ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

H. VON MANGOLDT

Démonstration de l'équation $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k} = 0$

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 15 (1898), p. 431-454

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1898_3_15__431_0>

DÉMONSTRATION DE L'ÉQUATION

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k} = 0,$$

PAR M. H. VON MANGOLDT.

(*Sitzungsberichte der Berliner Akademie,* 22 juli 1897.)
Communication présentée par M. H.-A. SCHWARZ.

Traduit par M. L. LAUGEL.

Conformément à la notation introduite par M. F. Mertens (¹), dans ce qui suit, $\mu(k)$ désigne une fonction de l'argument k, nombre entier positif, qui est :

$= 1$, pour $k = 1$;
$= 0$, lorsque k est divisible par un nombre carré différent de 1;
$= -1$, lorsque k est composé d'un nombre impair de facteurs premiers différents;
$= 1$, lorsque k est composé d'un nombre pair de facteurs premiers différents.

Cela étant, les premiers termes de la série du titre, après suppression des termes évanouissants, sont

$$1, \quad -\frac{1}{2}, \quad -\frac{1}{3}, \quad -\frac{1}{5}, \quad \frac{1}{6}, \quad -\frac{1}{7}, \quad \frac{1}{10}, \quad -\frac{1}{11}, \quad -\frac{1}{13}, \quad \frac{1}{14}, \quad \frac{1}{15}, \quad \ldots.$$

(¹) *Ueber einige asymptotische Gesetze der Zahlentheorie* (*Journal f. d. r. u. a. Mathematik,* Bd. 77, S. 289; 1874).

Cette suite renferme toutes les valeurs que prend l'expression $\frac{\mu(k)}{k}$ pour des valeurs numériques entières positives de k, et cela *dans l'ordre où elles se présentent lorsque l'on remplace k successivement par tous les nombres de la série naturelle des entiers.*

Nous démontrerons que la série du titre est convergente et a pour somme zéro.

Cette affirmation a été déjà énoncée par Euler (1). Mais les raisons qu'en donne Euler ne sont pas suffisantes, car il ne savait pas encore que, dans certaines hypothèses, pour pouvoir décider si une série donnée est convergente ou non, et pour trouver sa somme, on doit connaître non seulement les valeurs des termes de la série, mais encore l'ordre de ces termes.

Autant que je sais, on n'a pas encore réussi à donner une démonstration rigoureuse de l'affirmation d'Euler. Mais, depuis les résultats pleins de valeur dont MM. Hadamard (2) et de La Vallée Poussin (3) ont enrichi la théorie de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann, les plus grandes difficultés sont levées, et il paraît possible, je crois, d'arriver à une démonstration à l'abri d'objections : c'est le but de ce qui suit.

1. Lorsque m désigne un nombre entier positif, si l'on remplace d successivement par tous les diviseurs de m, on a toujours

$$\sum \mu(d) = 0,$$

à l'unique exception du cas $m = 1$ où l'on a

$$\sum \mu(d) = 1.$$

---

(1) *Introductio in analysin infinitorum*, t. I, cap. XV, Nr. 277, exemplum I; Lausannae, 1748.

(2) *Étude sur les propriétés des fonctions entières et, en particulier, d'une fonction considérée par Riemann* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 4e série, t. IX, p. 171-215; 1893).

Sur les zéros de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann (*Comptes rendus*, t. CXXII, p. 1470-1473; 1896).

Sur la distribution des zéros de la fonction $\zeta(s)$ et ses conséquences arithmétiques (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XXIV; 1896).

(3) *Recherches analytiques sur la théorie des nombres premiers*, première Partie (*Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, t. XX, 2e Partie; 1896).

Cette propriété fondamentale de la fonction μ s'établit par des considérations tout à fait simples et élémentaires [1] et a déjà été démontrée par Möbius [2]. De cette propriété résulte immédiatement pour chaque [3] valeur réelle de n qui n'est pas inférieure à 1 et pour chaque valeur de l'exposant r, l'équation suivante

$$(1) \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{\mu(k)}{k^r} \sum_{\lambda=1}^{\frac{n}{k}} \frac{1}{\lambda^r} = 1.$$

En effet, en réunissant chaque fois, après avoir effectué convenablement les multiplications prescrites, tous les termes où le produit $k\lambda$ a la même valeur, le premier membre prend la forme

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu^r} \sum \mu(d_\nu)$$

où l'on doit remplacer chaque fois d_ν par tous les diviseurs successifs de ν; mais, par suite de la propriété précitée de la fonction μ, tous les termes de la somme étendue à ν sont égaux à zéro, à l'exception du premier qui a pour valeur 1.

Maintenant, si l'on désigne par $[x]$ le plus grand entier contenu en x, on tire de (1), pour $x = 0$, l'équation donnée par M. R. Lipschitz [4]

$$(2) \qquad \sum_{k=1}^{n} \mu(k) \left[\frac{n}{k}\right] = 1,$$

---

(1) *Comparer* P. BACHMANN, *Die analytische Zahlentheorie*, S. 308-310; Leipzig, 1894.

(2) *Ueber eine besondere Art von Umkehrung der Reihen* (*Journal f. d. r. u. a. Math.*, Bd. 9, S. 108-111; 1832, et *Gesammelte Werke*, Bd. 4, S. 595-597; Leipzig, 1887).

(3) Pour des raisons qui se justifieront par la suite, c'est à dessein que le nombre n n'est *pas* soumis à la restriction d'être un nombre entier. Par $\sum_{n}^{k=1} f(k)$, on devra chaque fois entendre la somme de toutes les valeurs $f(k)$, obtenues, lorsque l'on remplace successivement k par tous les nombres entiers qui ne sont pas situés en dehors de l'intervalle $(1 \ldots n)$.

(4) *Comptes rendus*, vol. LXXXIX, p. 949; 1879.

ou, si l'on pose pour abréger

$$\frac{n}{k} - \left[\frac{n}{k}\right] = r_k,$$

l'équation

$$\sum_{k=1}^{n} \mu(k)\,\frac{n}{k} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \mu(k)\,r_k.$$

Maintenant, puisque

$$\mu(1)\,r_1 = r_1 = n - [n],$$

et, puisque la valeur absolue de la somme de tous les autres termes renfermés en $\sum_{k=1}^{n} \mu(k) r_k$ ne surpasse pas $[n] - 1$, on obtient

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \mu(k)\,\frac{n}{k}\right| \leqq n.$$

En divisant par n, on est conduit, par suite, à la proposition suivante :

LEMME I. — *La valeur absolue de la somme*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\mu(k)}{k}$$

n'est jamais supérieure à 1, *quelle que soit la valeur de la limite de sommation supérieure* n (1).

Maintenant, en second lieu, si, dans l'équation (1), l'on pose $r = 1$, on obtient

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\mu(k)}{k} \cdot \sum_{\lambda=1}^{\frac{n}{k}} \frac{1}{\lambda} = 1. \tag{3}$$

(1) Ce théorème a été déjà démontré de la même façon par M. J.-P. Gram dans un Mémoire couronné : *Undersögesler angaaende Maengden af Primtal under en given Graense*, Kopenhagen, 1884 (*Mémoires de l'Académie royale de Copenhague*, 6e série, classe des Sciences, vol. II, p. 197-198).

On sait que

$$\sum_{\lambda=1}^{\frac{n}{k}} \frac{1}{\lambda} = l\left[\frac{n}{k}\right] + C + \frac{\vartheta}{2\left[\frac{n}{k}\right]},$$

où $C = 0,5772156649\ldots$ désigne la constante dite d'*Euler*, et où $0 < \vartheta < 1$.

Si l'on désigne maintenant par ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3 des nombres dont il suffit de savoir qu'ils sont $\geqq 0$, mais < 1, on obtient d'abord, en appliquant le théorème de Taylor sous sa forme la plus simple,

$$l\left[\frac{n}{k}\right] = l\left(\frac{n}{k} - r_k\right) = l\frac{n}{k} - \frac{r_k}{\frac{n}{k} - \vartheta_1 r_k}.$$

Mais, puisqu'on a toujours

$$r_k < \frac{1}{2}\frac{n}{k}$$

et, par conséquent,

$$\frac{n}{k} - \vartheta_1 r_k > \frac{1}{2}\frac{n}{k},$$

et que, en outre, $r_k < 1$, on peut donner à l'équation précédente la forme

$$l\left[\frac{n}{k}\right] = ln - lk - 2\vartheta_2\frac{k}{n}.$$

On peut, en outre, transformer encore

$$\frac{\vartheta}{2\left[\frac{n}{k}\right]} \quad \text{en} \quad \vartheta_3\frac{k}{n}.$$

On obtient ainsi

$$\sum_{\lambda=1}^{\frac{n}{k}} \frac{1}{\lambda} = ln - lk + C + (\vartheta_3 - 2\vartheta_2)\frac{k}{n},$$

et, si l'on porte cette dernière valeur en (3), il vient

$$ln\sum_{k=1}^{n}\frac{\mu(k)}{k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{\mu(k)\,lk}{k} = 1 - C\sum_{k=1}^{n}\frac{\mu(k)}{k} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(2\vartheta_2 - \vartheta_3)\,\mu(k).$$

En ayant alors égard au lemme I, on déduit de ce qui précède la proposition suivante :

Lemme II. — *La valeur absolue de la différence*

$$ln \sum_{k=1}^{n} \frac{\mu(k)}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\mu(k)\, lk}{k}$$

ne peut jamais être supérieure à la valeur

$$3 + C,$$

quelle que soit d'ailleurs la valeur de la limite supérieure n des sommes.

2. Dans les pages suivantes, je ferai en partie usage des mêmes notions que dans mon travail, publié dans le tome 114 du *Journal de Crelle,* sous le titre : *Zu Riemann's Abhandlung* « *Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse* » [1]. En particulier, le symbole $\Lambda(x, r)$ a la signification indiquée page 279.

Afin d'éviter les longueurs dans l'exposition qui pourraient provenir de ce fait que l'expression $\Lambda(x, r)$, regardée comme fonction de x, prend à chaque saut brusque la valeur moyenne entre celles immédiatement voisines, le nombre réel n, satisfaisant à la condition $n \geqq 1$, sera, pour l'instant, soumis à la restriction de ne *pas* être un *entier*. Alors, de la définition de la fonction $\Lambda(x, r)$, résulte que pour chaque valeur admissible de n et pour chaque valeur de r, on a l'équation

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\mu(k)\, lk}{k^r} = - \sum_{k=1}^{n} \frac{\mu(k)}{k^r} \Lambda\left(\frac{n}{k}, r\right). \tag{4}$$

Pour la démontrer, il est seulement nécessaire de transformer en une somme chaque terme du premier membre où k est un nombre

(1) Un extrait de ce travail, publié dans les *Berliner Berichte,* p. 883-896; 1894, a paru en français dans les *Annales de l'École Normale supérieure,* 3e série, t. XIII; 1896.

composé en décomposant le facteur lk en la somme des logarithmes des facteurs premiers de k.

Si l'on réunit alors toutes ces parties du premier membre de l'équation (4) qui ont comme facteur le logarithme d'un même nombre premier, alors le logarithme lp d'un nombre premier quelconque inférieur à n se présente chaque fois multiplié par le facteur

$$\frac{1}{p^r}\sum_{k=1}^{\frac{n}{p}}\frac{\mu(kp)}{k^r}.$$

Mais maintenant on a

$$\mu(kp) = -\mu(k)$$

lorsque k n'est pas divisible par p et

$$\mu(kp) = 0$$

lorsque k est au contraire divisible par p.

Si l'on pose alors $\frac{k}{p} = \lambda$, on peut donner à la dernière équation la forme

$$\mu(kp) = -\mu(k) + \mu(\lambda p)$$

d'où résulte

$$\frac{1}{p^r}\sum_{k=1}^{\frac{n}{p}}\frac{\mu(kp)}{k^r} = -\frac{1}{p^r}\sum_{k=1}^{\frac{n}{p}}\frac{\mu(k)}{k^r} + \frac{1}{p^{2r}}\sum_{k=1}^{\frac{n}{p^2}}\frac{\mu(\lambda p)}{\lambda^r}.$$

En transformant de la même manière la deuxième somme du second membre au cas où elle ne disparaît pas d'elle-même, et en procédant encore ainsi tant que cela est nécessaire, on arrive, après un nombre fini de telles opérations, à l'équation

$$\frac{1}{p^r}\sum_{k=1}^{\frac{n}{p}}\frac{\mu(kp)}{k^r} = -\frac{1}{p^r}\sum_{k=1}^{\frac{n}{p}}\frac{\mu(k)}{k^r} - \frac{1}{p^{2r}}\sum_{k=1}^{\frac{n}{p^2}}\frac{\mu(k)}{k^r} - \frac{1}{p^{3r}}\sum_{k=1}^{\frac{n}{p^3}}\frac{\mu(k)}{k^r} - \cdots.$$

Mais le second membre de cette équation est exactement identique avec le facteur qu'acquiert lp dans le second membre de l'équation (4) lorsque, pour les expressions $\Lambda\left(\frac{n}{k}, r\right)$, on y introduit les sommes correspondantes. L'équation (4) est ainsi démontrée.

En la multipliant par n^r, il vient

$$n^r \sum_{k=1}^{n} \frac{\mu(k)\, lk}{k^r} = -\sum_{k=1}^{n} \mu(k)\left(\frac{n}{k}\right)^r \Lambda\left(\frac{n}{k}, r\right)$$

et, en différentiant par rapport à r, on obtient

$$(5)\qquad n^r\left[ln \sum_{k=1}^{n} \frac{\mu(k)\, lk}{k^r} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\mu(k)(lk)^2}{k^r}\right] = -\sum_{k=1}^{n} \mu(k) \frac{d}{dr}\left[\left(\frac{n}{k}\right)^r \Lambda\left(\frac{n}{k}, r\right)\right].$$

C'est au moyen de cette équation que l'on obtient la formule sur laquelle repose la démonstration que nous avons en vue. Pour y parvenir, dans chaque terme des sommes du second membre, on remplacera la fonction arithmétique Λ par son expression analytique, telle qu'elle est donnée par l'équation (55) de la page 292 de mon travail déjà cité; l'on fera alors tendre r vers 1 et puis n vers l'infini, après quoi il ne restera plus qu'à effectuer quelques simplifications faciles.

L'opération effective de ces transformations nécessite quelques calculs.

D'abord, il est avantageux de donner à l'équation (55) précitée une autre forme, ce qui nécessite l'emploi de quelques formules que l'on trouvera aux pages 279 et 284 du Mémoire déjà cité.

A cet effet, nous imposerons au nombre r la restriction de n'être ni égal à 1, ni égal à aucun des zéros de la fonction $\zeta(s)$. De la dernière équation de la page 279 (*loc. cit.*), on tire alors, en faisant $s = 0$,

$$-\frac{dl\zeta(r)}{dr} = \frac{1}{r-1} - \tfrac{1}{2} l\pi - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\tfrac{1}{2} l \frac{n}{n+1} + \frac{1}{r+2n}\right) - \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2(r-\frac{1}{2})}{(r-\frac{1}{2})^2 + \alpha_\nu^2}.$$

Ensuite, si nous donnons à l'équation

$$C = \lim_{\nu=\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{\nu-1} - l\nu\right),$$

qui définit la constante C, la forme

$$C = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} + l\frac{n}{n+1}\right),$$

et si l'on combine cette équation avec la formule précédente qui donne $-\frac{dl\zeta(s)}{dr}$, on obtient

$$-\frac{dl\zeta(r)}{dr} = \frac{1}{r-1} - \tfrac{1}{2}l\pi - \tfrac{1}{2}C + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{r}{2n(r+2n)} - \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{2(r-\frac{1}{2})}{(r-\frac{1}{2})^2+\alpha_\nu^2}.$$

De cette équation et de l'équation (55) (*loc. cit.*, p. 292), on tire

$$\Lambda(x, r) = \frac{x^{1-r}}{1-r} - \frac{dl\zeta(r)}{dr} + \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{2(r-\frac{1}{2})}{(r-\frac{1}{2})^2+\alpha_\nu^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{-r-2n}}{r+2n} - \sum_{\nu=1}^{\infty}W_\nu(x, r).$$

Mais maintenant, comme cela s'obtient immédiatement au moyen des deux dernières équations de la page 284 du Mémoire déjà cité, on a

$$W_\nu(x, r) = \frac{2(r-\frac{1}{2})}{(r-\frac{1}{2})^2+\alpha_\nu^2} - x^{-r+\frac{1}{2}}\left(\frac{x^{\alpha_\nu i}}{r-\frac{1}{2}-\alpha_\nu i} + \frac{x^{-\alpha_\nu i}}{r-\frac{1}{2}+\alpha_\nu i}\right).$$

Si l'on introduit cette dernière valeur dans la formule qui la précède, on obtient, après avoir multiplié par x^r,

$$(6) \qquad x^r\Lambda(x, r) = \frac{x}{1-r} - x^r\frac{dl\zeta(r)}{dr} + \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{x^{-2\nu}}{r+2\nu} + x^{\frac{1}{2}}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{x^{\alpha_\nu i}}{r-\frac{1}{2}-\alpha_\nu i} + \frac{x^{-\alpha_\nu i}}{r-\frac{1}{2}+\alpha_\nu i}\right).$$

C'est là la transformation de l'équation (55) (*loc. cit.*) que nous désirions obtenir.

De l'équation (6), en différentiant par rapport à r, on tire

$$(7) \qquad \frac{d}{dr}[x^r\Lambda(x, r)] = \frac{x}{(1-r)^2} - x^r lx\frac{dl\zeta(r)}{dr} - x^r\frac{d^2l\zeta(r)}{dr^2} - \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{x^{-2\nu}}{(r+2\nu)^2} - x^{\frac{1}{2}}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\frac{x^{\alpha_\nu i}}{(r-\frac{1}{2}-\alpha_\nu i)^2} + \frac{x^{-\alpha_\nu i}}{(r-\frac{1}{2}+\alpha_\nu i)^2}\right].$$

Ce qui rend cette équation remarquable, c'est que les séries infinies du second membre sont toutes deux *uniformément* convergentes pour toutes les valeurs de x qui sont comprises dans un intervalle quelconque fini dont la limite inférieure est 1, et pour toutes les valeurs de r qui appartiennent à une région quelconque finie ne renfermant ni à son intérieur ni sur son contour aucun zéro de la fonction $\zeta(s)$. C'est précisément pour cette raison que l'on ne peut élever aucune objection justifiable contre la différentiation des séries qui se présentent dans l'équation (6) pratiquée par la différentiation des termes individuels.

Des équations (6) et (7) on conclut maintenant

$$(8)\quad n^r\left[ln\sum_{k=1}^{n}\frac{\mu(k)\,lk}{k^r}-\sum_{k=1}^{n}\frac{\mu(k)\,(lk)^2}{k^r}\right]$$
$$=-\sum_{k=1}^{n}\mu(k)\left\{\frac{\frac{n}{k}}{(1-r)^2}-\left(\frac{n}{k}\right)^r l\frac{n}{k}\,\frac{dl\zeta(r)}{dr}-\left(\frac{n}{k}\right)^r\frac{d^2l\zeta(r)}{dr^2}\right.$$
$$\left.-\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{n}{k}\right)^{-2\nu}}{(r+2\nu)^2}-\left(\frac{n}{k}\right)^{\frac{1}{2}}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\frac{\left(\frac{n}{k}\right)^{\alpha_\nu i}}{(r-\frac{1}{2}-\alpha_\nu i)^2}+\frac{\left(\frac{n}{k}\right)^{-\alpha_\nu i}}{(r-\frac{1}{2}+\alpha_\nu i)^2}\right]\right\}$$

Supposons que, dans cette équation, l'on ait fait

$$r=1+\rho,$$

et que l'on ait alors développé les deux membres suivant les puissances ascendantes de ρ.

Puisque l'on a, comme l'on sait [1],

$$\zeta(1+\rho)=\frac{1}{\rho}+C+C_1\rho+C_2\rho^2+\ldots,$$

où C désigne encore la constante d'Euler, et $C_1, C_2, \ldots$ des coefficients

---

[1] *Comparer :* A. Piltz, *Ueber das Gesetz, nach welchem* u. s. w., Diss., S. 6-7, Berlin; 1881, ou P. Bachmann, *Die analytische Zahlentheorie*, S. 468-470, Leipzig, 1894.

indépendants de ρ, dont il n'est pas nécessaire de connaître la valeur numérique dans ce qui suit, l'on aura

$$\begin{aligned}
l\zeta(1+\rho) &= -l\rho + l(1 + C\rho + C_1\rho^2 + \ldots) \\
&= -l\rho + C\rho + (C_1 - \tfrac{1}{2}C^2)\rho^2 + \ldots, \\
\frac{dl\zeta(1+\rho)}{d\rho} &= -\frac{1}{\rho} + C + (2C_1 - C^2)\rho + \ldots, \\
\frac{d^2l\zeta(1+\rho)}{d\rho^2} &= \frac{1}{\rho^2} + 2C_1 - C^2 + \ldots,
\end{aligned}$$

et de (8), en y égalant dans les deux membres les parties indépendantes de ρ, on tire alors

$$\begin{aligned}
&n\left[ln\sum_{k=1}^{n}\frac{\mu(k)lk}{k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{\mu(k)(lk)^2}{k}\right] \\
&= -\sum_{k=1}^{n}\mu(k)\left\{\frac{1}{2}\frac{n}{k}\left(l\frac{n}{k}\right)^2 - C\frac{n}{k}l\frac{n}{k} - (2C_1 - C^2)\frac{n}{k}\right. \\
&\qquad\left. - \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{n}{k}\right)^{-2\nu}}{(1+2\nu)^2} - \left(\frac{n}{k}\right)^{\frac{1}{2}}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(\frac{1}{2}-\alpha_\nu i)^2}\left(\frac{n}{k}\right)^{\alpha_\nu i} + \frac{1}{(\frac{1}{2}+\alpha_\nu i)^2}\left(\frac{n}{k}\right)^{-\alpha_\nu i}\right]\right\} \\
&= -\sum_{k=1}^{n}\mu(k)\frac{1}{2}\frac{n}{k}[(ln)^2 - 2\,ln\,.\,lk + (lk)^2] + Cn\left[ln\sum_{k=1}^{n}\frac{\mu(k)}{k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{\mu(k)lk}{k}\right] \\
&\quad + (2C_1 - C^2)n\sum_{k=1}^{n}\frac{\mu(k)}{k} + \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{n^{-2\nu}}{(1+2\nu)^2}\sum_{k=1}^{n}\mu(k)k^{2\nu} \\
&\quad + \sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(\frac{1}{2}-\alpha_\nu i)^2}\sum_{k=1}^{n}\mu(k)\left(\frac{n}{k}\right)^{\frac{1}{2}+\alpha_\nu i} + \frac{1}{(\frac{1}{2}+\alpha_\nu i)^2}\sum_{k=1}^{n}\mu(k)\left(\frac{n}{k}\right)^{\frac{1}{2}-\alpha_\nu i}\right]
\end{aligned}$$

ou, après division par n et suppression des termes égaux de part et d'autre,

$$(9)\quad \frac{1}{2}(ln)^2\sum_{k=1}^{n}\frac{\mu(k)}{k}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{\mu(k)(lk)^2}{k}$$
$$=C\left[ln\sum_{k=1}^{n}\frac{\mu(k)}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{\mu(k)lk}{k}\right]$$
$$+(2C_1-C^2)\sum_{k=1}^{n}\frac{\mu(k)}{k}+\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{n^{-2\nu-1}}{(2\nu+1)^2}\sum_{k=1}^{n}\mu(k)k^{2\nu}$$
$$+\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(\frac{1}{2}-\alpha_\nu i)^2}\sum_{k=1}^{n}\mu(k)\left(\frac{n}{k}\right)^{\frac{1}{2}+\alpha_\nu i}+\frac{1}{(\frac{1}{2}+\alpha_\nu i)^2}\sum_{k=1}^{n}\mu(k)\left(\frac{n}{k}\right)^{\frac{1}{2}-\alpha_\nu i}\right].$$

Mais, dans cette équation, les valeurs absolues des trois premiers termes du second membre ne peuvent jamais surpasser certaines limites finies.

La valeur absolue du premier terme ne peut jamais surpasser la limite $C(3+C)$, en vertu du lemme II.

Celle du second ne peut jamais surpasser la limite $|2C_1-C^2|$, en vertu du lemme I.

Celle du troisième ne peut jamais surpasser la limite $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{(2\nu+1)^2}$, puisque l'on a toujours

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\mu(k)k^{2\nu}\right|<\sum_{k=1}^{n}k^{2\nu}<n\,.\,n^{2\nu}=n^{2\nu+1}.$$

Enfin, quant au quatrième terme du second membre de l'équation (9), on peut démontrer la proposition suivante :

Si l'on attribue à une constante arbitraire positive ε *une valeur aussi petite que l'on veut, il sera toujours possible d'assigner au nombre* n *une limite* N, *telle que la valeur absolue du quatrième terme en question soit inférieure à* εln *pour toutes les valeurs de* n *vérifiant la condition* $n>\mathrm{N}$.

En effet, puisque les parties réelles des zéros $\frac{1}{2}\pm\alpha_\nu i$ de la fonction $\zeta(s)$ ne surpassent jamais la valeur 1, on a d'abord

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\mu(k)\left(\frac{n}{k}\right)^{\frac{1}{2}\pm\alpha_\nu i}\right| \leqq \sum_{k=1}^{n}\frac{n}{k} < n\left(1+\int_1^n\frac{dx}{x}\right) = n(1+ln) < 2n.ln,$$

pourvu que l'on ait $n > e$.

Ensuite, de la démonstration donnée par M. Hadamard (¹), que la série $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha_\nu^2}$ converge absolument, il s'ensuit qu'il est toujours possible de déterminer un nombre entier positif G tel que chacune des deux sommes

$$\sum_{\nu=G+1}^{\infty}\frac{1}{|\frac{1}{2}-\alpha_\nu i|^2} \quad \text{et} \quad \sum_{\nu=G+1}^{\infty}\frac{1}{|\frac{1}{2}+\alpha_\nu i|^2}$$

soit inférieure à $\frac{1}{8}\varepsilon$.

Cela ayant lieu, on a pour *chaque* valeur de n supérieure à ε.

$$(10)\quad \left|\sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(\frac{1}{2}-\alpha_\nu i)^2}\sum_{k=1}^{n}\mu(k)\left(\frac{n}{k}\right)^{\frac{1}{2}+\alpha_\nu i}+\frac{1}{(\frac{1}{2}+\alpha_\nu i)^2}\sum_{k=1}^{n}\mu(k)\left(\frac{n}{k}\right)^{\frac{1}{2}-\alpha_\nu i}\right]\right|$$

$$<\left|\sum_{\nu=1}^{G}\left[\frac{1}{(\frac{1}{2}-\alpha_\nu i)^2}\sum_{k=1}^{n}\mu(k)\left(\frac{n}{k}\right)^{\frac{1}{2}+\alpha_\nu i}+\frac{1}{(\frac{1}{2}+\alpha_\nu i)^2}\sum_{k=1}^{n}\mu(k)\left(\frac{n}{k}\right)^{\frac{1}{2}-\alpha_\nu i}\right]\right|+\tfrac{1}{2}\varepsilon n.ln.$$

En effet, dans les sommes du premier membre, la valeur absolue de la somme de tous ces termes où $\nu > G$ est, d'après ce qui précède, inférieure à

$$\sum_{\nu=G+1}^{\infty}\left(\frac{2n.ln}{|\frac{1}{2}-\alpha_\nu i|^2}+\frac{2n.ln}{|\frac{1}{2}+\alpha_\nu i|^2}\right),$$

et par conséquent, *a fortiori*, inférieure à $\frac{1}{2}\varepsilon n.ln$.

En disposant convenablement de n on peut maintenant aussi abaisser la première partie du second membre de l'inégalité (10) au-dessous de

(¹) Comparer le Mémoire de M. Hadamard déjà cité : *Étude sur les propriétés*, etc., p. 210 à 213.

la valeur $\frac{1}{2}\varepsilon n . ln$. En effet, puisque la fonction $\zeta(s)$, comme l'ont démontré MM. Hadamard et de la Vallée Poussin [1], ne possède pas de zéros dont la partie réelle est égale à 1, la plus grande valeur que puisse prendre la partie réelle de l'expression

$$\tfrac{1}{2} + \alpha_\nu i,$$

sous la condition $\nu \leqq G$ est *plus petite que* 1. Si l'on désigne cette valeur maxima par η, on a, dans chaque terme de la somme qui se trouve au commencement du second membre de l'inégalité (10),

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \mu(k)\left(\frac{n}{k}\right)^{\frac{1}{2}\pm\alpha_\nu i}\right| \leqq \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n}{k}\right)^{\eta} < n^{\eta}\int_{0}^{n}\frac{dx}{x^{\eta}} = \frac{n}{1-\eta},$$

et, par suite, la valeur absolue de cette somme même, si l'on pose pour abréger

$$\sum_{\nu=1}^{G}\left(\frac{1}{|\frac{1}{2}-\alpha_\nu i|^2} + \frac{1}{|\frac{1}{2}+\alpha_\nu i|^2}\right) = M$$

est plus petite que

$$\frac{n}{1-\eta}M,$$

et, par suite, plus petite que

$$\tfrac{1}{2}\varepsilon n . ln,$$

pourvu que l'on ait

$$\frac{M}{1-\eta} < \tfrac{1}{2}\varepsilon ln,$$

c'est-à-dire

$$n > e^{\frac{2M}{\varepsilon(1-\eta)}}.$$

Après avoir établi cela, on reconnaît aisément que le quatrième terme du second membre de l'équation (9) possède effectivement la propriété précédemment énoncée. Eu égard à ce fait et à ce que l'on a dit relativement aux trois premiers membres, il résulte de (9) après

(1) *Voir* les Mémoires déjà cités.

division par $\frac{1}{2}ln$

$$\lim_{n=\infty}\left[ln\sum_{k=1}^{n}\frac{\mu(k)}{k}-\frac{1}{ln}\sum_{k=1}^{n}\frac{\mu(k)(lk)^2}{k}\right]=0. \tag{11}$$

Puisque la fonction de n, sous le signe lim dans le premier membre de cette équation, varie d'une manière continue, lorsque n croissant ou décroissant d'une manière continue passe par une valeur numérique entière, l'on peut dès à présent laisser de côté la restriction que n ne doit pas prendre des valeurs numériques entières.

En employant un artifice connu indiqué par Dirichlet, l'on obtient

$$\begin{aligned}\frac{1}{ln}\sum_{k=1}^{n}\frac{\mu(k)(lk)^2}{k}&=\frac{1}{ln}\sum_{k=2}^{n}(lk)^2\left[\sum_{\lambda=1}^{k}\frac{\mu(\lambda)}{\lambda}-\sum_{\lambda=1}^{k-1}\frac{\mu(\lambda)}{\lambda}\right]\\&=\frac{1}{ln}\sum_{k=1}^{n}\{(lk)^2-[l(k+1)]^2\}\sum_{\lambda=1}^{k}\frac{\mu(\lambda)}{\lambda}+\frac{[l(n+1)]^2}{ln}\sum_{k=1}^{n}\frac{\mu(k)}{k}.\end{aligned}$$

Maintenant puisque

$$\frac{[l(n+1)]^2}{ln}=\frac{1}{ln}\left[(ln)^2+\frac{2l(n+\vartheta)}{n+\vartheta}\right]=ln+\frac{2}{ln}\,\frac{l(n+\vartheta)}{n+\vartheta}\qquad(0<\vartheta<1)$$

et que la seconde partie du second membre s'évanouit pour n croissant sans limites, on peut donner, à l'équation (11) la forme

$$\lim_{n=\infty}\left(\frac{1}{ln}\sum_{k=1}^{n}\{[l(k+1)]^2-(lk)^2\}\sum_{\lambda=1}^{k}\frac{\mu(\lambda)}{\lambda}\right)=0. \tag{12}$$

Mais maintenant, d'après le théorème de Taylor, on a

$$[l(k+1)]^2-(lk)^2=\frac{2lk}{k}+\frac{1-l(k+\vartheta)}{(k+\vartheta)^2}\qquad(0<\vartheta<1).$$

Ensuite comme la valeur absolue de la somme

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1-l(k+\vartheta)}{(k+\vartheta)^2}\sum_{\lambda=1}^{k}\frac{\mu(\lambda)}{\lambda},$$

ainsi que cela se reconnaît en se reportant au lemme I, reste toujours inférieure au nombre fini

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 + l(k+\mathfrak{S})}{(k+\mathfrak{S})^2},$$

on pourra toujours, au lieu de (12), écrire plus simplement

$$\lim_{n=\infty} \left[\frac{1}{ln} \sum_{k=1}^{n} \frac{lk}{k} \sum_{\lambda=1}^{k} \frac{\mu(\lambda)}{\lambda} \right] = 0. \tag{13}$$

C'est là la formule dont nous avons précédemment parlé comme étant la base de la démonstration que nous cherchons à établir.

3. Soient u la limite inférieure d'indétermination et U la limite supérieure d'indétermination de la somme

$$\sum_{\lambda=1}^{k} \frac{\mu(\lambda)}{\lambda},$$

pour k augmentant sans limites.

On conclut alors de (13) :

I. *La limite inférieure d'indétermination u ne peut pas être positive.*

En effet, admettons que l'on ait $u > 0$; on pourrait alors toujours déterminer un nombre entier positif k_0 supérieur à 2, tel que pour chaque valeur de k satisfaisant à la condition

$$k \geqq k_0$$

ait lieu l'inégalité

$$\sum_{\lambda=1}^{k} \frac{\mu(\lambda)}{\lambda} > \tfrac{1}{2} u.$$

Si l'on posait alors pour abréger

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{lk}{k} \sum_{\lambda=1}^{k} \frac{\mu(\lambda)}{\lambda} = \mathrm{A}(n),$$

on aurait pour $n > k_0$ l'inégalité

$$\frac{1}{ln}A(n) = \frac{1}{ln}A(k_0 - 1) + \frac{1}{ln}\sum_{k=k_0}^{n}\frac{lk}{k}\sum_{\lambda=1}^{k}\frac{\mu(\lambda)}{\lambda} > \frac{1}{ln}A(k_0 - 1) + \frac{u}{2\,ln}\sum_{k=k_0}^{n}\frac{lk}{k}.$$

Comme $k_0 \geqq 3$, il s'ensuivrait que l'on aurait

$$\frac{1}{ln}A(n) > \frac{1}{ln}A(k_0 - 1) + \frac{u}{2\,ln}\int_{k_0}^{n}\frac{lx}{x}\,dx = \frac{1}{ln}A(k_0 - 1) - \frac{u}{4\,ln}(lk_0)^2 + \frac{u}{4}\,ln,$$

c'est-à-dire que l'expression $\frac{1}{ln}A(n)$, pour n augmentant sans limites, deviendrait infiniment grande, ce qui serait en contradiction avec l'équation (13).

D'une façon toute pareille, on trouve que :

II. *La limite supérieure d'indétermination* U *ne peut pas être négative.*

A l'aide de considérations un peu plus compliquées, on trouve aussi que :

III. *La limite supérieure d'indétermination* U *ne peut pas être positive.*

Car l'hypothèse $U > 0$ ne serait pas non plus compatible avec l'équation (13), puisqu'il s'ensuivrait que le quotient $\frac{A(n)}{ln}$, pour des variations de n dans l'intervalle $(G \ldots + \infty)$, pourrait toujours encore éprouver des oscillations qui surpasseraient une certaine constante positive, quelque loin que l'on fît reculer la limite inférieure G de l'intervalle assigné.

On reconnaît cela, si l'on dispose dès le commencement de quelques nombres que l'on peut prendre arbitrairement entre certaines limites de manière à obtenir des formules simples, par les considérations suivantes :

Si U était > 0, on pourrait, comme cela résulte directement de la signification de U et de l'équation (13), après avoir choisi arbitrairement un nombre quelconque G, supérieur à e, aussi grand que l'on voudra, toujours trouver un nombre entier positif n_0 qui vérifierait les inégalités suivantes :

$$n_0 > G,$$

(14) $$\frac{1}{n_0} < \frac{U}{18},$$

(15) $$\sum_{\lambda=1}^{n_0} \frac{\mu(\lambda)}{\lambda} > \tfrac{2}{3}U,$$

(16) $$\left|\frac{A(n_0)}{ln_0}\right| < \tfrac{1}{54}U^2.$$

Mais comme, d'après ce qui précède, $u \leqq 0$, il faudrait qu'il y eût des valeurs de n qui seraient $> n_0$ et telles que l'on eût

$$\sum_{\lambda=1}^{n} \frac{\mu(\lambda)}{\lambda} < \tfrac{1}{3}U.$$

Si l'on désignait alors par $n_1 + 1$ la plus petite de ces valeurs, on aurait

(17) $$\sum_{\lambda=1}^{n_1+1} \frac{\mu(\lambda)}{\lambda} < \tfrac{1}{3}U;$$

tandis que, pour

$$n_0 \leqq k \leqq n_1$$

on aurait

(18) $$\sum_{\lambda=1}^{k} \frac{\mu(\lambda)}{\lambda} \geqq \tfrac{1}{3}U.$$

De (15) et (17) on tirerait par soustraction

$$\sum_{\lambda=n_0+1}^{n_1+1} \frac{\mu(\lambda)}{\lambda} < -\tfrac{1}{3}U.$$

A fortiori l'on devrait avoir

$$\sum^{n_1+1} \frac{-1}{\lambda} < -\tfrac{1}{3}U,$$

ou

$$\sum_{\lambda=n_0+1}^{n_1+1} \frac{1}{\lambda} > \tfrac{1}{3}\,\mathrm{U}.$$

Mais on a

$$\sum_{\lambda=n_0+1}^{n_1+1} \frac{1}{\lambda} < \int_{n_0}^{n_1+1} \frac{dx}{x} = l\,\frac{n_1+1}{n_0};$$

par conséquent, l'on aurait

$$l\,\frac{n_1+1}{n_0} > \tfrac{1}{3}\,\mathrm{U}$$

ou

$$(19) \qquad n_1+1 > n_0\, e^{\frac{1}{3}\mathrm{U}}.$$

Maintenant, de l'équation

$$\frac{\mathrm{A}(n_1)}{ln_1} - \frac{\mathrm{A}(n_0)}{ln_0} = \frac{1}{ln_1} \sum_{k=n_0+1}^{n_1} \frac{lk}{k} \sum_{\lambda=1}^{k} \frac{\mu(\lambda)}{\lambda} - \left(\frac{1}{ln_0} - \frac{1}{ln_1}\right)\mathrm{A}$$

s'ensuivrait, en ayant égard à (18),

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{A}(n_1)}{ln_1} - \frac{\mathrm{A}(n_0)}{ln_0} &> \tfrac{1}{3}\,\mathrm{U}\,\frac{1}{ln_1} \sum_{k=n_0+1}^{n_1} \frac{lk}{k} - \frac{ln_1 - ln_0}{ln_1}\,\frac{\mathrm{A}(n_0)}{ln_0} \\ &> \tfrac{1}{3}\,\mathrm{U}\,\frac{1}{ln_1} \sum_{k=n_0+1}^{n_1} \frac{lk}{k} - \left|\frac{\mathrm{A}(n_0)}{ln_0}\right|,\end{aligned}$$

et, en ayant égard à (16),

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{A}(n_1)}{ln_1} - \frac{\mathrm{A}(n_0)}{ln_0} &> \tfrac{1}{3}\,\mathrm{U}\,\frac{1}{ln_1} \sum_{k=n_0+1}^{n} \frac{lk}{k} - \tfrac{1}{54}\,\mathrm{U}^2 \\ &> \tfrac{1}{3}\,\mathrm{U}\,\frac{1}{ln_1} \int_{n_0+1}^{n_1+1} \frac{lx}{x}\,dx - \tfrac{1}{54}\,\mathrm{U}^2 \\ &> \tfrac{1}{6}\,\mathrm{U}\,\frac{l(n_1+1) + l(n_0+1)}{ln_1}\, l\,\frac{n_1+1}{n_0+1} - \tfrac{1}{54} \\ &> \tfrac{1}{6}\,\mathrm{U}\, l\,\frac{n_1+1}{n_0+1} - \tfrac{1}{54}\,\mathrm{U}^2,\end{aligned}$$

puis, en ayant égard à (19)

$$\frac{A(n_1)}{ln_1} - \frac{A(n_0)}{ln_0} > \tfrac{1}{6}U\, l\,\frac{n_0 e^{\frac{1}{3}U}}{n_0+1} - \tfrac{1}{54}U^2$$
$$> \tfrac{1}{6}U\left[\tfrac{1}{3}U - l\left(1+\frac{1}{n_0}\right)\right] - \tfrac{1}{54}U^2$$
$$> \tfrac{1}{18}U^2 - \tfrac{1}{6}\frac{1}{n_0}U - \tfrac{1}{54}U^2,$$

et, enfin, en ayant égard à (14)

$$\frac{A(n_1)}{ln_1} - \frac{A(n_0)}{ln_0} > \tfrac{1}{18}U^2 - \tfrac{1}{108}U^2 - \tfrac{1}{54}U^2 = \tfrac{1}{36}U^2.$$

Donc le quotient $\frac{A(n)}{ln}$, lorsque n croît de n_0 à n_1, augmenterait de plus de $\frac{1}{36}U^2$. Mais, puisque cela est incompatible avec l'équation (13), l'hypothèse $U > 0$ doit être rejetée.

On démontre d'une façon tout analogue que :

IV. *La limite inférieure d'indétermination u ne peut pas être négative.*

Les théorèmes I-IV excluent donc toute possibilité autre que celle-ci :

$$\lim_{k=\infty} \sum_{\lambda=1}^{k} \frac{\mu(\lambda)}{\lambda} = 0. \tag{20}$$

Or, c'est là précisément l'énoncé du titre.

4. Du résultat que nous venons d'obtenir, on obtient comme simple conséquence la proposition suivante :

Théorème. — *Pour n croissant indéfiniment, la somme*

$$\sum_{k=1}^{n} \mu(k)$$

devient infiniment petite par rapport à n, c'est-à-dire que l'on a

$$\lim_{n=\infty} \left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mu(k)\right] = 0. \tag{21}$$

Démonstration. — Si l'on pose pour abréger

$$\sum_{\lambda=1}^{k} \mu(\lambda) = \mathrm{M}(k) \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots),$$

en ajoutant que $\mathrm{M}(0)$ doit être $= 0$, on a pour chaque valeur positive de n

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\mu(k)}{k} = \sum_{k=1}^{n} [\mathrm{M}(k) - \mathrm{M}(k-1)] \frac{1}{k},$$

d'où l'on conclut facilement que

$$(22) \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{\mu(k)}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\mathrm{M}(k)}{k(k+1)} + \frac{\mathrm{M}(n)}{n+1}.$$

Soit maintenant v la limite inférieure d'indétermination et V la limite supérieure d'indétermination du quotient

$$\frac{\mathrm{M}(n)}{n+1}$$

pour n croissant sans limites. On obtient alors d'abord ce résultat : *v ne peut pas être positif.*

En effet, si le contraire avait lieu, on pourrait déterminer un nombre entier positif k_0 tel que, pour $k > k_0$, on aurait continuellement

$$\frac{\mathrm{M}(k)}{k+1} > \tfrac{1}{2} v;$$

mais alors, par suite de (22), l'on aurait pour $n > k_0$ l'inégalité

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\mu(k)}{k} > \sum_{k=1}^{k_0} \frac{\mathrm{M}(k)}{k(k+1)} + \tfrac{1}{2} v \sum_{k=k_0+1}^{n} \frac{1}{k} + \tfrac{1}{2} v,$$

c'est-à-dire que la somme $\sum_{k=1}^{n} \frac{\mu(k)}{k}$ pour n croissant sans limites deviendrait infiniment grande, ce qui est impossible.

On trouve en second lieu que :

V *non plus ne peut pas être positif.*

En effet, si le contraire avait lieu, on pourrait d'abord, après avoir choisi arbitrairement un nombre positif G, aussi grand que l'on voudrait, déterminer un nombre entier ν tel que l'on eût

$$\nu > G$$

et que l'on eût

$$\frac{M(\nu)}{\nu+1} < \tfrac{1}{3} V,$$

puis un nombre entier n_1 tel que l'on eût simultanément les inégalités

$$n_1 > \nu \qquad \text{et} \qquad \frac{M(n_1)}{n_1+1} > \tfrac{2}{3} V.$$

Si l'on désignait alors par n_0 le plus grand nombre entier inférieur à n_1, qui satisfasse à la condition

$$\frac{M(n_0)}{n_0+1} < \tfrac{1}{3} V,$$

on aurait alors

$$G < \nu \leqq n_0,$$

et, pour toutes les valeurs de k qui vérifieraient la condition

$$n_0 < k \leqq n_1$$

on aurait

$$\frac{M(k)}{k+1} \geqq \tfrac{1}{3} V.$$

Mais, en ayant égard à ces inégalités, on tirerait de (22) les relations suivantes

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n_1} \frac{\mu(k)}{k} - \sum_{k=1}^{n_0} \frac{\mu(k)}{k} &= \sum_{k=n_0+1}^{n_1} \frac{M(k)}{k(k+1)} + \frac{M(n_1)}{n_1+1} - \frac{M(n_0)}{n_0+1} \\ &> \tfrac{1}{3} V \sum_{k=n_0+1}^{n_1} \frac{1}{k} + \tfrac{2}{3} V - \tfrac{1}{3} V \\ &> \tfrac{1}{3} V.\end{aligned}$$

La somme $\sum_{k=1}^{n} \frac{\mu(k)}{k}$, pour n croissant sans limites, éprouverait ainsi des oscillations d'amplitude supérieure à $\frac{1}{3}V$, ce qui serait en contradiction avec l'équation (20). Par conséquent, l'hypothèse $V > 0$ est inadmissible.

D'une manière toute pareille, on peut exclure les valeurs négatives des nombres V et v.

Il ne reste donc plus que la possibilité

$$\lim_{n=\infty} \frac{M(n)}{n+1} = 0$$

et, par conséquent, aussi

$$\lim_{n=\infty} \frac{M(n)}{n} = 0,$$

comme on l'avait affirmé.

D'une manière toute pareille, on obtient le théorème plus général suivant qui renferme le précédent comme cas particulier.

Si l'on désigne par α un exposant quelconque réel qui n'est pas inférieur à -1 l'on a toujours

$$\lim_{n=\infty} \left[\frac{1}{n^{\alpha+1}} \sum_{k=1}^{n} \mu(k) k^{\alpha} \right] = 0. \tag{23}$$

En effet, si l'on pose pour abréger,

$$\sum_{\lambda=1}^{k} \mu(\lambda) \lambda^{\alpha} = N(k) \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots),$$

on a

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\mu(k)}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{\alpha+1}} \mu(k) k^{\alpha} = \sum_{k=1}^{n} N(k) \left[\frac{1}{k^{\alpha+1}} - \frac{1}{(k+1)^{\alpha+1}} \right] + \frac{N(n)}{(n+1)^{\alpha+1}}$$
$$= (\alpha+1) \sum_{k=1}^{n} \frac{N(k)}{(k+\vartheta_k)^{\alpha+2}} + \frac{N(n)}{(n+1)^{\alpha+1}},$$

où chacun des nombres ϑ_k est compris entre 0 et 1, et de cette équation l'on peut tirer des conclusions tout analogues à celles qui ont été déduites précédemment.

De la même manière, on peut encore obtenir une infinité d'équations du même type que (23), parmi lesquelles nous mettrons en évidence seulement la suivante

$$\lim_{n=\infty}\left[\frac{1}{n.ln}\sum_{k=1}^{n}\mu(k)\,lk\right]=0. \tag{24}$$

Il n'y a non plus aucune difficulté à étendre les résultats acquis à la fonction arithmétique habituellement désignée par $\lambda(k)$ et qui se distingue seulement de la fonction $\mu(k)$, en ce que, lorsque k est divisible par un carré différent de 1, elle n'a pas la valeur 0, mais la valeur $+1$ ou -1, selon que k est composé d'un nombre pair ou impair de facteurs premiers. On a, en particulier,

$$\lim_{n=\infty}\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\lambda(k)\right]=0,$$

c'est-à-dire que : *Pour de grandes valeurs de n, il existe dans l'intervalle $(1\ldots n)$, approximativement autant de nombres entiers qui sont composés d'un nombre pair de facteurs premiers, que de nombres qui sont composés d'un nombre impair de tels facteurs.*