Annales scientifiques de l'É.N.S.

F. Didon

Étude de certaines fonctions analogues aux fonctions X_n de Legendre, etc

Annales scientifiques de l'É.N.S. 1re série, tome 5 (1868), p. 229-310

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1868_1_5__229_0>

ÉTUDE

DE

CERTAINES FONCTIONS ANALOGUES AUX FONCTIONS X_n

DE LEGENDRE, ETC.,

PAR M. F. DIDON,

DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES.

Introduction.

Le travail qui va suivre a pour objet principal l'étude de certaines fonctions de plusieurs variables, analogues aux fonctions X_n de Legendre et aux fonctions trigonométriques $\sin(n \operatorname{arc} \cos x)$ et $\cos(n \operatorname{arc} \cos x)$. C'est surtout au point de vue du développement, au moyen de ces nouvelles expressions algébriques, des fonctions d'un nombre quelconque de variables que cette étude est faite. On sait que les propriétés des polynômes X_n, exprimées par les relations

$$\int_{-1}^{+1} X_n X_{n'}\, dx = 0, \quad \int_{-1}^{+1} X_n^2\, dx = \frac{2}{2n+1},$$

permettent d'effectuer avec ces polynômes le développement d'une fonction quelconque de x, tant que du moins la variable x reste comprise entre -1 et $+1$. Il en est de même relativement aux deux autres fonctions indiquées précédemment. Mais ici il y a une différence capitale entre le cas d'une variable et le cas de plusieurs variables. Les seules propriétés des fonctions X_n généralisées ne permettront pas de faire le calcul de leurs coefficients dans la série qui exprimera une fonction de plusieurs variables; pour arriver à ce résultat, il faudra de toute nécessité considérer de nouvelles fonctions qu'on associera aux premières. Comme dans le cas d'une variable, les nouveaux développements supposeront une relation d'inégalité entre les variables.

C'est M. Hermite qui a fait la généralisation pour deux variables de la fonction X_n et de la fonction $\sin(n \operatorname{arc} \cos x)$. J'étends cette généralisation à un nombre quelconque de variables pour les fonctions précédentes, et aussi pour la fonction $\cos(n \operatorname{arc} \cos x)$, non considérée par M. Hermite.

Indépendamment de l'étude précédente, j'ai traité diverses questions s'y rattachant assez directement et qui m'ont paru intéressantes. Ainsi après avoir donné pour l'une des fonctions étudiées auparavant un système d'équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre, ainsi que pour sa fonction associée, j'ai déduit directement de ces deux systèmes les propriétés principales de ces fonctions. J'ai donné aussi la solution complète du premier. J'ai indiqué également, pour tous les cas qui pouvaient se présenter, les valeurs de certaines intégrales doubles qu'on n'avait calculées, dans l'étude précédente, que lorsque les constantes qui y entrent sont comprises entre certaines limites.

Ce travail est divisé en deux Parties : la première est consacrée à la généralisation de la fonction X_n; la seconde à la généralisation des fonctions trigonométriques $\sin(n \operatorname{arc} \cos x)$ et $\cos(n \operatorname{arc} \cos x)$.

Je tiens ici à remercier M. Hermite qui m'a indiqué le sujet de ce travail et, sur ce sujet, la plupart des questions que j'ai résolues.

PREMIÈRE PARTIE.

GÉNÉRALISATION DES FONCTIONS X_n DE LEGENDRE.

On sait que les fonctions X_n de Legendre proviennent du développement, suivant les puissances croissantes de a, de l'expression

$$(1 - 2ax + a^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Dans une thèse sur l'attraction des sphéroïdes, M. Olinde Rodrigues, en 1815, a mis la fonction X_n sous la forme

$$\frac{1}{1.2\ldots n.2^n}\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}.$$

Jacobi, en 1826, dans le second volume du *Journal de Crelle*, a retrouvé cette forme. C'est la quantité

$$[(1-ax-by)^2-(a^2+b^2)(x^2+y^2-1)]^{-\frac{1}{2}}$$

qui a conduit M. Hermite (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LX) à des fonctions de deux variables, analogues aux fonctions X_n. Cette quantité peut être considérée comme une généralisation de l'expression $(1-2ax+a^2)^{-\frac{1}{2}}$, si l'on écrit cette dernière

$$[(1-ax)^2-a^2(x^2-1)]^{-\frac{1}{2}}.$$

Posant

$$[(1-ax-by)^2-(a^2+b^2)(x^2+y^2-1)]^{-\frac{1}{2}}=\sum a^m b^n U_{m,n},$$

M. Hermite a fait voir que l'on avait

$$U_{m,n}=\frac{1}{m!\,n!\,2^{m+n}}\frac{d^{m+n}(x^2+y^2-1)^{m+n}}{dx^m\,dy^n}.$$

Ces fonctions jouissent de cette propriété que l'intégrale double $\int\int U_{m,n}U_{\mu,\nu}\,dx\,dy$ est nulle, quand $m+n$ est différent de $\mu+\nu$, les variables x et y, dans l'intégrale, étant limitées par la condition $x^2+y^2\leqq 1$. Mais cette propriété ne permet pas d'effectuer le développement d'une fonction de x et de y, suivant les polynômes $U_{m,n}$, dans les limites $x^2+y^2\leqq 1$.

C'est pour arriver à ce résultat que M. Hermite a associé aux fonctions $U_{m,n}$ d'autres fonctions $V_{m,n}$ provenant du développement suivant :

$$(1-2ax-2by+a^2+b^2)^{-1}=\sum a^m b^n V_{m,n}.$$

Cette expression nouvelle peut être considérée comme une généralisation de l'expression $(1 - 2ax + a^2)^{-\frac{1}{2}}$, où l'on a mis deux variables x et y, et où l'on a doublé l'exposant $-\frac{1}{2}$. L'intégrale double

$$\int\int V_{m,n} V_{\mu,\nu}\, dx\, dy,$$

où les variables sont limitées par la condition $x^2 + y^2 \leqq 1$, est aussi nulle quand $m + n$ et $\mu + \nu$ sont différents, et cette seule propriété ne permet pas non plus de calculer les coefficients des fonctions $V_{m,n}$ dans la série qui représente une fonction quelconque de x et de y. Mais on a

$$\int\int U_{m,n} V_{\mu,\nu}\, dx\, dy = 0$$

entre les mêmes limites que précédemment, si m et n ne sont pas égaux respectivement à μ et ν. Dans ce dernier cas, on a

$$\int\int U_{m,n} V_{m,n}\, dx\, dy = \frac{\pi}{m + n + 1} \frac{(m + n)!}{m!\, n!}.$$

D'où l'on voit qu'on pourra déterminer les coefficients du développement suivant :

$$F(x, y) = \sum A_{m,n} V_{m,n}$$

par la méthode qu'on emploie relativement aux fonctions X_n, ce qui donnera

$$A_{m,n} \frac{\pi}{m + n + 1} \frac{(m + n)!}{m!\, n!} = \int\int F(x, y)\, U_{m,n}\, dx\, dy,$$

les variables, dans l'intégrale et dans le développement, étant limitées par la condition $x^2 + y^2 \leqq 1$. On pourrait de même effectuer le développement de la fonction $F(x, y)$ suivant les fonctions $U_{m,n}$.

Avant de généraliser ces résultats pour un nombre quelconque de variables, je vais compléter un peu l'étude des fonctions $U_{m,n}$ et $V_{m,n}$, et tout d'abord je vais indiquer une manière curieuse de déduire les secondes des premières.

Manière de déduire les fonctions V *des fonctions* U.

On trouve facilement en calculant les coefficients de a^3, $a^2 b$, ab^2 et b^3 dans le développement, suivant les produits des puissances de a et de b, de l'expression $[(1-ax-by)^2-(a^2+b^2)(x^2+y^2-1)]^{-\frac{1}{2}}$,

$$U_{3,0}=\frac{1}{2}(5x^3+3xy^2-3x),\quad U_{0,3}=\frac{1}{2}(5y^3+3x^2y-3y),$$

$$U_{2,1}=\frac{3}{2}(3x^2y+y^3-y),\quad U_{1,2}=\frac{3}{2}(3xy^2+x^3-x).$$

Enlevons, dans les seconds membres de ces égalités, les termes de degré inférieur au troisième, et considérons les égalités ainsi réduites comme formant un système de quatre équations à quatre inconnues (x^3), (xy^2), (x^2y), (y^3). J'ai mis entre parenthèses les quantités x^3, xy^2, x^2y, y^3, qui n'ont plus leur signification habituelle si on laisse à $U_{3,0}$, $U_{2,1}$, $U_{1,2}$, $U_{0,3}$ leurs valeurs effectives. En résolvant le système d'équations, on trouvera, par un calcul facile,

$$(x^3)=\frac{1}{2}U_{3,0}-\frac{1}{6}U_{1,2},\quad (xy^2)=\frac{5}{18}U_{1,2}-\frac{1}{6}U_{3,0},$$

$$(y^3)=\frac{1}{2}U_{0,3}-\frac{1}{6}U_{2,1},\quad (x^2y)=\frac{5}{18}U_{2,1}-\frac{1}{6}U_{0,3}.$$

Les seconds membres de ces formules deviennent, quand on y remplace $U_{3,0}$, $U_{1,2}$, $U_{2,1}$, $U_{0,3}$ par leurs valeurs,

$$x^3-\frac{1}{2}x=\frac{1}{8}V_{3,0},\quad xy^2-\frac{1}{6}x=\frac{1}{24}V_{1,2},$$

$$y^3-\frac{1}{2}y=\frac{1}{8}V_{0,3},\quad x^2y-\frac{1}{6}y=\frac{1}{24}V_{2,1},$$

ce qu'on reconnaîtra facilement, si l'on se reporte aux valeurs suivantes de $V_{0,3}$, $V_{1,2}$, $V_{2,1}$, $V_{3,0}$,

$$V_{3,0}=8x^3-4x,\quad V_{1,2}=24xy^2-4x,$$

$$V_{0,3}=8y^3-4y,\quad V_{2,1}=24x^2y-4y.$$

En général, considérons les égalités qui donnent les valeurs de toutes les fonctions $U_{m,n}$, pour lesquelles la somme $m+n$ est constante et égale à k, et, supprimant dans les seconds membres de ces égalités les termes dont le degré est inférieur à k, regardons les égalités ainsi transformées comme formant un système de $k+1$ équations du premier degré à $k+1$ inconnues x^k, $x^{k-1}y, \ldots, x^h y^{k-h}, \ldots, y^k$. On en déduira, par exemple, pour $x^h y^{k-h}$, l'expression suivante :

$$(x^h y^{k-h}) = \alpha U_{0,k} + \beta U_{1,k-1} + \gamma U_{2,k-2} + \ldots,$$

quelques-unes des quantités α, β, $\gamma, \ldots$ pouvant être nulles.

Je dis que cette expression, quand on y remplace $U_{0,k}$, $U_{1,k-1}$, $U_{2,k-2}, \ldots$ par leurs valeurs, devient, sauf un facteur constant, la fonction $V_{h,k-h}$.

En effet, remarquons d'abord que le seul terme de degré k dans cette expression est le terme $x^h y^{k-h}$ avec l'unité pour coefficient; c'est une conséquence de la manière même dont on a formé cette expression. Cela posé, développons le polynôme $\alpha U_{0,k} + \beta U_{1,k-1} + \ldots$, suivant les fonctions V, de cette manière

$$\alpha U_{0,k} + \beta U_{1,k-1} + \ldots = \sum A_{\mu,\nu} V_{\mu,\nu}.$$

On déterminera $A_{\mu,\nu}$ par l'équation

$$A_{\mu,\nu} \frac{\pi}{\mu+\nu+1} \frac{(\mu+\nu)!}{\mu!\,\nu!} = \iint (\alpha U_{0,k} + \beta U_{1,k-1} + \ldots) U_{\mu,\nu}\, dx\, dy,$$

les variables dans l'intégrale satisfaisant à la condition $x^2 + y^2 \leqq 1$ (*).

D'où l'on voit d'abord que $A_{\mu,\nu}$ sera nul si $\mu+\nu$ est différent de k, car chacune des intégrales $\iint U_{0,k} U_{\mu,\nu}\, dx\, dy$, $\iint U_{1,k-1} U_{\mu,\nu}\, dx\, dy, \ldots$ sera nulle. Il faut donc que $\mu+\nu$ soit égal à k.

Si l'on se rappelle la forme sous laquelle M. Hermite a mis la fonction $U_{\mu,\nu}$, on verra, par une transformation facile, que l'intégrale

$$\iint (\alpha U_{0,k} + \beta U_{1,k-1} + \ldots) U_{\mu,\nu}\, dx\, dy$$

(*) Je ne répéterai plus cette condition qui intervient dans toutes les intégrales suivantes, elle sera sous-entendue.

est égale à

$$\frac{1}{\mu!\,\nu!\,2^{\mu+\nu}}(-1)^{\mu+\nu}\int\int(x^2+y^2-1)^{\mu+\nu}\frac{d^{\mu+\nu}(\alpha\,U_{0,k}+\beta\,U_{1,k-1}+\ldots)}{dx^\mu\,dy^\nu}\,dx\,dy.$$

Maintenant, on reconnaît clairement, puisque le seul terme de degré k, qui existe dans $(\alpha\,U_{0,k}+\beta\,U_{1,k-1}+\ldots)$, est $x^h y^{k-h}$, que l'intégrale précédente sera nulle, si l'on n'a pas $\mu=h$, $\nu=k-h$. Le théorème est donc démontré. Le coefficient de $V_{h,k-h}$ sera donné par la formule

$$A_{h,k-h}=\frac{h!\,(k-h)!}{k!\,2^k}.$$

Équations linéaires aux dérivées partielles auxquelles satisfont les fonctions $U_{m,n}$ et $V_{m,n}$.

Soit

$$U=\frac{d^{m+n}(x^2+y^2-1)^{m+n}}{dx^m\,dy^n}.$$

Considérons la fonction homogène

$$T=\frac{d^{m+n}(x^2+y^2-z^2)^{m+n}}{dx^m\,dy^n},$$

on aura

$$x\frac{dT}{dx}+y\frac{dT}{dz}+z\frac{dT}{dz}=(m+n)T,$$

ou bien

$$x\frac{dT}{dx}+y\frac{dT}{dy}-2(m+n)z^2\frac{d^{m+n}(x^2+y^2-z^2)^{m+n-1}}{dx^m\,dy^n}=(m+n)T.$$

Si l'on fait $z=1$, dans cette égalité, il vient

$$x\frac{dU}{dx}+y\frac{dU}{dy}-2(m+n)\frac{d^{m+n}(x^2+y^2-1)^{m+n-1}}{dx^m\,dy^n}=(m+n)U,$$

d'où l'on tire

$$(1)\qquad 2(m+n)\frac{d^{m+n}(x^2+y^2-1)^{m+n-1}}{dx^m\,dy^n}=x\frac{dU}{dx}+y\frac{dU}{dy}-(m+n)U.$$

D'un autre côté, soit

$$S = (x^2 + y^2 - 1)^{m+n},$$

on en tire

$$\frac{dS}{dx} = 2(m+n)\,x(x^2+y^2-1)^{m+n-1}.$$

Différentiant cette égalité $m+1$ fois par rapport à x, et n fois par rapport à y, on a

$$\frac{d^{m+n+2}S}{dx^{m+n+2}} = 2(m+n)\,x\,\frac{d^{m+n+1}(x^2+y^2-1)^{m+n-1}}{dx^{m+1}\,dy^n} + 2(m+n)(m+1)\,\frac{d^{m+n}(x^2+y^2-1)^{m+n-1}}{dx^m\,dy^n}.$$

En tenant compte de la relation (1), on trouve donc l'équation suivante, à laquelle satisfait la fonction U,

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^2U}{dx^2} - x\,\frac{d\left[x\dfrac{dU}{dx} + y\dfrac{dU}{dy} - (m+n)U\right]}{dx} \\ &\qquad - (m+1)\left[x\frac{dU}{dx} + y\frac{dU}{dy} - (m+n)U\right] = 0. \end{aligned}\right.$$

On a de même l'équation

$$\frac{d^2U}{dy^2} - y\,\frac{d\left[x\dfrac{dU}{dx} + y\dfrac{dU}{dy} - (m+n)U\right]}{dy} - (n+1)\left[x\frac{dU}{dx} + y\frac{dU}{dy} - (m+n)U\right] = 0.$$

On peut remarquer l'analogie qui existe entre ces équations et l'équation différentielle du second ordre à laquelle satisfait la fonction X_n. Cette dernière équation est

$$(1-x^2)\frac{d^2X_n}{dx^2} - 2x\frac{dX_n}{dx} + n(n+1)X_n = 0,$$

et peut s'écrire

$$\frac{d^2X_n}{dx^2} - x\,\frac{d\left(x\dfrac{dX_n}{dx} - nX_n\right)}{dx} - (n+1)\left(x\frac{dX_n}{dx} - nX_n\right) = 0.$$

Effectuant les différentiations indiquées dans l'équation (2) et la suivante, on met ces équations sous la forme

$$(3)\quad \begin{cases} (1-x^2)\dfrac{d^2U}{dx^2} - xy\dfrac{d^2U}{dx\,dy} + (n-2)x\dfrac{dU}{dx} \\ \qquad - (m+1)y\dfrac{dU}{dy} + (m+n)(m+1)U = 0, \\ (1-y^2)\dfrac{d^2U}{dy^2} - xy\dfrac{d^2U}{dx\,dy} + (m-2)y\dfrac{dU}{dy} \\ \qquad - (n+1)x\dfrac{dU}{dx} + (m+n)(n+1)U = 0. \end{cases}$$

Ajoutant les équations (3), on obtient l'équation

$$(1-x^2)\frac{d^2U}{dx^2} + (1-y^2)\frac{d^2U}{dy^2}$$
$$- 2xy\frac{d^2U}{dx\,dy} - 3x\frac{dU}{dx} - 3y\frac{dU}{dy} + (m+n)(m+n+1)U = 0,$$

à laquelle, comme nous le verrons tout à l'heure, satisfait la fonction $V_{m,n}$.

Cherchons le polynôme le plus général satisfaisant au système (3). Soit Ax^py^q l'un des termes du plus haut degré; je dis que l'on doit avoir $p+q=m+n$. Car il faut que les deux équations suivantes soient satisfaites

$$-p(p-1) - pq + (n-2)p - (m+1)q + (m+n)(m+1) = 0,$$
$$-q(q-1) - pq + (m-2)q - (n+1)p + (m+n)(n+1) = 0.$$

En les ajoutant, on obtient, après simplification, l'équation

$$-(p+q)(p+q+2) + (m+n)(m+n+2) = 0,$$

qui donne $p+q=m+n$.

En les retranchant, et remplaçant dans le résultat p par $m+n-q$, q s'élimine de lui-même, et l'on a une identité. Ceci prouve que le polynôme du degré $m+n$ qui satisfait au système (3) contient plusieurs termes du degré $m+n$.

Mais il ne faudrait pas croire que ce polynôme le plus général est le polynôme $U_{m,n}$ ou $kU_{m,n}$; en d'autres termes, que le système (3) caractérise la fonction $U_{m,n}$, en se bornant aux solutions qui sont des fonctions rationnelles et entières. Il est facile de s'assurer qu'il n'en est pas ainsi.

Si l'on suppose $m = 3$, $n = 0$, le polynôme le plus général qui satisfait au système (3), est

$$H(5x^3 + 3xy^2 - 3x) + K(2y^3 + 12x^2y - 3y)$$

avec deux constantes arbitraires. Le coefficient de H est, sauf un facteur constant, la valeur de $U_{3,0}$; car on a

$$U_{3,0} = \frac{1}{2}(5x^3 + 3xy^2 - 3x);$$

mais il y a un autre polynôme.

Si l'on suppose $m = 3$, $n = 2$, le polynôme le plus général qui satisfait au système (3) est

$$\begin{gathered}H(7x^5 + 30x^3y^2 + 15xy^4 - 10x^3 - 18xy^2 + 3x)\\ + Ky(120x^4 + 160x^2y^2 + 24y^4 + 40y^2 - 120x^2 + 15),\end{gathered}$$

avec deux constantes arbitraires H et K. Le coefficient de H est, sauf un facteur constant, la valeur de $U_{3,2}$; car on a

$$U_{3,2} = \frac{5}{4}(7x^5 + 30x^3y^2 + 15xy^4 - 10x^3 - 18xy^2 + 3x).$$

Je vais démontrer, en général, que le système (3) est satisfait par deux polynômes du degré $m + n$, et indiquer un moyen très-simple de calculer les coefficients de ces polynômes.

Pour cela, je remarque que la solution complète du système (3) contient quatre constantes arbitraires. En effet, si l'on se donne pour $x = 0$, $y = 0$ les valeurs de U, $\frac{dU}{dx}$, $\frac{dU}{dy}$, $\frac{d^2U}{dx\,dy}$, on en conclura les valeurs de $\frac{d^2U}{dx^2}$ et de $\frac{d^2U}{dy^2}$.

En différentiant successivement par rapport à x et par rapport à y les équations du système, on aura quatre équations qui donneront les valeurs de $\frac{d^3U}{dx^3}$, $\frac{d^3U}{dx^2\,dy}$, $\frac{d^3U}{dx\,dy^2}$, $\frac{d^3U}{dy^3}$. Ces valeurs seront finies, car le déterminant du système de ces quatre équations est

$$(1 - x^2)(1 - y^2)(1 - x^2 - y^2).$$

En continuant de la même manière, on verra que toutes les dérivées successives de U pourront s'exprimer au moyen des valeurs arbitraires données primitivement à U, $\frac{dU}{dx}$, $\frac{dU}{dy}$ et $\frac{d^2U}{dx\,dy}$. On conclut de là que la solution complète du système d'équations aux dérivées partielles ne contient que quatre constantes arbitraires. Cela posé, je cherche un système d'équations de la forme

$$(1-x^2)\frac{d^2P}{dx^2} - xy\frac{d^2P}{dx\,dy} + hx\frac{dP}{dx} + h'y\frac{dP}{dy} + h''P = 0,$$
$$(1-y^2)\frac{d^2P}{dy^2} - xy\frac{d^2P}{dx\,dy} + kx\frac{dP}{dx} + k'y\frac{dP}{dy} + k''P = 0,$$

tel, qu'en posant $\frac{d^{m+n}P}{dx^m\,dy^n} = U$, la fonction U satisfasse au système (3).

Pour cela, je différentie m fois par rapport à x, et n fois par rapport à y, les équations précédentes; j'obtiens alors un système d'équations en U, analogue au système (3). Les coefficients seuls diffèrent dans les deux systèmes. Je détermine ensuite h, h', h'', k, k', k'', de manière que les coefficients correspondants soient les mêmes.

On trouve sans peine que le système d'équations cherché est, en posant $m+n=q$,

$$(4)\quad \begin{cases} (1-x^2)\frac{dP^2}{dx^2} - xy\frac{d^2P}{dx\,dy} + 2(q-1)x\frac{dP}{dx} - y\frac{dP}{dy} + 2qP = 0, \\ (1-y^2)\frac{dP^2}{dy^2} - xy\frac{d^2P}{dx\,dy} + 2(q-1)y\frac{dP}{dy} - x\frac{dP}{dx} + 2qP = 0. \end{cases}$$

Les solutions générales des systèmes (3) et (4) contenant chacune quatre constantes arbitraires, on déduira la première solution de la seconde.

Or je vais démontrer que ce système (4) a deux solutions polynômes du degré $2q$, l'un ne contenant que des termes de la forme $Hx^{2\alpha}y^{2\beta}$, l'autre que des termes de la forme $Hx^{2\alpha+1}y^{2\beta+1}$.

On reconnaît tout d'abord qu'un polynôme ne peut satisfaire à ce système que s'il est du degré $2q$. Soit, en effet, Ax^hy^k un des termes du degré le plus élevé. On doit avoir les deux équations suivantes :

$$-h(h-1) - hk + 2h(q-1) - k + 2q = 0,$$
$$-h(k-1) - hk + 2k(q-1) - h + 2q = 0,$$

qui peuvent s'écrire

$$(h+1)(2q-h-k)=0,$$
$$(k+1)(2q-h-k)=0,$$

d'où

$$h+k=2q.$$

Cela posé, soit $P=\sum \alpha_{\mu,\nu} x^\mu y^\nu$ un polynôme du degré $2q$; cherchons à en déterminer les coefficients de manière à ce qu'il satisfasse au système (4).

On aura une série d'équations analogues aux suivantes :

$$(5)\qquad \begin{cases} (\mu+2)\alpha_{\mu+2,\nu}=(\mu+\nu-2q)\alpha_{\mu,\nu}, \\ (\nu+2)\alpha_{\mu,\nu+2}=(\mu+\nu-2q)\alpha_{\mu,\nu}. \end{cases}$$

Supposons que l'on ait $\mu+\nu=2q-1$. Comme $\alpha_{\mu+2,\nu}$ est nul, on voit que $\alpha_{\mu,\nu}$ le sera également. Donc le polynôme ne contient pas de termes du degré $2q-1$. On en conclut immédiatement qu'il ne contiendra pas non plus de termes du degré $2q-3$, et en général de termes du degré $2q-k$, k étant impair.

Donnons-nous la valeur M de $\alpha_{2q,0}$. La première des équations (5) nous déterminera, au moyen de M, les valeurs de $\alpha_{2q-2,0}$, $\alpha_{2q-4,0}, \ldots$, $\alpha_{0,0}$, et l'on aura

$$\alpha_{2q,0}=M,\quad \alpha_{2q-2,0}=-qM,$$
$$\alpha_{2q-2h,0}=(-1)^h\frac{q(q-1)(q-2)\ldots(q-h+1)}{h!}M.$$

La seconde des équations (5) nous donnera successivement

$$\alpha_{2q-2h,2}=(-1)^{h+1}\frac{h}{1}\frac{q(q-1)(q-2)\ldots(q-h+1)}{h!}M,$$
$$\alpha_{2q-2h,2k}=(-1)^{h+k}\frac{h(h-1)(h-2)\ldots(h-k+1)}{k!}\frac{q(q-1)(q-2)\ldots(q-h+1)}{h!}M.$$

Nous déterminerons donc ainsi, au moyen de M, tous les coefficients des termes $x^\mu y^\nu$, dans lesquels μ et ν sont pairs, et pas d'autres. Par conséquent, nous trouvons un polynôme qu'il est facile de mettre sous la forme $M(x^2+y^2-1)^q$.

On peut faire à ce raisonnement une objection. Je ne me suis pas servi de toutes les équations (5) où entrent des coefficients $\alpha_{2q-2h,2k}$; mais il est facile de voir que, pour les valeurs précédentes de ces coefficients, toutes les équations qu'on déduit de la première du système (5), en donnant à ν les valeurs $2, 4, 6, \ldots$, et qui sont celles que nous n'avons pas employées, sont satisfaites d'elles-mêmes. Le type de ces équations est

$$(2q - 2h + 2)\,\alpha_{2q-2h+2,2k} = -2(h-k)\,\alpha_{2q-2h,2k}.$$

Si l'on remplace dans cette équation $\alpha_{2q-2h+2,2k}$ et $\alpha_{2q-2h,2k}$ par leurs valeurs trouvées précédemment, elle sera satisfaite identiquement.

Si l'on se donne la valeur N de $\alpha_{2q-1,1}$, on déterminera au moyen du système (5), et sans la moindre impossibilité, tous les coefficients $\alpha_{\mu,\nu}$ dans lesquels μ et ν sont des nombres entiers impairs, dont la somme n'est pas supérieure à $2q$. On obtiendra ainsi un autre polynôme, impair en x et en y. Comme on a employé toutes les équations (5), on n'a que ces deux polynômes. Il leur correspondra pour le système d'équations (3) deux solutions qui seront des polynômes du degré $m+n$, dans chacun desquels les exposants de x, et ceux de y iront en variant de deux unités; mais tandis que, dans le premier, les exposants de x seront de même parité que m, dans le second, ces exposants seront impairs si m est pair, et pairs si m est impair.

Je passe maintenant à la recherche d'un système d'équations aux dérivées partielles auquel satisfasse la fonction $V_{m,n}$.

On a

$$(6)\qquad (1 - 2ax - 2by + a^2 + b^2)^{-1} = \sum a^m b^n V_{m,n}.$$

On en déduit, en différentiant l'égalité précédente, successivement par rapport à x, y, a et b,

$$(7)\qquad 2a(1 - 2ax - 2by + a^2 + b^2)^{-2} = \sum a^m b^n \frac{dV_{m,n}}{dx},$$

$$(8)\qquad 2b(1 - 2ax - 2by + a^2 + b^2)^{-2} = \sum a^m b^n \frac{dV_{m,n}}{dy},$$

$$(9)\qquad 2(x-a)(1 - 2ax - 2by + a^2 + b^2)^{-2} = \sum m a^{m-1} b^n V_{m,n},$$

$$(10)\qquad 2(y-b)(1 - 2ax - 2by + a^2 + b^2)^{-2} = \sum n a^m b^{n-1} V_{m,n}.$$

Comparant successivement les égalités (7) et (9), (7) et (8), (7) et (10), (6) et (7), on conclut

$$(x-a)\sum a^m b^n \frac{dV_{m,n}}{dx} = a\sum m a^{m-1} b^n V_{m,n},$$

$$a\sum a^m b^n \frac{dV_{m,n}}{dy} = b\sum a^m b^n \frac{dV_{m,n}}{dx},$$

$$(y-b)\sum a^m b^n \frac{dV_{m,n}}{dx} = a\sum n a^m b^{n-1} V_{m,n},$$

$$2a\sum a^m b^n V_{m,n} = (1-2ax-2by+a^2+b^2)\sum a^m b^n \frac{dV_{m,n}}{dx},$$

d'où l'on déduit les relations suivantes :

(11) $$x\frac{dV_{m,n}}{dx} - \frac{dV_{m-1,n}}{dx} = mV_{m,n},$$

(12) $$\frac{dV_{m-1,n}}{dy} = \frac{dV_{m,n-1}}{dx},$$

(13) $$y\frac{dV_{m,n}}{dx} - \frac{dV_{m,n-1}}{dx} = (n+1)V_{m-1,n+1},$$

(14) $$2V_{m-1,n} = \frac{dV_{m,n}}{dx} - 2x\frac{dV_{m-1,n}}{dx} - 2y\frac{dV_{m,n-1}}{dx} + \frac{dV_{m-2,n}}{dx} + \frac{dV_{m,n-2}}{dx}.$$

Dans la dernière égalité, je substitue à la place de $\frac{dV_{m-2,n}}{dx}$ et $\frac{dV_{m,n-2}}{dx}$ leurs valeurs $x\frac{dV_{m-1,n}}{dx} - (m-1)V_{m-1,n}$ et $y\frac{dV_{m,n-1}}{dx} - nV_{m-1,n}$ tirées des relations (11) et (13), après qu'on y a remplacé, dans la première, m par $m-1$, et, dans la seconde, n par $n-1$. Il vient alors

(15) $$(m+n+1)V_{m-1,n} = \frac{dV_{m,n}}{dx} - x\frac{dV_{m-1,n}}{dx} - y\frac{dV_{m,n-1}}{dx}.$$

Différentions par rapport à x : nous aurons

$$(m+n+2)\frac{dV_{m-1,n}}{dx} = \frac{d^2V_{m,n}}{dx^2} - x\frac{d^2V_{m-1,n}}{dx^2} - y\frac{d^2V_{m,n-1}}{dx^2}.$$

Mais

$$\frac{dV_{m-1,n}}{dx} = x\frac{dV_{m,n}}{dx} - mV_{m,n},$$

à cause de l'équation (11);

$$\frac{d^2 V_{m-1,n}}{dx^2} = x\frac{d^2 V_{m,n}}{dx} - (m-1)\frac{dV_{m,n}}{dx},$$

à cause de la relation précédente; enfin

$$\frac{d^2 V_{m,n-1}}{dx^2} = \frac{d^2 V_{m-1,n}}{dx\,dy},$$

à cause de la relation (12), et cette dernière expression est égale, en vertu de l'équation (11), à

$$x\frac{d^2 V_{m,n}}{dx\,dy} - m\frac{dV_{m,n}}{dy}.$$

Donc on a, après réduction, l'équation

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} &(1-x^2)\frac{d^2 V_{m,n}}{dx^2} - xy\frac{d^2 V_{m,n}}{dx\,dy}\\ &\quad -(n+3)x\frac{dV_{m,n}}{dx} + my\frac{dV_{m,n}}{dy} + (m+n+2)V_{m,n} = 0.\end{aligned}\right.$$

On trouverait de même

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} &(1-y^2)\frac{d^2 V_{m,n}}{dy^2} - xy\frac{d^2 V_{m,n}}{dx\,dy}\\ &\quad -(m+3)y\frac{dV_{m,n}}{dy} + nx\frac{dV_{m,n}}{dx} + n(m+n+2)V_{m,n} = 0.\end{aligned}\right.$$

En ajoutant ces relations (16 et 17), on trouve l'équation

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned} &(1-x^2)\frac{d^2 V_{m,n}}{dx^2} + (1-y^2)\frac{d^2 V_{m,n}}{dy^2} - 2xy\frac{d^2 V_{m,n}}{dx\,dy}\\ &\quad -3x\frac{dV_{m,n}}{dx} - 3y\frac{dV_{m,n}}{dy} + (m+n)(m+n+2)V_{m,n} = 0,\end{aligned}\right.$$

à laquelle satisfait, comme nous l'avons vu plus haut, la fonction $U_{m,n}$.

On peut remarquer que ces équations (16) et (17) peuvent s'écrire de la manière suivante, en y remplaçant $V_{m,n}$ par V :

$$\frac{d^2V}{dx^2} - x\frac{d\left[x\frac{dV}{dx} + y\frac{dV}{dy} + (m+n+2)V\right]}{dx} + m\left[x\frac{dV}{dx} + y\frac{dV}{dy} + (m+n+2)V\right] = 0,$$

$$\frac{d^2V}{dy^2} - y\frac{d\left[x\frac{dV}{dx} + y\frac{dV}{dy} + (m+n+2)V\right]}{dy} + n\left[x\frac{dV}{dx} + y\frac{dV}{dy} + (m+n+2)V\right] = 0.$$

Cherchons à satisfaire aux équations (16) et (17) par un polynôme.

Soit Ax^py^q l'un des termes du plus haut degré.

On a les deux équations

$$-p(p-1) - pq - (n+3)p + mq + m(m+n+2) = 0,$$
$$-q(q-1) - pq - (m+3)q + np + n(m+n+2) = 0.$$

En les ajoutant, on trouve, aprés réduction,

$$-(p+q)(p+q+2) + (m+n)(m+n+2) = 0,$$

d'où

$$p+q = m+n.$$

En les retranchant et remplaçant dans le résultat $p^2 - q^2$ par

$$(p-q)(m+n),$$

on obtient une équation du premier degré, qui, combinée avec l'équation

$$p+q = m+n,$$

forme un système dont la solution est

$$p = m, \quad q = n.$$

On voit donc que le seul terme de degré $m+n$ du polynôme, qui est la solution du système (16) et (17), est un terme en x^my^n.

Pour donner une application de ces équations aux dérivées partielles, je vais en conclure les égalités

$$\int\int U_{m,n} V_{\mu,\nu}\, dx\, dy = 0, \qquad \int\int U_{m,n} U_{\mu,\nu}\, dx\, dy = 0, \qquad \int\int V_{m,n} V_{\mu,\nu}\, dx\, dy = 0,$$

quand $m+n$ est différent de $\mu+\nu$.

Reprenons l'équation (18), dans laquelle nous remplacerons successivement $V_{m,n}$ par U et V; nous obtiendrons ainsi deux équations.

Multiplions la première par $V\,dx\,dy$, la seconde par $U\,dx\,dy$; retranchons les résultats, et intégrons entre les limites $x^2+y^2 \overline{\gtrless} 1$; il vient

$$\begin{aligned}
&[(\mu+\nu)(\mu+\nu+2)-(m+n)(m+n+2)]\int\int UV\,dx\,dy \\
&\quad = \int\int(1-x^2)\left(V\frac{d^2U}{dx^2}-U\frac{d^2V}{dx^2}\right)dx\,dy + \int\int(1-y^2)\left(V\frac{d^2U}{dy^2}-U\frac{d^2V}{dy^2}\right)dx\,dy \\
&\quad - 2\int\int xy\left(V\frac{d^2U}{dx\,dy}-U\frac{d^2V}{dx\,dy}\right)dx\,dy \\
&\quad - 3\int\int x\left(V\frac{dU}{dx}-U\frac{dV}{dx}\right)dx\,dy - 3\int\int y\left(V\frac{dU}{dy}-U\frac{dV}{dy}\right)dx\,dy.
\end{aligned}$$

Nous allons démontrer que le second membre est nul.

Pour cela, je remarque que l'on a les identités suivantes :

$$\begin{aligned}
&(1-x^2)\left(V\frac{d^2U}{dx^2}-U\frac{d^2V}{dx^2}\right)-2x\left(V\frac{dU}{dx}-U\frac{dV}{dx}\right) \\
&\quad = \frac{d\left[(1-x^2-y^2)\left(V\dfrac{dU}{dx}-U\dfrac{dV}{dx}\right)\right]}{dx}+y^2\left(V\frac{d^2U}{dx^2}-U\frac{d^2V}{dx^2}\right), \\
&(1-y^2)\left(V\frac{d^2U}{dy^2}-U\frac{d^2V}{dy^2}\right)-2y\left(V\frac{dU}{dy}-U\frac{dV}{dy}\right) \\
&\quad = \frac{d\left[(1-x^2-y^2)\left(V\dfrac{dU}{dy}-U\dfrac{dV}{dy}\right)\right]}{dy}+x^2\left(V\frac{d^2U}{dy^2}-U\frac{d^2V}{dy^2}\right), \\
&-xy\left(V\frac{d^2U}{dx\,dy}-U\frac{d^2V}{dx\,dy}\right)-x\left(V\frac{dU}{dx}-U\frac{dV}{dx}\right) \\
&\quad = -\frac{d\left[xy\left(V\dfrac{dU}{dx}-U\dfrac{dV}{dx}\right)\right]}{dy}+xy\left(\frac{dV}{dy}\frac{dU}{dx}-\frac{dU}{dy}\frac{dV}{dx}\right),
\end{aligned}$$

$$-xy\left(\mathrm{V}\frac{d^2\mathrm{U}}{dx\,dy}-\mathrm{U}\frac{d^2\mathrm{V}}{dx\,dy}-y\left(\mathrm{V}\frac{d\mathrm{U}}{dy}-\mathrm{U}\frac{d\mathrm{V}}{dy}\right)\right.$$
$$=-\frac{d\left[xy\left(\mathrm{V}\frac{d\mathrm{U}}{dy}-\mathrm{U}\frac{d\mathrm{V}}{dy}\right)\right]}{dx}+xy\left(\frac{d\mathrm{U}}{dy}\frac{d\mathrm{V}}{dx}-\frac{d\mathrm{V}}{dy}\frac{d\mathrm{U}}{dx}\right).$$

Si l'on observe, en outre, que les intégrales

$$\int\!\!\int\frac{d\left[(1-x^2-y^2)\left(\mathrm{V}\frac{d\mathrm{U}}{dx}-\mathrm{U}\frac{d\mathrm{V}}{dx}\right)\right]}{dx}dx\,dy$$

et

$$\int\!\!\int\frac{d\left[(1-x^2-y^2)\left(\mathrm{V}\frac{d\mathrm{U}}{dx}-\mathrm{U}\frac{d\mathrm{V}}{dy}\right)\right]}{dy}dx\,dy$$

sont nulles, on verra que le second membre de la relation donnée plus haut se réduit à

$$\int_{-1}^{+1}y^2\left[\mathrm{V}\frac{d\mathrm{U}}{dx}-\mathrm{U}\frac{d\mathrm{V}}{dx}\right]_x dy+\int_{-1}^{+1}x^2\left[\mathrm{V}\frac{d\mathrm{U}}{dy}-\mathrm{U}\frac{d\mathrm{V}}{dy}\right]_y dx$$
$$-\int_{-1}^{+1}dx\left[xy\left(\mathrm{V}\frac{d\mathrm{U}}{dx}-\mathrm{U}\frac{d\mathrm{V}}{dx}\right)\right]_y-\int_{-1}^{+1}dy\left[xy\left(\mathrm{V}\frac{d\mathrm{U}}{dy}-\mathrm{U}\frac{d\mathrm{V}}{dy}\right)\right]_x.$$

L'indice x, qui se trouve à droite de deux crochets, indique que l'on a la différence des valeurs que prennent les quantités entre crochets, lorsqu'on y remplace successivement x par $+\sqrt{1-y^2}$ et $-\sqrt{1-y^2}$.

L'indice y placé à droite des deux autres crochets a une signification analogue.

Je vais démontrer que l'on a

$$\int_{-1}^{+1}y^2\left[\mathrm{V}\frac{d\mathrm{U}}{dx}-\mathrm{U}\frac{d\mathrm{V}}{dx}\right]_x dy=\int_{-1}^{+1}dx\left[xy\left(\mathrm{V}\frac{d\mathrm{U}}{dx}-\mathrm{U}\frac{d\mathrm{U}}{dx}\right)\right]_y.$$

Pour cela, je considère un terme quelconque $\mathrm{A}x^py^q$ du polynôme $\mathrm{V}\frac{d\mathrm{U}}{dx}-\mathrm{U}\frac{d\mathrm{V}}{dx}$; nous allons voir qu'il donne dans les deux intégrales le même résultat. Ce résultat est zéro, si p est pair, et aussi, dans le cas où p est impair, si q est impair. Dans le cas de p impair et q pair, les deux résultats fournis par le terme en question, dans les deux intégrales, sont

$$4A\int_0^1(\sqrt{1-y^2})^p y^{q+2}\,dy \quad \text{et} \quad 4A\int_0^1 x^{p+1}(\sqrt{1-x^2})^{q+1}\,dx.$$

Or on passe du premier au second, en posant $y=\sqrt{1-x^2}$. De même, les deux autres intégrales du second membre sont égales, de sorte que les théorèmes annoncés sont prouvés.

On a dû remarquer les fonctions

$$x\frac{dU_{m,n}}{dx}+y\frac{dU_{m,n}}{dy}-(m+n)U_{m,n}, \quad x\frac{dV_{m,n}}{dx}+y\frac{dV_{m,n}}{dy}+(m+n+2)V_{m,n},$$

qui entrent dans les équations aux dérivées partielles. Ces fonctions peuvent être considérées comme naissant du développement de certaines expressions, qui ont une relation très-simple avec celles qui engendrent les fonctions $U_{m,n}$, $V_{m,n}$.

On prouvera sans difficulté que l'on a

$$\begin{aligned}&2(1-2ax-2by+a^2+b^2)^{-2}\\&\quad=\sum a^m b^n\left[x\frac{dV_{m,n}}{dx}+y\frac{dV_{m,n}}{dy}+(m+n+2)V_{m,n}\right],\\&(a^2+b^2)[(1-ax-by)^2-(a^2+b^2)(x^2+y^2-1)]^{-\frac{3}{2}}\\&\quad=\sum a^m b^n\left[x\frac{dU_{m,n}}{dx}+y\frac{dU_{m,n}}{dy}-(m+n)U_{m,n}\right].\end{aligned}$$

On peut se servir de ce dernier résultat pour obtenir directement, et sans employer la forme que M. Hermite a donnée aux fonctions $U_{m,n}$, le système d'équations que nous avons déjà trouvé pour ces fonctions. Je n'insiste pas là-dessus.

Il m'a semblé intéressant de donner la solution complète du système d'équations dont la fonction $U_{m,n}$ est une solution. Nous avons trouvé une seconde solution, qui est un polynôme; mais il en existe deux autres que nous allons indiquer. Pour cela, je reprends le système (4). Remarquant que les premiers membres des équations de ce système sont des dérivées, on en conclura

$$(19)\qquad \begin{cases}(1-x^2)\dfrac{dP}{dx}-xy\dfrac{dP}{dy}+2qxP=\varphi(y),\\[2mm](1-y^2)\dfrac{dP}{dy}-xy\dfrac{dP}{dx}+2qyP=\psi(x).\end{cases}$$

En résolvant ce système par rapport à $\frac{dP}{dx}$ et $\frac{dP}{dy}$, on l'écrira de la manière suivante :

$$(19)' \quad \begin{cases} (1-x^2-y^2)\dfrac{dP}{dx} + 2qxP = \varphi(y)(1-y^2) + xy\psi(x), \\ (1-x^2-y^2)\dfrac{dP}{dy} + 2qyP = \psi(x)(1-x^2) + xy\varphi(y). \end{cases}$$

On en déduit, en différentiant la première de ces équations par rapport à y, la seconde par rapport à x, et en retranchant membre à membre les relations résultantes,

$$2(q+1)\left(x\frac{dP}{dy} - y\frac{dP}{dx}\right) = (1-y^2)\varphi'(y) - 3y\varphi(y) + 3x\psi(x) - (1-x^2)\psi'(x).$$

Mais les équations (19) donnent

$$x\frac{dP}{dy} - y\frac{dP}{dx} = x\psi(x) - y\varphi(y),$$

de sorte qu'on a, entre les fonctions $\psi(x)$ et $\varphi(y)$, la relation

$$(1-x^2)\psi'(x) + (2q-1)x\psi(x) = (1-y^2)\varphi'(y) + (2q-1)y\varphi(y).$$

Chacun des membres de cette équation est évidemment égal à une même constante A. On en conclut les valeurs de $\psi(x)$ et $\varphi(y)$, savoir :

$$\psi(x) = B(1-x^2)^{q-\frac{1}{2}} + A(1-x^2)^{q-\frac{1}{2}} \int_0^x \frac{dx}{(1-x^2)^{q+\frac{1}{2}}},$$

$$\varphi(y) = C(1-y^2)^{q-\frac{1}{2}} + A(1-y^2)^{q-\frac{1}{2}} \int_0^y \frac{dy}{(1-y^2)^{q+\frac{1}{2}}}.$$

Portons ces valeurs dans les équations (19), et résolvons la première de ces équations. On trouve, en posant

$$P = (1-x^2-y^2)^q Q,$$

$$
\begin{aligned}
Q = \Pi(y) &+ C(1-y^2)^{q+\frac{1}{2}} \int_0^x \frac{dx}{(1-x^2-y^2)^{q+1}} \\
&+ A(1-y^2)^{q+\frac{1}{2}} \int_0^y \frac{dy}{(1-y^2)^{q+\frac{1}{2}}} \int_0^x \frac{dx}{(1-x^2-y^2)^{q+1}} \\
&+ By \int_0^x \frac{x(1-x^2)^{q-\frac{1}{2}}\,dx}{(1-x^2-y^2)^{q-1}} + Ay \int_0^x dx \left[\frac{x(1-x^2)^{q-\frac{1}{2}} \displaystyle\int_0^x \frac{dx}{(1-x^2)^{q+\frac{1}{2}}}}{(1-x^2-y^2)^{q+1}} \right].
\end{aligned}
$$

Résolvons de même la seconde des équations ($19'$). En posant

$$P = (1-x^2-y^2)^q\, Q',$$

on trouvera pour Q' une valeur analogue à celle de Q; seulement il y aura dans Q' une fonction arbitraire de x, $\chi(x)$. Il faut avoir identiquement $Q' = Q$. J'écrirai cette identité de la manière suivante :

$$
\begin{aligned}
\Pi(y) &+ B\left[y \int_0^x \frac{x(1-x^2)^{q-\frac{1}{2}}\,dx}{(1-x^2-y^2)^{q+1}} - (1-x^2)^{q+\frac{1}{2}} \int_0^y \frac{dy}{(1-x^2-y^2)^{q+1}} \right] \\
&+ A \left\{ y \int_0^x dx \left[\frac{x(1-x^2)^{q-\frac{1}{2}} \displaystyle\int_0^x \frac{dx}{(1-x^2)^{q+\frac{1}{2}}}}{(1-x^2-y^2)^{q+1}} \right] \right. \\
&\qquad \left. - (1-x^2)^{q+\frac{1}{2}} \int_0^x \frac{dx}{(1-x^2)^{q+\frac{1}{2}}} \int_0^y \frac{dy}{(1-x^2-y^2)^{q+1}} + \int_0^x dx \int_0^y \frac{dy}{(1-x^2-y^2)^{q+1}} \right\} \\
= \chi(x) &+ C\left[x \int_0^y \frac{y(1-y^2)^{q-\frac{1}{2}}\,dy}{(1-x^2-y^2)^{q+1}} - (1-y^2)^{q+\frac{1}{2}} \int_0^x \frac{dx}{(1-x^2-y^2)^{q+1}} \right] \\
&+ A \left\{ x \int_0^y dy \left[\frac{y(1-y^2)^{q-\frac{1}{2}} \displaystyle\int_0^y \frac{dy}{(1-y^2)^{q+\frac{1}{2}}}}{(1-x^2-y^2)^{q+1}} \right] \right. \\
&\qquad \left. - (1-y^2)^{q+\frac{1}{2}} \int_0^y \frac{dy}{(1-y^2)^{q+\frac{1}{2}}} \int_0^x \frac{dx}{(1-x^2-y^2)^{q+1}} + \int_0^y dy \int_0^x \frac{dx}{(1-x^2-y^2)^{q+1}} \right\}.
\end{aligned}
$$

Les termes sont disposés de manière que le premier membre ne contient que la variable y, et le second membre que la variable x, comme je vais le faire voir. Je le démontrerai pour le second membre. La dérivée, par rapport à y du coefficient de C, peut être écrite

$$\frac{xy(1-y^2)^{q-\frac{1}{2}}}{(1-x^2-y^2)^{q+1}} + 2(q+1)y(1-y^2)^{q-\frac{1}{2}}\int_0^x \frac{-x^2\,dx}{(1-x^2-y^2)^{q+2}}$$
$$-y(1-y^2)^{q-\frac{1}{2}}\int_0^x \frac{dx}{(1-x^2-y^2)^{q+1}}.$$

Si l'on intègre par parties le terme du milieu, en considérant $\frac{x\,dx}{(1-x^2-y^2)^{q+2}}$ comme une différentielle par rapport à x, on reconnaît immédiatement que l'expression précédente est nulle. On verra qu'il en est de même du coefficient de A. Donc, en définitive, il faudra égaler les deux membres de l'égalité précédente à une constante D, ce qui donnera

$$\begin{aligned}
P = {} & D(1-x^2-y^2)^q + C(1-y^2)^{q+\frac{1}{2}}(1-x^2-y^2)^q\int_0^x \frac{dx}{(1-x^2-y^2)^{q+1}} \\
& + B(1-x^2)^{q+\frac{1}{2}}(1-x^2-y^2)^q\int_0^y \frac{dy}{(1-x^2-y^2)^{q+1}} \\
& + A(1-x^2-y^2)^q\Bigg[(1-y^2)^{q+\frac{1}{2}}\int_0^y \frac{dy}{(1-y^2)^{q+\frac{1}{2}}}\int_0^x \frac{dx}{(1-x^2-y^2)^{q+1}} \\
& \qquad + (1-x^2)^{q+\frac{1}{2}}\int_0^x \frac{dx}{(1-x^2)^{q+\frac{1}{2}}}\int_0^y \frac{dy}{(1-x^2-y^2)^{q+1}} \\
& \qquad - \int_0^x\int_0^y \frac{dx\,dy}{(1-x^2-y^2)^{q+1}}\Bigg].
\end{aligned}$$

Il est facile de voir que le coefficient de A est le second polynôme que nous avons déjà trouvé comme solution du système (4). Cherchons en effet les solutions de ce système qui sont des polynômes. Reportons-nous au système (19). Il faut que $\varphi(y)$ et $\psi(x)$ soient des polynômes entiers. Or, dans $\varphi(y)$, le coefficient de A est un polynôme entier. C'est ce qu'on reconnaît immédiatement au moyen de la formule de réduction

$$\int_0^y \frac{dy}{(1-y^2)^{q+\frac{1}{2}}} = \frac{2(q-1)}{2q-1}\int_0^y \frac{dy}{(1-y^2)^{q-\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2q-1}\,\frac{y}{(1-y^2)^{q-\frac{1}{2}}}.$$

Donc $B = C = 0$. Mais le système (19), pour être satisfait par la solution $(x^2 + y^2 - 1)^q$, doit avoir ses seconds membres nuls. Donc si A est différent de zéro, il n'a plus pour solution que le second polynôme, qui, par conséquent, est le coefficient de A dans la solution générale.

Mais il est facile de démontrer directement que le coefficient de A, que je désignerai par E_q, est un polynôme du degré $2q$, ne contenant que des puissances impaires de x et de y. D'abord on voit que E_q change de signe quand on change x en $-x$, et aussi quand on change y en $-y$. Donc si E_q est un polynôme, il ne contiendra que des puissances impaires de x et de y.

Si l'on considère les égalités

$$\int_0^z \frac{dz}{(1-z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{z}{\sqrt{1-z^2}},$$

$$\int_0^z \frac{dz}{(1-t^2-z^2)^2} = \frac{1}{2(1-t^2)}\,\frac{z}{1-t^2-z^2} + \frac{1}{2(1-t^2)}\int_0^z \frac{dz}{1-t^2-z^2},$$

on reconnaîtra que l'on a

$$\begin{aligned}E_1 = xy + (1-x^2-y^2)\Bigg[&\frac{x}{2}\int_0^y \frac{dy}{1-x^2-y^2} + \frac{y}{2}\int_0^x \frac{dx}{1-x^2-y^2}\\ &- \frac{y}{2}\int_0^x \frac{dx}{(1-x^2)(1-x^2-y^2)} - \frac{1}{2}\int_0^x dx\left(\frac{1}{1-x^2}\int_0^y \frac{dy}{1-x^2-y^2}\right)\Bigg].\end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\int_0^x dx\left(\frac{1}{1-x^2}\int_0^y \frac{dy}{1-x^2-y^2}\right)\\ &\quad = \frac{1}{4}\int_0^x \frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\log\frac{\sqrt{1-x^2}+y}{\sqrt{1-x^2}-y}\\ &\quad = \frac{x}{4\sqrt{1-x^2}}\log\frac{\sqrt{1-x^2}+y}{\sqrt{1-x^2}-y} - \frac{y}{2}\int_0^x \frac{x^2}{1-x^2}\,\frac{dx}{1-x^2-y^2}\\ &\quad = \frac{x}{2}\int_0^y \frac{dy}{1-x^2-y^2} + \frac{y}{2}\int_0^x \frac{dx}{1-x^2-y^2} - \frac{y}{2}\int_0^x \frac{dx}{(1-x^2)(1-x^2-y^2)},\end{aligned}$$

Donc, finalement, $E_1 = xy$. La proposition est donc vraie pour $q = 1$. Je vais faire voir généralement qu'elle est vraie pour une valeur quelconque de q, si elle l'est pour la valeur $q - 1$.

On a

$$\int_0^z \frac{dz}{(1-t^2-z^2)^{q+1}} = \frac{1}{2q(1-t^2)}\frac{z}{(1-t^2-z^2)^q} + \frac{2q-1}{2q(1-t^2)}\int_0^z \frac{z}{(1-t^2-z^2)^q},$$

$$\int_0^z \frac{dz}{(1-z^2)^{q+\frac{1}{2}}} = \frac{2(q-1)}{2q-1}\int_0^z \frac{dz}{(1-z^2)^{q-\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2q-1}\frac{z}{(1-z^2)^{q-\frac{1}{2}}}.$$

Si l'on remarque que l'expression $(1-x^2)^{q-\frac{1}{2}}\int_0^x \frac{dx}{(1-x^2)^{q-\frac{1}{2}}}$ est un polynôme du degré $2q-1$, on reconnaîtra la vérité de l'égalité suivante, à un polynôme près du degré $2q$,

$$\begin{aligned} E_q = {} & \frac{q-1}{q}(1-x^2-y^2)E_{q-1} \\ & + (1-x^2-y^2)^q\left[\frac{x}{2q}\int_0^y \frac{dy}{(1-x^2-y^2)^q} + \frac{y}{2q}\int_0^x \frac{dx}{(1-x^2-y^2)^q}\right. \\ & \left. + \frac{q-1}{q}\int_0^x\int_0^y \frac{dx\,dy}{(1-x^2-y^2)^q} - \int_0^x\int_0^y \frac{dx\,dy}{(1-x^2-y^2)^{q+1}}\right]. \end{aligned}$$

Le facteur entre crochets dans le second membre est une constante, car on reconnaîtra facilement que ses dérivées partielles par rapport à x et à y sont nulles. Le théorème est donc démontré.

Nous avons indiqué antérieurement la manière de calculer les coefficients de ce polynôme. On trouve, en représentant par $A_{2k+1,2h+1}$ le coefficient du terme en $x^{2k+1}y^{2h+1}$ dans ce polynôme,

$$A_{2k+1,2h+1} = M(-1)^{k+h}2^{k+h}\frac{1}{[q-(k+h+1)]!}\,\frac{1}{1.3.5\ldots(2h+1)}\,\frac{1}{1.3.5\ldots(2k+1)},$$

M étant une constante indépendante de h et de k.

D'après une formule de réduction indiquée précédemment, on verra facilement que le terme dont le coefficient est B dans l'intégrale générale du système d'équations aux dérivées partielles peut se mettre sous la forme

$$B\sqrt{1-x^2}\,P + B\,\frac{1.3.5\ldots(2q-1)}{2.4.6\ldots 2q}\,\frac{(1-x^2-y^2)^q}{2}\log\frac{\sqrt{1-x^2}+y}{\sqrt{1-x^2}-y},$$

P étant un polynôme du degré $2q-1$, on mettra le terme en C sous une forme analogue.

Développement effectif de la fonction $U_{m,n}$ *au moyen des fonctions* V, *et de la fonction* $V_{m,n}$ *au moyen des fonctions* U.

Je vais faire deux applications simples du développement des fonctions qui résulte de la considération des polynômes $U_{m,n}$, $V_{m,n}$. Je vais calculer effectivement les coefficients des fonctions V dans l'expression qui donne $U_{m,n}$, et les coefficients des fonctions U dans le développement qui donne $V_{m,n}$.

Soit

$$U_{m,n} = \sum A_{\mu,\nu} V_{\mu,\nu}.$$

On aura

$$A_{\mu,\nu}\int\!\!\int V_{\mu,\nu} U_{\mu,\nu}\,dx\,dy = \int\!\!\int U_{m,n} U_{\mu,\nu}\,dx\,dy.$$

On voit immédiatement que $\mu+\nu$ doit être égal à $m+n$, et que μ et m doivent être de même parité pour que $A_{\mu,\nu}$ ne soit pas nul. On peut donc poser $\mu = m-2k$, $\nu = n+2k$, $2k$ pouvant prendre toutes les valeurs entières paires comprises entre $-n$ et $+m$, et l'on aura, en effectuant un calcul facile,

$$A_{m-2k,\,n+2k} = \frac{1}{2^{2m+2n}}\,\frac{(m-k+1)\ldots(2m-2k)}{m!}\,\frac{(n+k+1)\ldots(2n+2k)}{n!}.$$

Soit de même

$$V_{m,n} = \sum A_{\mu,\nu} U_{\mu,\nu}.$$

On déterminera $A_{\mu,\nu}$ par l'équation

$$A_{\mu,\nu}\int\!\!\int U_{\mu,\nu} V_{\mu,\nu}\,dx\,dy = \int\!\!\int V_{m,n} V_{\mu,\nu}\,dx\,dy.$$

Pour la même raison que précédemment, on pourra poser

$$V_{m,n} = \sum A_{m-2k,\,n+2k}\, U_{m-2k,\,n+2k},$$

$2k$ variant entre les mêmes limites que tout à l'heure.

M. Hermite a fait voir que l'on avait

$$\begin{aligned}\int\!\!\int (1 - 2ax - 2by + a^2 + b^2)^{-1}(1 - 2a'x - 2b'y + a'^2 + b'^2)^{-1}\,dx\,dy \\ = \frac{\pi}{ab' - ba'} \operatorname{arc\,tang} \frac{ab' - ba'}{1 - aa' - bb'},\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}\int\!\!\int \left(\sum a^m b^n V_{m,n}\right)\left(\sum a'^{\mu} b'^{\nu} V_{\mu,\nu}\right) dx\,dy \\ = \frac{\pi}{ab' - ba'} \operatorname{arc\,tang} \frac{ab' - ba'}{1 - aa' - bb'}.\end{aligned}$$

On conclut de là la valeur de $A_{m-2k,n+2k}$. Le calcul étant très-facile, je vais me borner à énoncer les résultats. On trouve

$$\begin{aligned}A_{m-2k,\,n+2k} = (-1)^k (m+n+1)(m-2k)!\,(n+2k)! \\ \times \sum_{\alpha=\alpha'}^{\alpha=\alpha''} \frac{1}{(2\alpha+1)(\alpha+k)!\,(\alpha-k)!\,(m-k-\alpha)!\,(n+k-\alpha)!},\end{aligned}$$

α est un nombre entier. Voici comment on prendra les limites α' et α''. Si k est positif, on prendra $\alpha' = k$, et si k est négatif $\alpha'' = -k$. Ainsi α' est toujours égal à la valeur absolue de k. Pour la limite α'', nous considérerons divers cas.

Soit d'abord $m < n$. Si k est positif, on prendra $\alpha'' = -k$; si k est négatif, on prendra, pour α'', $m - k$ ou $n + k$, suivant que la valeur absolue de $2k$ sera moindre ou plus grande que $n - m$.

Soit $m = n$. On prendra $\alpha'' = m - k$, si k est positif, et, dans le cas contraire, $\alpha'' = n + k$.

Soit, en dernier lieu, $m > n$. Si k est négatif, on prendra la valeur $\alpha'' = n + k$, sinon, on prendra pour α'', soit $m - k$, soit $n + k$, suivant que $2k$ sera plus grand ou plus petit que $m - n$.

Définition des fonctions $U_{m,m',m'',\ldots}$ *à* μ *variables, et forme analytique remarquable sous laquelle on peut les mettre.*

Je passe maintenant à la généralisation des fonctions X_n de Legendre, pour un nombre quelconque μ de variables. Les nouvelles fonctions $U_{m,m',m'',\ldots}$ naissent du développement suivant :

$$\left[(1 - ax - by - cz - \ldots)^2 - (a^2 + b^2 + c^2 + \ldots)(x^2 + y^2 + z^2 + \ldots - 1)\right]^{-\frac{1}{2}}$$
$$= \sum a^m b^{m'} c^{m''} \ldots U_{m,m',m'',\ldots},$$

où les quantités $a, b, c, \ldots$ sont au nombre de μ, ainsi que les variables $x, y, z, \ldots$.

Je vais mettre la fonction $U_{m,m',m'',\ldots}$ sous la forme suivante :

$$(20) \quad \left\{ \begin{aligned} U_{m,m',m'',\ldots} = &\frac{1}{m!\, m'!\, m''! \ldots 2^{m+m'+m''+\ldots}} \\ &\times \frac{d^{m+m'+m''+\ldots} (x^2 + y^2 + z^2 + \ldots - 1)^{m+m'+m''+\ldots}}{dx^m\, dy^{m'}\, dz^{m''} \ldots}. \end{aligned} \right.$$

Pour cela, je me servirai d'une forme particulière de la formule de Lagrange, employée par M. Hermite dans le cas des fonctions $U_{m,n}$ à deux variables.

Soit

$$(21) \qquad \mathfrak{F}(u) = u - F\left(x + \frac{a}{2} u,\ y + \frac{b}{2} u,\ z + \frac{c}{2} u, \ldots\right) = 0,$$

une équation à une inconnue u. L'une des racines de cette équation se réduit pour $a = 0$, $b = 0$, $c = 0, \ldots$ à $F(x, y, z, \ldots)$. On aura la formule suivante, où u désigne cette racine,

$$(22) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\Phi\left(x + \frac{a}{2} u,\ y + \frac{b}{2} u,\ z + \frac{c}{2} u, \ldots\right)}{\mathfrak{F}'(u)} \\ &= \sum \frac{a^m b^{m'} c^{m''} \ldots}{m!\, m'!\, m''! \ldots 2^{m+m'+m''+\ldots}} \frac{d^{m+m'+m''+\ldots} F^{m+m'+m''+\ldots}(x, y, z, \ldots)\, \Phi(x, y, z, \ldots)}{dx^m\, dy^{m'}\, dz^{m''} \ldots} \end{aligned} \right.$$

Si l'on fait $F(x, y, z, \ldots) = x^2 + y^2 + z^2 + \ldots - 1$, l'équation (21) deviendra

$$\mathfrak{F}(u) = u - \left(x + \frac{a}{2}u\right)^2 - \left(y + \frac{b}{2}u\right)^2 - \left(z + \frac{c}{2}u\right)^2 \ldots + 1 = 0,$$

ou bien

$$\mathfrak{F}(u) = -\frac{a^2+b^2+c^2+\ldots}{4}u^2 + (1-ax-by-cz-\ldots)u - (x^2+y^2+z^2+\ldots-1) = 0.$$

La racine qu'il faut considérer est

$$u = 2\,\frac{-(1-ax-by-\ldots)+\sqrt{(1-ax-by-\ldots)^2-(a^2+b^2+\ldots)(x^2+y^2+\ldots-1)}}{-(a^2+b^2+\ldots)}.$$

Par conséquent

$$\mathfrak{F}'(u) = [(1-ax-by-cz-\ldots)^2 - (a^2+b^2+c^2+\ldots)(x^2+y^2+z^2+\ldots-1)]^{\frac{1}{2}}.$$

Si l'on fait $\Phi(x, y, z, \ldots) = 1$, la formule (22) deviendra

$$[(1-ax-by-cz-\ldots)^2 - (a^2+b^2+c^2+\ldots)(x^2+y^2+z^2+\ldots-1)]^{-\frac{1}{2}}$$
$$= \sum \frac{a^m b^{m'} c^{m''}\ldots}{m!\,m'!\,m''!\ldots 2^{m+m'+m''+\ldots}} \frac{d^{m+m'+m''+\ldots}(x^2+y^2+z^2+\ldots-1)^{m+m'+m''+\ldots}}{dx^m\,dy^{m'}\,dz^{m''}\ldots}.$$

ce qui démontre l'égalité (20).

Théorème sur une intégrale multiple.

Il est facile de voir qu'on a la relation

$$(23) \qquad \int\!\!\int\!\!\int \mathrm{U}_{m,m',m'',\ldots}\,\mathrm{U}_{n,n',n'',\ldots}\,dx\,dy\,dz\ldots = 0,$$

les variables étant limitées par la condition $x^2 + y^2 + z^2 + \ldots \leqq 1$, quand $m + m' + m'' + \ldots$ n'est pas égal à $n + n' + n'' + \ldots$.

Je le déduirai de la formule suivante facile à démontrer

$$\int\!\!\int\!\!\int \mathrm{F}(x, y, z\ldots)\frac{d^{m+m'+m''+\ldots}(x^2+y^2+z^2+\ldots-1)^{m+m'+m''+\ldots}}{dx^m\,dy^{m'}\,dz^{m''}\ldots}\,dx\,dy\,dz\ldots$$
$$= (-1)^{m+m'+m''+\ldots}\int\!\!\int\!\!\int \frac{d^{m+m'+m''+\ldots}\mathrm{F}(x, y, z, \ldots)}{dx^m\,dy^{m'}\,dz^{m''}\ldots}(x^2+y^2+z^2+\ldots-1)^{m+m'+m''+\ldots}\,dx\,dy\,dz\ldots$$

Si l'on fait $F(x, y, z, \ldots) = U_{n,n',n'',\ldots}$, et que la somme $n + n' + n'' + \ldots$ soit inférieure à la somme $m + m' + m'' + \ldots$, le second membre de la relation précédente sera évidemment nul. L'égalité (23) est donc démontrée.

Cherchons la valeur de l'intégrale multiple

$$(24) \qquad \int\int\int U_{m,m',m'',\ldots} U_{n,n',n'',\ldots}\, dx\, dy\, dz, \ldots,$$

quand on a $m + m' + m'' + \ldots = n + n' + n'' + \ldots$.

D'après l'égalité précédente, cette intégrale est égale à

$$\frac{1}{m!\, m'!\, m''! \ldots} \frac{1}{n!\, n'!\, n''! \ldots} \frac{1}{2^{m+m'+m''+\ldots+n+n'+n''+\ldots}}$$
$$\times \int\int\int (1 - x^2 - y^2 - z^2 \ldots)^{m+m'+m''+\ldots} \frac{d^{m+n+m'+n'+\ldots} (x^2 + y^2 + z^2 - 1)^{n+n'+n''+\ldots}}{dx^{m+n}\, dy^{m'+n'}\, dz^{m''+n''} \ldots}\, dx\, dy\, dz \ldots.$$

La différentielle qui entre sous les signes $\int\int\int$ est nulle, si les sommes $m + n$, $m' + n'$, $m'' + n''$,... ne sont pas toutes paires, et dans le cas contraire, elle est égale à

$$\frac{(n + n' + n'' + \ldots)!}{\left(\frac{m+n}{2}\right)! \left(\frac{m'+n'}{2}\right)! \left(\frac{m''+n''}{2}\right)! \ldots} (m + n)!\, (m' + n')!\, (m'' + n'')! \ldots.$$

On est ainsi ramené à calculer l'intégrale

$$(25) \qquad \int\int\int (1 - x^2 - y^2 - z^2 - \ldots)^{m+m'+m''+\ldots}\, dx\, dy\, dz \ldots$$

Or on a, en général,

$$(26) \quad \int\int\int f(x^2 + y^2 + z^2 + \ldots)\, dx\, dy\, dz = (\sqrt{\pi})^{\mu} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)} \int_0^{c^2} f(h)\, h^{\frac{\mu}{2}-1}\, dh,$$

les μ variables dans l'intégrale du premier membre étant limitées par la condition

$$x^2 + y^2 + z^2 + \ldots \leq c^2.$$

Donc l'intégrale (25) est égale à

$$(\sqrt{\pi})^{\mu}\frac{1}{\Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)}\int_0^1 (1-h)^{m+m'+m''+\dots}h^{\frac{\mu}{2}-1}\,dh=(\sqrt{\pi})^{\mu}\frac{\Gamma(m+m'+m''+\dots+1)}{\Gamma\left(\frac{\mu}{2}+m+m'+m''+\dots+1\right)}.$$

De quelques autres propriétés des fonctions $U_{m,m',m'',\dots}$.

La forme analytique sous laquelle nous avons mis le polynôme $U_{m,m',m'',\dots}$ montre que ce polynôme est égal à une fonction de x^2, y^2, $z^2,\dots$, multipliée par un certain nombre des quantités $x, y, z,\dots$, nombre égal à celui des quantités $m, m', m'',\dots$, qui sont impaires. Si l'on fait abstraction de ces facteurs $x, y, z,\dots$, il est facile de voir que le polynôme $U_{m,m',m'',\dots}$ reste toujours positif, pour les valeurs des variables dont la somme des carrés est supérieure à 1, et par conséquent, qu'il ne peut s'annuler que pour les valeurs des variables dont la somme des carrés est inférieure à 1. Pour le démontrer, je me servirai de la formule suivante, bien facile à établir :

$$\begin{aligned}
&a^k U_{k,0,0,\dots}+a^{k-1}b\,U_{k-1,1,0,\dots}+a^{k-2}b^2U_{k-2,2,0,\dots}+\dots\\
&=(ax+by+cz\dots)^k+\dots+\frac{1.3.5\dots(2n-1)}{2.4.6\dots 2n}\,\frac{k(k-1)\dots(k-2n+1)}{(2n)!}\\
&\quad\times(ax+by+cz+\dots)^{k-2n}(a^2+b^2+c^2+\dots)^n(x^2+y^2+z^2+\dots-1)^n+\dots.
\end{aligned}$$

Cette formule montre bien clairement que, tant que

$$x^2+y^2+z^2+\dots-1$$

est supérieure à 0, toutes les quantités $U_{k,0,0}$, $U_{k-1,1,0,\dots}$ sont positives, au moins pour les valeurs positives de $x, y, z,\dots$; il en est évidemment de même, quand quelques-unes des quantités $x, y, z,\dots$ sont négatives, à cause de la forme $x,\dots, z,\dots\,\Phi(x^2, y^2, z^2,\dots)$ de la fonction $U_{m,m',m'',\dots}$, si toutefois on fait abstraction des facteurs $x, z,\dots$ qui peuvent se trouver, comme multiplicateurs de la fonction Φ.

Si l'on donne à $y, z,\dots$ des valeurs constantes dont la somme des carrés soit supérieure à 1, $U_{m,m',m'',\dots}$ augmentera constamment avec x, à partir de $x=0$; si la somme des carrés de $y, z,\dots$ est inférieure à 1, $U_{m,m',m'',\dots}$ augmentera encore constamment avec x, mais à partir de

$x = \sqrt{1 - y^2 - z^2 - \ldots}$. C'est ce que montre immédiatement la formule précédente.

Je vais faire voir maintenant que, si l'on donne des valeurs constantes, dans la fonction $U_{m,m',m'',\ldots}$ à toutes les variables, sauf une, par exemple, aux variables y, z,... de manière que leurs valeurs satisfassent à l'inégalité $x^2 + y^2 + \ldots < 1$, l'équation en x

$$U_{m,m',m'',\ldots} = 0$$

aura m racines réelles par rapport à x.

En effet, on a évidemment

$$\frac{d^{m'+m''+\cdots}(x^2 + y^2 + z^2 + \ldots - 1)^{m+m'+m''+\cdots}}{dy^{m'}\,dz^{m''}\ldots} = (x^2 + y^2 + z^2 + \ldots - 1)^m Z,$$

Z étant une fonction entière de x, y, z,.... Donc

$$U_{m,m',m'',\ldots} = \frac{1}{m!\,m'!\,m''!\ldots 2^{m+m'+m''+\cdots}} \frac{d^m(x^2 + y^2 + z^2 + \ldots - 1)^m Z}{dx^m},$$

et, sous cette forme, le théorème de Rolle suffit pour montrer que, relativement à x, l'équation $U_{m,m',m'',\ldots} = 0$ admet m racines réelles comprises entre $-\sqrt{1 - y^2 - z^2 - \ldots}$ et $+\sqrt{1 - y^2 - z^2 - \ldots}$. La même démonstration s'applique évidemment à une variable quelconque. On peut aussi, pour démontrer ce résultat, se servir de la belle méthode employée par Legendre, dans ses Exercices de Calcul intégral, pour les fonctions X_n, car la forme analytique de la fonction $U_{m,m',m'',\ldots}$ montre que l'intégrale

$$\int_{-\sqrt{1-y^2-z^2-\ldots}}^{+\sqrt{1-y^2-z^2-\ldots}} U_{m,m',m'',\ldots}\,\theta(x)\,dx$$

est nulle quand le degré du polynôme $\theta(x)$ est inférieur à m.

Je suppose, par rapport à x, i racines réelles dans l'équation $U_{m,m',m'',\ldots} = 0$, i étant moindre que m, et en faisant, pour un instant,

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_i),$$

$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_i$ étant les racines réelles.

Je poserai

$$\theta(x) = f(x),$$

ce qui donne l'égalité

$$\int_{-\sqrt{1-y^2-z^2-\ldots}}^{+\sqrt{1-y^2-z^2-\ldots}} F(x) f^2(x)\, dx = 0,$$

$F(x)$ étant défini par la relation $U_{m,m',m'',\ldots} = F(x) f(x)$.

On en conclut que le polynôme $F(x)$ change de signe au moins une fois entre $-\sqrt{1-y^2-z^2-\ldots}$ et $+\sqrt{1-y^2-z^2-\ldots}$, sans quoi l'intégrale, ayant tous ses élements de même signe, ne pourrait s'évanouir, de sorte qu'on peut ajouter une nouvelle racine réelle aux précédentes, et poursuivre ainsi jusqu'à ce qu'on soit arrivé à la limite du degré de $\theta(x)$; c'est donc par conséquent m racines réelles pour x, et en opérant sur $y, z, \ldots$, on trouverait de même le résultat annoncé.

En opérant, comme nous l'avons fait pour les fonctions $U_{m,n}$ à deux variables, on trouvera un système de μ équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre pour la fonction $U_{m,m',m'',\ldots}$. Ce système d'équations est le suivant, en posant

$$x\frac{dU}{dx} + y\frac{dU}{dy} + z\frac{dU}{dz} + \ldots - (m + m' + m'' + \ldots)U = P,$$

$$\frac{d^2U}{dx^2} - x\frac{dP}{dx} - (m+1)P = 0, \quad \frac{d^2U}{dy^2} - y\frac{dP}{dy} - (m'+1)P = 0, \ldots,$$

ou bien, en effectuant les différentiations,

$$(1-x^2)\frac{d^2U}{dx^2} - xy\frac{d^2U}{dx\,dy} - xz\frac{d^2U}{dx\,dz} - \ldots + (m' + m'' - 2)\frac{dU}{dx}$$
$$-(m+1)y\frac{dU}{dy} - (m+1)z\frac{dU}{dz} - \ldots + (m + m' + m'' + \ldots)(m+1)U = 0,$$

$$(1-y^2)\frac{d^2U}{dy^2} - yx\frac{d^2U}{dy\,dx} - yz\frac{d^2U}{dy\,dz} - \ldots + (m + m'' - 2)\frac{dU}{dy}$$
$$-(m'+1)x\frac{dU}{dx} - (m'+1)z\frac{dU}{dz} - \ldots + (m + m' + m'' + \ldots)(m'+1)U = 0,$$

Définition des fonctions $V_{m,m',m'',\dots}$ *et étude de l'intégrale*

$$\int\int\int U_{m,m',m'',\dots} V_{n,n',n'',\dots}\, dx\, dy\, dz\dots.$$

Les fonctions $V_{m,m',m'',\dots}$ qu'il faut associer aux fonctions $U_{m,m',m'',\dots}$ naissent du développement suivant :

$$(1-2ax-2by-2cz-\dots+a^2+b^2+c^2+\dots)^{-\frac{\mu}{2}}=\sum a^m b^{m'} c^{m''}\cdots V_{m,m',m'',\dots}.$$

On voit immédiatement que la fonction $V_{m,m',m'',\dots}$ est un polynôme du degré $m+m'+m''+\dots$ dans lequel le seul terme de ce degré est un terme en $x^m y^{m'} z^{m''}\dots$. Je vais démontrer que l'intégrale multiple

$$\int\int\int U_{m,m',m'',\dots} V_{n,n',n'',\dots}\, dx\, dy\, dz\dots$$

est nulle, si l'on n'a pas en même temps $m=n$, $m'=n'$, $m''=n''\dots$, et je trouverai sa valeur dans le cas contraire.

Pour cela, calculons l'intégrale

$$(27)\quad \int\int\int U_{m,m',m'',\dots}(1-2ax-2by-2cz-\dots+a^2+b^2+c^2+\dots)^{-\frac{\mu}{2}}\, dx\, dy\, dz.$$

Si l'on y remplace $U_{m,m',m'',\dots}$ par sa valeur, elle deviendra, après une transformation facile,

$$\begin{aligned}&\frac{a^m b^{m'} c^{m''}}{m!\,m'!\,m''!\dots}\,\frac{\mu}{2}\left(\frac{\mu}{2}+1\right)\cdots\left(\frac{\mu}{2}+m+m'+m''+\dots-1\right)\\ &\times\int\int\int dx\, dy\, dz\dots\frac{(1-x^2-y^2-z^2-\dots)^{m+m'+m''+\dots}}{(1-2ax-2by-2cz-\dots+a^2+b^2+c^2+\dots)^{\frac{\mu}{2}+m+m'+m''+\dots}}.\end{aligned}$$

Par une substitution orthogonale, on tranformera la dernière intégrale en la suivante :

$$B=\int\int\int dx\, dy\, dz\dots\frac{(1-x^2-y^2-z^2-\dots)^{m+m'+m''+\dots}}{(1-2rx+r^2)^{\frac{\mu}{2}+m+m'+m''+\dots}},$$

où $r=\sqrt{a^2+b^2+c^2+\dots}$ avec la condition $x^2+y^2+z^2+\dots\leqq 1$.

Intégrons d'abord par rapport à $y, z, \ldots$; nous aurons, en nous servant de la formule (26),

$$B = (\sqrt{\pi})^{\mu-1} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\mu-1}{2}\right)} \int_{-1}^{+1} dx \int_0^{1-x^2} \frac{(1-x^2-h)^{m+m'+m''+\cdots} h^{\frac{\mu-1}{2}-1} dh}{(1-2rx+r^2)^{\frac{\mu}{2}+m+m'+m''+\cdots}}.$$

Si l'on pose $h=(1-x^2)z$, il vient

$$B = (\sqrt{\pi})^{\mu-1} \frac{\Gamma(m+m'+m''+\ldots+1)}{\Gamma\left(\frac{\mu-1}{2}+m+m'+m''+\ldots+1\right)} \int_{-1}^{+1} \frac{(1-x^2)^{\frac{\mu}{2}+m+m'+m''+\cdots-\frac{1}{2}}}{(1-2rx+r^2)^{\frac{\mu}{2}+m+m'+m''+\cdots}} dx.$$

Calculons l'intégrale

$$C = \int_{-1}^{+1} \frac{(1-x^2)^{\frac{\mu}{2}+m+m'+m''+\cdots-\frac{1}{2}}}{(1-2rx+r^2)^{\frac{\mu}{2}+m+m'+m''+\cdots}} dx.$$

Nous déduirons cette intégrale des résultats obtenus dans le cas d'une ou de deux variables. Le cas d'une variable nous conduira à la détermination de l'intégrale, quand μ est impair; le cas de deux variables à la détermination de l'intégrale, quand μ est pair.

On sait que

$$\int_{-1}^{+1} X_n X_{n'} dx = 0 \quad \text{et} \quad \int_{-1}^{+1} X_n^2 dx = \frac{2}{2n+1};$$

donc

$$\int_{-1}^{+1} X_n (1-2rx+r^2)^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{2r^n}{2n+1}.$$

Or l'intégrale définie du premier membre de l'égalité précédente peut s'écrire

$$\frac{1}{n!\,2^n} \int_{-1}^{+1} \frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n} (1-2rx+r^2)^{-\frac{1}{2}} dx,$$

ou bien, par une transformation facile,

$$\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots2n} r^n \int_{-1}^{+1} \frac{(1-x^2)^n}{(1-2rx+r^2)^{n+\frac{1}{2}}}.$$

L'égalité précédente donne donc

$$\int_{-1}^{+1} \frac{(1-x^2)^n}{(1-2rx+r^2)^{n+\frac{1}{2}}} = \frac{2}{2n+1}\,\frac{2.4..6...2n}{1.3.5...(2n-1)}.$$

On voit, d'après cela, qu'on connaît l'intégrale C, dans le cas où μ est impair. Soit $\mu = 2\mu' + 1$. L'intégrale (27) sera égale, après réduction, à

$$2^{\mu'+1}\pi^{\mu'}\,\frac{1}{1.3.5...(2\mu'-1)}\,\frac{a^m b^{m'} c^{m''}...}{2(\mu'+m+m'+m''+...)+1}\,\frac{(m+m'+m''+...)!}{m!\,m'!\,m''!...}.$$

Comme elle peut s'écrire

$$\int\int\int dx\,dy\,dz\,\mathrm{U}_{m,m',m'',...}\left(\sum a^m b^{m'} c^{m''}...\,\mathrm{V}_{m,m',m'',...}\right),$$

on en conclut que l'intégrale

$$\int\int\int dx\,dy\,dz\,\mathrm{U}_{m,m',m'',...}\,\mathrm{V}_{n,n',n'',...},$$

dans laquelle m et n, m' et n', m'' et n'',... ne sont pas égaux en même temps, est nulle, et que, dans le cas contraire, elle est égale à l'expression précédente, divisée par $a^m b^{m'} c^{m''}$.... Il est facile de déduire de ce qui précède la valeur de

$$\int\int\int dx\,dy\,dz\,(1-2ax-2by-2cz-...+a^2+b^2+c^2+...)^{-\frac{2\mu'+1}{2}}$$
$$+[(1-a'x-b'y-c'z)^2-(a'^2+b'^2+...)(x^2+y^2+...-1)]^{-\frac{1}{2}}.$$

Cette valeur est égale, en effet, à

$$\frac{2^{\mu'+1}\pi^{\mu'}}{1.3.5...(2\mu'-1)}\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{(aa'+bb'+cc'+...)^n}{2(\mu'+n)+1}.$$

Posant

$$aa'+bb'+cc'+...=\alpha,$$

je suis ramené à faire la somme

$$\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{\alpha^n}{2(\mu'+n)+1} = \frac{1}{2\mu'+1}+\frac{\alpha}{2\mu'+3}+\frac{\alpha^2}{2\mu'+5}+....$$

Il est très-facile de trouver cette somme. On a, en effet,

$$\log\frac{1+\sqrt{\alpha}}{1-\sqrt{\alpha}} = 2\left[\frac{\sqrt{\alpha}}{1}+\frac{(\sqrt{\alpha})^3}{3}+\ldots\right] = 2\sqrt{\alpha}\left(\frac{1}{1}+\frac{\alpha}{3}+\frac{\alpha^2}{5}+\ldots\right);$$

donc

$$\frac{1}{2\mu'+1}+\frac{\alpha}{2\mu'+3}+\frac{\alpha^2}{2\mu'+5}+\ldots = \frac{1}{\alpha^{\mu'}}\left(\frac{\alpha^{\mu'}}{2\mu'+1}+\frac{\alpha^{\mu'+1}}{2\mu'+3}+\ldots\right)$$
$$= \frac{1}{\alpha^{\mu'}}\left(\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}\log\frac{1+\sqrt{\alpha}}{1-\sqrt{\alpha}}-\frac{1}{1}-\frac{\alpha}{3}-\frac{\alpha^2}{5}-\ldots-\frac{\alpha^{\mu'-1}}{2\mu'-1}\right).$$

Il faut remarquer que la recherche que nous venons de faire de l'intégrale précédente suppose que $r=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ est plus petit que 1, ainsi que $aa'+bb'+cc'+\ldots$. La même observation s'applique au cas où μ est pair et égal à $2\mu'$.

Cherchons, dans ce cas, l'intégrale C. Nous nous servirons des résultats obtenus par M. Hermite dans le cas de deux variables, et que nous avons cités au commencement de ce travail. On en tire

$$\frac{1}{m!\,n!\,2^{m+n}}\int\int\frac{d^{m+n}(x^2+y^2-1)^{m+n}}{dx^m\,dy^n}(1-2ax-2by+a^2+b^2)^{-1}dx\,dy$$
$$=\frac{\pi a^m b^n}{m+n+1}\,\frac{(m+n)!}{m!\,n!},$$

d'où

$$\int\int\frac{(1-x^2-y^2)^{m+n}}{(1-2ax-2by+a^2+b^2)^{m+n+1}}\,dx\,dy = \frac{\pi}{m+n+1}.$$

Si l'on fait une transformation orthogonale, l'égalité précédente devient, en posant $a^2+b^2=r^2$,

$$\int\int\frac{(1-x^2-y^2)^{m+n}}{(1-2rx+r^2)^{m+n+1}}\,dx\,dy = \frac{\pi}{m+n+1}.$$

Intégrons d'abord par rapport à y le premier membre de la relation précédente. Ce premier membre devient, en posant $y^2=(1-x^2)z$,

$$\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(m+n+1)}{\Gamma\left(m+n+\frac{3}{2}\right)}\int_{-1}^{+1}\frac{(1-x^2)^{m+n+\frac{1}{2}}}{(1-2rx+r^2)^{m+n+1}}\,dx,$$

d'où l'on conclut, quel que soit le nombre entier p, l'égalité suivante :

$$\int_{-1}^{+1} \frac{(1-x^2)^{p-\frac{1}{2}}}{(1-2rx+r^2)^p} = \pi \, \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdots\left(p-\frac{1}{2}\right)}{p!}.$$

Par suite, l'intégrale (27), pour $\mu = 2\mu'$, est égale à

$$\pi^{\mu'} \frac{a^m b^{m'} c^{m''}\cdots}{1.2\ldots(\mu'-1)} \, \frac{(m+m'+m''+\ldots)!}{m!\,m'!\,m''!\ldots} \, \frac{1}{\mu'+m+m'+m''+\ldots}.$$

Donc, quand μ est pair, l'intégrale

$$\iiint U_{m,m',m'',\ldots} V_{n,n',n'',\ldots} \, dx\,dy\,dz\ldots$$

est nulle, si l'on n'a pas en même temps $m=n$, $m'=n'$, $m''=n''$,..., et, dans le cas contraire, on en voit la valeur.

L'intégrale

$$\begin{aligned}\iiint dx\,dy\,dz\ldots\,&(1-2ax-2by-\ldots+a^2+b^2+\ldots)^{-\mu'}\\ &\times\left[(1-a'x-b'y-\ldots)^2-(a'^2+b'^2+\ldots)(x^2+y^2+\ldots-1)\right]^{-\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

est égale à

$$\pi^{\mu'} \frac{1}{1.2\ldots(\mu'-1)} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\alpha^n}{\mu'+n},$$

où $\alpha = aa' + bb' + cc' + \ldots$.

La somme précédente peut s'écrire

$$\frac{1}{\alpha^{\mu'}}\left(\frac{\alpha^{\mu'}}{\mu'} + \frac{\alpha^{\mu'+1}}{\mu'+1} + \ldots\right) = \frac{1}{\alpha^{\mu'}}\left[-\log(1-\alpha) - \frac{\alpha}{1} - \frac{\alpha^2}{2} - \cdots - \frac{\alpha^{\mu'-1}}{\mu'-1}\right].$$

De quelques propriétés des fonctions $V_{m,m',m'',\ldots}$.

Les fonctions $V_{m,m',m'',\ldots}$ jouissent de cette propriété que l'intégrale multiple

$\iiint V_{m,m',m'',\ldots} V_{n,n',n'',\ldots} \, dx\,dy\,dz\ldots$, avec la condition $x^2+y^2+z^2+\ldots \leqq 1$

est nulle, quand la somme $m+m'+m''+\ldots$ est différente de la somme $n+n'+n''+\ldots$. C'est ce que je vais d'abord démontrer.

Développons la fonction $U_{m,m',m'',\ldots}$ suivant les fonctions V. Soit

$$U_{m,m',m'',\ldots} = \sum A_{\mu,\mu',\mu'',\ldots} V_{\mu,\mu',\mu'',\ldots}.$$

On déterminera $A_{\mu,\mu',\mu'',\ldots}$ par l'équation

$$\begin{aligned} A_{\mu,\mu',\mu'',\ldots} &\int\int\int U_{\mu,\mu',\mu'',\ldots} V_{\mu,\mu',\mu'',\ldots}\, dx\, dy\, dz\ldots \\ &= \int\int\int U_{m,m',m'',\ldots} U_{\mu,\mu',\mu'',\ldots}\, dx\, dy\, dz\ldots; \end{aligned}$$

d'où l'on voit que $A_{\mu,\mu',\mu'',\ldots}$ sera nul, si la somme $\mu+\mu'+\mu''+\ldots$ est différente de la somme $m+m'+m''+\ldots$. On conclut de là que $U_{m,m',m'',\ldots}$ s'exprime linéairement par les fonctions $V_{\mu,\mu',\mu'',\ldots}$, telles que $\mu+\mu'+\mu''+\ldots = m+m'+m''+\ldots = k$.

Considérons une fonction linéaire à coefficients arbitraires de toutes les fonctions $U_{m,m',m'',\ldots}$ telles, que la somme $m+m'+m''+\ldots$ soit égale à k, à savoir :

$$\alpha U_{k,0,0} + \beta U_{k-1,1,0} + \ldots.$$

Cette somme s'exprimera par une fonction linéaire des V, dont la somme des indices est égale à k, et qui sont en même nombre que les U qui satisfont à la même condition. Les coefficients des V seront des fonctions linéaires de $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, et par conséquent pourront prendre des valeurs quelconques, si l'on donne à $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ des valeurs convenables. Multiplions la fonction linéaire des U par $V_{h,h',h'',\ldots}\, dx\, dy\, dz\ldots$, et considérons l'intégrale multiple correspondante, prise entre les limites $x^2+y^2+z^2+\ldots \leqq 1$; elle sera nulle, quels que soient $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, si $h+h'+h''+\ldots$, est différent de k; il en sera de même de l'intégrale multiple correspondante au produit par $V_{h,h',h'',\ldots}\, dx\, dy\, dz\ldots$ de la fonction linéaire des V; elle sera nulle, quels que soient $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, et, par suite, quels que soient les coefficients de V; donc chacune des intégrales correspondante à chaque V sera nulle; donc

$$\int\int\int V_{h,h',h'',\ldots} V_{\mu,\mu',\mu'',\ldots}\, dx\, dy\, dz\ldots = 0,$$

si $h+h'+h''+\ldots$ est différent de $\mu+\mu'+\mu''+\ldots$.

Mais si ces deux sommes sont les mêmes, l'intégrale correspondante aux U n'est pas nulle; elle est, par exemple, égale à $p\gamma$, quels que soient α, β, γ,...; il en est toujours de même de l'autre, et l'on a autant d'équations que d'inconnues pour déterminer les intégrales $\int\int\int V_{h,h',h'',\ldots} V_{\mu,\mu',\mu'',\ldots}\, dx\, dy\, dz\ldots$; mais l'une de ces équations a un second membre p différent de o, tandis que, dans le premier cas, toutes les équations avaient pour second membre o. Donc les intégrales correspondantes aux V, dans ce second cas, ou du moins quelques-unes de ces intégrales, ne sont pas nulles.

Les fonctions $V_{m,m',m'',\ldots}$ ont une relation remarquable avec les dérivées de l'expression

$$(1 + x^2 + y^2 + z^2 + \ldots)^{-\frac{\mu}{2}}.$$

Représentons, en effet, par $P_{m,m',m'',\ldots}$ l'expression

$$\frac{1}{m!\,m'!\,m''!\ldots}\;\frac{d^{m+m'+m''+\cdots}(1 + x^2 + y^2 + z^2 + \ldots)^{-\frac{\mu}{2}}}{dx^m\, dy^{m'}\, dz^{m''}\ldots},$$

on aura

$$[1 + (x+a)^2 + (y+b)^2 + (z+c)^2 + \ldots]^{-\frac{\mu}{2}} = \sum a^m b^{m'} c^{m''}\ldots P_{m,m',m'',\ldots},$$

ou bien

$$\begin{aligned}(1+x^2+y^2+z^2+\ldots+2ax+2by+2cz+\ldots+a^2+b^2+c^2+\ldots)^{-\frac{\mu}{2}}\\ = \sum a^m b^{m'} c^{m''}\ldots P_{m,m',m'',\ldots}.\end{aligned}$$

Remplaçons, dans cette égalité, a par $a(1 + x^2 + y^2 + z^2 + \ldots)$, b par $b(1 + x^2 + y^2 + z^2 + \ldots)$, c par $c(1 + x^2 + y^2 + z^2 + \ldots)$, et ainsi de suite, il viendra

$$(28)\quad \left\{\begin{aligned}&[1+2ax+2by+2cz+\ldots+(a^2+b^2+c^2+\ldots)(1+x^2+y^2+z^2+\ldots)]^{-\frac{\mu}{2}}\\ &\quad = \sum a^m b^{m'} c^{m''}\ldots(1+x^2+y^2+z^2+\ldots)^{m+m'+m''+\ldots+\frac{\mu}{2}} P_{m,m',m'',\ldots}.\end{aligned}\right.$$

D'un autre côté, on a

$$(1 - 2ax - 2by - 2cz - \ldots + a^2 + b^2 + c^2 + \ldots)^{-\frac{\mu}{2}} = \sum a^m b^{m'} c^{m''}\ldots V_{m,m',m'',\ldots},$$

ou bien

$$(1 + 2ax + 2by + 2cz + \ldots + a^2 + b^2 + c^2 + \ldots)^{-\frac{\mu}{2}}$$
$$= \sum a^m b^{m'} c^{m''} \ldots (-1)^{m+m'+m''+\ldots} V_{m,m',m'',\ldots}.$$

Remplaçons-y

$$a \text{ par } a\sqrt{1+x^2+y^2+z^2+\ldots}, \quad b \text{ par } b\sqrt{1+x^2+y^2+z^2+\ldots},$$
$$c \text{ par } c\sqrt{1+x^2+y^2+z^2+\ldots},$$

et aussi

$$x \text{ par } \frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2+z^2+\ldots}}, \quad y \text{ par } \frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2+z^2+\ldots}},$$
$$z \text{ par } \frac{z}{\sqrt{1+x^2+y^2+z^2+\ldots}}, \ldots,$$

il viendra

$$(29) \left\{ \begin{aligned} & [(1+2ax+2by+2cz+\ldots+(a^2+b^2+c^2+\ldots)(1+x^2+y^2+z^2+\ldots)]^{-\frac{\mu}{2}} \\ & = \sum a^m b^{m'} c^{m''} \ldots (-1)^{m+m'+m''+\ldots} (1+x^2+y^2+z^2+\ldots)^{\frac{m+m'+m''+\ldots}{2}} (V_{m,m',m'',\ldots}), \end{aligned} \right.$$

en désignant par $(V_{m,m',m'',\ldots})$ ce que devient $V_{m,m',m'',\ldots}$, quand on y remplace $x, y, z, \ldots$ par $\frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2+z^2+\ldots}}$, $\frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2+z^2+\ldots}}$, $\frac{z}{\sqrt{1+x^2+y^2+z^2+\ldots}}, \ldots$.

En comparant les relations (28) et (29), on en déduit

$$(V_{m,m',m'',\ldots}) = (-1)^{m+m'+m''+\ldots} (1+x^2+y^2+z^2+\ldots)^{\frac{m+m'+m''+\mu}{2}} P_{m,m',m'',\ldots}.$$

Ainsi, en résumé, quand on remplace dans les fonctions $V_{m,m',m'',\ldots}$ $x, y, z, \ldots$ par

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2+z^2+\ldots}}, \quad \frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2+z^2+\ldots}}, \quad \frac{z}{\sqrt{1+x^2+y^2+z^2+\ldots}}, \ldots,$$

on obtient, sauf des facteurs égaux à des puissances de

$$1 + x^2 + y^2 + z^2 + \ldots,$$

les dérivées de l'expression

$$(1 + x^2 + y^2 + z^2 + \ldots)^{-\frac{\mu}{2}}.$$

Si on donne à $y, z, \ldots$ des valeurs constantes dans l'expression de $P_{m,m',m'',\ldots}$, l'équation $P_{m,m',m'',\ldots} = 0$ admet m racines réelles par rapport à x. Le théorème de Rolle suffit pour l'établir, car on peut écrire

$$P_{m,m',m'',\ldots} = K \frac{d^m (1 + x^2 + y^2 + z^2 + \ldots)^{-\frac{\mu}{2} - m' - m'' - \ldots} Y}{dx^m},$$

Y étant une fonction entière des variables. Or l'expression

$$(1 + x^2 + y^2 + z^2 + \ldots)^{-\frac{\mu}{2} - \mu' - \mu'' - \ldots} Y,$$

s'annulant pour $x = -\infty$ et $x = +\infty$, sa première dérivée par rapport à x admettra une racine intermédiaire. Comme cette première dérivée devient aussi nulle pour $x = -\infty$ et $n = +\infty$, la seconde dérivée admettra deux racines intermédiaires, et ainsi de suite. Même raisonnement pour les autres variables.

En opérant, comme nous l'avons fait pour les fonctions $V_{m,n}$, on trouve un système de μ équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre pour les fonctions $V_{m,m',m'',\ldots}$. Ce système est le suivant :

$$(1 - x^2) \frac{d^2V}{dx^2} - xy \frac{d^2V}{dx\,dy} - xz \frac{d^2V}{dx\,dz} - (m' + m'' + \ldots + \mu + 1) \frac{dV}{dx}$$
$$+ my \frac{dV}{dy} + mz \frac{dV}{dz} + \ldots + m(m + m' + m'' + \ldots + \mu) V = 0,$$

$$(1 - y^2) \frac{d^2V}{dy^2} - yx \frac{d^2V}{dy\,dx} - yz \frac{d^2V}{dy\,dz} - \ldots + m'x \frac{dV}{dx} - (m + + m'' \ldots + \mu + 1) \frac{dV}{dy}$$
$$+ m'z \frac{dV}{dz} + \ldots + m'(m + m' + m'' + \ldots + \mu) V = 0,$$

. . . . ;

qu'on peut écrire de la manière suivante, en posant

$$x \frac{dV}{dx} + y \frac{dV}{dy} + z \frac{dV}{dz} + (m + m' + m'' + \ldots + \mu) V = P :$$

$$\frac{d^2V}{dx^2} - x \frac{dP}{dx} + mP = 0,$$
$$\frac{d^2V}{dy^2} - y \frac{dP}{dy} + m'P = 0,$$

Si l'on ajoute les équations précédentes, on trouve

$$(1-x^2)\frac{d^2V}{dx^2}+(1-y^2)\frac{d^2V}{dy^2}+\ldots-2xy\frac{d^2V}{dx\,dy}-2xz\frac{d^2V}{dx\,dz}-\ldots$$
$$-(\mu+1)\frac{dV}{dx}-(\mu+1)\frac{dV}{dy}-\ldots$$
$$+(m+m'+m''+\ldots)(m+m'+m''+\ldots+\mu)V=0.$$

Or on trouve la même relation, en ajoutant les équations auxquelles satisfait la fonction $U_{m,m',m'',\ldots}$.

Remarques sur le développement d'une fonction quelconque $F(x, y, z, \ldots)$ *suivant les fonctions* $V_{m,m',m'',\ldots}$.

Si l'on pose

$$F(x, y, z, \ldots)=\sum A_{m,m',m'',\ldots}V_{m,m',m'',\ldots},$$

on sait quelle sera l'expression de $A_{m,m',m'',\ldots}$. En se servant d'une transformation déjà employée plusieurs fois, on introduit sous les signes $\int\int$ de la valeur de $A_{m,m',m'',\ldots}$ les puissances d'un facteur $(1-x^2-y^2-z^2-\ldots)$ plus petit que 1, et qui, dès lors, sont d'autant plus petites que les indices m, m', m'' sont plus grands. En appelant $\rho_{m,m',m'',\ldots}$ le maximum de l'expression $\frac{d^{m+m'+m''+\ldots}F(x, y, z, \ldots)}{dx^m\,dy^{m'}\,dz^{m''}\ldots}$, sous la condition $x^2+y^2+z^2+\ldots\leqq 1$, on a cette limite supérieure fort simple de $A_{m,m',m'',\ldots}$, savoir, dans le cas de $2\mu'+1$ variables :

$$A_{m,m',m'',\ldots}<\frac{\rho_{m,m',m'',\ldots}}{(2\mu'+1)(2\mu'+3)\ldots[2(\mu'+m+m'+m''+\ldots)-1]},$$

et dans le cas de $2\mu'$ variables :

$$A_{m,m',m'',\ldots}<\frac{\rho_{m,m',m'',\ldots}}{\mu'(\mu'+1)\ldots(\mu'+m+m'+m''+\ldots-1)\,2^{m+m'+m''+\ldots}}.$$

Si donc le second membre de la première inégalité et le second membre de la seconde, multiplié par $2^{m+m'+m''\ldots}$, ne dépassent jamais une certaine constante K, les termes du développement de $F(x, y, z, \ldots)$

ne dépasseront pas non plus ceux de la série

$$K \sum V_{m,m',m'',\ldots} \quad \text{ou} \quad K \sum \frac{V_{m,m',m'',\ldots}}{2^{m+m'+m''+\ldots}},$$

représentant la fonction

$$K(1 - 2ax - 2by - 2cz - \ldots + a^2 + b^2 + c^2 + \ldots)^{-\frac{3}{2}}$$

dans les hypothèses $a = 1$, $b = 1$, $c = 1, \ldots$, ou $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{2}, \ldots$.

Mais un autre genre de considérations permet aussi de se rendre compte de la diminution de $A_{m,m',m'',\ldots}$, quand les indices augmentent. Si l'on développe une fonction $F(x)$ d'une variable x, suivant les fonction X_n, de cette manière $F(x) = \sum A_n X_n$, dans l'expression de A_n se trouve l'intégrale $\int_{-1}^{+1} F(x) X_n \, dx$.

On sait que la fonction X_n reste toujours numériquement moindre que l'unité, lorsque la variable x varie de -1 à $+1$. On sait aussi que cette fonction s'annule n fois dans l'intervalle. Or, au voisinage d'une racine, de part et d'autre, X_n a des valeurs égales et de signes contraires, si l'on néglige des infiniment petits du second ordre; comme $F(x)$ a la même valeur aux infiniment petits près du premier ordre, on voit qu'une racine de X_n introduit dans l'intégrale des éléments qui se détruisent. Or, quand n augmente, le nombre des racines augmentant aussi, il en est de même du nombre des éléments de l'intégrale, qui se détruisent deux à deux. De même dans le développement

$$F(x, y, z, \ldots) = \sum A_{m,m',m'',\ldots} V_{m,m',m'',\ldots},$$

qui donne

$$A_{m,m',m'',\ldots} \int\int\int V_{m,m',m'',\ldots} U_{m,m',m'',\ldots} \, dx \, dy \, dz \ldots$$
$$= \int\int\int F(x, y, z, \ldots) U_{m,m',m'',\ldots} \, dx \, dy \, dz, \ldots,$$

on peut faire sur la dernière intégrale des remarques analogues aux précédentes.

Le maximum de la fonction $U_{m,m',m'',\ldots}$ est évidemment fini pour les valeurs des variables satisfaisant à la condition $x^2+y^2+z^2+\ldots \leqq 1$; d'ailleurs nous avons vu que y, z,... ayant des valeurs constantes dont la somme des carrés est moindre que 1, $U_{m,m',m'',\ldots}$ s'annulait pour m valeurs de x comprises entre

$$-\sqrt{1-y^2-z^2-\ldots} \quad \text{et} \quad +\sqrt{1-y^2-z^2-\ldots}.$$

Sur quelques fonctions analogues aux fonctions $U_{m,n}$, $V_{m,n}$.

Soit la fonction

$$P_{m,n} = \frac{1}{1.2\ldots m.1.2\ldots n.2^{m+n}}(x^2+y^2-1)^{-h}\frac{d^{m+n}(x^2+y^2-1)^{m+n+h}}{dx^m\,dy^n},$$

h étant un nombre entier quelconque positif.

Cette fonction $P_{m,n}$ est un polynôme du degré $m+n$.

Il est facile de voir que l'intégrale double

$$\int\!\!\int (x^2+y^2-1)^h P_{m,n} P_{\mu,\nu}\,dx\,dy$$

est nulle quand $m+n$ et $\mu+\nu$ sont différents, les variables dans l'intégrale satisfaisant à la condition $x^2+y^2\leqq 1$. Mais on peut trouver des fonctions $Q_{m,n}$ telles que l'intégrale

$$\int\!\!\int P_{m,n} Q_{\mu,\nu}\,dx\,dy$$

soit nulle, quand on n'a pas en même temps $m=\mu$, $n=\nu$. Ces fonctions $Q_{m,n}$ naîtront du développement suivant :

$$(1-2ax-2by+a^2+b^2)^{-1-h}(x^2+y^2-1)^h = \sum a^m b^n Q_{m,n}.$$

Cherchons, en effet, la valeur de l'intégrale

$$\int\!\!\int P_{m,n}(x^2+y^2-1)^h(1-2ax-2by+a^2+b^2)^{-1-h}\,dx\,dy.$$

Cette intégrale est égale à

$$\frac{1}{m!\,n!\,2^{m+n}}\int\int\frac{d^{m+n}(x^2+y^2-1)^{m+n+h}}{dx^m\,dy^n}(1-2ax-2by+a^2+b^2)^{-1-h}\,dx\,dy,$$

ou bien à

$$\frac{a^m b^n}{m!\,n!}(h+1)(h+2)\ldots(h+m+n)$$
$$\times\int\int(1-x^2-y^2)^{m+n+h}(1-2ax-2by+a^2+b^2)^{-1-h-m-n}\,dx\,dy,$$

ou enfin à

$$\frac{\pi a^m b^n}{m!\,n!}\,\frac{(h+1)\ldots(h+m+n)}{m+n+h+1},$$

ce qui démontre la proposition énoncée. On voit de plus que l'on a

$$\int\int \mathrm{P}_{m,n}\,\mathrm{Q}_{m,n}\,dx\,dy=\frac{\pi}{m!\,n!}\,\frac{(h+1)(h+2)\ldots(h+m+n)}{m+n+h+1}.$$

On prouvera facilement que l'intégrale

$$\int\int(x^2+y^2-1)^{-h}\,\mathrm{Q}_{m,n}\,\mathrm{Q}_{\mu,\nu}\,dx\,dy$$

est nulle quand les deux sommes $m+n$ et $\mu+\nu$ sont différentes.

Les fonctions $\mathrm{P}_{m,n}$ peuvent être considérées comme provenant du développement d'une certaine expression. On obtiendra immédiatement cette expression par la forme de la formule de Lagrange, que nous avons indiquée antérieurement.

On y fera

$$\mathrm{F}(x,y)=x^2+y^2-1,$$
$$\Phi(x,y)=(x^2+y^2-1)^h.$$

Si l'on donne à x une valeur constante plus petite que 1, l'équation $\mathrm{P}_{m,n}=0$ en y admet n racines réelles comprises entre $-\sqrt{1-x^2}$ et $+\sqrt{1-x^2}$; il y a une propriété analogue pour l'équation $\mathrm{P}_{m,n}=0$ en x, où y a une valeur constante moindre que 1.

On peut remarquer que l'intégrale $\int\int \mathrm{P}_{m,n}\,\mathrm{U}_{\mu,\nu}\,(x^2+y^2-1)^h\,dx\,dy$

est nulle quand $m+n$ est supérieur à $\mu+\nu$, et que $\int\int \mathrm{P}_{m,n}\mathrm{U}_{\mu,\nu}\,dx\,dy$ est aussi nulle quand $\mu+\nu$ est supérieur à $m+n$.

On peut trouver des fonctions d'un nombre quelconque de variables, analogues à $\mathrm{P}_{m,n}$ et $\mathrm{Q}_{m,n}$; on voit immédiatement de quelles expressions développées on pourra les déduire.

DEUXIÈME PARTIE.

On connaît les deux développements suivants :

$$\frac{\sqrt{1-x^2}}{1-2ax+a^2}=\sum a^n \sin[(n+1)\operatorname{arc}\cos x],$$

$$\frac{1-ax}{1-2ax+a^2}=\sum a^n \cos(n \operatorname{arc}\cos x).$$

Jacobi a mis l'expression $\sin[(n+1)\operatorname{arc}\cos x]$ sous la forme

$$(-1)^n \frac{n+1}{1.3.5\ldots(2n+1)}\frac{d^n(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}}{dx^n}.$$

On peut mettre l'expression $\cos(n \operatorname{arc}\cos x)$ sous une forme analogue; car, si l'on différentie par rapport à x l'équation

$$\sin(n\operatorname{arc}\cos x)=(-1)^{n-1}\frac{n}{1.3.5\ldots(2n-1)}\frac{d^{n-1}(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}}{dx^{n-1}},$$

on en tire

$$\cos(n\operatorname{arc}\cos x)=(-1)^n\frac{1}{1.3.5\ldots(2n-1)}\sqrt{1-x^2}\,\frac{d^n(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}}{dx^n}.$$

M. Hermite a fait voir que les fonctions $\mathfrak{V}_{m,n}$, tirées du développement suivant :

$$(1-x^2-y^2)^{\frac{1}{2}}[(1-ax-by)^2-(a^2+b^2)(x^2+y^2-1)]^{-1}=\sum a^m b^n \mathfrak{V}_{m,n},$$

pouvaient se mettre sous la forme

$$\frac{(m+n)!}{m!\,n!}\,\frac{(-1)^{m+n}(m+n+1)}{1.3.5\ldots 2(m+n)+1}\,\frac{d^{m+n}(1-x^2-y^2)^{m+n+\frac{1}{2}}}{dx^m\,dy^n}.$$

L'analogie de forme analytique est frappante entre cette fonction $\mho_{m,n}$ et la fonction d'une variable $\sin[(n+1)\arccos x]$. On a

$$\iint \frac{\mho_{m,n}\,\mho_{\mu,\nu}}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\,dx\,dy = 0,$$

quand $m+n$ est différent de $\mu+\nu$. Les fonctions que M. Hermite associe à celles-ci sont les fonctions $\vartheta_{m,n}$ provenant du développement

$$(1-2ax-2by+a^2+b^2)^{-\frac{3}{2}} = \sum a^m b^n \vartheta_{m,n}.$$

L'intégrale $\iint \mho_{m,n}\,\vartheta_{\mu,\nu}\,dx\,dy$ est nulle quand on n'a pas en même temps $m=\mu$, $n=\nu$, et, dans le cas contraire, elle est égale à $\pi\left(1-\frac{1}{2m+2n+3}\right)\frac{(m+n)!}{m!\,n!}$. Je généralise ces résultats pour le cas de μ variables.

Mais M. Hermite n'a pas cherché de fonctions de plusieurs variables analogues à $\cos(n \arccos x)$. En considérant le développement

$$(1-ax-by)[(1-ax-by)^2-(a^2+b^2)(x^2+y^2-1)]^{-1} = \sum a^m b^n U_{m,n},$$

j'ai été conduit à des fonctions $U_{m,n}$ qui peuvent se mettre sous la forme

$$(-1)^{m+n}\,\frac{1.2\ldots(m+n)}{1.2\ldots m.1.2\ldots n}\,\frac{\sqrt{1-x^2-y^2}}{1.3.5\ldots[2(m+n)-1]}\,\frac{d^{m+n}(1-x^2-y^2)^{m+n-\frac{1}{2}}}{dx^m\,dy^n},$$

et dont l'analogie avec $\cos(n \arccos x)$ devient ainsi évidente.

Les nouvelles fonctions $V_{m,n}$ que j'associe à celles-là proviennent du développement

$$(1-x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}}(1-2ax-2by+a^2+b^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum a^m b^n V_{m,n}.$$

L'intégrale double $\iint U_{m,n}\,V_{\mu,\nu}\,dx\,dy$ est nulle quand on n'a pas à la fois $m = \mu$, $n = \nu$, et, dans le cas contraire, elle est égale à

$$\frac{(m+n)!}{m!\,n!}\,\frac{2\pi}{2m+2n+1}.$$

Je généralise aussi ces résultats pour le cas de μ variables, et je fais voir plusieurs relations entre les fonctions $U_{m,n}$ et $\mathcal{V}_{m,n}$ complétement analogues aux relations correspondantes qui existent entre

$$\sin[(n+1)\operatorname{arc}\cos x] \quad \text{et} \quad \cos(n \operatorname{arc}\cos x).$$

Étude des fonctions $U_{m,n}$.

Voici comment on peut obtenir l'expression de $U_{m,n}$ au moyen de x et de y.

On a

$$\begin{aligned}
&\frac{1-ax-by}{(1-ax-by)^2-(a^2+b^2)(x^2+y^2-1)}\\
&=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-ax-by-\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{x^2+y^2-1}}+\frac{1}{1-ax-by+\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{x^2+y^2-1}}\right]\\
&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-P}+\frac{1}{1-Q}\right)
\end{aligned}$$

en posant

$$\begin{aligned}
P &= ax+by+\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{x^2+y^2-1},\\
Q &= ax+by-\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{x^2+y^2-1}:
\end{aligned}$$

P et Q sont homogènes et du premier degré en a et b. L'ensemble homogène des termes de degré $m+n$ en a et b sera donc $\frac{1}{2}(P^{m+n}+Q^{m+n})$, et l'on a

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{1}{2}(P^{m+n}+Q^{m+n})\\
&\quad=(ax+by)^{m+n}\\
&\qquad+\frac{(m+n)(m+n-1)}{1.2}(ax+by)^{m+n-2}(a^2+b^2)(x^2+y^2-1)+\ldots.
\end{aligned}\right.$$

Le coefficient de $a^m b^n$, dans cette expression, sera la valeur de $U_{m,n}$; donc

$$U_{m,n} = \frac{(m+n)!}{m!\,n!} x^m y^n + \frac{(m+n)!}{1.2} (x^2+y^2-1)\left[\frac{x^{m-2} y^n}{(m-2)!\,n!} + \frac{x^m y^{n-2}}{m!\,(n-2)!}\right] + \ldots.$$

Cette expression montre que cette fonction est un polynôme de degré $m+n$ et que ses termes contiennent des puissances de x et de y égales respectivement à $m \pm 2k$, $n \pm 2k'$, k et k' étant des nombres entiers; de sorte que $U_{m,n}$ est, dans les quatre cas suivants

$$\left.\begin{matrix} m\equiv 0, & m\equiv 1, & m\equiv 0, & m\equiv 1 \\ n\equiv 0, & n\equiv 0, & n\equiv 1, & n\equiv 1 \end{matrix}\right\} \pmod{2},$$

de l'une des quatre formes

$$F(x^2,y^2), \quad xF(x^2,y^2), \quad yF(x^2,y^2), \quad xyF(x^2,y^2).$$

Du reste, l'égalité (1), qui peut s'écrire

$$a^{m+n} U_{m+n,0} + a^{m+n-1} b\, U_{m+n-1,1} + \ldots$$
$$= (ax+by)^{m+n} + \frac{(m+n)(m+n-1)}{1.2} (ax+by)^{m+n-2}(a^2+b^2)(x^2+y^2-1) + \ldots,$$

montre que, hors du cercle $x^2+y^2-1=0$, et, pour des valeurs positives de x et de y, $U_{m,n}$ ne peut pas s'annuler; donc $F(x^2,y^2)$ est essentiellement positif hors de ce cercle.

Donc la courbe $U_{m,n}=0$, si l'on fait abstraction des facteurs x ou y, est tout entière comprise dans l'intérieur du cercle $x^2+y^2=1$.

Voici les valeurs de $U_{m,n}$ dans les cas les plus simples :

$$\begin{aligned}
U_{0,0} &= 1,\\
U_{1,0} &= x,\\
U_{0,1} &= y,\\
U_{2,0} &= 2x^2+y^2-1,\\
U_{0,2} &= 2y^2+x^2-1,\\
U_{1,1} &= 2xy,\\
U_{4,0} &= 8x^4+8x^2y^2+y^4-8x^2-2y^2+1,\\
U_{0,4} &= 8y^4-8x^2y^2+x^4-8y^2-2x^2+1,\\
U_{2,2} &= 8x^4+8y^4+22x^2y^2-10x^2-10y^2+2.
\end{aligned}$$

$$U_{3,0} = 3xy^2 + 4x^3 - 3x,$$
$$U_{1,2} = 6xy^2 + 3x^3 - 3x,$$
$$U_{2,1} = 6x^2y + 3y^3 - 3y,$$
$$U_{0,3} = 3yx^2 + 4y^3 - 4y,$$
$$U_{3,1} = 16x^3y + 12xy^3 - 12xy,$$
$$U_{1,3} = 16xy^3 + 12x^3y - 12xy.$$

Pour mettre $U_{m,n}$ sous la forme analytique que j'ai annoncée, je me servirai de la formule de Lagrange modifiée, telle que je l'ai employée dans la première Partie (22).

Faisons

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 1, \quad \varphi(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}},$$

on aura

$$\mathfrak{F}(u) = u - \left(x + \frac{a}{2}u\right)^2 - \left(y + \frac{b}{2}u\right)^2 + 1$$
$$= -\frac{a^2 + b^2}{4}u^2 + (1 - ax - by)u - (x^2 + y^2 - 1) = 0.$$

Si l'on pose

$$G = a^2 + b^2,$$
$$H = 1 - ax - by,$$
$$K = x^2 + y^2 - 1,$$

l'équation précédente devient

$$-\frac{G}{4}u^2 + Hu - K = 0.$$

On en tire

$$u = \frac{-H \pm \sqrt{H^2 - GK}}{-\frac{G}{2}} = 2\frac{H \pm \sqrt{H^2 - GK}}{G}.$$

La racine qu'il faut prendre est

$$u = 2\frac{H - \sqrt{H^2 - GK}}{G}.$$

On a

$$\mathfrak{F}'(u) = \sqrt{H^2 - GK}, \quad \varphi\left(x + \frac{a}{2}u, y + \frac{b}{2}u\right) = \frac{1}{\sqrt{u}}.$$

Or

$$\frac{1}{\sqrt{u}} = \frac{1}{\sqrt{2\frac{H-\sqrt{H^2-GK}}{G}}} = \frac{\sqrt{G}}{\sqrt{H+\sqrt{GK}}-\sqrt{H-\sqrt{GK}}}.$$

Donc, le premier membre de la formule de Lagrange devient

$$\frac{\sqrt{G}}{\sqrt{H^2-GK}\left(\sqrt{H+\sqrt{GK}}-\sqrt{H-\sqrt{GK}}\right)} = \frac{1}{2\sqrt{K}}\left[(H-\sqrt{GK})^{-\frac{1}{2}}+(H+\sqrt{GK})^{-\frac{1}{2}}\right].$$

Si l'on se reporte aux valeurs de P et de Q employées précédemment, on voit que cette expression est égale à

$$\frac{1}{2\sqrt{K}}\left[(1-P)^{-\frac{1}{2}}+(1-Q)^{-\frac{1}{2}}\right].$$

L'ensemble des termes homogènes de degré $m+n$ en a et b est

$$\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2-1}}\,(P^{m+n}+Q^{m+n})\,\frac{1.3.5\ldots[2(m+n)-1]}{2.4.6\ldots 2(m+n)}.$$

Donc

$$\frac{P^{m+n}+Q^{m+n}}{2}$$
$$=\sum \sqrt{x^2+y^2-1}\,\frac{2.4.6\ldots 2(m+n)}{1.3.5\ldots[2(m+n)-1]}\,\frac{a^m b^n}{m!\,n!\,2^{m+n}}\,\frac{d^{m+n}(x^2+y^2-1)^{m+n-\frac{1}{2}}}{dx^m\,dy^n},$$

le signe $\sum$ s'étendant à tous les termes pour lesquels la somme $(m+n)$ est constante.

Si l'on se rappelle que $\frac{P^{m+n}+Q^{m+n}}{2}$ désigne l'ensemble homogène des termes de degré $m+n$ en a et b dans le développement de l'expression

$$(1-ax-by)[(1-ax-by)^2-(a^2+b^2)(x^2+y^2-1)]^{-1},$$

on en conclura

$$(2)\quad U_{m,n}=(-1)^{m+n}\frac{(m+n)!}{m!\,n!}\,\frac{\sqrt{1-x^2-y^2}}{1.3.5\ldots[2(m+n)-1]}\,\frac{d^{m+n}(1-x^2-y^2)^{m+n-\frac{1}{2}}}{dx^m\,dy^n}.$$

On voit que $U_{m,n}$ peut se représenter par $h \dfrac{d^m(x^2+y^2-1)^m X}{dx^m}$, h étant une constante, et X un polynôme en x et y; par conséquent le théorème de Rolle fait voir que la courbe $U_{m,n} = 0$ est coupée en m points réels par toute droite parallèle à l'axe des x qui rencontre le cercle $x^2+y^2=1$. De même, toute parallèle à l'axe des y, qui rencontre aussi ce cercle, coupe la courbe en n points réels.

Relations entre les fonctions U et $\mathcal{V}$.

Je vais maintenant établir diverses relations entre les fonctions U et $\mathcal{V}$. On a

$$\frac{d\mathcal{V}_{m-1,n}}{dx} = (-1)^{m+n-1} \frac{(m+n)!}{(m-1)!\,n!} \frac{1}{1.3.5\ldots[2(m+n)-1]} \frac{d^{m+n}(1-x^2-y^2)^{m+n-\frac{1}{2}}}{dx^m\,dy^n}.$$

En comparant cette expression de $\dfrac{d\mathcal{V}_{m-1,n}}{dx}$ à $U_{m,n}$, on en déduit

$$\frac{d\mathcal{V}_{m-1,n}}{dx} = -\frac{m}{\sqrt{1-x^2-y^2}} U_{m,n}.$$

On aura de même

$$\frac{d\mathcal{V}_{m,n-1}}{dy} = -\frac{n}{\sqrt{1-x^2-y^2}} U_{m,n}.$$

Ces relations sont tout à fait analogues à la relation

$$(3) \qquad \frac{d\sin(n \arccos x)}{dx} = -\frac{n}{\sqrt{1-x^2}} \cos(n \arccos x).$$

Il ne faut pas s'étonner qu'on compare à $U_{m,n}$, $\mathcal{V}_{m-1,n}$ et $\mathcal{V}_{m,n-1}$ et non pas $\mathcal{V}_{m,n}$, car si l'on considère les deux développements

$$\frac{1-ax}{1-2ax+a^2} = \sum a^n \cos(n \arccos x),$$

$$\frac{\sqrt{1-x^2}}{1-2ax+a^2} = \sum a^n \sin[(n+1)\arccos x],$$

c'est le coefficient de a^{n-1} dans le second développement qui contient sin (n arc cos$x$), tandis que, dans le premier, c'est le coefficient de a^n qui contient cos (n arc cos$x$). Mais on a aussi

$$\frac{d\cos(n\arccos x)}{dx} = \frac{n}{\sqrt{1-x^2}}\sin(n\arccos x). \tag{4}$$

Cherchons à voir la relation analogue pour nos fonctions de deux variables. Pour cela, je remarque que l'égalité (4) conduit à l'identité suivante :

$$D_x\frac{1-ax}{1-2ax+a^2} = a D_a\frac{a}{1-2ax+a^2}.$$

Réciproquement, voilà une identité qu'on peut établir directement, et, en partant d'elle, on peut en conclure l'égalité (4). Opérons de cette dernière manière dans le cas de deux variables. En d'autres termes, comparons

$$D_x\frac{1-ax-by}{(1-ax-by)^2-(a^2+b^2)(x^2+y^2-1)}$$

à

$$a D_a\frac{a}{(1-ax-by)^2-(a^2+b^2)(x^2+y^2-1)}.$$

On verra facilement que l'on a

$$\begin{aligned}
&D_x\frac{1-ax-by}{(1-ax-by)^2-(a^2+b^2)(x^2+y^2-1)}\\
&\quad=\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\left[a D_a\frac{a\sqrt{1-x^2-y^2}}{(1-ax-by)^2-(a^2+b^2)(x^2+y^2-1)}\right.\\
&\qquad\qquad\left.+b^2 D_a\frac{\sqrt{1-x^2-y^2}}{(1-ax-by)^2-(a^2+b^2)(x^2+y^2-1)}\right],
\end{aligned}$$

ou bien

$$\frac{d\left(\sum a^m b^n U_{m,n}\right)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\left[a\frac{d\left(\sum a^{m+1} b^n \mathfrak{V}_{m,n}\right)}{da} + b^2\frac{d\left(\sum a^m b^n \mathfrak{V}_{m,n}\right)}{da}\right];$$

donc

$$\frac{dU_{m,n}}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}[m\mathfrak{V}_{m-1,n}+(m+1)\mathfrak{V}_{m+1,n-2}].$$

On a de même

$$\frac{dU_{m,n}}{dy} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\left[n\,\mathfrak{V}_{m,n-1} + (n+1)\,\mathfrak{V}_{m-2,n+1}\right].$$

L'analogie n'est donc pas complète avec l'égalité (4). Mais, si $n=0$ ou $n=1$, alors $\mathfrak{V}_{m+1,n-2}$ est nul, et la première des relations précédentes devient analogue à la relation (4), puisqu'elle donne

$$\frac{dU_{m,n}}{dx} = \frac{m}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\,\mathfrak{V}_{m-1,n}.$$

Il en est de même de la seconde, quand $m=0$ ou $m=1$. Examinons les deux premiers cas; on traitera de la même façon les deux derniers. Soit d'abord $n=0$, on a

$$U_{m,0} = -\frac{\sqrt{1-x^2-y^2}}{m}\,\frac{d\mathfrak{V}_{m-1,0}}{dx} \quad \text{et} \quad \frac{dU_{m,0}}{dx} = \frac{m}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\,\mathfrak{V}_{m-1,0},$$

d'où l'on déduit, en multipliant membre à membre,

$$U_{m,0}\,\frac{dU_{m,0}}{dx} = -\,\mathfrak{V}_{m-1,0}\,\frac{d\mathfrak{V}_{m-1,0}}{dx};$$

donc $(U_{m,0})^2 + (\mathfrak{V}_{m-1,0})^2$ est une quantité constante relativement à x, c'est-à-dire une quantité indépendante de x; je vais démontrer que cette somme est égale à $(1-y^2)^m$. On aura alors un théorème analogue à celui qui est exprimé par l'égalité $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$. On a

$$U_{m,0} = (-1)^m\,\frac{\sqrt{1-x^2-y^2}}{1.3.5\ldots(2m-1)}\,\frac{d^m(1-x^2-y^2)^{m-\frac{1}{2}}}{dx^m},$$

$$\mathfrak{V}_{m-1,0} = (-1)^{m-1}\,\frac{m}{1.3.5\ldots(2m-1)}\,\frac{d^{m-1}(1-x^2-y^2)^{m-\frac{1}{2}}}{dx^{m-1}}.$$

Posons $\dfrac{x}{\sqrt{1-y^2}} = x'$, d'où $dx = \sqrt{1-y^2}\,dx'$, il viendra

$$U_{m,0} = (-1)^m\,\frac{\sqrt{1-x'^2}}{1.3.5\ldots(2m-1)}\,(1-y^2)^{\frac{m}{2}}\,\frac{d^m(1-x'^2)^{m-\frac{1}{2}}}{dx'^m},$$

$$\mathfrak{V}_{m-1,0} = (-1)^{m-1}\,\frac{m}{1.3.5\ldots(2m-1)}\,(1-y^2)^{\frac{m}{2}}\,\frac{d^{m-1}(1-x'^2)^{m-\frac{1}{2}}}{dx'^m},$$

ou, en posant $x' = \cos\varphi$,

$$U_{m,0} = (1 - y^2)^{\frac{m}{2}} \cos m\varphi,$$

$$\mathfrak{V}_{m-1,0} = (1 - y^2)^{\frac{m}{2}} \sin m\varphi;$$

par conséquent

$$(U_{m,0})^2 + (\mathfrak{V}_{m-1,0})^2 = (1 - y^2)^m.$$

Mais, si au lieu de supposer $n = 0$, on suppose $n = 1$, la quantité $(U_{m,1})^2 + (\mathfrak{V}_{m-1,1})^2$ est encore une quantité indépendante de x. Voici comment on peut obtenir l'expression de cette fonction de y. On a, par une transformation facile,

$$U_{m,1} = (-1)^m (m+1) \frac{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}{1.3.5\ldots(2m-1)}\, y\, \frac{d^m (1 - x^2 - y^2)^{m-\frac{1}{2}}}{dx^m},$$

$$\mathfrak{V}_{m-1,1} = (-1)^{m-1} m(m+1) \frac{1}{1.3.5\ldots(2m-1)}\, y\, \frac{d^{m-1}(1 - x^2 - y^2)^{m-\frac{1}{2}}}{dx^m};$$

par conséquent,

$$U_{m,1} = (m+1)\, y\, U_{m,0},$$
$$\mathfrak{V}_{m-1,1} = (m+1)\, y\, \mathfrak{V}_{m-1,0},$$

donc

$$(U_{m,1})^2 + (\mathfrak{V}_{m-1,1})^2 = (m+1)^2 y^2 [(U_{m,0})^2 + (\mathfrak{V}_{m-1,0})^2] = (m+1)^2 y^2 (1 - y^2)^m.$$

On peut remarquer aussi les formules suivantes. Si l'on fait $y = \cos\psi$, $x = \sin\psi \cos\varphi$, on a

$$U_{m,0} = \cos m\varphi \sin^m\psi,$$
$$U_{m,1} = (m+1) \cos\psi \sin^m\psi \cos m\varphi.$$

Enfin je donnerai encore la relation déduite de l'équation

$$\sum a^m b^n U_{m,n} = \frac{1 - ax - by}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} \sum a^m b^n \mathfrak{V}_{m,n}.$$

Cette relation est

$$U_{m,n} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} (\mathfrak{V}_{m,n} - x\, \mathfrak{V}_{m-1,n} - y\, \mathfrak{V}_{m,n-1}).$$

Sur quelques intégrales doubles.

On a

$$\iint F(x,y)\frac{d^{m+n}(1-x^2-y^2)^{m+n-\frac{1}{2}}}{dx^m\,dy^n}\,dx\,dy$$
$$=(-1)^{m+n}\iint \frac{d^{m+n}F(x,y)}{dx^m\,dy^n}(1-x^2-y^2)^{m+n-\frac{1}{2}}\,dx\,dy,$$

les variables étant limitées dans les deux intégrales par la condition $x^2+y^2\leqq 1$.

Si l'on fait $F(x,y)=U_{\mu,\nu}$, et que $\mu+\nu$ soit inférieur à $m+n$, l'intégrale précédente sera nulle; dont l'intégrale

$$\iint \frac{U_{m,n}\,U_{\mu,\nu}}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\,dx\,dy,$$

les variables étant limitées par la condition précédente, est nulle quand les deux sommes $m+n$ et $\mu+\nu$ sont différentes. Cette propriété est l'analogue de celle qui est exprimée par la formule

$$\int_0^\pi \cos m\varphi \cos m'\varphi\, d\varphi = 0$$

quand les nombres entiers m et m' sont différents; car si l'on fait dans cette dernière formule $\cos\varphi = x$, elle devient

$$\int_{-1}^{+1}\frac{\cos(m\arccos x)\cos(m'\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = 0.$$

Nous allons voir aussi la formule analogue à la suivante

$$\int_0^\pi \cos m\varphi \sin n\varphi \sin\varphi\, d\varphi = 0,$$

si le nombre entier m est différent de $n-1$ et de $n+1$. En posant $\cos\varphi = x$, cette formule devient

$$\int_{-1}^{+1}\cos(m\arccos x)\sin(n\arccos x)\,dx = 0.$$

Si, dans l'égalité

$$\int\int \mho_{m,n} F(x,y)\,dx\,dy = K(-1)^{m+n}\int\int (1-x^2-y^2)^{m+n+\frac{1}{2}} \frac{d^{m+n}F(x,y)}{dx^m\,dy^n}\,dx\,dy,$$

où K est une constante, on fait $F(x,y) = U_{\mu,\nu}$, il vient

$$\int\int \mho_{m,n} U_{\mu,\nu}\,dx\,dy = K(-1)^{m+n}\int\int (1-x^2-y^2)^{m+n+\frac{1}{2}} \frac{d^{m+n}U_{\mu,\nu}}{dx^m\,dy^n}\,dx\,dy.$$

Donc, si l'on a $\mu+\nu < m+n$, on a aussi

$$\int\int \mho_{m,n} U_{\mu,\nu}\,dx\,dy = 0.$$

Mais supposons maintenant que $\mu+\nu$ soit supérieur à $m+n$. On a

$$\int\int F(x,y)\,U_{\mu,\nu}\,dx\,dy$$
$$= K'(-1)^{m+n}\int\int (1-x^2-y^2)^{\mu+\nu-\frac{1}{2}} \frac{d^{\mu+\nu}\sqrt{1-x^2-y^2}\,F(x,y)}{dx^\mu\,dy^\nu}\,dx\,dy.$$

Faisant $F(x,y) = \mho_{m,n}$, il vient

$$\int\int \mho_{m,n} U_{\mu,\nu}\,dx\,dy$$
$$= K'(-1)^{m+n}\int\int (1-x^2-y^2)^{\mu+\nu-\frac{1}{2}} \frac{d^{\mu+\nu}\sqrt{1-x^2-y^2}\,\mho_{m,n}}{dx^\mu\,dy^\nu}\,dx\,dy.$$

$\sqrt{1-x^2-y^2}\,\mho_{m,n}$ est un polynôme du degré $m+n+2$; donc si $m+n+2$ est plus petit que $\mu+\nu$, l'intégrale $\int\int \mho_{m,n} U_{\mu,\nu}\,dx\,dy$ est nulle.

On reconnaît ainsi l'analogie que nous avions annoncée. Cependant, pour qu'elle soit complète, il faut que l'intégrale précédente soit aussi nulle quand $\mu+\nu$ est égal à $m+n+1$; or $\sqrt{1-x^2-y^2}\,\mho_{m,n}$ est un polynôme dans lequel les exposants de x et de y varient de deux unités; il en sera de même de sa dérivée d'ordre $m+n+1$. Cette dérivée, du premier degré, contiendra donc x et y à la première puissance, mais n'aura pas de terme constant. On voit alors qu'en associant à certaines valeurs de x et de y, les mêmes valeurs prises en signe contraire, on formera deux éléments de l'intégrale de signes contraires, mais égaux en valeur absolue; donc, en définitive, l'intégrale est nulle. Ainsi l'analogie est complète.

Sur l'intégrale double $\iint U_{m,n} V_{\mu,\nu}\, dx\, dy$ *pour* $x^2 + y^2 \leqq 1$.

Les fonctions $V_{m,n}$ proviennent, comme nous l'avons déjà dit, du développement suivant

$$(1 - x^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}} (1 - 2ax - 2by + a^2 + b^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum a^m b^n V_{m,n}.$$

On voit clairement que, sauf le facteur $(1 - x^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}}$, $V_{m,n}$ sera un polynôme du degré $m + n$, dont le seul terme de ce degré sera le terme en $x^m y^n$, et dans lequel les exposants de x, ainsi que ceux de y, seront tous de même parité. Voici les valeurs de $V_{m,n}$ dans les cas les plus simples.

En posant $(1 - x^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}} = \rho$, on aura

$$V_{0,0} = \rho, \qquad V_{3,0} = \frac{1}{2}\rho(5x^3 - 3x),$$

$$V_{1,0} = \rho x, \qquad V_{1,2} = \frac{3}{2}\rho(5xy^2 - x),$$

$$V_{0,1} = \rho y, \qquad V_{2,1} = \frac{3}{2}\rho(5x^2y - y),$$

$$V_{2,0} = \frac{1}{2}\rho(3x^2 - 1), \qquad V_{0,3} = \frac{1}{2}\rho(5y^3 - 3y),$$

$$V_{0,2} = \frac{1}{2}\rho(3y^2 - 1), \qquad V_{2,2} = \frac{3}{4}\rho(35x^2y^2 - 5x^2 - 5y^2 + 1),$$

$$V_{4,0} = \frac{1}{8}\rho(35x^4 - 30x^2 + 8), \qquad V_{3,1} = \frac{5}{2}\rho(7x^3y - 3xy),$$

$$V_{0,4} = \frac{1}{8}\rho(35y^4 - 30y^2 + 8), \qquad V_{1,3} = \frac{5}{2}\rho(7xy^3 - 3xy).$$

$$V_{1,1} = 3\rho xy,$$

Je vais faire voir que l'intégrale double $\iint U_{m,n} V_{\mu,\nu}\, dx\, dy$, dans laquelle les variables sont limitées par la condition $x^2 + y^2 \leqq 1$, est nulle, à moins que l'on n'ait $m = \mu$, $n = \nu$, auquel cas je donnerai la valeur de l'intégrale.

Pour cela, cherchons l'intégrale

$$A = \int\int (1 - 2a'x - 2b'y + a'^2 + b'^2)^{-\frac{1}{2}} (1 - x^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}} (1 - ax - by)$$
$$\times [(1 - ax - by)^2 - (a^2 + b^2)(x^2 + y^2 - 1)]^{-1}\, dx\, dy$$

entre les mêmes limites que précédemment.

Faisons

$$a^2 + b^2 = r^2, \quad a'^2 + b'^2 = r'^2,$$
$$x = \frac{a'\xi + b'\eta}{r'}, \quad y = \frac{b'\xi - a'\eta}{r'},$$
$$\frac{aa' + bb'}{rr'} = \cos\theta, \quad \frac{ab' - ba'}{rr'} = \sin\theta.$$

Alors

$$dx\, dy = d\xi\, d\eta, \quad x^2 + y^2 = \xi^2 + \eta^2, \quad a'x + b'y = r'\xi,$$
$$ax + by = r(\xi\cos\theta + \eta\sin\theta),$$

et l'on a

$$A = \int\int d\xi\, d\eta\, (1 - 2r'\xi + r'^2)^{-\frac{1}{2}} (1 - \xi^2 - \eta^2)^{-\frac{1}{2}} (1 - r\cos\theta\xi - r\sin\theta\eta)$$
$$\times [(1 - r\cos\theta\xi - r\sin\theta\eta)^2 - r^2(\xi^2 + \eta^2 - 1)]^{-1},$$

les variables nouvelles ξ et η étant également limitées par la condition $\xi^2 + \eta^2 \leqq 1$. On est conduit à intégrer d'abord par rapport à η, c'est-à-dire à l'intégrale

$$B = \int_{-\sqrt{1-\xi^2}}^{+\sqrt{1-\xi^2}} d\eta \frac{1 - r\cos\theta\xi - r\sin\theta\eta}{(1 - \xi^2 - \eta^2)^{\frac{1}{2}} [(1 - r\cos\theta\xi - r\sin\theta\eta)^2 - r^2(\xi^2 + \eta^2 - 1)]}.$$

Changeons de variables et posons $\eta = \sqrt{1 - \xi^2}\cos\varphi$, il vient

$$B = \int_0^\pi \sqrt{1 - \xi^2}\sin\varphi\, d\varphi$$
$$\times \frac{1 - r\cos\theta\xi - r\sin\theta\sqrt{1 - \xi^2}\cos\varphi}{\sqrt{1 - \xi^2}\sin\varphi\,[(1 - r\cos\theta\xi - r\sin\theta\sqrt{1 - \xi^2}\cos\varphi)^2 + r^2(1 - \xi^2)\sin^2\varphi]},$$

ou bien

$$B = \int_0^\pi d\varphi \frac{L - M\cos\varphi}{(L - M\cos\varphi)^2 + N^2\sin^2\varphi},$$

si l'on pose

$$1 - r\cos\theta\xi = \mathrm{L},$$
$$r\sin\theta\sqrt{1-\xi^2} = \mathrm{M},$$
$$r\sqrt{1-\xi^2} = \mathrm{N}.$$

Mais l'intégrale précédente peut se transformer en la somme de deux autres, savoir :

$$\mathrm{B} = \frac{1}{2}\int_0^\pi \frac{d\varphi}{\mathrm{L} - \mathrm{M}\cos\varphi - i\mathrm{N}\sin\varphi} + \frac{1}{2}\int_0^\pi \frac{d\varphi}{\mathrm{L} - \mathrm{M}\cos\varphi + i\mathrm{N}\sin\varphi}.$$

La seconde de ces intégrales est égale à

$$\frac{1}{2}\int_0^{-\pi} \frac{-d\varphi}{\mathrm{L} - \mathrm{M}\cos\varphi - i\mathrm{N}\sin\varphi} \quad \text{ou bien} \quad \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{0} \frac{d\varphi}{\mathrm{L} - \mathrm{M}\cos\varphi - i\mathrm{N}\sin\varphi},$$

de sorte que l'on peut écrire

$$\mathrm{B} = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d\varphi}{\mathrm{L} - \mathrm{M}\cos\varphi - i\mathrm{N}\sin\varphi}.$$

Soit

$$e^{\varphi i} = z, \qquad \text{d'où} \qquad zi\varphi = dz, \qquad \cos\varphi = \frac{z + \frac{1}{z}}{2}, \qquad i\sin\varphi = \frac{z - \frac{1}{z}}{2}.$$

On est conduit, pour avoir B, à intégrer le long du cercle $e^{\varphi i} = z$, ou $x^2 + y^2 = 1$, la différentielle

$$\frac{dz}{2iz\left(\mathrm{L} - \mathrm{M}\dfrac{z + \frac{1}{z}}{2} - \mathrm{N}\dfrac{z - \frac{1}{z}}{2}\right)} = \frac{dz}{i[2\mathrm{L}z - \mathrm{M}(z^2+1) - \mathrm{N}(z^2-1)]}.$$

Le résultat est égal à 2π, multiplié par le résidu de

$$\frac{1}{2\mathrm{L}z - \mathrm{M}(z^2+1) - \mathrm{N}(z^2-1)},$$

dans l'intérieur du cercle $z = e^{\varphi i}$. Si je fais dans le dénominateur de l'expression précédente, successivement $z = -1$ et $z = +1$, j'obtiens les deux résultats suivants :

$$-2(L+M), \quad 2(L-M).$$

Dans l'hypothèse de $r<1$, que je suppose, la première de ces deux quantités est toujours négative, la seconde toujours positive, quand ξ varie de -1 à $+1$. Nous en concluons que l'équation

$$2Lz - M(z^2+1) - N(z^2-1) = 0$$

a deux racines réelles, dont l'une est comprise entre -1 et $+1$. Si l'on résout cette équation, on a $z = \dfrac{L \pm \sqrt{L^2+N^2-M^2}}{M+N}$, L et $M+N$ étant positifs, c'est la racine $z = \dfrac{L - \sqrt{L^2+N^2-M^2}}{M+N}$ qui est comprise entre -1 et $+1$.

Donc le résidu cherché est égal à la valeur de P tirée de l'identité

$$\begin{aligned}&\frac{1}{-(M+N)z^2+2Lz-(M-N)}\\ &\quad = \frac{P}{z - \dfrac{L-\sqrt{L^2+N^2-M^2}}{M+N}} - \frac{P}{z - \dfrac{L+\sqrt{L^2+N^2-M^2}}{M+N}},\end{aligned}$$

d'où

$$P = \frac{1}{2\sqrt{L^2+N^2-M^2}}.$$

Ainsi, l'intégrale B est égale à

$$\frac{\pi}{\sqrt{L^2+N^2-M^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{1-2r\cos\theta\,\xi + r^2\cos^2\theta}},$$

et l'on a

$$A = \pi \int_{-1}^{+1} \frac{d\xi}{\sqrt{1-2r'\xi+r'^2}\sqrt{1-2r\cos\theta\,\xi+r^2\cos^2\theta}}.$$

On peut maintenant calculer cette intégrale par les procédés ordinaires.

Mais on peut l'obtenir facilement en se servant des propositions connues concernant les fonctions X_n. Remplaçons ξ par x dans l'intégrale précédente : elle pourra s'écrire

$$A = \pi \int_{-1}^{+1} \left(\sum r'^n X_n\right) \left(\sum r^n \cos^n\theta\, X_n\right) dx,$$

d'où

$$A = 2\pi \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(rr'\cos\theta)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{\sqrt{rr'\cos\theta}} \log \frac{1+\sqrt{rr'\cos\theta}}{1-\sqrt{rr'\cos\theta}},$$

ou bien

$$A = \frac{\pi}{\sqrt{aa'+bb'}} \log \frac{1+\sqrt{aa'+bb'}}{1-\sqrt{aa'+bb'}},$$

si l'on remplace $rr'\cos\theta$ par sa valeur $aa'+bb'$. Il faut remarquer que la recherche de l'intégrale simple précédente, telle que nous l'avons faite, suppose que r' et $r\cos\theta$ soient moindres que l'unité. Comme il nous avait déjà fallu auparavant supposer r moindre que l'unité, on voit que la valeur précédente de A suppose, en définitive, r et r' plus petits que 1. Cette valeur de A ne change pas, quand on y remplace a et a' par at et $\frac{a'}{t}$, et b et b' par bu et $\frac{b'}{u}$. Donc l'intégrale

$$\int\int dx\, dy \left(\sum a^m b^n t^m u^n U_{m,n}\right) \left(\sum a^\mu b^\nu t^{-\mu} u^{-\nu} V_{\mu,\nu}\right)$$

est indépendante de t et de u, quels que soient a, b, a', b', pourvu que l'on ait $a^2+b^2<1$ et $a'^2+b'^2<1$. On conclut de là que l'intégrale $\int\int U_{m,n} V_{\mu,\nu}\, dx\, dy$ est nulle, si l'on n'a pas à la fois $m=\mu$, $n=\nu$. Si ces conditions sont réalisées, l'intégrale est égale au coefficient de $(aa')^m (bb')^n$ dans l'expression de A développé. On voit immédiatement que ce coefficient est égal à

$$\frac{2\pi}{2m+2n+1} \cdot \frac{(m+n)!}{m!\, n!}.$$

De quelques propriétés des fonctions $V_{m,n}$.

Si l'on cherche à développer la fonction $\frac{U_{m,n}}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ au moyen des fonctions $V_{\mu,\nu}$, les coefficients $A_{\mu,\nu}$ du développement

$$\frac{U_{m,n}}{\sqrt{1-x^2-y^2}} = \sum A_{\mu,\nu} V_{\mu,\nu}$$

se détermineront par l'équation

$$A_{\mu,\nu} \frac{2\pi}{2\mu+2\nu+1} \frac{(\mu+\nu)!}{\mu!\,\nu!} = \int\int \frac{U_{m,n} U_{\mu,\nu}}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\, dx\, dy,$$

et, d'après ce qu'on a démontré plus haut, on voit que $A_{\mu,\nu}$ sera nul, si $\mu+\nu$ est différent de $m+n$. Donc la fonction $\frac{U_{m,n}}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ s'exprimera linéairement au moyen des fonctions $V_{\mu,\nu}$, telles que $\mu+\nu=m+n$.

Une fonction linéaire quelconque des fonctions $\frac{U_{m,n}}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$, telles que $m+n=k$, à savoir :

$$\alpha \frac{U_{k,0}}{\sqrt{1-x^2-y^2}} + \beta \frac{U_{k-1,1}}{\sqrt{1-x^2-y^2}} + \ldots,$$

s'exprimera linéairement au moyen des fonctions $V_{\mu,\nu}$, telles que $\mu+\nu=k$. Si l'on multiplie la première fonction linéaire par $\sqrt{1-x^2-y^2}\, V_{h,h'}\, dx\, dy$, et que l'on intègre, on voit que, si $h+h'$ est différent de K, l'intégrale sera nulle ; d'où l'on conclut que l'intégrale

$$\int\int dx\, dy \sqrt{1-x^2-y^2}\, V_{m,n} V_{\mu,\nu}$$

est nulle, si $m+n$ est différent de $\mu+\nu$.

On pourra voir facilement qu'on peut déduire les fonctions $V_{m,n}$ des fonctions $U_{m,n}$ par la résolution de systèmes d'équations du premier degré, de la même manière qu'on l'a fait, dans la première Partie, pour déduire les fonctions $V_{\mu,\nu}$ des fonctions $U_{\mu,\nu}$.

Si l'on substitue dans la fonction $V_{m,n}$, à la place de x, $\frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$, et, à la place de y, $\frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$, elle devient

$$\frac{(-1)^{m+n}}{1.2\ldots m.1.2\ldots n}(1+x^2+y^2)^{\frac{m+n}{2}+1}\frac{d^{m+n}(1+x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}}{dx^m\,dy^n}.$$

Systèmes d'équations aux dérivées partielles pour les fonctions $\mho_{m,n}$, $\vartheta_{m,n}$, $U_{m,n}$, $V_{m,n}$.

La fonction $\mho_{m,n}$ satisfait aux deux équations linéaires suivantes aux dérivées partielles

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^2U}{dx^2}-x\frac{dP}{dx}-(m+1)P=0,\\ &\frac{d^2U}{dy^2}-y\frac{dP}{dy}-(n+1)P=0,\end{aligned}\right.$$

où

$$P=x\frac{dU}{dx}+y\frac{dU}{dy}-(m+n+1)U,$$

et l'on reconnaît ainsi leur analogie avec l'équation

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+(n+1)^2y=0,$$

à laquelle satisfait la fonction $y=\sin[(n+1)\arccos x]$, et qui peut s'écrire

$$\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{d\left[x\frac{dy}{dx}-(n+1)y\right]}{dx}-(n+1)\left(x\frac{dy}{dx}-(n+1)y\right)=0.$$

La fonction $\vartheta_{m,n}$ satisfait aux deux équations suivantes :

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^2V}{dx^2}-x\frac{dP}{dx}+mP=0,\\ &\frac{d^2V}{dy^2}-y\frac{dP}{dy}+nP=0,\end{aligned}\right.$$

où

$$P=x\frac{dV}{dx}+y\frac{dV}{dy}+(m+n+3)V.$$

Pour la fonction $U_{m,n}$, ou plutôt la fonction $\frac{U_{m,n}}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$, je donnerai les équations

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^2 U}{dx^2} - x\frac{dP}{dx} - (m+1)P = 0,\\ &\frac{d^2 U}{dy^2} - y\frac{dP}{dy} - (n+1)P = 0,\end{aligned}\right.$$

où

$$P = x\frac{dU}{dx} + y\frac{dU}{dy} - (m+n-1)U = 0,$$

et l'on reconnaît ainsi leur analogie avec l'équation

$$(1-x^2)\frac{d^2 y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + n^2 y = 0,$$

à laquelle satisfait la fonction $y = \cos(n \arccos x)$, et qui peut s'écrire

$$\frac{d^2 \frac{y}{\sqrt{1-x^2}}}{dx^2} - x\frac{dP}{dx} - (n+1)P,$$

en posant

$$P = x\frac{d\frac{y}{\sqrt{1-x^2}}}{dx} - (n-1)\frac{y}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Enfin la fonction $V_{m,n}$, ou plutôt $V_{m,n}\sqrt{1-x^2-y^2}$, satisfait au système

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^2 V}{dx^2} - x\frac{dP}{dx} + mP = 0,\\ &\frac{d^2 V}{dx^2} - y\frac{dP}{dy} + nP = 0,\end{aligned}\right.$$

où

$$P = x\frac{dV}{dx} + y\frac{dV}{dy} + (m+n+1)V.$$

Généralisation de la fonction $\sin[(n+1)\arccos x]$.

Considérons le développement suivant

$$(1-x^2-y^2-z^2-\ldots)^{\frac{1}{2}}[(1-ax-by-cz-\ldots)^2-(a^2+b^2+c^2+\ldots)(x^2+y^2+z^2+\ldots-1)]^{-1}$$
$$=\sum a^m b^{m'} c^{m''}\ldots \mathfrak{V}_{m,m',m'',\ldots}.$$

Soient

$$P = ax+by+cz+\ldots+(a^2+b^2+c^2+\ldots)^{\frac{1}{2}}(x^2+y^2+z^2+\ldots-1)^{\frac{1}{2}},$$

$$Q = ax+by+cz+\ldots-(a^2+b^2+c^2+\ldots)^{\frac{1}{2}}(x^2+y^2+z^2+\ldots-1)^{\frac{1}{2}}.$$

L'expression précédente pourra s'écrire

$$\frac{1}{2i\sqrt{a^2+b^2+c^2+\ldots}}\left(\frac{1}{1-P}-\frac{1}{1-Q}\right),$$

de sorte que l'ensemble homogène des termes de degré k en $a, b, c, \ldots$, dans le développement, sera donné par l'expression

$$\frac{1}{2i\sqrt{a^2+b^2+c^2+\ldots}}(P^{k+1}-Q^{k+1}).$$

Nous allons la mettre sous une autre forme, au moyen de la formule de Lagrange déjà employée.

Faisons

$$F(x,y,z,\ldots)=x^2+y^2+z^2+\ldots-1,\quad \Phi(x,y,z\ldots=(x^2+y^2+z^2+\ldots-1)^{\frac{1}{2}};$$

on aura

$$\mathfrak{F}(u)=-\frac{G}{4}u^2+Hu-K=0.$$

La valeur de u qu'il faut prendre est

$$u=2\frac{H-\sqrt{H^2-GK}}{G};$$

on aura

$$\mathfrak{F}'(u)=\sqrt{H^2-GK},\quad \Phi\left(x+\frac{a}{2}u,\ y+\frac{b}{2}u,\ z+\frac{c}{2}u,\ldots\right)=\sqrt{u},\ldots$$

Le premier membre de la formule de Lagrange devient, après des réductions faciles,

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+\ldots}}\left[(1-P)^{-\frac{1}{2}}-(1-Q)^{-\frac{1}{2}}\right].$$

L'ensemble homogène des termes de degré k, en $a, b, c, \ldots$, dans cette expression, est

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+\ldots}}\,\frac{1.3.5\ldots(2k+1)}{2.4.6\ldots(2k+2)}(P^{k+1}-Q^{k+1});$$

et cet ensemble est égal à

$$\sum \frac{a^m b^{m'} c^{m''}\ldots}{m!\,m'!\,m''!\ldots 2^{m+m'+m''+\ldots}}\,\frac{d^{m+m'+m''+\ldots}(x^2+y^2+z^2+\ldots-1)^{m+m'+m''+\ldots+\frac{1}{2}}}{dx^m\,dy^{m'}\,dz^{m''}\ldots},$$

cette somme s'étendant à tous les termes pour lesquels $m+m'+m''+\ldots$ est égal à k. Donc

$$\begin{aligned}\mho_{m,m',m'',\ldots} &= (-1)^{m+m'+m''+\ldots}\,\frac{(m+m'+m''+\ldots+1)!}{m!\,m'!\,m''!\ldots}\\ &\times \frac{1}{1.3.5\ldots(2m+2m'+2m''+\ldots+1)}\\ &\times \frac{d^{m+m'+m''+\ldots}(1-x^2-y^2-z^2-\ldots)^{m+m'+m''+\ldots+\frac{1}{2}}}{dx^m\,dy^{m'}\,dz^{m''}\ldots}.\end{aligned}$$

On voit immédiatement que l'intégrale

$$\int\!\!\int\!\!\int \frac{\mho_{m,m',m'',\ldots}\,\mho_{\mu,\mu',\mu'',\ldots}}{\sqrt{1-x^2-y^2-z^2-\ldots}}\,dx\,dy\,dz\ldots,$$

avec la condition $x^2+y^2+z^2+\ldots \leqq 1$, est nulle quand $\mu+\mu'+\mu''+\ldots$ est différent de $m+m'+m''+\ldots$.

Nous allons associer aux fonctions précédentes les fonctions $\varphi_{m,m',m'',\ldots}$ provenant du développement

$$(1-2ax-2by-2cz-\ldots+a^2+b^2+c^2+\ldots)^{-\frac{\mu+1}{2}} = \sum a^m b^{m'} c^{m''}\ldots\varphi_{m,m',m'',\ldots}.$$

On va voir que l'intégrale

$$\int\!\!\int\!\!\int dx\,dy\,dz\ldots\varphi_{n,n',n'',\ldots}\,\mho_{m,m',m'',\ldots}$$

est nulle si l'on n'a pas en même temps $n=m$, $n'=m'$, $n''=m''\ldots$.

Pour cela, considérons l'intégrale multiple

$$A = \int\int\int dx\, dy\, dz \ldots \mathfrak{V}_{m,m',m'',\ldots}$$
$$\times (1 - 2ax - 2by - 2cz - \ldots + a^2 + b^2 + c^2 + \ldots)^{-\frac{\mu+1}{2}}.$$

Par des transformations analogues à celles que nous avons faites dans la première Partie, on mettra cette intégrale sous la forme

$$A = (\sqrt{\pi})^{\mu-1} \frac{(m + m' + m'' + \ldots + 1)!}{m!\, m'!\, m''! \ldots} \frac{a^m b^{m'} c^{m''} \ldots}{1.3.5\ldots(2m + 2m' + 2m'' + \ldots + 1)}$$
$$\times (\mu + 1)(\mu + 3)\ldots[\mu + 2(m + m' + m'' + \ldots) - 1] \frac{\Gamma\left(m + m' + m'' + \ldots + \frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\mu}{2} + m + m' + m'' + \ldots + 1\right)} B,$$

où

$$B = \int_{-1}^{+1} \frac{(1 - x^2)^{\frac{\mu}{2} + m + m' + m'' + \ldots}}{(1 - 2rx + r^2)^{\frac{\mu}{2} + m + m' + m'' + \ldots + \frac{1}{2}}};$$

r est égal à $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + \ldots}$.

Je supposerai d'abord le cas de μ impair, soit $\mu = 2\mu' + 1$.

En se servant des résultats obtenus dans la première Partie pour la recherche d'une intégrale analogue, on trouve

$$B = \frac{\pi}{2^{\mu' + m + m' + m'' + \ldots + 1}} \frac{1.3.5\ldots[2(\mu' + m + m' + m'' + \ldots) + 1]}{(\mu' + m + m' + m'' + \ldots + 1)!},$$

et

$$A = \frac{\pi^{\mu'+1}}{2} \frac{a^m b^{m'} c^{m''} \ldots}{\mu'!} \frac{(m + m' + m'' + \ldots + 1)!}{m!\, m'!\, m''! \ldots} \frac{1}{\mu' + m + m' + m'' + \ldots + 1}.$$

La proposition est démontrée.

Concluons de ce qui précède la valeur de l'intégrale d'ordre $2\mu' + 1$

$$\int\int\int dx\, dy\, dz \ldots (1 - 2ax - 2by - \ldots + a^2 + b^2 + \ldots)^{-(\mu'+1)} (1 - x^2 - y^2 - \ldots)^{\frac{1}{2}}$$
$$\times [(1 - a'x - b'y - \ldots)^2 - (a'^2 + b'^2 + \ldots)(x^2 + y^2 + \ldots - 1)]^{-1}.$$

Si l'on pose $aa' + bb' + cc' + \ldots = \alpha$, cette intégrale est égale à

$$\frac{\pi^{\mu'+1}}{2\mu'!}\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{(n+1)\alpha^n}{\mu'+n+1} = \frac{\pi^{\mu'+1}}{2\mu'!}\,\frac{d\sum\limits_{n=0}^{n=\infty}\dfrac{\alpha^n}{\mu'+n}}{d\alpha};$$

mais

$$\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{\alpha^n}{\mu'+n} = \frac{1}{\alpha^{\mu'}}\left[-\log(1-\alpha) - \frac{\alpha}{1} - \ldots - \frac{\alpha^{\mu'-1}}{\mu'-1}\right]:$$

donc

$$\frac{d\sum\limits_{n=0}^{n=\infty}\dfrac{\alpha^n}{\mu'+n}}{d\alpha} = \frac{\mu'}{\alpha^{\mu'+1}}\left[\log(1-\alpha) + \frac{\alpha}{1} + \frac{\alpha^2}{2} + \ldots + \frac{\alpha^{\mu'}}{\mu'}\right] + \frac{1}{1-\alpha}.$$

Supposons μ pair et égal à $2\mu'$. On trouvera

$$\mathrm{A} = \pi^{\mu'}\frac{2^{\mu'}}{1.3.5\ldots(2\mu'-1)}\,\frac{(m+m'+m''+\ldots+1)!\ldots}{m!\,m'!\,m''!\ldots}$$
$$\times\frac{a^m b^{m'} c^{m''}\ldots}{2(\mu'+m+m'+m''+\ldots)+1}.$$

En posant $aa' + bb' + cc' + \ldots = \alpha$, on trouvera que l'intégrale d'ordre $2\mu'$

$$\int\int\int dx\,dy\,dz\ldots(1-2ax-2by-\ldots+a^2+b^2+\ldots)^{-\left(\mu'+\frac{1}{2}\right)}(1-x^2-y^2-\ldots)^{\frac{1}{2}}$$
$$\times\left[(1-a'x-b'y-\ldots)^2-(a'^2+b'^2+\ldots)(x^2+y^2+\ldots-1)\right]^{-1},$$

est égale à

$$\frac{(2\pi)^{\mu'}}{1.3.5\ldots(2\mu'-1)}\,\frac{1}{\alpha^{\mu'}}\left[\frac{1}{2(1-\alpha)} + \frac{\mu'-1}{1} + \frac{(\mu'-2)\alpha}{3} + \frac{(\mu'-3)\alpha^2}{5} + \ldots\right.$$
$$\left. + \frac{\alpha^{\mu'-2}}{2\mu'-3} - \frac{2\mu'-1}{4\sqrt{\alpha}}\log\frac{1+\sqrt{\alpha}}{1-\sqrt{\alpha}}\right].$$

On verra facilement que la quantité

$$\int\int\int dx\,dy\,dz\ldots\,\varphi_{m,m',m'',\ldots}\,\varphi_{n,n',n'',\ldots}\sqrt{1-x^2-y^2-z^2-\ldots}$$

est nulle, si les sommes $m + m' + m'' + \ldots$ et $n + n' + n'' + \ldots$ sont différentes.

Enfin, j'indiquerai encore des fonctions analogues aux fonctions $\mathfrak{U}_{m,m',m'',\dots}$ et $\mathfrak{V}_{n,n',n'',\dots}$.

Soit

$$\mathfrak{P}_{m,m',m'',\dots} = \mathrm{K}_{m,m',m'',\dots}(1-x^2-y^2-z^2-\dots)^{-h} \times \frac{d^{m+m'+m''+\dots}(1-x^2-y^2-z^2-\dots)^{m+m'+m''+\dots+h+\frac{1}{2}}}{dx^m\,dy^{m'}\,dz^{m''}\dots},$$

où h est un nombre entier, et $\mathrm{K}_{m,m',m'',\dots}$ une constante. On aura, si les deux sommes $m+m'+m''+\dots$ et $n+n'+n''+\dots$ sont différentes,

$$\int\!\!\int\!\!\int dx\,dy\,dz\dots(1-x^2-y^2-z^2-\dots)^{h-\frac{1}{2}}\,\mathfrak{P}_{m,m',m'',\dots}\,\mathfrak{P}_{n,n',n'',\dots} = 0.$$

Considérant le développement

$$(1-x^2-y^2-z^2-\dots)^h(1-2ax-2by-2cz-\dots+a^2+b^2+c^2+\dots)^{-\frac{\mu+1}{2}-h}$$
$$=\sum a^m b^{m'} c^{m''}\,\mathfrak{Q}_{m,m',m'',\dots},$$

on aura des fonctions $\mathfrak{Q}_{m,m',m'',\dots}$ telles, que l'intégrale

$$\int\!\!\int\!\!\int dx\,dy\,dz\dots\mathfrak{P}_{m,m',m'',\dots}\,\mathfrak{Q}_{n,n',n'',\dots}$$

sera nulle, si l'on n'a pas simultanément $m=n$, $m'=n'$, $m''=n''$, ... et que l'intégrale

$$\int\!\!\int\!\!\int dx\,dy\,dz\dots(1-x^2-y^2-z^2-\dots)^{-\left(h-\frac{1}{2}\right)}\,\mathfrak{Q}_{m,m',m'',\dots}\,\mathfrak{Q}_{n,n',n'',\dots}$$

sera aussi nulle, si l'on a $m+m'+m''+\dots \lessgtr n+n'+n''+\dots$.

Généralisation des fonctions $U_{m,n}$, $V_{m,n}$.

Considérons le développement

$$(1-ax-by-cz-\dots)[(1-ax-by-cz-\dots)^2 - (a^2+b^2+c^2+\dots)(x^2+y^2+z^2+\dots-1)]^{-1}$$
$$=\sum a^m b^{m'} c^{m''}\dots U_{m,m',m'',\dots}$$

On trouvera facilement, au moyen de la formule de Lagrange, cette expression de $U_{m,m',m'',\dots}$

$$U_{m,m',m'',\dots} = (-1)^{m+m'+m''+\dots} \frac{1.2.3\dots(m+m'+m''+\dots)}{1.2\dots m.1.2\dots m'.1.2\dots m''\dots}$$
$$\times \frac{\sqrt{1-x^2-y^2-z^2-\dots}}{1.3.5\dots(2m+2m'+2m''+\dots-1)}$$
$$\times \frac{d^{m+m'+m''+\dots}(1-x^2-y^2-z^2-\dots)^{m+m'+m''+\dots-\frac{1}{2}}}{dx^m\, dy^{m'}\, dz^{m''}\dots},$$

et on en conclura

$$\iiint dx\, dy\, dz\dots \frac{U_{m,m',m'',\dots}\, U_{n,n',n'',\dots}}{\sqrt{1-x^2-y^2-z^2-\dots}} = 0,$$

lorsque $m+m'+m''+\dots$ est différent de $n+n'+n''+\dots$.

Les fonctions $V_{m,m',m'',\dots}$, que nous allons associer aux fonctions $U_{m,m',m'',\dots}$, naîtront du développement suivant :

$$(1-x^2-y^2-z^2-\dots)^{-\frac{1}{2}}(1-2ax-2by-2zc-\dots+a^2+b^2+c^2+\dots)^{-\frac{\mu-1}{2}}$$
$$=\sum a^m b^{m'} c^{m''}\dots V_{m,m',m'',\dots}.$$

Nous allons faire voir que l'intégrale

$$\iiint U_{m,m',m'',\dots} V_{n,n',n'',\dots}\, dx\, dy\, dz\dots$$

est toujours nulle, excepté quand on a $m=n$, $m'=n'$, $m''=n''$, auquel cas nous donnerons sa valeur. Pour cela, je calculerai l'intégrale suivante :

$$A = \iiint dx\, dy\, dz\dots U_{m,m',m'',\dots}(1-x^2-y^2-z^2-\dots)^{-\frac{1}{2}}$$
$$\times(1-2ax-2by-2cz\dots+a^2+b^2+c^2+\dots)^{-\frac{\mu-1}{2}}.$$

On trouvera facilement

$$A = \frac{(m+m'+m''+\dots)!}{m!\,m'!\,m''!\dots} \frac{a^m b^{m'} c^{m''}\dots(\sqrt{\pi})^{\mu-1}}{1.3.5\dots(2m+2m'+2m''+\dots-1)}$$
$$\times \frac{(\mu-1)(\mu+1)\dots[\mu+2(m+m'+m''+\dots)-3]\,\Gamma\left(m+m'+m''+\dots+\frac{1}{2}\right)B}{\Gamma\left(\frac{\mu}{2}+m+m'+m''+\dots\right)}$$

où

$$B = \int_{-1}^{+1} \frac{(1-x^2)^{\frac{\mu}{2}+m+m'+m''+\ldots-1}}{(1-2rx+r^2)^{\frac{\mu}{2}+m+m'+m''+\ldots-\frac{1}{2}}}\,dx,$$

r étant égal à $\sqrt{a^2+b^2+c^2+\ldots}$.

Je supposerai d'abord μ impair et égal à $2\mu'+1$. Dans ce cas on a

$$A = \frac{\pi^{\mu'+1}}{(\mu'-1)!}\,\frac{(m+m'+m''+\ldots)!}{m!\,m'!\,m''!\ldots}\,\frac{a^m b^{m'} c^{m''}\ldots}{\mu'+m+m'+m''+\ldots}.$$

Supposons maintenant μ pair et égal à $2\mu'$. On aura

$$A = \frac{(2\pi)^{\mu'}}{1.3.5\ldots(2\mu'-3)}\,\frac{a^m b^{m'} c^{m''}\ldots}{2(\mu'+m+m'+m''+\ldots)-1}\,\frac{(m+m'+m''+\ldots)!}{m!\,m'!\,m''!\ldots}.$$

On conclut de tout ceci que l'intégrale d'ordre μ

$$\int\int\int dx\,dy\,dz\ldots(1-2ax-2by-\ldots+a^2+b^2+\ldots)^{-\left(\frac{\mu-1}{2}\right)}$$
$$\times(1-x^2-\ldots)^{-\frac{1}{2}}(1-a'x-\ldots)[(1-a'x-\ldots)^2-(a'^2+b'^2+\ldots)(x^2+y^2+\ldots-1)]^{-1}$$

est égale, si l'on pose $aa'+bb'+cc'+\ldots=\alpha$, à

$$\frac{\pi^{\mu'+1}}{(\mu'-1)!}\,\frac{1}{\alpha^{\mu'}}\left(\log\frac{1}{1-\alpha}-\frac{\alpha}{1}-\frac{\alpha^2}{2}-\ldots-\frac{\alpha^{\mu'-1}}{\mu'-1}\right)$$

ou à

$$\frac{(2\pi)^{\mu'}}{1.3.5\ldots(2\mu'-3)}\,\frac{1}{\alpha^{\mu'-1}}\left(\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}\log\frac{1+\sqrt{\alpha}}{1-\sqrt{\alpha}}-\frac{1}{1}-\frac{\alpha}{3}-\frac{\alpha^2}{5}-\ldots-\frac{\alpha^{\mu'-2}}{2\mu'-3}\right),$$

suivant que μ est égal à $2\mu'+1$ ou à $2\mu'$.

L'intégrale

$$\int\int\int dx\,dy\,dz\ldots V_{m,m',m'',\ldots}\,V_{n,n',n'',\ldots}\sqrt{1-x^2-y^2-z^2-\ldots}$$

est nulle quand $m+m'+m''+\ldots$ est différent de $n+n'+n''+\ldots$.

Enfin, pour terminer, j'indiquerai quelques propriétés de fonctions analogues aux fonctions $U_{m,m',m'',\ldots}$ et $V_{m,m',m'',\ldots}$.

Soit

$$\begin{aligned}\mathrm{P}'_{m,m',m'',\ldots} = \mathrm{K}_{m,m',m'',\ldots}(1 - x^2 - y^2 - z^2 - \quad)^{-h+\frac{1}{2}} \\ \times \frac{d^{m+m'+m''+\ldots}(1 - x^2 - y^2 - z^2 - \ldots)^{m+m'+m''+\ldots+h-\frac{1}{2}}}{dx^m\, dy^{m'}\, dz^{m''}\ldots},\end{aligned}$$

h étant un nombre entier.

Soit aussi le développement

$$\begin{aligned}(1 - x^2 - y^2 - z^2 - \ldots)^{h-\frac{1}{2}}(1 - 2ax - 2by - 2cz - \ldots + a^2 + b^2 + c^2 + \ldots)^{-\frac{\mu-1}{2}-h} \\ = \sum a^m\, b^{m'}\, c^{m''} \ldots \mathrm{Q}'_{m,m',m'',\ldots}.\end{aligned}$$

Les deux intégrales

$$\iiint dx\, dy\, dz \ldots \frac{\mathrm{P}'_{m,m',m'',\ldots}\, \mathrm{P}'_{n,n',n'',\ldots}}{(1 - x^2 - y^2 - z^2 - \ldots)^{-h+\frac{1}{2}}}$$

et

$$\iiint dx\, dy\, dz \ldots \mathrm{Q}'_{m,m',m'',\ldots}\, \mathrm{Q}'_{n,n',n'',\ldots}(1 - x^2 - y^2 - z^2 - \ldots)^{-h+\frac{1}{2}}$$

sont nulles quand les sommes $m + m' + m'' + \ldots$ et $n + n' + n'' + \ldots$ sont différentes.

On a aussi

$$\iiint dx\, dy\, dz \ldots \mathrm{P}'_{m,m',m'',\ldots}\, \mathrm{Q}'_{n,n',n'',\ldots} = 0,$$

excepté dans le cas où $n = m$, $n' = m'$, $n'' = m''$, ...

Valeurs multiples de certaines intégrales doubles.

Pour terminer ce travail, je vais calculer dans tous les cas les valeurs de certaines intégrales doubles que nous avons eues à considérer antérieurement. On sait que l'intégrale définie

$$\int_0^{\pi} \log(1 + 2\rho \cos\omega + \rho^2)\, d\omega$$

est nulle quand ρ est inférieur à 1, égale à $2\pi \log \rho$ quand ρ est supérieur à 1, et quand ρ est l'unité, elle a pour valeur $\frac{\pi}{2} \log \frac{1}{2}$. Beaucoup d'autres intégrales définies simples, contenant un paramètre constant sous le signe $\int$, ne sont pas des fonctions continues de ce paramètre.

On s'est servi précédemment pour l'étude des fonctions U, V, U, V,... des valeurs de quelques intégrales multiples, calculées pour certaines hypothèses faites sur les constantes qui entraient sous les signes $\int\int\ldots$. Nous nous proposons ici de donner les diverses formes que prennent les valeurs de ces intégrales, quand on suppose aux constantes des valeurs quelconques.

De l'intégrale

$$\int\int(1-2ax-2by+a^2+b^2)^{-1}(1-2a'x-2b'y+a'^2+b'^2)^{-1}\,dx\,dy.$$

Cette intégrale a été calculée par M. Hermite pour l'étude des fonctions $V_{m,n}$.

Soit

$$a^2+b^2=r^2,\quad a'^2+b'^2=r'^2,\quad \frac{aa'+bb'}{rr'}=\cos\theta,\quad \frac{ab'-ba'}{rr'}=\sin\theta,$$

$$x=\frac{a\xi-b\eta}{r},\quad y=\frac{b\xi+a\eta}{r}.$$

L'intégrale que j'appellerai A devient

$$\mathrm{A}=\int\int\frac{d\xi\,d\eta}{(1-2r\xi+r^2)[1-2r'(\xi\cos\theta+\eta\sin\theta)+r'^2]}$$

entre les limites $\xi^2+\eta^2\leqq 1$.

Une première intégration par rapport à η donne pour résultat

$$\frac{1}{2r'\sin\theta}\,\frac{1}{1-2r\xi+r^2}\log\frac{1-2r'(\xi\cos\theta-\sqrt{1-\xi^2}\sin\theta)+r'^2}{1-2r'(\xi\cos\theta+\sqrt{1-\xi^2}\sin\theta)+r'^2}.$$

Posant ensuite $\xi=\cos\varphi$, il vient

$$\mathrm{A}=\frac{1}{rr'\sin\theta}\,\mathrm{B},$$

où

$$\mathrm{B}=\int_0^{\pi}\frac{d\varphi}{2}\,\frac{r\sin\varphi}{1-2r\cos\varphi+r^2}\log\frac{1-2r'\cos(\varphi+\theta)+r'^2}{1-2r'\cos(\varphi-\theta)+r'^2}.$$

Dans l'hypothèse où r et r' sont tous deux moindres que 1, on trouve

$$B = \pi \operatorname{arc\,tang} \frac{rr' \sin\theta}{1 - rr' \cos\theta},$$

de sorte que l'on a

$$A = \frac{\pi}{ab' - ba'} \operatorname{arc\,tang} \frac{ab' - ba'}{1 - aa' - bb'}.$$

Soit maintenant $r > 1$, $r' < 1$. Posons $r = \frac{1}{r_1}$, alors on a

$$\frac{r \sin\varphi}{1 - 2r\cos\varphi + r^2} = \frac{r_1 \sin\theta}{1 - 2r_1 \cos\varphi + r_1^2};$$

de sorte que

$$A = \frac{\pi}{ab' - ba'} \operatorname{arc\,tang} \frac{r' r_1 \sin\theta}{1 - r_1 r' \cos\theta};$$

mais

$$r_1 r' \sin\theta = \frac{r' \sin\theta}{r} = \frac{rr' \sin\theta}{r^2}, \quad r_1 r' \cos\theta = \frac{rr' \cos\theta}{r^2},$$

donc

$$A = \frac{\pi}{ab' - ba'} \operatorname{arc\,tang} \frac{ab' - ba'}{a^2 + b^2 - aa' - bb'}.$$

Soit, en second lieu, $r < 1$ et $r' > 1$. Posons $r' = \frac{1}{r'_1}$, alors

$$\log \frac{1 - 2r' \cos(\varphi + \theta) + r'^2}{1 - 2r' \cos(\varphi - \theta) + r'^2} = \log \frac{1 - 2r'_1 \cos(\varphi + \theta) + r'^2_1}{1 - 2r'_1 \cos(\varphi - \theta) + r'^2_1},$$

et l'on a

$$\begin{aligned} A &= \frac{\pi}{ab' - ba'} \operatorname{arc\,tang} \frac{rr'_1 \sin\theta}{1 - rr'_1 \cos\theta} \\ &= \frac{\pi}{ab' - ba'} \operatorname{arc\,tang} \frac{rr' \sin\theta}{r'^2 - rr' \cos\theta} = \frac{\pi}{ab' - ba'} \operatorname{arc\,tang} \frac{ab' - ba'}{a'^2 + b'^2 - aa' - bb'}. \end{aligned}$$

Du reste, ce second cas est une conséquence immédiate du premier, à cause de la symétrie de l'intégrale par rapport à a et b, a' et b'.

Soit, en troisième lieu, $r > 1$ et $r' > 1$. Posant $r = \frac{1}{r'}$, $r' = \frac{1}{r'_1}$, on a

$$\begin{aligned} A &= \frac{\pi}{ab' - ba'} \operatorname{arc\,tang} \frac{r_1 r'_1 \sin\theta}{1 - r_1 r'_1 \cos\theta} \\ &= \frac{\pi}{ab' - ba'} \operatorname{arc\,tang} \frac{ab' - ba'}{(a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2) - aa' - bb'}. \end{aligned}$$

Enfin, nous allons considérer les cas limites, dans lesquels r ou r', ou tous deux, à la fois, sont égaux à l'unité. Soit, par exemple, $r = 1$, $r' \lessgtr 1$. On a

$$B = \frac{1}{4}\int_0^\pi d\varphi \frac{\sin\varphi}{1-\cos\varphi} \log \frac{1 - 2r'\cos(\varphi+\theta) + r'^2}{1-2r'\cos(\varphi-\theta)+r'^2}.$$

Quand φ est infiniment petit principal, l'inverse de l'expression qui est sous le signe $\int$ est infiniment petit du premier ordre; donc cette intégrale est infinie; il en est de même, lorsque $r' = 1$ et $r \lessgtr 1$, et lorsque l'on a en même temps $r = 1$, $r' = 1$.

De l'intégrale

$$\iint \frac{dx\,dy}{(1-2ax-2by+a^2+b^2)[(1-a'x-b'y)^2-(a'^2+b'^2)(x^2+y^2-1)]^{\frac{1}{2}}}.$$

En employant les mêmes notations que précédemment, on transforme cette intégrale en la suivante :

$$\iint \frac{d\xi\,d\eta}{(1-2r\xi+r)[(1-r'\cos\theta\xi - r'\sin\theta\eta)^2 - r'^2(\xi^2+\eta^2-1)]^{\frac{1}{2}}}.$$

Intégrant d'abord, par rapport à η, entre les limites $-\sqrt{1-\xi^2}$ et $+\sqrt{1-\xi^2}$, on a pour cette intégrale, que j'appellerai A',

$$A' = \frac{1}{rr'\cos\theta}\int_{-1}^{+1} \frac{r}{1-2r\xi+r^2}\,\frac{1}{\sqrt{-1}} \log \frac{1-r'\cos\theta\,(\xi - \sqrt{-1}\sqrt{-1\xi^2})}{1-r'\cos\theta\,(\xi+\sqrt{-1}\sqrt{1-\xi^2})}\,d\xi;$$

donc, en faisant $\xi = \cos\varphi$, on aura

$$A' = \frac{1}{rr'\cos\theta} B',$$

où

$$B' = \int_0^\pi d\varphi \frac{r\sin\varphi}{1-2r\cos\varphi+r^2}\,\frac{1}{\sqrt{-1}} \log \frac{1-r'\cos\theta\, e^{-\varphi\sqrt{-1}}}{1-r'\cos\theta\, e^{\varphi\sqrt{-1}}}.$$

En supposant r et $r'\cos\theta$ inférieurs à 1, on trouve

$$B' = \pi \log \frac{1}{1-rr'\cos\theta}, \quad \text{d'où} \quad A' = \frac{\pi}{aa'+bb'} \log \frac{1}{1-aa'-bb'}.$$

Soit maintenant $r > 1$ et $r' \cos\theta < 1$. Posant $r = \frac{1}{r_1}$, il vient

$$B' = \pi \log \frac{1}{1 - r_1 r' \cos\theta} = \pi \log \frac{r^2}{r^2 - rr' \cos\theta},$$

et, par suite,

$$A' = \frac{\pi}{aa' + bb'} \log \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2 - aa' - bb'}.$$

Soit, en second lieu, $r < 1$ et $r' \cos\theta > 1$. Posons $r' \cos\theta = \frac{1}{r'_1}$, on aura

$$\log \frac{1 - r' \cos\theta\, e^{-\varphi\sqrt{-1}}}{1 - r' \cos\theta\, e^{\varphi\sqrt{-1}}} = \log \frac{r'_1 - e^{-\varphi\sqrt{-1}}}{r'_1 - e^{\varphi\sqrt{-1}}} = \log \frac{e^{-\varphi\sqrt{-1}}\left(1 - r'_1 e^{\varphi\sqrt{-1}}\right)}{e^{\varphi\sqrt{-1}}\left(1 - r'_1 e^{-\varphi\sqrt{-1}}\right)}$$

$$= -2\varphi\sqrt{-1} - \log \frac{1 - r'_1 e^{-\varphi\sqrt{-1}}}{1 - r'_1 e^{\varphi\sqrt{-1}}};$$

par conséquent

$$B' = -\pi \log \frac{1}{1 - rr'_1} - 2 \int_0^\pi \varphi\, d\varphi \frac{r \sin\varphi}{1 - 2r\cos\varphi + r^2}.$$

La première partie est égale à

$$\pi \log \left[1 - \frac{rr' \cos\theta}{(r' \cos\theta)^2}\right] = \pi \log \left(1 - \frac{a^2 + b^2}{aa' + bb'}\right).$$

Calculons la seconde partie; elle est égale à

$$-2 \sum_{n=1}^{n=\infty} \int_0^\pi r^n \sin n\varphi\, \varphi\, d\varphi = -2\pi \sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^{n+1} \frac{r^n}{n} = -2\pi \log(1 + r).$$

Ainsi

$$B' = \pi \log \left(1 - \frac{a^2 + b^2}{aa' + bb'}\right) - 2\pi \log\left(1 + \sqrt{a^2 + b^2}\right),$$

donc

$$A' = \frac{\pi}{aa' + bb'} \log \left(1 - \frac{a^2 + b^2}{aa' + bb'}\right) - \frac{2\pi}{aa' + bb'} \log\left(1 + \sqrt{a^2 + b^2}\right).$$

En troisième lieu, supposons $r > 1$ et $r' \cos\theta > 1$; alors on aura

$$B' = \pi \log \left(1 - \frac{1}{aa' + bb'}\right) - 2\pi \log\left(1 + \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)$$

et

$$A' = \frac{\pi}{aa' + bb'} \log \left(1 - \frac{1}{aa' + bb'}\right) - \frac{2\pi}{aa' + bb'} \log\left(1 + \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right).$$

Si l'on suppose $r=1$, l'intégrale B' est infinie. Si l'on fait $r'\cos\theta=1$, sans que r soit égal à l'unité, alors

$$B'=\int_0^\pi d\varphi \frac{r\sin\varphi}{1-2r\cos\varphi+r^2}\frac{1}{\sqrt{-1}}\log\frac{1-e^{-\varphi\sqrt{-1}}}{1-e^{\varphi\sqrt{-1}}};$$

mais

$$\log\frac{1-e^{-\varphi\sqrt{-1}}}{1-e^{\varphi\sqrt{-1}}}=\log\frac{1+\dfrac{\sin\varphi}{1-\cos\varphi}\sqrt{-1}}{1-\dfrac{\sin\varphi}{1-\cos\varphi}\sqrt{-1}}$$

et

$$\frac{1}{\sqrt{-1}}\log\frac{1-e^{-\varphi\sqrt{-1}}}{1-e^{\varphi\sqrt{-1}}}=2\,\mathrm{arc\,tang}\frac{\sin\varphi}{1-\cos\varphi}$$

$$=2\,\mathrm{arc\,tang}\left[\mathrm{tang}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}\right)\right]=\pi-\varphi;$$

donc

$$B'=\pi\int_0^\pi\frac{r\sin\varphi\,d\varphi}{1-2r\cos\varphi+r^2}-\int_0^\pi\varphi\,d\varphi\frac{r\sin\varphi}{1-2r\cos\varphi+r^2}.$$

Si r est inférieur à 1, on aura

$$B'=-\pi\log(1+r)-\pi\log(1+r)=-2\pi\log(1+r)$$

et

$$A'=-\frac{2\pi}{r}\log(1+r)=-\frac{2\pi}{\sqrt{a^2+b^2}}\log(1+\sqrt{a^2+b^2}).$$

Si r est >1, on aura

$$B'=-2\pi\log\left(1+\frac{1}{r}\right)\quad\text{et}\quad A'=-\frac{2\pi}{\sqrt{a^2+b^2}}\log\left(1+\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\right).$$

De l'intégrale

$$\iint(1-2a'x-2b'y+a'^2+b'^2)^{-\frac{1}{2}}(1-x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}}$$
$$\times(1-ax-by)[(1-ax-by)^2-(a^2+b^2)(x^2+y^2-1)]^{-1}\,dx\,dy.$$

Je me servirai des notations que j'ai employées dans le calcul de cette intégrale. Ce calcul suppose essentiellement que r et r' soient inférieurs à l'unité. Je vais actuellement faire l'hypothèse de $r>1$. Dans ce cas-ci, le résidu de l'expression

$$\frac{1}{2Lz - M(z^2+1) - N(z^2-1)}$$

n'est plus égal, pour toutes les valeurs de ξ comprises entre 1 et $+1$, à $\frac{1}{2\sqrt{L^2+N^2-M^2}}$.

Si, dans le dénominateur de l'expression précédente, on fait successivement $z=-1$ et $z=+1$, on obtient pour résultats $-2(L+M)$ et $2(L-M)$, c'est-à-dire

$$-2(1 - r\cos\theta\xi + r\sin\theta\sqrt{1-\xi^2}) \quad \text{et} \quad 2(1 - r\cos\theta\xi - r\sin\theta\sqrt{1-\xi^2}).$$

Si ces deux quantités sont de même signe, le résidu est nul, sinon il y a un résidu différent de zéro. Il faut donc étudier les signes correspondants de $-2(L+M)$ et de $2(L-M)$, ou de $L+M$ et de $M-L$. Je supposerai a, b, a', b' positifs; alors $\cos\theta$ le sera; j'admettrai que $\sin\theta$ le soit aussi. Considérons d'abord la quantité

$$L+M = 1 - r\cos\theta\xi + r\sin\theta\sqrt{1-\xi^2}.$$

Elle est toujours positive, si r est inférieur à l'unité; mais ici nous supposons $r>1$. Pour $\xi=-1$, elle est égale à $1+r\cos\theta$; elle est donc positive. Pour voir comment elle varie avec ξ, prenons sa dérivée par rapport à ξ; cette dérivée, égale à $-r\cos\theta - \frac{r\sin\theta\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$, est d'abord positive, puis elle devient négative pour une valeur de ξ négative. Par conséquent, $L+M$ augmente quand ξ varie à partir de -1, puis diminue avant que ξ ait atteint la valeur zéro. Pour $\xi=1$, on a $L+M=1-r\cos\theta$. Donc si l'on a $r\cos\theta<1$, $L+M$ reste toujours positif; mais si l'on a $r\cos\theta>1$, $L+M$ devient négatif. Cherchons la valeur de ξ pour laquelle il s'annule. L'équation $L+M=0$ devient, quand on y a remplacé ξ par $\cos\varphi$,

$$1 - r\cos\theta\cos\varphi + r\sin\theta\sin\varphi = 0,$$

et donne

$$\cos\varphi = \frac{\cos\theta}{r} \pm \frac{\sin\theta}{r}\sqrt{r^2-1}.$$

Pour distinguer celle des deux valeurs qu'il faut prendre, substituons-les dans l'équation précédente, il vient

$$1 - \cos^2\theta \mp \sin\theta \cos\theta \sqrt{r^2 - 1} + r \sin\theta \sin\varphi = 0.$$

Comme $\sin\varphi$ est positif, on voit qu'il faut prendre le signe — dans la relation précédente; donc la valeur de $\cos\varphi$ ou de ξ, pour laquelle $L + M$ s'annule, est

$$\xi'' = \frac{\cos\theta}{r} + \frac{\sin\theta}{r} \sqrt{r^2 - 1}.$$

Étudions de même $M - L$.

On a

$$M - L = r \sin\theta \sqrt{1 - \xi^2} + r \cos\theta\, \xi - 1.$$

Pour

$$\xi = -1, \quad M - L = -r\cos\theta - 1,$$

la dérivée par rapport à ξ de $M - L$, à savoir : $-\dfrac{r \sin\theta \xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} + r\cos\theta$, étant positive tant que ξ est négatif, mais devenant négative pour une valeur positive de ξ inférieure à 1, on voit que $M - L$ augmente d'abord, puis diminue ensuite, avant que ξ ait atteint la valeur 1. Si l'on remplace ξ par $\cos\varphi$, on aura

$$M - L = r \sin\theta \sin\varphi + r\cos\theta\cos\varphi - 1 = r\cos(\theta - \varphi) - 1 = r\cos(\varphi - \theta) - 1.$$

On voit alors immédiatement que $M - L$ s'annulera toujours pour une valeur de φ supérieure à θ, et comprise même entre θ et $\theta + \frac{\pi}{2}$; et encore une seconde fois, pour une valeur de φ inférieure à θ, si l'on a $r\cos\theta < 1$. Ces deux valeurs correspondantes de $\cos\varphi$ sont bien faciles à trouver : la première ξ' et la seconde ξ'' sont données par les formules

$$\xi' = \frac{\cos\theta}{r} - \frac{\sin\theta}{r}\sqrt{r^2 - 1}, \quad \xi'' = \frac{\cos\theta}{r} + \frac{\sin\theta}{r}\sqrt{r^2 - 1}.$$

Nous avons maintenant tous les éléments nécessaires à notre discussion. Soit d'abord $r\cos\theta > 1$.

$M - L$ est négatif depuis $\xi = -1$ jusqu'à $\xi = \xi'$, et est positif après. $M + L$ est positif depuis $\xi = -1$ jusqu'à $\xi = \xi''$, et est négatif après. Par conséquent, dans l'intervalle de ξ' à ξ'', le résidu est nul, et il faudra faire l'intégration du résidu de -1 à ξ', et de ξ'' à $+1$. Mais ici, le résidu n'est pas le même dans ces deux intervalles. Celle des deux racines

$$\frac{1-r\cos\theta\xi+\sqrt{1-2r\cos\theta\xi+r^2\cos^2\theta}}{M+N}, \quad \frac{1-r\cos\theta\xi-\sqrt{1-2r\cos\theta\xi+r^2\cos^2\theta}}{M+N}$$

qui est comprise entre -1 et $+1$ est la première quand ξ est supérieur à $\frac{1}{r\cos\theta}$, et la seconde quand ξ est inférieur à $\frac{1}{r\cos\theta}$. C'est donc la première, quand ξ est compris entre ξ'' et $+1$, et la seconde, quand ξ est compris entre -1 et ξ'. On s'assure facilement de l'exactitude de cette proposition, en remarquant que l'on a

$$\xi' < \frac{1}{r\cos\theta} \quad \text{et} \quad \xi'' > \frac{1}{r\cos\theta}.$$

Le résidu correspondant à l'intervalle de -1 à ξ' est $\frac{1}{2\sqrt{L^2+N^2-M^2}}$; le résidu qui correspond à l'autre intervalle est $-\frac{1}{2\sqrt{L^2+N^2-M^2}}$. Donc, dans le cas où $r\cos\theta$ est supérieur à 1, l'intégrale A que nous cherchons est égale à

$$\pi\left(\int_{-1}^{\xi'}\frac{d\xi}{\sqrt{1-2r'\xi+r'^2}\sqrt{1-2r\cos\theta\xi+r^2\cos^2\theta}}\right.$$
$$\left.-\int_{\xi''}^{+1}\frac{d\xi}{\sqrt{1-2r'\xi+r'^2}\sqrt{1-2r\cos\theta\xi+r^2\cos^2\theta}}\right).$$

Soit maintenant $r\cos\theta<1$. Alors $L+M$ reste toujours positif; quant à $M-L$, il s'annule deux fois pour $\xi=\xi'$ et $\xi=\xi''$; c'est toujours la seconde racine qui est comprise entre -1 et $+1$, de sorte que, dans ce dernier cas, on a

$$A=\pi\left(\int_{-1}^{\xi'}\frac{d\xi}{\sqrt{1-2r'\xi+r'^2}\sqrt{1-2r\cos\theta\xi+r^2\cos^2\theta}}\right.$$
$$\left.+\int_{\xi''}^{+1}\frac{d\xi}{\sqrt{1-2r'\xi+r'^2}\sqrt{1-2r\cos\theta\xi+r^2\cos^2\theta}}\right).$$

On calculera les intégrales précédentes par les procédés ordinaires; je ne donne pas leurs valeurs qui sont un peu compliquées.

On voit immédiatement comment on déduira le cas de $r' > 1$ du cas de $r' < 1$, en posant $r' = \frac{1}{r'_1}$.

Je me bornerai à donner la valeur de l'intégrale A dans les hypothèses $r\cos\theta = 1$ et $r' < 1$. On a

$$A = \pi \int_{-1}^{\xi'} \frac{d\xi}{\sqrt{1 - 2r'\xi + r'^2}\sqrt{2 - 2\xi}}.$$

On trouve sans difficulté

$$A = \frac{2}{\sqrt{r'}} \log \frac{1 + \sqrt{r'}}{2\sin\theta\sqrt{r'} + \sqrt{1 + r'^2 - 2r'\cos^2\theta}}.$$

Enfin, on discuterait sans la moindre difficulté l'intégrale

$$\int\int dx\,dy(1 - 2a'x - 2b'y + a'^2 + b'^2)^{-\frac{3}{2}}(1 - x^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}} \times [(1 - ax - by)^2 - (a^2 + b^2)(x^2 + y^2 - 1)]^{-1},$$

qui sert dans l'étude des fonctions $\mho_{m,n}$, $\varphi_{m,n}$.