément en supposant la variété x, $d\sigma^2$ rapportée à l'un de ses systèmes triples orthogonaux.

$\mathcal{K}_1 = \frac{1}{2}\mathfrak{I}_1$ est nul. Cette expression se ramène (n° 10), par des transformations II, au paramètre différentiel de l'espace euclidien.

Donc, *dans le cas qui restait à étudier, on peut, par les transformations* III, *passer de* $\mathfrak{F}(u)$ *à*

$$\frac{\partial^2 u'}{\partial x_1'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial x_2'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial x_3'^2}.$$

Dans ce cas, l'équation (42) est une *équation de Laplace*.

La remarque suivante, dont l'importance a été signalée dans l'Introduction, résulte immédiatement de la relation (31) :

La condition nécessaire et suffisante, pour qu'une expression $\mathfrak{F}(u)$ soit réductible par des transformations III, en une expression de même forme, où les coefficients des dérivées secondes soient des constantes, est que la variété x, ds^2 attachée à $\mathfrak{F}(u)$ puisse être représentée conformément sur l'espace euclidien.

Équations $\mathfrak{F}(u) = 0$ à deux variables.

15. Le problème III est très simple dans le cas de deux variables. Il est en effet aisé d'éliminer ρ entre les relations

$$(31) \qquad d\sigma^2 = \frac{ds^2}{\rho},$$

$$(40) \qquad \mathcal{K} = \rho \mathrm{K}, \qquad \frac{\mathfrak{H}}{\sqrt{\mathrm{D}}} = \frac{\rho \mathrm{H}}{\sqrt{\Delta}},$$

existant alors entre les invariants de $\mathfrak{F}(u)$ et $\rho\,\mathfrak{F}(u)$ relatifs au problème II.

Si K *n'est pas nul*, nous avons

$$\mathcal{K}\, d\sigma^2 = \mathrm{K}\, ds^2, \qquad \frac{\mathfrak{H}}{\mathcal{K}\sqrt{\mathrm{D}}} = \frac{\mathrm{H}}{\mathrm{K}\sqrt{\Delta}},$$

et nous dirons que

$$\mathrm{K}\, ds^2, \qquad \frac{\mathrm{H}}{\mathrm{K}\sqrt{\Delta}}$$

sont *le covariant et l'invariant de l'équation* $\mathfrak{F}(u) = 0$.

Si K *est nul, et* H *différent de zéro*, nous avons de même

$$\frac{\mathcal{H}}{\sqrt{D}}\,d\sigma^2 = \frac{H}{\sqrt{\Delta}}\,ds^2,$$

nous dirons alors que $\frac{H}{\sqrt{\Delta}}ds^2$ *est le covariant de l'équation* $\mathfrak{F}(u) = 0$.

Ainsi, si l'une au moins des expressions H et K est différente de zéro, le problème III est ramené au problème de l'application de deux variétés à deux dimensions, modifié ou non, suivant les cas, comme au nº 6. On a donné, à cet endroit, le détail des divers cas possibles.

Si H *et* K *sont tous deux nuls*, on sait, d'après le nº 10, déterminer une fonction λ telle que $\frac{\mathfrak{F}(\lambda u)}{\lambda}$ [et par suite aussi $\mathfrak{F}(\lambda u)$], soit un paramètre différentiel du second ordre.

Nous dirons alors que l'équation

$$\mathfrak{F}(u) = 0$$

est une *équation de Beltrami*.

Le problème III est toujours possible pour deux équations de Beltrami. Indépendamment de la recherche des fonctions analogues à λ, il revient à la représentation conforme de deux variétés à deux dimensions.

Nous dirons que deux équations

$$\mathfrak{F}(u) = 0, \qquad \mathfrak{F}'(u') = 0,$$

à deux variables, appartiennent à la même classe, si $\mathfrak{F}(u), \mathfrak{F}'(u')$ *sont réductibles l'un à l'autre par les transformations du problème III.* La classification ainsi définie comprend donc deux éléments : 1° classification des variétés à deux dimensions ; 2° classification des fonctions adjointes à une même variété. Il faut toutefois ranger dans une classe spéciale les équations de Beltrami.

16. La représentation conforme de deux variétés à deux dimensions l'une sur l'autre est toujours possible. Les transformations du problème III permettent donc de transformer une équation

$$\mathfrak{F}(u) = 0$$

en une équation de même nature, où les coefficients des dérivées secondes auraient des valeurs quelconques. En particulier, on peut ainsi ramener l'équation donnée à l'un ou à l'autre des types canoniques

$$(47) \qquad \mathcal{F}_1(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu = 0,$$

$$(48) \qquad \mathcal{F}_2(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu = 0,$$

dont on fait habituellement usage, soit en Géométrie, soit en Physique mathématique.

Mais les équations que l'on étudie étant en général à coefficients réels il y a lieu de ne faire intervenir, dans cette réduction, que des éléments réels. Rappelons, à ce sujet, qu'une équation à coefficients réels, est toujours réductible par des transformations réelles au type (47) ou au type (48), selon qu'elle appartient au type hyperbolique (caractéristiques réelles) ou au type elliptique (caractéristiques imaginaires). Ajoutons enfin qu'il y a lieu, en général, de tenir compte de la connexion des domaines pour lesquels on effectue la transformation.

17. Indiquons les expressions des invariants différentiels des expressions (47) et (48).

Pour $\mathcal{F}_1(u)$, on a

$$(49) \qquad ds^2 = 4\,dx\,dy, \qquad l(dx) = b\,dx + a\,dy,$$

$$\frac{\mathrm{H}}{\sqrt{\Delta}} = \frac{i}{2}\left(\frac{\partial a}{\partial x} - \frac{\partial b}{\partial y}\right), \qquad \mathrm{K} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y}\right) + ab - c$$

$$(i^2 = -1).$$

Le ds^2 est donc euclidien. Les invariants $\frac{\mathrm{H}}{\sqrt{\Delta}}$ et K sont liés aux invariants de M. Darboux [1]

$$(50) \qquad h = \frac{\partial a}{\partial x} + ab - c, \qquad k = \frac{\partial b}{\partial y} + ab - c,$$

[1] *Voir* DARBOUX, *Leçons sur la Théorie des surfaces*, t. II, Chap. II.

par les relations

$$(51)\qquad \frac{\mathrm{H}}{\sqrt{\Delta}} = \frac{i}{2}(h-k), \qquad \mathrm{K} = \frac{1}{2}(h+k).$$

De même $\mathcal{F}_2(u)$ donne

$$(52)\qquad ds^2 = dx^2 + dy^2, \qquad l(dx) = \frac{1}{2}(a\,dx + b\,dy),$$

$$\frac{\mathrm{H}}{\sqrt{\Delta}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial x}\right), \qquad \mathrm{K} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y}\right) + \frac{a^2+b^2}{4} - c.$$

Les expressions $l(dx)$ et K avaient déjà été considérées par divers auteurs [1].

Les calculs précédents et le caractère invariant de $\frac{\mathrm{H}}{\sqrt{\Delta}}$ montrent que les *équations réductibles* (n° 10) *sont les équations à invariants égaux de M. Darboux.*

Il résulte des nos 10 et 16 que l'on peut, par des transformations réelles du type III, ramener une équation réductible à coefficients réels à la forme

$$\Delta_2 u \pm u = 0\ [2],$$

qui ne diffère pas de la forme canonique des équations à invariants égaux

$$\frac{1}{\lambda}\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} - u = 0,$$

puisque $\frac{1}{\lambda}\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}$ est le paramètre $\Delta_2 u$ relatif à la variété $x, y, 4\lambda\,dx\,dy$.

M. Burgatti [3] a également étudié les équations dont l'invariant K est nul; pour ces équations la somme $h+k$ des invariants de M. Darboux est nulle.

---

(1) Dans le Mémoire de M. Picard, *Sur une classe d'équations linéaires aux dérivées partielles* (*Acta mathematica*, t. XII), l'existence de l'invariant K est signalée dans le cas le plus général. — L'expression $l(dx)$ et l'invariant K relatifs aux équations (48) ont été donnés par M. Burgatti (*Annali di matematica*, 2e série, t. XXIII; 1895).

(2) Le double signe permet de ne considérer que des ds^2 définis positifs, pour les équations du type elliptique.

(3) Mémoire cité, p. 227.

Les invariants différentiels des deux catégories d'équations précédentes ($H = 0$ ou $K = 0$) sont ceux de la variété correspondante. Pour ces équations le problème III se ramène au problème ordinaire de l'application.

Il est aisé de comparer, au point de vue de la classification du n° 15, une équation linéaire et son adjointe. On voit alors que les variétés correspondant aux deux équations sont les mêmes; la somme des deux invariants $\frac{H}{\sqrt{\Delta}}$ est nulle [1].

18. La méthode du n° 15 permet de déterminer les transformations III laissant invariante une équation donnée

$$\mathcal{F}(u) = 0. \tag{53}$$

Les changements de variables correspondants déterminent un groupe G, en général discontinu.

Nous avons insisté, au n° 13, sur la propriété caractéristique des équations (53) pour lesquelles G est continu. Nous allons classer maintenant ces équations remarquables, et donner des types canoniques correspondant à chaque classe. M. Lie a déjà traité ce dernier problème [2]; nous compléterons un peu les résultats qu'il a obtenus, en donnant plusieurs types canoniques pour une même classe. Cela permet de ne faire intervenir que des éléments réels dans la réduction, à une forme canonique, d'une équation de l'espèce considérée.

1° Nous avons d'abord les *équations de Beltrami*, auxquelles corres-

---

(1) *Voir* DARBOUX, *Leçons sur la Théorie des surfaces*, t. II, p. 71. A la définition donnée à cet endroit de l'expression adjointe, on peut substituer la suivante, relative aux expressions $\mathcal{F}(u)$:

Deux expressions $\mathcal{F}(u)$, $\mathcal{F}_1(u_1)$, sont dites *adjointes l'une de l'autre*, si l'intégrale double $\iint [u\mathcal{F}_1(u_1) - u_1\mathcal{F}(u)]\, d\sigma$, où $d\sigma$ est l'élément de surface correspondant à la variété attachée à $\mathcal{F}(u)$, ne dépend que du contour. On détermine, sans peine, l'expression $\mathcal{F}_1(u_1)$ adjointe à une expression $\mathcal{F}(u)$ donnée, ainsi que les relations simples liant ses invariants différentiels à ceux de $\mathcal{F}(u)$.

Deux expressions adjointes, au sens ainsi défini, restent adjointes après un changement de variables, ce qui n'a pas lieu avec la définition ordinaire.

(2) *Archiv for mathematik og Naturvidenskab*, t. VI, p. 328-368.

pondent deux formes canoniques :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} = 0, \tag{54}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0. \tag{55}$$

Les groupes G correspondants sont les groupes de représentation conforme des variétés x_1, x_2, $dx_1 dx_2$ pour (54) et x_1, x_2, $dx_1^2 + dx_2^2$ pour (55).

Ce cas écarté, G est nécessairement fini et doit laisser invariants le ds^2 et l'invariant $\frac{H}{\sqrt{\Delta}}$ de l'équation (53). Il est évident que l'on obtient les types possibles de groupes G, les ds^2 et les invariants correspondants, à l'aide des résultats du n° 11, en y donnant seulement à K une valeur numérique particulière. On pourrait prendre $K = 1$ et $K = 0$ (n° 15); mais, pour plus de simplicité, nous ne chercherons pas à faire figurer le nombre minimum de constantes dans les types canoniques indiqués.

Une fois connus ds^2, $\frac{H}{\sqrt{\Delta}}$ et K, la construction de $\mathcal{F}(u)$ n'offre aucune difficulté. On obtient ainsi les quatre classes d'équations indiquées ci-dessous. Les groupes G sont désignés par les notations du Tableau II, où l'on a donné leurs transformations infinitésimales; les ds^2 sont ceux du Tableau II.

2° *Équations à ds^2 de révolution, le groupe de mouvements correspondant laisse $\frac{H}{\sqrt{\Delta}}$ invariant* (1).

$ds^2 : \alpha$; groupe Γ_α.

$$\frac{1}{f}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{f'}{2f}\frac{\partial u}{\partial x_2} + 2\frac{g}{f}\frac{\partial u}{\partial x_1} + \left(c + \frac{g^2}{f}\right) u = 0; \tag{56}$$

f' est la dérivée de f; g est une fonction quelconque de x_2, c une constante.

(1) Ce sont les équations (34) du Mémoire de M. Lie, p. 359.

3° *Équations à ds^2 euclidien;* $\frac{\text{H}}{\sqrt{\Delta}} =$ *const. étant l'équation d'une famille de lignes de longueur nulle* (¹) :

$ds^2 : \alpha'$; groupe Γ_α.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + b(x_2)\frac{\partial u}{\partial x_2} + u = 0; \tag{57}$$

b est fonction de x_2.

4° *Équations à ds^2 euclidien;* $\frac{\text{H}}{\sqrt{\Delta}}$ *est une constante* (²). Deux types canoniques :

$ds^2 : \beta'$; groupe $G_{\beta',1}$.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + c x_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + u = 0; \tag{58}$$

c est une constante.

$ds^2 : \beta$; groupe $G_{\beta,1}$.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + 2 b_1 x_2 \frac{\partial u}{\partial x_1} + 2 b_2 x_1 \frac{\partial u}{\partial x_2} + (b_1^2 x_2^2 + b_2^2 x_1^2 + d) u = 0; \tag{59}$$

d, b_1, b_2 sont des constantes.

5° *Équations d'Euler et de Poisson : équations à ds^2 à courbure constante non nulle;* $\frac{\text{H}}{\sqrt{\Delta}}$ *est une constante* (³). Trois types canoniques :

$ds^2 : \gamma$; groupe $G_{\gamma,1}$.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\beta_1}{x_1 - x_2}\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\beta_2}{x_1 - x_2}\frac{\partial u}{\partial x_2} = 0; \tag{60}$$

β_1, β_2 sont des constantes.

$ds^2 : \gamma'$; groupe $G_{\gamma',1}$.

$$x_2^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right) + 2 x_2\left(b_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + b_2 \frac{\partial u}{\partial x_2}\right) + d u = 0; \tag{61}$$

d, b_1, b_2 sont des constantes.

(¹) Équations 32 (p. 357) de M. Lie (*loc. cit.*).

(²) Équations 33 (p. 358) de M. Lie.

(³) Équations 35 (p. 359) de M. Lie. M. Darboux a consacré le Chap. III du t. II de ses *Leçons sur la Théorie des surfaces* à l'étude de ces équations.

$ds^2 : \gamma''$; groupe $G_{\gamma'',1}$.

$$(62)\quad \frac{1}{\sin^2 x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\cot x_2\frac{\partial u}{\partial x_2}+2b\frac{\cos x_2}{\sin^2 x_2}\frac{\partial u}{\partial x_2}+\left(d+b^2\frac{\cos^2 x_2}{\sin^2 x_2}\right)u=0;$$

b et d sont des constantes.

19. Toutes les équations de la classe 5° du numéro précédent sont réductibles à la forme (60), mais il n'est pas nécessaire d'effectuer la réduction pour calculer β_1 et β_2. En effet, si $K=1$, le ds^2 attaché à l'équation $E(\beta_1, \beta_2)$ a pour courbure totale

$$\frac{1}{RR'}=\frac{2}{\alpha+\alpha_1};$$

l'invariant $\frac{H}{\sqrt{\Delta}}$ est $i\frac{\alpha_1-\alpha}{\alpha_1+\alpha}$ $(i^2=-1)$, en posant

$$\alpha=\beta_1(1-\beta_2), \qquad \alpha_1=\beta_2(1-\beta_1).$$

Cette remarque permet de calculer β_1 et β_2 en calculant $\frac{1}{RR'}$ et $\frac{H}{\sqrt{\Delta}}$, ce qui n'exige aucune intégration. On peut ainsi reconnaître, par des opérations effectuables, si la méthode de Laplace est applicable à une équation de la classe considérée [1].

On vérifiera, par exemple, que les équations auxquelles satisfont les fonctions sphériques d'ordre n sont des équations $E(1+n, 1+n)$. Elles sont intégrables par la méthode de Laplace. Les équations

$$E\left(\frac{1}{2}+im, \frac{1}{2}+im\right)\ (i^2=-1;\ m \text{ entier})$$

se rencontrent aussi en Physique mathématique.

Une remarque analogue s'applique aux équations 4°. L'expression de la constante c du type (58) en fonction de $\frac{H}{\sqrt{\Delta}}$ est (en prenant $K=1$)

$$c=\frac{2H}{H-i\sqrt{\Delta}}.$$

---

[1] *Voir* le Chap. III du t. II des *Leçons* de M. Darboux.

On voit aisément que la méthode de Laplace est applicable aux équations (58), lorsque c est l'inverse d'un entier positif ou négatif. L'entier indique le nombre, le signe donne le sens des opérations à effectuer pour appliquer cette méthode.