ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

ÉDOUARD LE ROY

Sur l'intégration des équations de la chaleur (suite)

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 15 (1898), p. 9-178
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1898_3_15__9_0>

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1898, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (http://www.elsevier.com/locate/ansens) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

ANNALES

SCIENTIFIQUES

DE

L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

SUR L'INTÉGRATION

DES

ÉQUATIONS DE LA CHALEUR

[SUITE (1)],

PAR M. ÉDOUARD LE ROY,

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE,
AGRÉGÉ DE L'UNIVERSITÉ.

DEUXIÈME PARTIE.

LE PROBLÈME DE DIRICHLET ET LES FONCTIONS HARMONIQUES FONDAMENTALES ATTACHÉES A UNE SURFACE FERMÉE.

I. — Énoncé. — Préliminaires. — Définition des fonctions harmoniques fondamentales. — Un problème auxiliaire. — Approximations successives.

34. Parmi les équations de l'équilibre thermique, distinguons spécialement l'*équation de Laplace :*

$$\Delta U = 0.$$

On sait qu'une fonction $U(x, y, z)$ est dite ***harmonique*** quand elle remplit les conditions de continuité fondamentales et qu'elle vérifie l'équation de Laplace.

---

(1) *Voir* 3e Série, Tome XIV (1897), p. 379 à 465.

Soit S une surface fermée, qui peut se composer de plusieurs nappes entièrement séparées. Cette surface délimite un domaine *intérieur* T et un domaine *extérieur* T'. Le premier est limité dans toutes ses dimensions, le second s'étend jusqu'à l'infini. Enfin, de ces deux domaines, l'un seulement sera d'ordinaire supposé connexe, T par exemple.

Le problème *intérieur* de Dirichlet consiste à construire une fonction qui soit harmonique dans T et qui prenne sur S des valeurs Φ données d'avance. Ce problème est entièrement déterminé.

Le problème *extérieur* de Dirichlet consiste à construire une fonction qui soit harmonique dans T' et qui prenne sur S des valeurs Φ données d'avance. Ce problème n'est bien déterminé que si l'on connaît, *a priori*, l'allure de la fonction inconnue à l'infini : on impose généralement à cette fonction la condition de se comporter à l'infini comme un potentiel newtonien.

Cela posé, l'emploi de la méthode du balayage a mis hors de doute l'*existence* d'une solution du problème de Dirichlet intérieur dans le cas le plus général. La même méthode permettrait aussi d'établir cette existence pour le problème de Dirichlet extérieur. Mais il est plus simple de recourir alors au procédé bien connu dû à Lord Kelvin et de ramener ainsi, par une inversion, le problème extérieur au problème intérieur. Quoi qu'il en soit, nous pouvons énoncer le principe suivant : *Il existe une fonction, et une seule, séparément harmonique dans* T *et dans* T', *continue dans tout l'espace et même à la traversée de* S, *prenant enfin sur cette surface des valeurs* Φ *données d'avance et s'annulant à l'infini à la façon d'un potentiel newtonien.*

Si l'existence d'une solution du problème de Dirichlet est certaine, la forme analytique de cette solution reste inconnue. Or il serait vraiment insuffisant de se borner, dans une question si importante, à un simple théorème d'existence. Je me suis donc proposé de voir si, le principe de Dirichlet étant supposé établi, il ne deviendrait pas possible d'obtenir, *a posteriori*, l'expression de la fonction harmonique qui prend sur S les valeurs Φ, *par une série de fonctions harmoniques simples*, d'après le procédé constamment employé en Physique mathématique. On l'avait déjà fait dans quelques cas particuliers, tels que ceux de la sphère et de l'ellipsoïde, traités respectivement par Laplace et par Lamé. Mon but actuel est de généraliser ces résultats classiques.

Le principe de la méthode que je vais développer est exposé dans un Mémoire de M. Poincaré, *Sur les équations de la Physique* (¹). J'ai dû modifier plusieurs détails, et je me suis inspiré, pour cela, d'un Mémoire du même auteur, paru tout dernièrement dans le journal de M. Jordan (²). Enfin, je me suis aussi servi d'un troisième Mémoire de M. Poincaré, contenu dans les *Acta* pour 1896 (³) : j'y ai pris quelques résultats, que j'ai généralisés un peu; mais surtout je me suis attaché à résoudre les problèmes qui y sont proposés vers la fin et qui se rapportent à la célèbre *Méthode de Neumann*.

35. Voici les hypothèses que nous ferons. La surface S aura, en chacun de ses points, un plan tangent unique et deux rayons de courbure principaux bien déterminés. Pour simplifier, bien que l'on puisse se placer dans des circonstances un peu plus générales, nous supposerons même que la frontière S, commune aux domaines T et T', est composée d'un nombre fini de surfaces fermées, *n'ayant chacune qu'une seule nappe analytique régulière*. Tel est le cas où S est formée d'une grande sphère, puis d'un ellipsoïde et d'un tore extérieurs l'un à l'autre et intérieurs à la sphère. On voit par là que notre hypothèse n'a rien de trop restrictif.

Quant à la fonction périphérique donnée Φ, nous admettrons, sauf avis contraire, qu'elle a des dérivées continues de tous les ordres par rapport aux deux coordonnées u et v qui fixent la position d'un point sur S.

Ces diverses hypothèses ne seront pas toujours indispensables à la rigueur des raisonnements. Mais je les fais, en général, dans un but d'abréviation.

Nous aurons à considérer des fonctions W définies et continues en tout point (x, y, z) de T et en tout point (x', y', z') de T'; s'il est nécessaire de distinguer les valeurs de la fonction en (x, y, z) et en

---

(¹) H. Poincaré, *Sur les équations de la Physique mathématique* (*Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*; 1894).

(²) H. Poincaré, *Sur l'équilibre et les mouvements des mers* (*Journal de mathématiques*; 1896).

(³) H. Poincaré, *Sur la méthode de Neumann et le problème de Dirichlet* (*Acta mathematica*; 1896).

(x', y', z'), nous les désignerons respectivement par W et W', la lettre W signifiant aussi, à l'occasion, la fonction totale envisagée comme définie dans tout l'espace. Lorsque le point (x, y, z) tendra vers un point de S en restant intérieur à S, W aura une limite V. De même, lorsque le point (x', y', z') tendra vers le même point de S en restant extérieur à S, W' aura une limite V'. La lettre V représentera aussi la valeur de W au point considéré de S. Pareillement, nous appellerons

$$\frac{dV}{dn_i}, \quad \frac{dV'}{dn_e}$$

les dérivées de W et de W' prises en un point de S suivant la direction de la normale vers l'intérieur pour W et vers l'extérieur pour W'. Enfin, nous poserons

$$d\tau = dx\, dy\, dz,$$
$$d\tau' = dx'\, dy'\, dz',$$

et $d\sigma$ sera un élément de S.

Nos notations étant ainsi expliquées, rappelons encore les principales propriétés du potentiel newtonien d'une surface attirante.

Soit μ une fonction continue des coordonnées (u, v) du centre de gravité de $d\sigma$. Soit r la distance du point (u, v) au point courant. La fonction

$$W = \int_{(S)} \frac{\mu}{r}\, d\sigma$$

est harmonique dans T et dans T'. Elle est holomorphe en tout point de l'espace, sauf sur S. Enfin, posons

$$\rho'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2.$$

Les produits

$$\rho' W', \quad \rho'^2 \frac{\partial W'}{\partial x'}, \quad \rho'^2 \frac{\partial W'}{\partial y'}, \quad \rho'^2 \frac{\partial W'}{\partial z'}$$

tendent vers des limites finies lorsque ρ' augmente indéfiniment. Tout cela suppose seulement la fonction μ continue.

Si, en outre, la surface S est régulière en chaque point, la fonction potentielle W reste finie et continue, même à la traversée de S, en sorte qu'on peut écrire

$$V = V'.$$

Quant aux dérivées

$$\frac{dV}{dn_i}, \quad \frac{dV'}{dn_e},$$

elles sont continues par rapport aux variables (u, v), mais on a

$$\frac{dV}{dn_i} + \frac{dV'}{dn_e} = -4\pi\mu.$$

J'ajoute enfin que, si μ a des dérivées des deux premiers ordres par rapport à u et v, les dérivées des deux premiers ordres de W restent finies et continues lorsque le point courant vient se placer sur S. Les dérivées premières, suivant des directions tangentes à S, sont même continues à la traversée de S; les dérivées secondes, au contraire, subissent alors un saut brusque.

Écrivons

$$\sum \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 = \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2,$$

$$\sum \left(\frac{\partial W'}{dx'}\right)^2 = \left(\frac{\partial W'}{\partial x'}\right)^2 + \left(\frac{\partial W'}{\partial y'}\right)^2 + \left(\frac{\partial W'}{\partial z'}\right)^2.$$

Il résulte de ce qui précède que, dans les conditions où nous nous sommes placés, les intégrales

$$\int_{(T)} \sum \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 d\tau, \quad \int_{(T')} \sum \left(\frac{\partial W'}{\partial x'}\right)^2 d\tau'$$

ont chacune un sens [1].

Je termine en rappelant l'inégalité de Schwarz

$$\left(\int_{(T)} f_1 f_2 \, d\tau\right)^2 < \int_{(T)} f_1^2 \, d\tau \int_{(T)} f_2^2 \, d\tau,$$

qui a été établie au n° **12** et dont nous ferons un fréquent usage.

36. Je me propose maintenant de définir les fonctions harmoniques fondamentales attachées à la surface S. Avant d'entreprendre une démonstration rigoureuse de l'existence de ces fonctions, il ne sera

---

[1] Sur les propriétés du potentiel newtonien, consulter : H. POINCARÉ, *Théorie du potentiel newtonien*. Paris, Carré; 1897.

pas inutile de montrer comment l'emploi du calcul des variations permet de prévoir les résultats que nous obtiendrons dans la suite.

Soit W le potentiel newtonien d'une simple couche portée par S. Posons

$$J = \int_{(T)} \sum \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 d\tau, \qquad J' = \int_{(T')} \sum \left(\frac{\partial W'}{\partial x'}\right)^2 d\tau'$$

et

$$I = \int_{(S)} V^2\, d\sigma.$$

On voit que l'on peut écrire

$$J = -\int_{(S)} V \frac{dV}{dn_i} d\sigma, \qquad J' = -\int_{(S)} V \frac{dV'}{dn_e} d\sigma.$$

Cela posé, considérons le rapport

$$\frac{J + J'}{I}.$$

Ce rapport est toujours positif. Il a donc une limite inférieure. Envisageons, parmi tous les potentiels W, ceux pour lesquels on a

$$I = 1,$$

et admettons que l'un d'eux fasse effectivement prendre à $J + J'$ sa valeur minimum. Soit W_1 ce potentiel.

Si l'on applique les principes du calcul des variations, on trouve qu'il existe une constante ξ_1 telle que l'on ait

$$\frac{dV_1}{dn_i} + \frac{dV'_1}{dn_e} + \xi_1 V_1 = 0$$

avec

$$\xi_1 = J_1 + J'_1,$$

J_1 et J'_1 désignant ce que deviennent J et J' quand on remplace W par W_1. Il est à remarquer que la constante ξ_1 est positive et non nulle; en effet, $J_1 + J'_1$ ne pourrait s'annuler que si W_1 était constant, ce qui entraînerait $W_1 = 0$ dans tout l'espace, puisque cette égalité a lieu à l'infini, et ce qui serait par conséquent contraire à l'hypothèse

$$I_1 = 1.$$

La première fonction fondamentale est ainsi définie : c'est W_1.

Considérons maintenant les potentiels W qui vérifient les relations suivantes :

$$\int_{(S)} V^2 d\sigma = 1, \qquad \int_{(S)} VV_1 d\sigma = 0.$$

Soit W_2 celui d'entre eux qui fait prendre à $J + J'$ sa nouvelle valeur minimum. L'emploi du calcul des variations conduit cette fois à l'égalité

$$\frac{dV_2}{dn_i} + \frac{dV'_2}{dn_e} + \xi_2 V_2 + \lambda V_1 = 0,$$

ξ_2 et λ étant certaines constantes. On a en outre

$$\int_{(S)} V_2^2 d\sigma = 1, \qquad \int_{(S)} V_1 V_2 d\sigma = 0.$$

Multiplions les deux membres de l'équation précédente par $V_1 d\sigma$ et intégrons. Il vient

$$\int_{(S)} V_1 \frac{dV_2}{dn_i} d\sigma + \int_{(S)} V_1 \frac{dV'_2}{dn_e} d\sigma + \xi_2 \int_{(S)} V_1 V_2 d\sigma + \lambda \int_{(S)} V_1^2 d\sigma = 0.$$

La formule de Green, ici applicable même pour le domaine infini T', nous donne, les fonctions W_1 et W_2 étant harmoniques,

$$\int_{(S)} V_1 \left(\frac{dV_2}{dn_i} + \frac{dV'_2}{dn_e}\right) d\sigma = \int_{(S)} V_2 \left(\frac{dV_1}{dn_i} + \frac{dV'_1}{dn_e}\right) d\sigma = -\xi_1 \int_{(S)} V_1 V_2 d\sigma = 0,$$

à cause de la relation à laquelle satisfait V_1 sur S.

D'autre part

$$\int_{(S)} V_1 V_2 d\sigma = 0, \qquad \int_{(S)} V_1^2 d\sigma = 1,$$

d'où

$$\lambda = 0.$$

Ainsi l'on a

$$\frac{dV_2}{dn_i} + \frac{dV'_2}{dn_e} + \xi_2 V_2 = 0.$$

On trouve encore

$$\xi_2 = J_2 + J'_2,$$

et il est bien clair que ξ_2 ne peut pas être inférieur à ξ_1.

On peut continuer de la sorte indéfiniment : les calculs et les conclusions sont toujours les mêmes.

Finalement, on voit que l'on peut construire une infinité de constantes positives qui ne vont pas en décroissant :

$$\xi_1, \quad \xi_2, \quad \xi_3, \quad \ldots, \quad \xi_p, \quad \ldots,$$

auxquelles correspondent des potentiels newtoniens, dus à de simples couches répandues sur S :

$$W_1, \quad W_2, \quad W_3, \quad \ldots, \quad W_p, \quad \ldots,$$

vérifiant les relations

$$\frac{dV_p}{dn_i} + \frac{dV'_p}{dn_e} + \xi_p V_p = 0,$$

$$\int_{(S)} V_p^2 \, d\sigma = 1,$$

$$\xi_p = J_p + J'_p,$$

$$\int_{(S)} V_p V_q \, d\sigma = 0 \qquad \text{si} \qquad p \gtrless q.$$

Ce sont les fonctions W_p que j'appelle *fonctions harmoniques fondamentales attachées à la surface* S.

Voyons maintenant à quoi peuvent servir les fonctions fondamentales.

De nombreuses analogies portent à penser qu'une fonction arbitraire Φ définie sur S peut toujours être développée en série de la forme

$$\Phi = \Sigma A V_p.$$

Si l'on admet la possibilité de ce développement, le calcul des coefficients A_p est facile. Multiplions en effet par V_p les deux membres de l'égalité précédente et intégrons. En tenant compte des relations

$$\int_{(S)} V_p^2 \, d\sigma = 1, \qquad \int_{(S)} V_p V_q \, d\sigma = 0,$$

et en supposant la série uniformément convergente, on trouve immédiatement

$$A_p = \int_{(S)} \Phi V_p \, d\sigma.$$

Posons alors

$$W = \Sigma A_p W_p.$$

La nouvelle série sera encore uniformément convergente et elle aura pour somme la fonction harmonique qui prend sur S *les valeurs* Φ.

On aura ainsi résolu du même coup les problèmes de Dirichlet intérieur et extérieur. La solution se présentera sous la forme d'un potentiel newtonien de simple couche.

L'aperçu qui précède n'offre aucune rigueur. Tout au plus peut-il mettre sur la voie d'une démonstration. Nous allons donc reprendre toute la question.

37. La démonstration rigoureuse de l'existence des fonctions fondamentales exige la résolution préalable d'un problème auxiliaire dont voici l'énoncé :

Cherchons une fonction W harmonique dans T et dans T', continue dans tout l'espace, se comportant à l'infini comme un potentiel newtonien, vérifiant enfin en tout point de S la relation

$$\frac{dV}{dn_i} + \frac{dV'}{dn_e} + \Phi = 0.$$

On a

$$W = \frac{1}{4\pi} \int_{(S)} \frac{\Phi}{r} \, d\sigma,$$

et l'unique solution possible de notre problème se présente donc sous la forme d'un potentiel de simple couche.

Ce qui précède suppose seulement la surface S régulière et la fonction Φ continue.

L'expression

$$\frac{1}{4\pi} \int_{(S)} \frac{d\sigma}{r},$$

est une fonction de (x, y, z) finie et continue dans tout l'espace. On peut donc assigner un nombre positif g ne dépendant que de la configuration de la surface S ou de ses dimensions et tel que l'on ait

$$\frac{1}{4\pi}\int_{(S)}\frac{d\sigma}{r} < g,$$

pour tous les systèmes de valeurs possibles de (x, y, z). Si l'on a alors

$$|\Phi| < \alpha,$$

α étant une constante positive, il vient

$$|W| < \alpha g.$$

Cette inégalité va jouer un rôle essentiel dans nos raisonnements.

38. Proposons-nous de construire une fonction W harmonique dans T et dans T′, continue même à la traversée de S, ayant à l'infini l'allure d'un potentiel newtonien et vérifiant en tout point de S la relation suivante :

$$\frac{dV}{dn_i} + \frac{dV'}{dn_e} + \xi V + \Phi = 0,$$

où ξ représente une constante arbitraire et Φ une fonction donnée des variables (u, v).

Considérons la fonction W comme une fonction de ξ et posons

$$W = W_0 + \xi W_1 + \xi^2 W_2 + \ldots + \xi^p W_p + \ldots.$$

On ne confondra pas les fonctions W_p actuelles avec les fonctions fondamentales.

Chaque fonction W_p sera harmonique dans T et dans T′, s'annulera à l'infini, enfin restera continue, même à la traversée de S. On a

$$V = V_0 + \xi V_1 + \xi^2 V_2 + \ldots + \xi^p V_p + \ldots$$

sur S et, de même,

$$\frac{dV}{dn_i} = \frac{dV_0}{dn_i} + \xi\frac{dV_1}{dn_i} + \xi^2\frac{dV_2}{dn_i} + \ldots + \xi^p\frac{dV_p}{dn_i} + \ldots,$$
$$\frac{dV'}{dn_e} = \frac{dV'_0}{dn_e} + \xi\frac{dV'_1}{dn_e} + \xi^2\frac{dV'_2}{dn_e} + \ldots + \xi^p\frac{dV'_p}{dn_e} + \ldots,$$

d'où

$$\begin{aligned}
&\frac{dV_0}{dn_i}+\frac{dV'_0}{dn_e}+\Phi \quad =0,\\
&\frac{dV_1}{dn_i}+\frac{dV'_1}{dn_e}+V_0 \quad =0,\\
&\frac{dV_2}{dn_i}+\frac{dV'_2}{dn_e}+V_1 \quad =0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots,\\
&\frac{dV_p}{dn_i}+\frac{dV'_p}{dn_e}+V_{p-1}=0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

Il est facile (n° 37) de calculer de proche en proche les fonctions W_p :

$$W_0=\frac{1}{4\pi}\int_{(S)}\frac{\Phi}{r}\,d\sigma, \qquad W_p=\frac{1}{4\pi}\int_{(S)}\frac{V_{p-1}}{r}\,d\sigma.$$

Tout cela suppose seulement la surface S régulière et la fonction initiale Φ continue.

En appliquant l'inégalité du n° 37, on trouve facilement

$$|W_0|<\alpha g, \quad |W_1|<\alpha g^2, \quad |W_2|<\alpha g^3, \quad \dots, \quad |W_p|<\alpha g^{p+1}, \quad \dots.$$

On voit par là que la série

$$\Sigma \xi^p W_p$$

est absolument et uniformément convergente dans tout l'espace, pourvu que l'on ait

$$|\xi|<\frac{1}{g}.$$

Supposons cette condition remplie.

Dans ce cas, posons

$$W=\Sigma \xi^p W_p.$$

La fonction W est harmonique dans T et dans T', en vertu du théorème de Harnack. De plus, elle reste continue, même à la traversée de S.

On peut former l'intégrale

$$\frac{1}{4\pi}\int_{(S)}\frac{\Phi+\xi V}{r}\,d\sigma.$$

La différence bien déterminée

$$W - \frac{1}{4\pi}\int_{(S)} \frac{\Phi + \xi V}{r}\, d\sigma$$

peut s'écrire

$$W_0 + \xi W_1 + \ldots + \xi^n W_n - \frac{1}{4\pi}\int_{(S)} \frac{\Phi + \xi V_0 + \ldots + \xi^n V_{n-1}}{r}\, d\sigma$$
$$+ (\xi^{n+1} W_{n+1} + \ldots) - \frac{1}{4\pi}\int_{(S)} \frac{\xi^{n+1} V_n + \ldots}{r}\, d\sigma.$$

Mais on a

$$W_0 + \xi W_1 + \ldots + \xi^n W_n = \frac{1}{4\pi}\int_{(S)} \frac{\Phi + \xi V_0 + \ldots + \xi^n V_{n-1}}{r}\, d\sigma,$$

en vertu de la définition des fonctions W_p successives.

D'autre part, on peut choisir n assez grand, vu la convergence absolue et uniforme de la série étudiée, pour que l'on ait, quels que soient (x, y, z) :

$$|\xi^{n+1} W_{n+1} + \ldots| < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad |\xi^n W_n| < \frac{\varepsilon}{3},$$

ε étant aussi petit que l'on veut. Cela entraîne

$$\left| \frac{1}{4\pi}\int_{(S)} \frac{\xi^{n+1} V_n + \ldots}{r}\, d\sigma \right| < \xi \frac{2\varepsilon}{3} g < \frac{2\varepsilon}{3},$$

d'où

$$\left| \frac{1}{4\pi}\int_{(S)} \frac{\Phi + \xi V}{r}\, d\sigma - W \right| < \varepsilon.$$

Mais, dans cette inégalité, le premier membre est déterminé et le second arbitraire. Donc

$$W = \frac{1}{4\pi}\int_{(S)} \frac{\Phi + \xi V}{r}\, d\sigma.$$

Ainsi W est le potentiel newtonien d'une simple couche portée par S.

La simple continuité de $\Phi + \xi V$ entraîne la relation

$$\frac{dV}{dn_i} + \frac{dV'}{dn_e} + \xi V + \Phi = 0,$$

d'après les propriétés précédemment rappelées des potentiels newtoniens de surface attirante.

Donc, pour les valeurs de ξ telles que $|\xi|$ soit inférieur à $\frac{1}{g}$, le problème que nous nous sommes proposé est résolu.

39. Supposons ξ réel et négatif. Une méthode de prolongement analytique va nous permettre alors de résoudre notre problème pour toute valeur de ξ.

Soit en effet ξ_0 un nombre négatif tel que

$$-\xi_0 < \frac{1}{g}.$$

Posons

$$\xi = \xi_0 + \eta$$

et développons W suivant les puissances de η

$$W = W_0 + \eta W_1 + \eta^2 W_2 + \ldots + \eta^p W_p + \ldots.$$

Il vient

$$\begin{aligned}
&\frac{dV_0}{dn_i} + \frac{dV'_0}{dn_e} + \xi_0 V_0 + \Phi \quad = 0,\\
&\frac{dV_1}{dn_i} + \frac{dV'_1}{dn_e} + \xi_0 V_1 + V_0 \quad = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\frac{dV_p}{dn_i} + \frac{dV'_p}{dn_e} + \xi_0 V_p + V_{p-1} = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Nous savons faire ces approximations puisque $|\xi_0|$ est inférieur à $\frac{1}{g}$.

Un lemme nous est ici nécessaire. Comparons les deux potentiels de simple couche W et U pour lesquels on a

$$\frac{dV}{dn_i} + \frac{dV'}{dn_e} + \xi V + \Psi = 0,$$

$$\frac{dU}{dn_i} + \frac{dU'}{dn_e} + \beta = 0,$$

avec

$$\xi < 0, \qquad |\Psi| < \beta.$$

On a d'abord

$$U > 0.$$

Posons maintenant

$$\tau = U - W, \qquad \theta = U + W.$$

Il vient

$$\frac{d\tau}{dn_i} + \frac{d\tau'}{dn_e} + \xi\tau - \xi U + (\beta - \Psi) = 0,$$
$$\frac{d\theta}{dn_i} + \frac{d\theta'}{dn_e} + \xi\theta - \xi U + (\beta + \Psi) = 0.$$

Or

$$\xi < 0, \qquad U > 0, \qquad \beta - \Psi > 0, \qquad \beta + \Psi > 0.$$

Je dis que, dans ces conditions, ni τ ni θ ne peuvent avoir de minimum négatif. En effet, il ne peut en exister à l'infini, puisque τ et θ y sont nuls. Il ne peut en exister non plus dans T ni dans T′, puisque τ et θ y sont harmoniques. Il ne peut en exister enfin sur S, car cela impliquerait

$$\frac{d\tau}{dn_i} \geqq 0, \qquad \frac{d\tau'}{dn_e} \geqq 0, \qquad \xi\tau > 0, \qquad -\xi U > 0, \qquad \beta - \Psi > 0,$$
$$\frac{d\theta}{dn_i} \geqq 0, \qquad \frac{d\theta'}{dn_e} \geqq 0, \qquad \xi\theta > 0, \qquad -\xi U > 0, \qquad \beta + \Psi > 0,$$

ce qui est impossible. Donc

$$\tau > 0, \qquad \theta > 0$$

et, par conséquent,

$$|W| < U < \beta g,$$

en tout point de l'espace.

Cette inégalité nous permet d'assigner des limites supérieures aux modules des fonctions W_p.

On a

$$|W_0| < \alpha g, \qquad |W_1| < \alpha g^2, \qquad \ldots, \qquad |W_p| < \alpha g^{p+1}, \qquad \ldots.$$

Donc la série

$$\Sigma \eta^p W_p$$

est absolument et uniformément convergente si

$$|\eta| < \frac{1}{g}.$$

On verrait d'ailleurs, dans ce cas comme plus haut, que la somme W de notre série est un potentiel de simple couche vérifiant la relation

$$\frac{dV}{dn_i} + \frac{dV'}{dn_e} + (\xi_0 + \eta)V + \Phi = 0$$

sur S.

Notre problème est ainsi résolu pour

$$0 < -\xi_0 < \frac{1}{g}, \qquad 0 < -\eta < \frac{1}{g},$$

c'est-à-dire pour

$$0 < -\xi < \frac{2}{g}.$$

En continuant de la sorte, on arriverait, après un nombre limité d'opérations, aux conditions

$$0 < -\xi < \frac{n}{g},$$

n étant un entier positif quelconque.

Finalement, notre problème auxiliaire est résolu pour une valeur négative quelconque de ξ. Le procédé suivi est exactement celui de la continuation analytique des fonctions.

La solution obtenue est d'ailleurs la seule possible. S'il y en avait deux, en effet, leur différence serait un potentiel de simple couche W vérifiant sur S l'équation

$$\frac{dV}{dn_i} + \frac{dV'}{dn_e} + \xi V = 0.$$

On verrait alors, comme ci-dessus, que W ne peut avoir ni maximum positif ni minimum négatif et que cette fonction est, par suite, identiquement nulle.

Le théorème que nous venons d'établir est susceptible, comme le principe de Dirichlet qu'il imite, de diverses généralisations sur lesquelles je ne pense pas qu'il y ait lieu d'insister. Qu'il me suffise de signaler la possibilité de construire une simple couche, portée par S, dont le potentiel vérifie la relation

$$\frac{dV}{dn_i} + \frac{dV'}{dn_e} = \varphi(u, v, V),$$

φ étant une fonction quelconque continue et croissante avec V.

Occupons-nous seulement désormais du cas où la fonction φ est linéaire en V. Nous devons étudier ce qui arrive si ξ a un signe quelconque; c'est de cette étude que résultera la démonstration de l'existence des fonctions fondamentales.

II. — Emploi de certaines intégrales définies pour étudier la convergence des approximations successives. — Quelques inégalités. — Théorème fondamental.

40. Reprenons les approximations successives du n° 38, en supposant cette fois que la fonction Φ possède par rapport à u et v des dérivées partielles continues des deux premiers ordres. On a

$$\begin{aligned}
&\frac{dV_0}{dn_i}+\frac{dV'_0}{dn_e}+\Phi &&= 0,\\
&\frac{dV_1}{dn_i}+\frac{dV'_1}{dn_e}+V_0 &&= 0,\\
&\frac{dV_2}{dn_i}+\frac{dV'_2}{dn_e}+V_1 &&= 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
&\frac{dV_p}{dn_i}+\frac{dV'_p}{dn_e}+V_{p-1} &&= 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Les dérivées des deux premiers ordres de W_0 tendent vers des limites finies et continues quand le point courant vient se placer sur S, ces limites pouvant être différentes suivant que le point courant tend vers un point de S par l'intérieur ou par l'extérieur de S. En tous cas, il est certain que V_0 a sur S des dérivées continues par rapport à u et v. On voit aisément de proche en proche que les mêmes conclusions sont vraies pour toutes les fonctions W_p.

Formons les intégrales

$$\begin{aligned}
I_{p,q} &= \int_{(S)} V_p V_q \, d\sigma,\\
J_{p,q} &= \int_{(T)} \sum \frac{\partial W_p}{\partial x}\,\frac{\partial W_q}{\partial x}\, d\tau,\\
J'_{p,q} &= \int_{(T')} \sum \frac{\partial W'_p}{\partial x'}\,\frac{\partial W'_q}{\partial x'}\, d\tau'.
\end{aligned}$$

Les remarques précédentes, jointes à l'emploi de la formule de Green, montrent que chacune de ces intégrales a un sens précis.

On a évidemment

$$I_{p,q} = I_{q,p}, \qquad J_{p,q} = J_{q,p}, \qquad J'_{p,q} = J'_{q,p}.$$

Cela posé, la définition des fonctions W_p permet d'écrire, en appliquant la formule de Green

$$I_{p,q} = -\int_{(S)} V_p\left(\frac{dV_{q+1}}{dn_i} + \frac{dV'_{q+1}}{dn_e}\right) d\sigma = -\int_{(S)} V_{q+1}\left(\frac{dV_p}{dn_i} + \frac{dV'_p}{dn_e}\right) d\sigma,$$

d'où

$$I_{p,q} = I_{p-1,q+1}.$$

On conclut de là

$$I_{p,q} = I_{p-1,q+1} = I_{p-2,q+2} = \ldots = I_{0,p+q},$$

et cela nous donne le droit d'écrire l'intégrale $I_{p,q}$ avec un seul indice I_{p+q}.

D'autre part on a

$$J_{p,q+1} + J'_{p,q+1} = -\int_{(S)} V_p\left(\frac{dV_{q+1}}{dn_i} + \frac{dV'_{q+1}}{dn_e}\right) d\sigma,$$

comme le montre une intégration par parties. Donc

$$J_{p,q+1} + J'_{p,q+1} = I_{p+q}.$$

On déduit encore de là que l'on peut écrire $J_{p+q} + J'_{p+q}$ avec un seul indice, au lieu de $J_{p,q} + J'_{p,q}$.

On a évidemment

$$I_{2p} > 0, \qquad J_{2p} + J'_{2p} > 0.$$

Or

$$I_p = J_{p+1} + J'_{p+1},$$

d'où

$$I_{2p} = J_{2p+1} + J'_{2p+1}, \qquad I_{2p+1} = J_{2p+2} + J'_{2p+2}.$$

On tire de là

$$I_{2p+1} > 0, \qquad J_{2p+1} + J'_{2p+1} > 0.$$

Ainsi les intégrales I_p et $J_p + J'_p$ sont positives, quelle que soit la parité de l'indice p.

L'inégalité de Schwarz donne immédiatement

$$I_{2p+1}^2 < I_{2p}\, I_{2p+2},$$

c'est-à-dire

$$\frac{I_{2p+1}}{I_{2p}} < \frac{I_{2p+2}}{I_{2p+1}},$$

puisque les I_p sont tous positifs. De même

$$(J_{2p+1} + J'_{2p+1})^2 < (J_{2p} + J'_{2p})(J_{2p+2} + J'_{2p+2}),$$

ou bien

$$I_{2p}^2 < I_{2p-1}\, I_{2p+1}.$$

Donc

$$\frac{I_{2p}}{I_{2p-1}} < \frac{I_{2p+1}}{I_{2p}}.$$

En réunissant ces résultats, on trouve finalement

$$\frac{I_1}{I_0} < \frac{I_2}{I_1} < \frac{I_3}{I_2} < \ldots < \frac{I_{p+1}}{I_p} < \ldots.$$

Ces inégalités nous serviront continuellement.

41. Supposons que l'on connaisse un nombre positif Ξ tel que

$$\frac{I_{p+1}}{I_p} < \frac{1}{\Xi},$$

quel que soit p.

On trouve immédiatement alors

$$I_p < M \frac{1}{\Xi^p},$$

M étant un nombre assignable qui ne dépend pas de p.

Cela étant, on a

$$V_p = \frac{1}{4\pi} \int_{(S)} \frac{V_{p-1}}{r}\, d\sigma,$$

le point (x, y, z) étant venu en un point M_0 de S. De M_0 comme centre avec μ pour rayon, décrivons une sphère qui partage S en deux régions, l'une S_1 extérieure, l'autre S_2 intérieure à la sphère. On peut écrire

$$V_p = H_1 + H_2$$

avec

$$H_1 = \frac{1}{4\pi}\int_{(S_1)} \frac{V_{p-1}}{r}\, d\sigma, \qquad H_2 = \frac{1}{4\pi}\int_{(S_2)} \frac{V_{p-1}}{r}\, d\sigma.$$

Nous allons chercher des limites supérieures de $|H_1|$ et de $|H_2|$.

L'inégalité de Schwarz donne d'abord

$$H_1^2 < \frac{1}{16\pi^2}\int_{(S_1)} V_{p-1}^2\, d\sigma \int_{(S_1)} \frac{d\sigma}{r^2}.$$

A fortiori

$$H_1^2 < \frac{1}{16\pi^2} I_{2p-2} \frac{S}{\mu^2},$$

la lettre S désignant ici l'aire totale de la surface S. Finalement

$$|H_1| < \frac{\sqrt{S}}{4\pi\mu}\sqrt{I_{2p-2}}.$$

Voilà un premier point.

Appelons en général g_p le maximum de $|V_p|$. Considérons la fonction

$$\frac{1}{4\pi}\int_{(S_2)} \frac{d\sigma}{r},$$

le point (x, y, z) étant toujours en M_0. Il est manifeste qu'on peut assigner un nombre positif N ne dépendant que de la configuration de la surface et tel que

$$\frac{1}{4\pi}\int_{(S_2)} \frac{d\sigma}{r} < N\mu.$$

On a alors

$$|H_2| < N\mu g_{p-1}$$

Voyons donc que le nombre N existe.

Menons le plan P tangent à S en M_0 : par hypothèse, cela est possible, puisque S n'a aucune singularité, ni pointe, ni arête. On peut toujours supposer μ assez petit pour que la sphère, de centre M_0 et de rayon μ, ne coupe qu'une seule nappe de S, et cela quel que soit M_0. Cela étant, on peut encore prendre μ assez petit pour que, en tout point de la portion de S intérieure à la sphère, le plan tangent à S avec le plan tangent en M_0 fasse un angle inférieur à telle quantité que l'on veut. Si α est cet angle, on a alors

$$\cos\alpha > k,$$

k étant un nombre positif, valable pour toute position de M_0, donné d'avance. Imaginons dans le plan P un système de coordonnées polaires, M_0 étant le pôle, ρ le rayon vecteur, ω l'angle polaire. On peut écrire

$$d\sigma = \frac{\rho\, d\rho\, d\omega}{\cos\alpha},$$

d'où

$$d\sigma < \frac{\rho\, d\rho\, d\omega}{k}.$$

D'autre part, en tout point de S_2, on a

$$\rho < r < \mu,$$

d'où

$$\frac{1}{4\pi}\int_{(S_2)} \frac{d\sigma}{r} < \frac{1}{4\pi}\int_{(\Omega)} \frac{d\rho\, d\omega}{k},$$

Ω étant le cercle découpé par la sphère sur le plan P. De là résulte l'inégalité

$$\frac{1}{4\pi}\int_{(S_2)} \frac{d\sigma}{r} < \frac{1}{2k}\mu.$$

On peut donc prendre

$$N = \frac{1}{2k},$$

et il est clair par là que N ne dépend ni de M_0 ni de l'indice p, mais seulement de la surface S.

On a donc bien

$$|H_2| < N\mu g_{p-1},$$

et cette inégalité, comme celle relative à $|H_1|$, est valable pour toute position de M_0.

Cela posé, on a

$$|V_p| < |H_1| + |H_2|,$$

d'où

$$g_p < \frac{\sqrt{S}}{4\pi\mu}\sqrt{I_{2p-2}} + N\mu g_{p-1},$$

c'est-à-dire

$$g_p < \frac{\sqrt{S}}{4\pi\mu}\sqrt{M}\,\frac{1}{\Xi^{p-1}} + N\mu g_{p-1}.$$

Toutes les inégalités précédentes exigent que μ soit inférieur à une certaine limite, qu'il nous est d'ailleurs inutile de calculer.

Jusqu'ici μ a été laissé arbitraire. Prenons maintenant

$$N\mu = \frac{1}{\Xi}.$$

Cela n'est possible que si Ξ est assez grand, mais cette restriction ne gêne en rien, car nous n'aurons ultérieurement à donner à Ξ que de très grandes valeurs.

On a

$$g_p < \frac{N\sqrt{M}\sqrt{S}}{4\pi}\,\frac{1}{\Xi^{p-2}} + g_{p-1}\frac{1}{\Xi}.$$

Posons

$$\lambda = \frac{1}{\Xi},$$

il vient

$$g_p < a\lambda^p + \lambda g_{p-1},$$

et a représente, dans cette formule, la constante

$$\frac{N\sqrt{M}\sqrt{S}}{4\pi}\Xi^2,$$

qui ne dépend ni de l'indice p, ni de la position du point M_0.

Donnons à p successivement toutes les valeurs possibles, en remarquant que l'on a

$$g_0 = \alpha g,$$

α et g étant les deux nombres positifs définis au nº 37.

On trouve

$$\begin{aligned}
&g_1 < (a + g_0)\lambda,\\
&g_2 < a\lambda^2 + g_1\lambda < (2a + g_0)\lambda^2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&g_p < a\lambda^p + g_{p-1}\lambda < (pa + g_0)\lambda^p,
\end{aligned}$$

Finalement

$$|V_p| < (pa + g_0)\lambda^p$$

et, comme W_p est une fonction harmonique

$$|W_p| < (pa + g_0)\lambda^p,$$

quelle que soit la position du point (x, y, z) dans l'espace.

On conclut de là que la série

$$\Sigma \xi^p W_p$$

est absolument et uniformément convergente si l'on a

$$|\xi|\lambda < 1,$$

c'est-à-dire

$$|\xi| < \Xi.$$

Dans ces conditions, on verrait, comme au n° 38, que la somme W de la série est la solution cherchée.

On voit donc que la convergence de nos approximations successives est liée d'une façon très étroite à la limite des quantités croissantes

$$\frac{I_{p+1}}{I_p},$$

lorsque p augmente indéfiniment. Nous allons donc étudier ces rapports.

Mais, avant d'aller plus loin, je dois signaler un fait important. *La fonction* V *possède sur* S *des dérivées premières continues par rapport à* (u, v). On le mettrait aisément en évidence au moyen d'une démonstration semblable à la précédente. Mais, pour abréger, je me bornerai, sur ce point, à une simple indication : il faudrait ici combiner le raisonnement que nous venons de faire avec celui qui sert dans l'étude des dérivées d'un potentiel newtonien de surface attirante [1].

42. Je rappelle, pour commencer, les propriétés principales des *fonctions sphériques* ou *fonctions de Laplace*.

---

[1] *Cf.* H. Poincaré, *Théorie du potentiel newtonien*.

On nomme *polynome sphérique d'ordre n* un polynome Π_n entier et homogène en (x, y, z), de degré n, vérifiant identiquement la relation

$$\Delta\Pi_n = 0.$$

Écrivons Π_n avec des coefficients indéterminés : il y a $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ coefficients. Formons $\Delta\Pi_n$: c'est un polynome homogène et de degré $n-2$, ayant donc $\frac{n(n-1)}{2}$ termes. Écrivons que ce dernier polynome est identiquement nul. Nous obtenons ainsi $\frac{n(n-1)}{2}$ équations linéaires et homogènes par rapport aux $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ coefficients de Π_n. On a

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2} - \frac{n(n-1)}{2} = 2n+1.$$

Donc il existe $2n+1$ polynomes sphériques d'ordre n linéairement indépendants.

Passons maintenant en coordonnées polaires. Les formules de transformation sont

$$\left|\begin{array}{l} x = \rho\sin\theta\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\theta\sin\varphi, \\ z = \rho\cos\theta. \end{array}\right.$$

Il vient

$$\Pi_n = \rho^n Y_n,$$

Y_n ne dépendant plus que de θ et φ. La fonction Y_n est *une fonction sphérique d'ordre n* : il y en a $2n+1$ linéairement indépendantes.

Sur la sphère de rayon 1, c'est-à-dire lorsque $\rho = 1$, on a

$$\Pi_n = Y_n, \qquad \frac{d\Pi_n}{dn_e} = nY_n.$$

Cela posé, la formule de Green nous fournit la relation

$$\int\left(\Pi_n\frac{d\Pi_m}{dn_e} - \Pi_m\frac{d\Pi_n}{dn_e}\right)d\omega = \int(\Pi_n\Delta\Pi_m - \Pi_m\Delta\Pi_n)\,d\tau = 0,$$

les intégrations étant étendues soit à la surface, soit au volume de la sphère de rayon 1. On tire de là

$$(m-n)\int Y_n Y_m \, d\omega = 0.$$

D'où, si

$$m \neq n,$$

l'égalité

$$\int Y_n Y_m \, d\omega = 0.$$

Cela est vrai quelles que soient les fonctions sphériques choisies, pourvu qu'elles soient d'ordres différents.

Appelons

$$Y_1, \quad Y_2, \quad \ldots, \quad Y_{2n+1},$$

$2n+1$ fonctions sphériques d'ordre n linéairement indépendantes. Posons

$$\begin{aligned}
X_1 &= \alpha_1^1 \quad Y_1 + \alpha_2^1 \quad Y_2 + \ldots + \alpha_{2n+1}^1 Y_{2n+1}, \\
X_2 &= \alpha_1^2 \quad Y_1 + \alpha_2^2 \quad Y_2 + \ldots + \alpha_{2n+1}^2 Y_{2n+1}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
X_{2n+1} &= \alpha_1^{2n+1} Y_1 + \alpha_2^{2n+1} Y_2 + \ldots + \alpha_{2n+1}^{2n+1} Y_{2n+1},
\end{aligned}$$

les α étant des constantes laissées indéterminées pour le moment et les exposants dont ils sont affectés étant des indices et non des symboles de puissances.

Les X sont des fonctions sphériques. Ces X sont d'ailleurs indépendants si l'on a

$$D = \begin{vmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & \ldots & \alpha_{2n+1}^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \ldots & \alpha_{2n+1}^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_1^{2n+1} & \alpha_2^{2n+1} & \ldots & \alpha_{2n+1}^{2n+1} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Je désignerai par X_p l'un quelconque d'entre eux.

Posons

$$X = \alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2 + \ldots + \alpha_{2n+1} Y_{2n+1}.$$

Il est clair que

$$\int X^2 \, d\omega$$

est, par rapport aux α, une forme quadratique définie et positive

$$F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2n+1}).$$

L'équation

$$F = 1$$

représente, dans l'espace à $2n+1$ dimensions, un ellipsoïde E ayant pour centre l'origine O des coordonnées.

Cherchons à déterminer les X par les équations suivantes :

$$\int X_p^2 d\omega = 1, \tag{1}$$

$$\int X_p X_q d\omega = 0. \tag{2}$$

Les équations (1) s'écrivent

$$F(\alpha_1^p, \alpha_2^p, \ldots, \alpha_{2n+1}^p) = 1,$$

et elles signifient que le point

$$(\alpha_1^p, \alpha_2^p, \ldots, \alpha_{2n+1}^p)$$

se trouve sur l'ellipsoïde E. Les équations (2) peuvent être mises sous la forme

$$\alpha_1^p \frac{\partial F}{\partial \alpha_1^q} + \alpha_2^p \frac{\partial F}{\partial \alpha_2^q} + \ldots + \alpha_{2n+1}^p \frac{\partial F}{\partial \alpha_{2n+1}^q} = 0.$$

Considérons les points

$$M_1, \quad M_2, \quad \ldots, \quad M_{2n+1},$$

dont les coordonnées sont respectivement

$$\begin{array}{llll} (\alpha_1^1, & \alpha_2^1, & \ldots, & \alpha_{2n+1}^1), \\ (\alpha_1^2, & \alpha_2^2, & \ldots, & \alpha_{2n+1}^2), \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (\alpha_1^{2n+1}, & \alpha_2^{2n+1}, & \ldots, & \alpha_{2n+1}^{2n+1}). \end{array}$$

Les équations (2) signifient que les directions

$$OM_1, \quad OM_2, \quad \ldots, \quad OM_{2n+1}$$

forment un système de diamètres conjugués de l'ellipsoïde E.

C'est une proposition élémentaire de Géométrie analytique que l'on peut toujours choisir les α de façon à vérifier les équations (1) et (2).

On a d'ailleurs alors

$$D \neq 0,$$

en sorte que toutes les conditions requises sont remplies.

Les fonctions X ainsi déterminées sont *les fonctions sphériques fondamentales d'ordre n*. Toute autre fonction sphérique du même ordre est une combinaison linéaire de celles-là.

Il est bien visible que les fonctions sphériques fondamentales coïncident dans le cas de la sphère avec les fonctions fondamentales dont nous cherchons à démontrer l'existence en général.

43. Soit W le potentiel newtonien d'une simple couche de matière attirante répandue à la surface de la sphère de rayon 1. On a

$$W = Y_0 + \rho Y_1 + \rho^2 Y_2 + \ldots + \rho^n Y_n + \ldots$$

pour $\rho < 1$, et

$$W' = \frac{1}{\rho'} Y_0 + \frac{1}{\rho'^2} Y_1 + \frac{1}{\rho'^3} Y_2 + \ldots + \frac{1}{\rho'^{n+1}} Y_n + \ldots$$

pour $\rho' > 1$. C'est là un résultat classique. Les lettres Y_n désignent d'ailleurs des fonctions sphériques qui dépendent des valeurs de W sur la sphère, l'indice indiquant l'ordre.

On peut remplacer les fonctions Y_n en fonction des fonctions sphériques fondamentales. J'écrirai alors, par exemple,

$$W = \Sigma \beta_p \rho^n X_p,$$

X_p étant une fonction fondamentale d'ordre n et β_p désignant une constante. Il y a $2n+1$ valeurs de p qui correspondent à la même valeur de n.

Les propositions qui précèdent sont encore vraies si W est, non plus un potentiel de simple couche, mais une fonction harmonique quelconque.

Je renverrai, pour la démonstration de ces formules, aux Traités classiques [1].

---

[1] E. Picard, *Traité d'Analyse*, t. I, Chap. IX, n° 26. — H. Poincaré, *Théorie du potentiel newtonien*. Paris, Carré, 1897.

44. Considérons toujours la sphère S de rayon 1. Soit Ω une sphère, de rayon R inférieur à 1, concentrique à la précédente. Appelons T le domaine intérieur à S, T′ le domaine extérieur. De même Θ sera le domaine intérieur à Ω, Θ' le domaine extérieur.

Soit W un potentiel de simple couche répandue sur S. Posons

$$J = \int_{(T)} \sum \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 d\tau, \qquad J' = \int_{(T')} \sum \left(\frac{\partial W'}{\partial x'}\right)^2 d\tau', \qquad I = \int_{(S)} V^2 d\sigma.$$

On a

$$\frac{J+J'}{I} > \frac{J}{I}.$$

Nous allons chercher une limite inférieure du rapport $\frac{J}{I}$. On suppose, bien entendu, que les intégrales J, J′, I ont chacune un sens.

Appelons J_R, I_R les intégrales analogues à J, I, mais relatives à Ω. Soit

$$W = \Sigma \rho^n \beta_p X_p.$$

On a

$$I_R = \int_{(\Omega)} W^2 d\omega = \Sigma \beta_p^2 R^{2n+2}.$$

Maintenant on peut écrire

$$J_R = \int_{(\Theta)} \sum \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 d\tau = -\int_{(\Omega)} W \frac{dW}{dn_i} d\omega = -\int_{(S)} W \frac{dW}{dn_i} R^2 d\sigma.$$

D'où

$$J_R = \Sigma n \beta_p^2 R^{2n+1}.$$

Par suite

$$\frac{J_R}{I_R} = \frac{\Sigma n \beta_p^2 R^{2n+1}}{\Sigma \beta_p^2 R^{2n+2}},$$

Tirons de là une importante conséquence.

Soient

$$W_1, \quad W_2, \quad \ldots, \quad W_q,$$

q potentiels de simples couches portées par S. Prenons

$$W = \lambda_1 W_1 + \lambda_2 W_2 + \ldots + \lambda_q W_q,$$

les λ étant des constantes. Il est clair que W est aussi un potentiel de simple couche. Dans le développement de W, les coefficients β_p sont donnés par la formule

$$\beta_p = \int_{(S)} V X_p \, d\sigma.$$

Ce sont donc des fonctions linéaires et homogènes des λ.

Prenons

$$q \geqq n^2 + 1.$$

Assujettissons les λ à être tels que les coefficients β_p soient tous nuls jusqu'à celui de rang n^2 inclusivement. Cela fait n^2 équations linéaires et homogènes où les inconnues sont au moins en nombre $n^2 + 1$. Le calcul des λ peut donc être effectué.

Les λ étant ainsi déterminés, le premier terme du développement de W est

$$\beta_p \rho^n X_p,$$

car il y a $2h + 1$ coefficients β_p correspondant au terme en ρ^h et l'on sait que

$$\sum_0^{n-1} (2h + 1) = n^2.$$

On a donc

$$\frac{J_R}{I_R} = \frac{n \beta_p^2 R^{2n+1} + \ldots}{\beta_p^2 R^{2n+2} + \ldots}.$$

On conclut de là

$$\frac{J_R}{I_R} > \frac{n}{R} > n.$$

Ainsi, si les λ sont en nombre au moins égal à $n^2 + 1$, on peut les choisir, quels que soient les W_q, de façon que l'on ait l'inégalité précédente.

Faisons tendre maintenant R vers 1. Alors J_R et I_R tendent respectivement vers J et I. D'où

$$\frac{J}{I} > n.$$

Cela entraîne

$$\frac{J + J'}{I} > n.$$

Telle est l'inégalité que nous voulions obtenir.

Cette inégalité subsiste quand, au lieu de potentiels de simples couches, on considère des fonctions harmoniques quelconques. Il suffit que l'on puisse affirmer l'existence des intégrales J, J' et I.

45. Examinons maintenant le cas d'une surface simplement connexe quelconque et cherchons encore une limite inférieure du rapport $\frac{J}{I}$. Nous supposons, bien entendu, que la surface considérée S est régulière en chacun de ses points.

Il va falloir employer une certaine *transformation ponctuelle* que je vais brièvement définir.

Soit Σ une sphère de rayon 1. J'appelle Θ le domaine intérieur à Σ. Les coordonnées d'un point de Θ seront désignées par (ξ, η, ζ).

La transformation ponctuelle dont je veux parler jouit des propriétés suivantes :

1° A tout point (ξ, η, ζ) de Θ correspond un point (x, y, z) de T et un seul, et réciproquement.

2° ξ, η, ζ sont des fonctions de x, y, z uniformes, finies et continues dans T ainsi que leurs dérivées partielles des deux premiers ordres.

3° x, y, z sont des fonctions de ξ, η, ζ uniformes, finies et continues dans Θ ainsi que leurs dérivées partielles des deux premiers ordres.

4° Quand le point (x, y, z) décrit S, le point (ξ, η, ζ) décrit Σ.

5° Les dérivées des deux premiers ordres de x, y, z par rapport à ξ, η, ζ ou de ξ, η, ζ par rapport à x, y, z restent finies et continues, même quand le point ξ, η, ζ se rapproche indéfiniment de Σ ou que le point x, y, z se rapproche indéfiniment de S.

Une pareille transformation est possible et comporte même un très large degré d'arbitraire. En effet, elle représente la déformation d'un corps élastique qui serait d'abord supposé remplir la sphère Σ et qu'on amènerait, sans produire aucune déchirure, à occuper tout le volume T.

Je ne crois pas devoir insister sur ce point. Mais il faut remarquer que les hypothèses faites sur S nous sont nécessaires pour éviter toute difficulté quant à la réalisation de la cinquième condition. En outre, il est bien manifeste que notre transformation n'est possible que si le domaine T est simplement connexe.

46. Soit W le potentiel newtonien d'une simple couche portée par S. On peut à volonté regarder W comme une fonction définie dans T et dépendant des variables (x, y, z), ou comme une fonction définie dans Θ et dépendant des variables (ξ, η, ζ).

Formons l'intégrale

$$J = \int_{(T)} \sum \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 d\tau,$$

étendue aux divers éléments $d\tau$ du volume T. On suppose le potentiel W tel que cette intégrale ait un sens.

Effectuons la transformation du nº 45. Le champ d'intégration devient Θ et il faut appliquer la règle relative au changement des variables dans les intégrales multiples.

D'abord, si $d\theta$ est un élément de Θ, on a

$$\pm d\theta \frac{D(x, y, z)}{D(\xi, \eta, \zeta)} = d\tau,$$

en posant

$$\frac{D(x, y, z)}{D(\xi, \eta, \zeta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{vmatrix},$$

conformément aux conventions habituelles pour désigner le jacobien d'un système de fonctions,

D'autre part, on a

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial W}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial W}{\partial \eta} + \frac{\partial \zeta}{\partial x}\frac{\partial W}{\partial \zeta},$$
$$\frac{\partial W}{\partial y} = \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial W}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial y}\frac{\partial W}{\partial \eta} + \frac{\partial \zeta}{\partial y}\frac{\partial W}{\partial \zeta},$$
$$\frac{\partial W}{\partial z} = \frac{\partial \xi}{\partial z}\frac{\partial W}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial z}\frac{\partial W}{\partial \eta} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}\frac{\partial W}{\partial \zeta},$$

On voit que les dérivées, par rapport à x, y, z, de $W(x, y, z)$ sont des fonctions linéaires et homogènes des dérivées par rapport à ξ, η, ζ de la même fonction regardée comme dépendant de ξ, η, ζ, les coefficients de ces formes linéaires étant des fonctions connues qui ne dépendent que de la transformation, c'est-à-dire que de S. Dans ces conditions, la somme

$$\sum \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2$$

se transforme en une forme quadratique F définie et positive par rapport aux dérivées $\frac{\partial W}{\partial \xi}$, $\frac{\partial W}{\partial \eta}$, $\frac{\partial W}{\partial \zeta}$.

On peut donc écrire

$$J = \pm \int_{(\Theta)} F \frac{D(x, y, z)}{D(\xi, \eta, \zeta)} d\theta,$$

l'intégration se rapportant cette fois au volume Θ.

Regardons maintenant, pour un instant, ξ, η, ζ comme des paramètres et

$$\frac{\partial W}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial W}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial W}{\partial \zeta}$$

comme les coordonnées d'un point dans l'espace.

L'équation

$$F = 1$$

représente un ellipsoïde. Les longueurs des axes de cet ellipsoïde sont évidemment des fonctions continues de ξ, η, ζ. D'ailleurs F est la somme des carrés de trois formes linéaires qui sont nécessairement indépendantes puisque le déterminant

$$\frac{D(x, y, z)}{D(\xi, \eta, \zeta)}$$

est différent de zéro pour toutes les valeurs de ξ, η, ζ correspondant à un point situé dans Θ. Donc, quel que soit le point (ξ, η, ζ) choisi dans Θ ou sur Σ, l'ellipsoïde considéré ne peut jamais se réduire à un cylindre elliptique ou à un système de plans parallèles. Par conséquent les axes de cet ellipsoïde ne peuvent jamais devenir, ni nuls, ni infinis.

Formons alors la différence

$$F - \lambda \sum \left(\frac{\partial W}{\partial \xi}\right)^2.$$

Il résulte de ce qui précède que l'on peut choisir la constante positive λ

de façon que cette différence soit positive pour toutes les valeurs possibles de

$$\frac{\partial W}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial W}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial W}{\partial \zeta},$$

et pour tous les systèmes de valeurs de ξ, η, ζ qui correspondent à un point de Θ. Cela se déduit immédiatement de la théorie classique de l'équation bien connue, dite *équation en* S, que l'on rencontre en Géométrie analytique.

Finalement, il est possible d'assigner une constante positive μ ne dépendant que de la surface S et telle que l'on ait

$$J > \mu \int_{(\Theta)} \sum \left(\frac{\partial W}{\partial \xi}\right)^2 d\theta.$$

Cette inégalité va nous conduire à une importante proposition.

47. Posons de nouveau

$$W = \lambda_1 W_1 + \lambda_2 W_2 + \ldots + \lambda_q W_q,$$

les W_q étant des potentiels newtoniens de simples couches portées par S et les λ_q des constantes dont le nombre est au moins égal à $n^2 + 1$.

Formons avec W les intégrales J et I : nous supposons les W_q tels que ces intégrales aient un sens.

Faisons la transformation du n° 45. Nous pouvons à volonté regarder W comme dépendant de x, y, z ou de ξ, η, ζ.

Soient $d\sigma$ un élément de S et $d\omega$ un élément correspondant de la sphère Σ. On peut écrire

$$d\sigma = \psi \, d\omega,$$

ψ étant une fonction de ξ, η, ζ définie et continue sur Σ. La surface S étant régulière, il est clair qu'il existe une constante h ne dépendant que de la transformation et telle que l'on ait

$$0 < \psi < h.$$

Cela posé, on a

$$I = \int_{(S)} V^2 d\sigma = \int_{(\Sigma)} V^2 \psi \, d\omega < h \int_{(\Sigma)} V^2 d\omega,$$

en regardant W comme une fonction de (x, y, z) si S est le champ d'intégration et comme une fonction de (ξ, η, ζ) si c'est Σ qui est ce champ.

Considérons maintenant la fonction harmonique U qui est définie dans Θ et qui prend sur Σ les mêmes valeurs que $W(\xi, \eta, \zeta)$. Comme on sait résoudre le problème de Dirichlet pour la sphère par une méthode directe, on peut affirmer l'existence de U sans rien emprunter aux résultats généraux obtenus par le *balayage*.

On a évidemment

$$\int_{(\Sigma)} V^2 d\omega = \int_{(\Sigma)} U^2 d\omega,$$

d'où

$$I < h \int_{(\Sigma)} U^2 d\omega.$$

D'autre part, les dérivées des deux premiers ordres de $W(\xi, \eta, \zeta)$ existent et sont continues, même quand le point ξ, η, ζ vient se placer sur Σ, à cause des hypothèses faites sur $W(x, y, z)$ et des caractères de la transformation employée. L'intégrale

$$\int_{(\Theta)} \sum \left(\frac{\partial U}{\partial \xi}\right)^2 d\theta,$$

a donc un sens : il suffirait, pour le voir, de refaire à propos de U un raisonnement tout semblable à celui du n° 23. Mais c'est une proposition bien connue, que l'on a

$$\int_{(\Theta)} \sum \left(\frac{\partial W}{\partial \xi}\right)^2 d\theta > \int_{(\Theta)} \sum \left(\frac{\partial U}{\partial \xi}\right)^2 d\theta.$$

On déduit de là

$$J > \mu \int_{(\Theta)} \sum \left(\frac{\partial U}{\partial \xi}\right)^2 d\theta,$$

en appliquant l'inégalité du n° 46.

En fin de compte, nous pouvons écrire

$$\frac{J}{I} > \frac{\mu}{h} \frac{\int_{(\Theta)} \sum \left(\frac{\partial U}{\partial \xi}\right)^2 d\theta}{\int_{(\Sigma)} U^2 d\omega},$$

et nous sommes ainsi ramenés à étudier le cas traité du n° 47.

Si nous appelons

$$U_1, \quad U_2, \quad \ldots, \quad U_q,$$

les fonctions harmoniques qui prennent sur Σ les valeurs

$$W_1, \quad W_2, \quad \ldots, \quad W_q,$$

nous avons

$$U = \lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 + \ldots + \lambda_q U_q.$$

Nous savons que l'on peut choisir les λ, de façon que l'on ait

$$\frac{\int_{(\Theta)} \Sigma\left(\frac{\partial U}{\partial \xi}\right)^2 d\theta}{\int_{(\Sigma)} U^2 \, d\omega} > n.$$

On conclut de là

$$\frac{J}{I} > \frac{\mu}{h} n.$$

Ainsi, l'inégalité, établie d'abord dans le cas de la sphère, subsiste pour une surface simplement connexe quelconque.

Si l'on prend

$$q = n,$$

on aura

$$\frac{J + J'}{I} > \frac{J}{I} > \Xi_n,$$

Ξ_n étant un nombre positif qui est de l'ordre de grandeur de $\sqrt{n}$ quand n est très grand et qui ne dépend du reste que de la surface S.

48. Poursuivons le cours de nos généralisations et voyons comment on peut se débarrasser de l'hypothèse que la surface S est simplement connexe.

Étant donné un domaine connexe T limité par une surface fermée S qui peut être composée de plusieurs morceaux entièrement séparés, dont chacun est d'un ordre de connexion quelconque, il est évident qu'on peut toujours tracer au travers de T une surface qui, envisagée comme une coupure, partage le domaine T en deux portions simplement connexes T_1 et T_2. Rien n'empêche, vu les hypothèses faites sur S, de remplacer les domaines T_1 et T_2 par d'autres domaines du même ordre de connexion qui empiètent un peu l'un sur l'autre et qui soient bornés par des surfaces régulières en tous leurs points. J'appellerai J_1, I_1 et J_2, I_2 des intégrales analogues à J, I, mais relatives respectivement à T_1 et T_2.

On a

$$\frac{2J}{I} > \frac{J_1 + J_2}{I_1 + I_2}.$$

En effet, on a

$$2J > J_1 + J_2,$$
$$I < I_1 + I_2;$$

puisque la substitution de l'ensemble (T_1, T_2) à T, quand T_1 et T_2 empiètent un peu l'un sur l'autre sans sortir cependant de T, accroît la surface d'intégration relative à I et diminue le volume d'intégration relatif à $2J$.

Posons maintenant

$$W = \lambda_1 W_1 + \lambda_2 W_2 + \ldots + \lambda_q W_q,$$

et prenons

$$q \geqq 2(n^2 + 1).$$

On peut (n° 47) choisir les λ, de façon que l'on ait à la fois les inégalités

$$J_1 > \frac{\mu_1}{h_1} n I_1, \qquad J_2 > \frac{\mu_2}{h_2} n I_2,$$

μ_1, μ_2, h_1, h_2 étant, pour chacun des domaines T_1 et T_2, les nombres analogues aux nombres μ, h du n° 47.

Soit ν le plus petit des nombres

$$\frac{\mu_1}{h_1}, \quad \frac{\mu_2}{h_2},$$

Ce nombre ν ne dépend que de S. On a

$$\frac{J_1 + J_2}{I_1 + I_2} > \nu n,$$

d'où

$$\frac{J + J'}{I} > \frac{J}{I} > \frac{1}{2} \frac{J_1 + J_2}{I_1 + I_2} > \frac{1}{2}$$

Finalement, l'inégalité

$$\frac{J+J'}{I} > \Xi_n,$$

où Ξ_n est un nombre positif de l'ordre de grandeur de $\sqrt{n}$, peut être réalisée par un choix convenable des λ, pourvu que l'on ait

$$q \geqq n.$$

Cela va nous permettre de démontrer un théorème fondamental relatif aux approximations successives du n° 40.

49. Il y a toutefois un point qu'il nous faut encore établir. Considérons le rapport

$$\frac{J+J'}{I}.$$

Je dis que, quel que soit le potentiel W envisagé, il a une limite inférieure différente de zéro.

Voici une première manière de le voir : $J+J'$ *ne peut pas s'annuler sans que* I *s'annule aussi*. Mais cet aperçu ne présente aucun caractère de rigueur et rend seulement la chose probable. Étudions donc la question d'une autre façon.

Supposons d'abord la surface S formée d'une seule nappe analytique régulière; ce sera, par exemple, un ellipsoïde ou un tore, car son ordre de connexion peut être quelconque.

Soit P la fonction, harmonique dans T', qui prend sur S la valeur 1; cette fonction existe, en vertu du principe de Dirichlet, et c'est le potentiel dû à la distribution naturelle de l'électricité sur S. La densité de la couche électrique en équilibre sur S est d'ailleurs en chaque point de cette surface

$$\mu = -\frac{1}{4\pi}\frac{dP}{dn_e}.$$

Comme la fonction P ne peut prendre dans T' aucune valeur supérieure à 1, on a

$$\frac{dP}{dn_e} \leqq 0, \qquad \mu \geqq 0,$$

en tout point de S.

Imaginons maintenant les *surfaces équipotentielles* ou *surfaces de niveau :*

$$P = \text{const}.$$

et leurs trajectoires orthogonales qu'on appelle souvent *lignes de force*. La surface S étant régulière, il y a sûrement, au contact de S, une région finie E de l'espace T', où les surfaces de niveau et les lignes de force sont bien régulières.

Soit M_0 un point de S où μ a la valeur μ_0. Soit $d\sigma$ un élément de S ayant M_0 pour centre de gravité. Par chacun des points du contour de $d\sigma$, faisons passer la ligne de force correspondante. On a ce qu'on nomme un *tube de force*. Appelons $d\sigma'$ une section droite de ce tube située dans la région ci-dessus désignée. Soit F_n et F'_n les composantes de la force électrique en $d\sigma$ et $d\sigma'$ suivant les normales à ces éléments dirigées vers les potentiels décroissants. On sait que

$$F_n \, d\sigma - F'_n \, d\sigma' = 0.$$

On voit par là que F_n et F'_n sont de même signe. Si F_n est nul, F'_n l'est aussi.

On a, en appelant s l'arc de la ligne de force L passant par M_0 et en comptant cet arc dans le sens des potentiels décroissants :

$$F'_n = \frac{dP}{ds}.$$

D'autre part,

$$F_n = \frac{dP}{dn_e}.$$

Supposons alors que

$$\mu_0 = 0.$$

On aura

$$\frac{dP}{dn_e} = 0.$$

D'où

$$\frac{dP}{ds} = 0,$$

quel que soit le point s de L dans la région finie E. D'où

$$P = \text{const.} = 1,$$

sur L dans E. Mais cela est impossible, car on sait que P ne peut prendre la valeur 1 en aucun point de T'. Donc l'hypothèse

$$\mu_0 = 0$$

est absurde et μ est donc *positif et non nul* en tout point de S.

Posons maintenant

$$I_1 = -\int \frac{dP}{dn_e} V^2 \, d\sigma.$$

Soit

$$-\frac{dP}{dn_e} > \alpha.$$

D'où

$$I = \int_{(S)} V^2 \, d\sigma < -\frac{1}{\alpha} \int_{(S)} \frac{dP}{dn_e} V^2 \, d\sigma = \frac{1}{\alpha} I_1.$$

Donc

$$\frac{J + J'}{I} > \alpha \frac{J + J'}{I_1},$$

quelle que soit la fonction W.

On vérifie aisément, au moyen du calcul des variations dont l'emploi est ici rigoureux, que

$$\frac{J + J'}{I_1}$$

est minimum pour une fonction W_1, telle que

$$\frac{dV_1}{dn_i} + \frac{dV'_1}{dn_e} - \xi_1 \frac{dP}{dn_e} V_1 = 0,$$

ξ_1 étant une constante convenable et W_1 un potentiel de simple couche. Il est clair que l'on doit prendre

$$\xi_1 = 1$$

et

$$W'_1 = P, \qquad W_1 = 1.$$

On a alors

$$\frac{J + J'}{I_1} = 1.$$

D'où, quand W est quelconque :

$$\frac{J + J'}{I} > \alpha,$$

et la proposition annoncée se trouve établie.

Considérons maintenant le cas général où la surface S est formée de plusieurs nappes analytiques entièrement séparées. Supposons, pour simplifier, que S se compose de deux surfaces fermées S_1 et S_2, S_1 étant intérieure à S_2, et faisons le raisonnement dans cette hypothèse.

Appelons J_1, J_2, J_3 les intégrales analogues à J étendues respectivement à l'intérieur de S_1, à l'espace compris entre S_1 et S_2, à l'intérieur de S_2. Appelons de même J'_1 et J'_2 les intégrales analogues à J' étendues à tout l'espace extérieur soit à S_1, soit à S_2. Enfin, désignons par I_1 et I_2 les intégrales analogues à I, mais relatives soit à S_1, soit à S_2.

On a

$$J + J' = J_2 + J_1 + J'_2,$$
$$I = I_1 + I_2$$

Formons J_3 pour la fonction, harmonique dans l'espace intérieur à S_2, qui prend sur S_2 les mêmes valeurs que W. Une proposition bien connue nous apprend que

$$J_1 + J_2 > J_3,$$

J_1 et J_2 étant relatifs à la fonction W donnée. Donc

$$J_2 + J_1 + J'_2 > J_3 + J'_2.$$

De même, si J_1 est relatif à W et si J'_1 est relatif à la fonction, harmonique dans l'espace extérieur à S_1, qui prend sur S_1 les mêmes valeurs que W, on a

$$J_2 + J_1 + J'_2 > J_1 + J'_1.$$

Mais il existe un nombre α, tel que

$$J_3 + J'_2 > \alpha I_2,$$
$$J_1 + J'_1 > \alpha I_1,$$

d'après le lemme relatif aux surfaces formées d'une seule nappe. On a alors

$$\frac{J_3 + J'_2 + J_1 + J'_1}{I_1 + I_2} > \alpha,$$

d'où

$$2\frac{J_2 + J_1 + J'_2}{I_1 + I_2} > \alpha,$$

c'est-à-dire

$$\frac{J+J'}{I} > \frac{\alpha}{2}.$$

La conclusion reste la même.

Finalement, on voit que, dans le cas le plus général, on peut assigner au rapport

$$\frac{J+J'}{I}$$

une limite inférieure non nulle, indépendante du potentiel W considéré.

50. Nous cherchons, depuis le n° 38, un potentiel W de simple couche portée par S remplissant, quelle que soit la surface S sous réserve des hypothèses générales du n° 35, la condition suivante :

$$\frac{dV}{dn_i} + \frac{dV'}{dn_e} + \xi V + \Phi = 0.$$

Désignons la fonction W, si elle existe, par la notation

$$W = [\Phi, \xi].$$

On a posé

$$W = \Sigma \xi^p W_p.$$

La notation précédente désignera en tout cas la série des approximations

$$W_1, \quad W_2, \quad \ldots, \quad W_p, \quad \ldots,$$

sans qu'on ait à se préoccuper d'avoir démontré leur convergence.

Soient

$$\Phi_1, \quad \Phi_2, \quad \ldots, \quad \Phi_n$$

n fonctions données de (u, v), quelconques, mais ayant, par rapport à u et v, des dérivées partielles des deux premiers ordres finies et continues. Posons

$$\begin{aligned}
W^{(1)} &= [\Phi_1, \xi], \\
W^{(2)} &= [\Phi_2, \xi], \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
W^{(n)} &= [\Phi_n, \xi].
\end{aligned}$$

Prenons maintenant

$$\Phi = \lambda_1 \Phi_1 + \lambda_2 \Phi_2 + \ldots + \lambda_n \Phi_n,$$

les λ étant des constantes, et

$$W = [\Phi, \xi].$$

On a évidemment

$$W = \lambda_1 W^{(1)} + \lambda_2 W^{(2)} + \ldots + \lambda_n W^{(n)}.$$

Écrivons

$$W = W_0 + \xi W_1 + \xi^2 W_2 + \ldots + \xi^p W_p + \ldots.$$

Les W_p sont des fonctions linéaires des λ.

Construisons, à l'aide des fonctions W_p, les intégrales I_p et $J_p + J'_p$ définies au n° 40. On sait que le rapport

$$\frac{J_p + J'_p}{I_p}$$

va en décroissant avec p.

Quelles que soient les fonctions

$$W_p^{(1)}, \quad W_p^{(2)}, \quad \ldots, \quad W_p^{(n)}$$

qui sont les coefficients de ξ^p dans les séries

$$W^{(1)}, \quad W^{(2)}, \quad \ldots, \quad W^{(n)},$$

et, par suite, quelles que soient les fonctions

$$\Phi_1, \quad \Phi_2, \quad \ldots, \quad \Phi_n,$$

nous savons que l'on peut choisir les λ de façon que

$$\frac{J_{2p} + J'_{2p}}{I_{2p}} > \Xi_n,$$

Ξ_n étant pour n très grand de l'ordre de $\sqrt{n}$.

On a alors

$$\frac{I_{2p}}{I_{2p-1}} < \frac{1}{\Xi_n},$$

car

$$J_{2p} + J'_{2p} = I_{2p-1}.$$

On conclut de là

$$(1) \qquad \frac{I_1}{I_0} < \frac{I_2}{I_1} < \ldots < \frac{I_{2p}}{I_{2p-1}} < \frac{1}{\Xi_n}.$$

Considérons les quantités

$$\lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \ldots, \quad \lambda_n$$

comme les coordonnées homogènes d'un point M dans l'espace à $n-1$ dimensions. On peut choisir ce point M de manière à réaliser les inégalités (1). Donc il y a dans l'espace à $n-1$ dimensions un domaine δ_p tel que les inégalités (1) aient lieu dès que M est dans δ_p.

Changeons p en $p+1$. Il y aura dans l'espace à $n-1$ dimensions un domaine δ_{p+1} tel que, si M lui appartient, on ait

$$(2) \qquad \frac{I_1}{I_0} < \frac{I_2}{I_1} < \ldots < \frac{I_{2p}}{I_{2p-1}} < \frac{I_{2p+1}}{I_{2p}} < \frac{I_{2p+2}}{I_{2p+1}} < \frac{1}{\Xi_n}.$$

Mais les inégalités (2) entraînent les inégalités (1). Donc δ_{p+1} est contenu tout entier dans δ_p.

Il existe donc un ensemble dénombrable de domaines

$$\delta_1, \quad \delta_2, \quad \delta_3, \quad \ldots, \quad \delta_p, \quad \ldots,$$

dont chacun contient tout le suivant. Par suite, il y a un domaine δ (qui peut se réduire à un point unique) intérieur à δ_p, quel que soit p. Si M est dans δ, on a

$$\frac{I_{p+1}}{I_p} < \frac{1}{\Xi_n},$$

quel que soit p.

Supposons les λ ainsi déterminés et reportons-nous à la conclusion du n° 41. Voici alors le théorème fondamental que nous pouvons énoncer :

Quelles que soient les fonctions

$$\Phi_1, \quad \Phi_2, \quad \ldots, \quad \Phi_n,$$

si l'on pose

$$\Phi = \lambda_1\Phi_1 + \lambda_2\Phi_2 + \ldots + \lambda_n\Phi_n,$$
$$W = [\Phi, \xi] = \Sigma\xi^p W_p,$$

on est assuré qu'il est possible de choisir les λ de telle façon que le rayon *de convergence de la série* W *entière en* ξ *soit au moins égal à* Ξ_n, Ξ_n *étant un nombre qui ne dépend que de* n *et de* S *et qui est de l'ordre de grandeur de* $\sqrt{n}$.

De ce théorème va résulter immédiatement la démonstration rigoureuse de l'existence des fonctions harmoniques fondamentales.

III. — Existence des fonctions harmoniques fondamentales. — Leurs principales propriétés. — Représentation des fonctions harmoniques par des séries procédant suivant les fonctions fondamentales.

51. Soit Φ une fonction donnée des variables (u, v) définie sur la surface S et continue ainsi que ses dérivées partielles des deux premiers ordres par rapport à u et v. Si S se compose de plusieurs morceaux séparés, chacun de ceux-ci est supposé formé d'une seule nappe analytique régulière et la fonction Φ est l'ensemble de plusieurs fonctions attachées respectivement aux diverses portions distinctes de S.

Soit

$$W = [\Phi, \xi] = W_0 + \xi W_1 + \xi^2 W_2 + \ldots.$$

On a

$$\begin{aligned} U_2 &= [V_0, \xi] = W_1 + \xi W_2 + \xi^2 W_3 + \ldots, \\ U_3 &= [V_1, \xi] = W_2 + \xi W_3 + \xi^2 W_4 + \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ U_n &= [V_{n-2}, \xi] = W_{n-1} + \xi W_n + \xi^2 W_{n+1} + \ldots. \end{aligned}$$

Appelons

$$\lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \ldots, \quad \lambda_n$$

n paramètres arbitraires et posons

$$T = \lambda_1 W + \lambda_2 U_2 + \ldots + \lambda_n U_n.$$

On peut encore écrire

$$T = [\lambda_1 \Phi + \lambda_2 V_0 + \ldots + \lambda_n V_{n-2}, \xi].$$

Soit

$$T = T_0 + \xi T_1 + \xi^2 T_2 + \ldots + \xi^p T_p + \ldots.$$

On a évidemment la relation

$$T_p = \lambda_1 W_p + \lambda_2 W_{p+1} + \ldots + \lambda_n W_{p+n-1}$$

pour toutes les valeurs de l'indice p.

D'autre part, il est visible qu'on a

$$\left|\begin{array}{r} \lambda_1 W + \lambda_2 U_2 + \ldots + \lambda_n U_n = T, \\ W - \xi U_2 = W_0, \\ U_2 - \xi U_3 = W_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ U_{n-1} - \xi U_n = W_{n-2}. \end{array}\right.$$

C'est un système de n équations linéaires par rapport aux n inconnues $W, U_2, \ldots, U_n$.

Nous avons vu que l'on peut choisir les λ de façon que le rayon de convergence de la série T entière en ξ soit supérieur à Ξ_n ou au moins égal à ce nombre. Supposons donc

$$|\xi| < \Xi_n.$$

Des équations linéaires précédentes, on peut tirer la valeur de W par la règle de Cramer. Il vient

$$W = \frac{P}{D}$$

avec

$$D = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \ldots & \lambda_{n-1} & \lambda_n \\ 1 & -\xi & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\xi & \ldots & 0 & 0 \\ . & . & \ldots & \ldots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -\xi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & -\xi \end{vmatrix}$$

et

$$P = \begin{vmatrix} T & \lambda_2 & \lambda_3 & \ldots & \lambda_{n-1} & \lambda_n \\ W_0 & -\xi & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ W_1 & 1 & -\xi & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & . & \ldots & \ldots & . & . \\ W_{n-3} & 0 & 0 & \ldots & -\xi & 0 \\ W_{n-2} & 0 & 0 & \ldots & 1 & -\xi \end{vmatrix}.$$

On a aussi

$$D = (-1)^{n-1}[\lambda_1 \xi^{n-1} - \lambda_2 \xi^{n-2} + \lambda_3 \xi^{n-3} - \ldots].$$

Donc D est un polynome entier en ξ à coefficients réels et constants. Enfin, comme $W_0, W_1, \ldots, W_{n-2}$ ne dépendent pas de ξ et que T est une fonction holomorphe de ξ pour $|\xi| < \Xi_n$, P est de même une fonction holomorphe de ξ pour $|\xi| < \Xi_n$. *En définitive,* W *est une fonction méromorphe de* ξ *pour* $|\xi| < \Xi_n$.

La fonction W ne dépend évidemment pas de n. D'autre part, Ξ_n peut être rendu aussi grand que l'on veut. *Donc* W *est une fonction méromorphe de* ξ *dans tout le plan de cette variable complexe.*

52. La fonction $P(x, y, z)$ peut être développée en série ordonnée suivant les puissances de ξ :

$$P = P_0 + \xi P_1 + \xi^2 P_2 + \ldots,$$

pourvu que $|\xi|$ soit inférieur à Ξ_n.

Il est clair que P est, par rapport à (x, y, z) une fonction continue dans tout l'espace; elle a sur S des dérivées par rapport à u et v.

On a

$$T = \frac{1}{4\pi}\int_{(S)} (\lambda_1 \Phi + \lambda_2 V_0 + \ldots + \lambda_n V_{n-2} + \xi T)\frac{d\sigma}{r},$$

$$W_0 = \frac{1}{4\pi}\int_{(S)} \Phi \frac{d\sigma}{r},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$W_{n-2} = \frac{1}{4\pi}\int_{(S)} V_{n-3}\frac{d\sigma}{r}.$$

Le déterminant

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 \Phi + \lambda_2 V_0 + \ldots + \lambda_n V_{n-2} + \xi T & \lambda_2 & \lambda_3 & \ldots & \lambda_n \\ \Phi & -\xi & 0 & \ldots & 0 \\ V_0 & 1 & -\xi & \ldots & 0 \\ \ldots & . & \ldots & \ldots & . \\ V_{n-3} & 0 & 0 & \ldots & -\xi \end{vmatrix}$$

peut s'écrire, après une transformation simple,

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 \Phi + \xi T & \lambda_2 & \lambda_3 & \ldots & \lambda_n \\ \Phi + \xi V_0 & -\xi & 0 & \ldots & 0 \\ \xi V_1 & 1 & -\xi & \ldots & 0 \\ \ldots & . & \ldots & \ldots & . \\ \xi V_{n-2} & 0 & 0 & \ldots & -\xi \end{vmatrix}.$$

Il suffit, pour le voir, d'ajouter aux éléments de la première colonne ceux des autres colonnes respectivement multipliées par V_0, V_1, ..., V_{n-2}. Le déterminant transformé, écrit ci-dessus, est manifestement la somme de deux autres et sa valeur est

$$\xi P + \Phi D.$$

Cela posé, si Δ désigne le déterminant en question, on peut écrire

$$P = \frac{1}{4\pi} \int_{(S)} \Delta \frac{d\sigma}{r},$$

d'où

$$P = \frac{1}{4\pi} \int_{(S)} (\Phi D + \xi P) \frac{d\sigma}{r}.$$

Les calculs précédents ne reposent que sur la convergence absolue et uniforme des séries P et T pour $|\xi| < \Xi_n$. La discussion, que j'ai abrégée, est la même que celle qui a été faite au n° 38 pour le cas des petites valeurs de ξ.

Il résulte de ce qui précède, puisque P est une fonction continue même à la traversée de S, que cette fonction est un potentiel newtonien de simple couche et que l'on a en tout point de S la relation

$$\frac{dP}{dn_i} + \frac{dP}{dn_e} + \xi P + \Phi D = 0$$

pour $|\xi| < \Xi_n$.

Donnons à ξ une valeur telle que D soit différent de zéro. Posons

$$W = \frac{P}{D}.$$

Il est clair que W *résout le problème que nous nous étions proposé.*

Soient

$$P' = \frac{dP}{d\xi}, \qquad P'' = \frac{d^2 P}{d\xi^2}, \qquad \ldots,$$

$$D' = \frac{dD}{d\xi}, \qquad D'' = \frac{d^2 D}{d\xi^2}, \qquad \ldots.$$

Il est clair que

$$P', \quad P'', \quad \ldots$$

sont des potentiels de simples couches, et que l'on a en tout point de S

$$\frac{dP'}{dn_i}+\frac{dP'}{dn_e}+\xi P'+\quad P+\Phi D'=0,$$

$$\frac{dP''}{dn_i}+\frac{dP''}{dn_e}+\xi P''+2P'+\Phi D''=0,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Cela se déduit de ce que P et D sont holomorphes en ξ pour $|\xi|<\Xi_n$.

53. Un intérêt particulier s'attache à l'étude des valeurs de ξ pour lesquelles on ne peut plus faire les raisonnements qui précèdent.

Les pôles de la fonction méromorphe W dont le module est inférieur à Ξ_n sont racines de l'équation algébrique entière

$$D=0.$$

Soit ξ l'une de ces racines.

Appelons

$$P_\xi,\quad P'_\xi,\quad P''_\xi,\quad \dots$$

ce que deviennent alors

$$P,\quad P',\quad P'',\quad \dots.$$

On a

$$\frac{dP_\xi}{dn_i}+\frac{dP_\xi}{dn_e}+\xi P_\xi=0,$$

et P_ξ est toujours d'ailleurs un potentiel de simple couche. *La fonction P_ξ est une des fonctions harmoniques fondamentales attachées à la surface* S. Le nombre ξ considéré prend le nom de *nombre caractéristique* de la fonction P_ξ.

Si ξ est une racine simple de D, on a

$$D=0,\qquad D'\neq 0.$$

Il ne peut pas se faire que P_ξ soit identiquement nul, car alors ξ ne serait plus un pôle pour W, ce que nous ne supposons pas.

Si ξ est racine double de D, on a

$$D=0,\qquad D'=0,\qquad D''\neq 0,$$

d'où

$$\frac{dP_\xi}{dn_i} + \frac{dP_\xi}{dn_e} + \xi P_\xi \qquad = 0,$$

$$\frac{dP'_\xi}{dn_i} + \frac{dP'_\xi}{dn_e} + \xi P'_\xi + P_\xi = 0.$$

Or on a

$$\int_{(S)} \left(P_\xi \frac{dP'_\xi}{dn_i} - P'_\xi \frac{dP_\xi}{dn_i} \right) d\sigma = 0,$$

$$\int_{(S)} \left(P_\xi \frac{dP'_\xi}{dn_e} - P'_\xi \frac{dP_\xi}{dn_e} \right) d\sigma = 0.$$

Par suite, en ajoutant et en tenant compte des équations vérifiées par P_ξ et P'_ξ, on peut écrire

$$\int_{(S)} P_\xi^2 \, d\sigma = 0.$$

Donc P_ξ est identiquement nul sur S. Comme P_ξ est une fonction harmonique dans T et dans T′, on déduit de là

$$P_\xi = 0,$$

dans tout l'espace. Par conséquent ξ n'est pas un pôle double de W, bien que ce soit une racine double de D. Du reste P'_ξ n'est pas identiquement nul si ξ est effectivement un pôle de W, et l'on a alors

$$\frac{dP'_\xi}{dn_i} + \frac{dP'_\xi}{dn_e} + \xi P'_\xi = 0$$

sur S, en sorte que P'_ξ est une fonction fondamentale.

On peut continuer de la sorte indéfiniment et arriver ainsi au cas général où ξ est un pôle de W et une racine de D d'ordre de multiplicité quelconque. La conclusion est toujours la même.

Bref, considérons la fonction méromorphe

$$W = \frac{P}{D}.$$

Elle n'a que des pôles simples. Si ξ est l'un d'eux, le résidu correspondant est une fonction fondamentale.

54. L'existence des fonctions fondamentales sera rigoureusement établie dès qu'on aura montré que W ne peut pas être holomorphe dans tout le plan ξ.

Or posons

$$W = [\Phi, \xi] = W_0 + \xi W_1 + \xi^2 W_2 + \ldots$$

et formons les intégrales

$$J_p + J'_p, \quad I_p,$$

comme au n° 40.

Si l'on se reporte aux lemmes établis dans le n° 49, on voit que l'on peut assigner un nombre positif k tel que l'on ait

$$\frac{J_{2p} + J'_{2p}}{I_{2p}} > k,$$

quelle que soit la fonction W_p. Cela peut s'écrire

$$\frac{I_{2p}}{I_{2p-1}} < \frac{1}{k},$$

d'où

$$\frac{I_1}{I_0} < \frac{I_2}{I_1} < \ldots < \frac{I_{p+1}}{I_p} < \ldots < \frac{1}{k}.$$

On conclut de là que le rapport $\frac{I_{p+1}}{I_p}$ tend vers une limite au plus égale à $\frac{1}{k}$, lorsque p augmente indéfiniment. Soit $\frac{1}{\Xi}$ cette limite.

Nous savons déjà que le rayon de convergence de la série W est au moins égal à Ξ. Voyons maintenant qu'il ne peut pas dépasser Ξ.

En effet, multiplions les termes de la série W par W_0 et intégrons. On trouve

$$I_0 + \xi I_1 + \xi^2 I_2 + \ldots.$$

Si la série W convergeait pour une valeur de ξ supérieure en module à Ξ, il en serait de même de la seconde série. Or cela ne peut pas être, puisque, dans la dernière série, le rapport d'un terme au précédent a pour limite

$$\frac{|\xi|}{\Xi}.$$

Donc il est bien certain que le rayon de convergence de la série W *est précisément égal à* Ξ.

Cela posé, on a

$$\Xi < \frac{I_0}{I_1}.$$

Voilà une limite supérieure du rayon de convergence de la série W. *Donc la fonction* W *n'est pas holomorphe dans tout le plan* ξ *et il existe, par conséquent, des fonctions harmoniques fondamentales.*

55. Il résulte de ce qui précède qu'il y a au moins une fonction fondamentale. Soit P_1 cette fonction et ξ_1 son nombre caractéristique.

Voyons s'il est possible que ξ_1 soit le seul pôle de W.

Considérons

$$W = [\Phi, \xi].$$

On a

$$[P_1, \xi] = \frac{P_1}{\xi_1 - \xi}.$$

Si ξ_1 était le seul pôle de W, il existerait une constante λ telle que la différence

$$W - \lambda \frac{P_1}{\xi_1 - \xi}$$

soit holomorphe pour toute valeur de ξ. Or cette différence est égale à

$$[\Phi - \lambda P_1, \xi].$$

Mais on pourrait refaire ici le raisonnement du paragraphe précédent. Il est impossible que la fonction

$$[\Phi - \lambda P_1, \xi]$$

soit holomorphe dans tout le plan ξ. Donc il ne peut pas se faire que W ne possède qu'un seul pôle.

Donc, la fonction méromorphe W possède une infinité de pôles. *Il existe un ensemble dénombrable de constantes*

$$\xi_1, \quad \xi_2, \quad \xi_3, \quad \ldots, \quad \xi_i, \quad \ldots$$

auxquelles correspondent autant de fonctions

$$P_1, \quad P_2, \quad P_3, \quad \ldots, \quad P_i, \quad \ldots$$

qui sont des fonctions fondamentales.

56. Étudions maintenant les nombres caractéristiques des fonctions fondamentales.

Il résulte des considérations développées au n° 39 qu'un tel nombre ne peut pas être réel et négatif.

Je dis, en outre, que les nombres caractéristiques ne peuvent pas être imaginaires.

Remarquons d'abord que, si P_1 et P_2 sont deux fonctions fondamentales correspondant à deux nombres ξ_1 et ξ_2 distincts, on a par la formule de Green

$$\int_{(S)} \left(P_1 \frac{dP_2}{dn_i} - P_2 \frac{dP_1}{dn_i}\right) d\sigma = 0,$$

$$\int_{(S)} \left(P_1 \frac{dP_2}{dn_e} - P_2 \frac{dP_1}{dn_e}\right) d\sigma = 0,$$

d'où, après addition et réduction,

$$(\xi_1 - \xi_2) \int_{(S)} P_1 P_2 \, d\sigma = 0$$

et, par suite,

$$\int_{(S)} P_1 P_2 \, d\sigma = 0.$$

Supposons alors ξ_1 imaginaire et soit ξ_2 son conjugué. On peut écrire

$$\xi_1 = \alpha + \beta i, \qquad \xi_2 = \alpha - \beta i,$$
$$P_1 = A + Bi, \qquad P_2 = A - Bi.$$

Or, on a

$$\xi_1 - \xi_2 = 2\beta i \neq 0,$$

donc

$$\int_{(S)} P_1 P_2 \, d\sigma = \int_{(S)} (A^2 + B^2) \, d\sigma = 0.$$

Cela est impossible, à moins que A et B et, par suite, P_1 et P_2 ne soient identiquement nuls.

Donc les nombres caractéristiques ne peuvent être que réels et positifs.

57. Il peut arriver qu'une seule fonction P_i corresponde au nombre caractéristique ξ_i. Cette fonction n'est alors définie qu'à un multipli-

cateur près. Je choisirai ce multiplicateur constant de façon que l'on ait

$$\int_{(S)} P_i^2\, d\sigma = 1.$$

Cela est évidemment permis.

Mais il peut arriver aussi que plusieurs fonctions P_i linéairement indépendantes correspondent au même nombre caractéristique ξ_i. Cela se présentera, par exemple, si tous les paramètres λ considérés au n° 51 ne sont pas déterminés par les conditions auxquelles ils sont soumis.

Supposons qu'il y ait q fonctions fondamentales distinctes

$$P_i^{(1)}, \quad P_i^{(2)}, \quad \ldots, \quad P_i^{(q)},$$

correspondant au même nombre caractéristique ξ_i supposé inférieur à Ξ_n.

Soient

$$\lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \ldots, \quad \lambda_q$$

des multiplicateurs arbitraires. On a

$$[\lambda_1 P_i^{(1)} + \lambda_2 P_i^{(2)} + \ldots + \lambda_q P_i^{(q)}, \xi] = \frac{\lambda_1 P_i^{(1)} + \lambda_2 P_i^{(2)} + \ldots + \lambda_q P_i^{(q)}}{\xi_i - \xi}.$$

Or,

$$\lambda_1 P_i^{(1)} + \lambda_2 P_i^{(2)} + \ldots + \lambda_q P_i^{(q)} \not\equiv 0,$$

si les λ ne sont pas tous nuls, puisque les P_i sont indépendants par hypothèse. Donc la fonction

$$[\lambda_1 P_i^{(1)} + \lambda_2 P_i^{(2)} + \ldots + \lambda_q P_i^{(q)}, \xi]$$

a un pôle ξ_i situé à l'intérieur du cercle de rayon Ξ_n.

Prenons

$$q = n.$$

Le résultat précédent est en contradiction avec le théorème fondamental du n° 50.

Donc il y a au plus $n-1$ fonctions fondamentales linéairement distinctes qui correspondent au même nombre caractéristique ξ_i moindre que Ξ_n.

Soient

$$P_i^{(1)},\quad P_i^{(2)},\quad \ldots,\quad P_i^{(n-1)}$$

les fonctions fondamentales dont le nombre caractéristique est ξ_i. Toute combinaison linéaire des P_i est encore une fonction fondamentale. Il est clair que les P_i peuvent ainsi s'exprimer, au moyen de $n-1$ fonctions fondamentales,

$$W_i^{(1)},\quad W_i^{(2)},\quad \ldots,\quad W_i^{(n-1)},$$

jouissant des propriétés suivantes :

$$\int_{(S)} [W_i^{(h)}]^2\, d\sigma = 1, \qquad \int_{(S)} W_i^{(h)} W_i^{(h')}\, d\sigma = 0.$$

On le verrait aisément, comme au n° 43 pour les fonctions sphériques. Ce sont ces dernières fonctions $W_i^{(h)}$ que j'appellerai proprement *les fonctions harmoniques fondamentales attachées à la surface* S.

Voici les règles que je suivrai pour le numérotage des fonctions W_i et des nombres ξ_i.

Je rangerai les nombres ξ_i par ordre de grandeur croissante.

Il pourra arriver qu'à un même nombre ξ_i correspondent q fonctions fondamentales. Je désignerai alors indifféremment ξ_i par les lettres

$$\xi_i,\quad \xi_{i+1},\quad \ldots,\quad \xi_{i+q-1}$$

et le nombre caractéristique immédiatement supérieur à ξ_i sera ξ_{i+q}. Quant aux fonctions fondamentales qui correspondent à ξ_i, elles seront représentées par

$$W_i,\quad W_{i+1},\quad \ldots,\quad W_{i+q-1}.$$

Dans ces conditions, le nombre ξ_p correspondra toujours à la fonction W_p de même indice.

Finalement, nous arrivons au théorème suivant, qui établit rigoureusement l'existence des fonctions harmoniques fondamentales attachées à la surface S.

Il existe un ensemble dénombrable de constantes positives indéfiniment croissantes avec l'indice

$$\xi_1,\quad \xi_2,\quad \xi_3,\quad \ldots,\quad \xi_p,\quad \ldots,$$

auxquelles correspondent des potentiels newtoniens de simples couches portées par S

$$W_1, \quad W_2, \quad W_3, \quad \ldots, \quad W_p, \quad \ldots,$$

qui vérifient chacun, en tous les points de S, *la relation*

$$\frac{dV_p}{dn_i} + \frac{dV'_p}{dn_e} + \xi_p V_p = 0.$$

On a

$$\int_{(S)} V_p^2 \, d\sigma = 1$$

et

$$\int_{(S)} V_p V_q \, d\sigma = 0 \qquad \text{si } p \neq q,$$

soit à cause de la formule de Green, soit à cause de la manière dont les fonctions W_p *ont été construites, suivant que* W_p *et* W_q *correspondent ou non à des nombres caractéristiques* ξ_p *et* ξ_q *différents. Enfin, on a*

$$\xi_p = J_p + J'_p,$$

en appelant J_p *et* J'_p *ce que deviennent* J *et* J′ *quand on remplace* W *par* W_p.

Je termine par une remarque. Le raisonnement que nous avons fait plus haut pour montrer qu'il y a au plus $p - 1$ fonctions fondamentales correspondant à *un* nombre caractéristique inférieur à Ξ_p peut servir encore à prouver qu'il y a au plus $p - 1$ fonctions fondamentales correspondant à *des* nombres caractéristiques inférieurs à Ξ_p. On a donc

$$\xi_p \geqq \Xi_p.$$

Donc il existe une constante C indépendante de l'indice p telle que l'on ait

$$\xi_p > C\sqrt{p},$$

quel que soit p. *En d'autres termes,* ξ_p *est au moins de l'ordre de grandeur de* $\sqrt{p}$.

58. J'ai déjà eu besoin de supposer le principe de Dirichlet établi par la méthode du balayage. Mais c'est à présent que cela va m'être

surtout utile, pour étudier la question du développement d'une fonction arbitraire en série procédant suivant les fonctions fondamentales. Je me servirai, dans ce qui va suivre, d'une méthode due à M. Poincaré.

Soit Φ une fonction définie sur S et munie de derivées partielles continues de tous les ordres. Soit W_p la fonction fondamentale qui correspond au nombre caractéristique ξ_p. Je pose

$$A_p = \int_{(S)} \Phi V_p \, d\sigma,$$

et je me propose de montrer que la série

$$\Sigma A_p W_p$$

est convergente et a pour somme la fonction harmonique U qui prend sur S les valeurs Φ.

D'abord l'inégalité de Schwarz nous donne

$$A_p^2 < \int_{(S)} \Phi^2 \, d\sigma \int_{(S)} V^2 \, d\sigma < \alpha^2 \int d\sigma,$$

α désignant le maximum de $|\Phi|$. D'où

$$|A_p| < \alpha\sqrt{S},$$

S étant l'aire totale de la surface S. Ainsi le module des coefficients A_p est limité.

D'autre part, on a

$$W_p = \frac{1}{4\pi} \xi_p \int_{(S)} V_p \frac{d\sigma}{r}.$$

Reprenons les notations μ et N du n° 41 et effectuons le même calcul qu'à cet endroit, en tenant compte de la relation

$$\int_{(S)} V_p^2 \, d\sigma = 1.$$

Il vient

$$G_p < \frac{\sqrt{S}}{4\pi\mu} \xi_p + N\mu \xi_p G_p,$$

G_p étant le module maximum de W_p. Les nombres ξ_p croissent au delà de toute limite avec l'indice. Donc on peut poser

$$2N\mu = \frac{1}{\xi_p}.$$

On a alors

$$G_p < \frac{N\sqrt{S}}{\pi}\xi_p^2,$$

au moins à partir d'une certaine valeur assignable de p. Finalement, on voit que W_p, pour p très grand, est au plus de l'ordre de grandeur de ξ_p^2.

Envisageons la série

$$\sum \frac{A_p W_p}{\xi - \xi_p}\left(\frac{\xi}{\xi_p}\right)^n.$$

Elle est comparable, au point de vue de la convergence, à la série

$$\sum \frac{1}{\xi_p^{n-1}},$$

dont les termes sont positifs et respectivement inférieurs à ceux de la série

$$\sum \left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{n-1}{2}}.$$

La convergence est évidemment assurée si $n = 5$. Posons alors

$$H = \sum \frac{A_p W_p}{\xi - \xi_p}\left(\frac{\xi}{\xi_p}\right)^5.$$

Il est clair que $-H$ est une fonction méromorphe dont les pôles (et les résidus correspondants) sont les mêmes que ceux de la fonction $W = \frac{P}{D}$ considérée dans les paragraphes précédents; cela est presque évident et sera d'ailleurs expliqué plus loin.

On a donc

$$W = -H + E(\xi),$$

$E(\xi)$ étant une certaine fonction entière de ξ. Or,

$$\frac{dW}{dn_i} + \frac{dW}{dn_e} + \xi W + \Phi = 0.$$

Mais

$$\frac{d\mathrm{H}}{dn_i} + \frac{d\mathrm{H}}{dn_e} = -\sum \frac{\mathrm{A}_p \mathrm{W}_p}{\xi - \xi_p} \frac{\xi^5}{\xi_p^4},$$

série qui est encore absolument convergente. D'où

$$\frac{d\mathrm{H}}{dn_i} + \frac{d\mathrm{H}}{dn_e} + \xi \mathrm{H} = \sum \frac{\mathrm{A}_p \mathrm{W}_p}{\xi - \xi_p} \left(\frac{\xi^6}{\xi_p^5} - \frac{\xi^5}{\xi_p^4} \right) = \xi^5 \sum \mathrm{A}_p \mathrm{W}_p \frac{1}{\xi_p^5}.$$

On conclut de là

$$\frac{d\mathrm{E}}{dn_i} + \frac{d\mathrm{E}}{dn_e} + \xi \mathrm{E} + \Phi - \xi^5 \sum \mathrm{A}_p \mathrm{W}_p \frac{1}{\xi_p^5} = 0,$$

sur S.

Soit

$$\mathrm{E} = e_0 + e_1 \xi + e_2 \xi^2 + \ldots + e_p \xi^p + \ldots.$$

On a d'abord

$$\frac{de_0}{dn_i} + \frac{de_0}{dn_e} + \Phi = 0,$$

$$\frac{de_1}{dn_i} + \frac{de_1}{dn_e} + e_0 = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{de_4}{dn_i} + \frac{de_4}{dn_e} + e_3 = 0,$$

puis

$$\frac{de_5}{dn_i} + \frac{de_5}{dn_e} + e_4 - \sum \mathrm{A}_p \mathrm{W}_p \frac{1}{\xi_p^5} = 0.$$

Enfin

$$\frac{de_6}{dn_i} + \frac{de_6}{dn_e} + e_5 = 0,$$

$$\frac{de_7}{dn_i} + \frac{de_7}{dn_e} + e_6 = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Les équations qui définissent les e_p ont, à partir de $p = 6$, la même forme que celles qui définissent les $\mathrm{W}^{(p)}$, en appelant $\mathrm{W}^{(p)}$ le coefficient du terme en ξ^p dans la série W.

Soit E_p l'intégrale formée avec les e_p comme I_p l'est avec $\mathrm{W}^{(p)}$. On a

$$\mathrm{E}_p > 0, \qquad \frac{\mathrm{E}_{p+1}}{\mathrm{E}_p} < \frac{\mathrm{E}_{p+2}}{\mathrm{E}_{p+1}},$$

à partir de $p = 10$.

Nous savons que $\frac{E_{p+1}}{E_p}$ tend, lorsque p augmente au delà de toute limite, vers l'inverse du rayon de convergence de la série E. Ce rayon doit être infini, puisque E est une fonction entière. Donc $\frac{E_{p+1}}{E_p}$ tend vers zéro. Mais ce rapport reste positif et va en croissant avec p. Par conséquent, on a

$$E_{p+1} = 0,$$

à partir de $p = 10$. Cela implique

$$\int_{(S)} e_p^2 \, d\sigma = 0,$$

et, par suite,

$$e_p = 0,$$

à partir de $p = 6$. *Donc* $E(\xi)$ *est un polynome du cinquième degre en* ξ.

D'autre part, H est divisible par ξ^5; d'où

$$E = W^{(0)} + \xi W^{(1)} + \xi^2 W^{(2)} + \xi^3 W^{(3)} + \xi^4 W^{(4)} + \xi^5 e_5,$$

et, pour connaître complètement E, il nous suffit de calculer e_5.

Comparons les coefficients de ξ^5 dans les séries W, H, E. On a évidemment

$$W^{(5)} = e_5 + \sum A_p W_p \frac{1}{\xi_p^6}.$$

Mais, en comparant les termes en ξ^6, on trouve

$$W^{(6)} = \sum A_p W_p \frac{1}{\xi_p^7}.$$

Or

$$\frac{dW^{(6)}}{dn_i} + \frac{dW^{(6)}}{dn_e} + W^{(5)} = 0,$$

d'où

$$\sum A_p W_p \frac{1}{\xi_p^6} - W^{(5)} = 0,$$

et, par suite,

$$e_5 = 0.$$

Finalement

$$W = -\sum \frac{A_p W_p}{\xi - \xi_p}\left(\frac{\xi}{\xi_p}\right)^5 + W^{(0)} + \xi W^{(1)} + \xi^2 W^{(2)} + \xi^3 W^{(3)} + \xi^4 W^{(4)}.$$

De là peut se tirer une importante conséquence.

Supposons que la série

$$\Sigma A_p W_p$$

soit uniformément convergente. On a successivement

$$W^{(5)} = +\sum A_p W_p \frac{1}{\xi_p^6}$$

et

$$\frac{dW^{(5)}}{dn_i} + \frac{dW^{(5)}}{dn_e} = -\sum A_p W_p \frac{1}{\xi_p^5} = -W^{(4)},$$

$$\frac{dW^{(4)}}{dn_i} + \frac{dW^{(4)}}{dn_e} = -\sum A_p W_p \frac{1}{\xi_p^4} = -W^{(3)},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$\frac{dW^{(0)}}{dn_i} + \frac{dW^{(0)}}{dn_e} = -\sum A_p W_p \qquad = -\Phi.$$

Donc

$$\Phi = \Sigma A_p W_p.$$

Ainsi la série

$$\Sigma A_p W_p$$

a pour somme en tout point de S *la fonction donnée* Φ, *sous la seule condition que cette série soit uniformément convergente.*

Pour mieux mettre en évidence le mécanisme de la démonstration précédente, j'ai négligé quelques intermédiaires que je vais maintenant rétablir.

D'abord, je me suis servi de ceci : ayant

$$W^{(5)} = +\sum A_p W_p \frac{1}{\xi_p^6},$$

on peut écrire

$$\frac{dW^{(5)}}{dn_i} + \frac{dW^{(5)}}{dn_e} = -\sum A_p W_p \frac{1}{\xi_p^5}.$$

En effet, la série

$$\sum A_p W_p \frac{1}{\xi_p^5}$$

est uniformément convergente. Alors il est permis de former l'intégrale

$$\int_{(S)} \sum A_p W_p \frac{1}{\xi_p^5} \frac{d\sigma}{r}.$$

Posons

$$\sum A_p W_p \frac{1}{\xi_p^5} = S_n + R_n,$$

S_n désignant la somme des n premiers termes et R_n le reste correspondant. On a

$$W^{(5)} - \frac{1}{4\pi}\int_{(S)} \sum A_p W_p \frac{1}{\xi_p^5} \frac{d\sigma}{r} = \sigma_n + \rho_n - \frac{1}{4\pi}\int_{(S)} S_n \frac{d\sigma}{r} - \frac{1}{4\pi}\int_{(S)} R_n \frac{d\sigma}{r},$$

σ_n et ρ_n étant, pour la série $W^{(5)}$, les quantités analogues à S_n et R_n. Or

$$\sigma_n - \frac{1}{4\pi}\int_{(S)} S_n \frac{d\sigma}{r} = 0.$$

En outre, on peut prendre n assez grand pour que

$$|\rho_n| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \left|\frac{1}{4\pi}\int_{(S)} R_n \frac{d\sigma}{r}\right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

quelque petit que soit ε; d'où

$$\left| W^{(5)} - \frac{1}{4\pi}\int_{(S)} \sum A_p W_p \frac{1}{\xi_p^5} \frac{d\sigma}{r} \right| < \varepsilon,$$

et, par suite,

$$W^{(5)} = + \frac{1}{4\pi}\int_{(S)} \sum A_p W_p \frac{1}{\xi_p^5} \frac{d\sigma}{r}.$$

Cela donne bien

$$\frac{dW^{(5)}}{dn_i} + \frac{dW^{(5)}}{dn_e} = - \sum A_p W_p \frac{1}{\xi_p^5}.$$

Cela posé, la convergence uniforme de la série

$$\Sigma A_p W_p$$

étant supposée, on peut obtenir, de proche en proche, les égalités considérées plus haut.

Il y a un autre point que j'ai aussi laissé de côté. Je me suis appuyé à un moment sur ce que la fonction

$$W = \frac{P}{D}$$

admet $-A_p W_p$ comme résidu correspondant au pôle ξ_p. En effet, on a

$$\int_{(S)} \left(W \frac{dW_p}{dn_i} - W_p \frac{dW}{dn_i} \right) d\sigma = 0,$$
$$\int_{(S)} \left(W \frac{dW_p}{dn_e} - W_p \frac{dW}{dn_e} \right) d\sigma = 0,$$

d'où, en ajoutant membre à membre,

$$(\xi_p - \xi) \int_{(S)} W W_p \, d\sigma = \int_{(S)} \Phi W_p \, d\sigma.$$

Or $(\xi_p - \xi) W$ tend vers le résidu changé de signe correspondant au pôle ξ_p, lorsque ξ tend vers ξ_p. Ce résidu, nous le savons, est de la forme $\lambda_p W_p$, λ_p étant une constante. L'égalité précédente nous donne pour $\xi = \xi_p$

$$-\lambda_p = \int_{(S)} \Phi W_p \, d\sigma.$$

Donc

$$\lambda_p = -A_p,$$

et notre proposition se trouve ainsi établie.

Il ne nous reste plus maintenant, pour tirer parti du théorème démontré dans le présent paragraphe, qu'à étudier les caractères de convergence de la série

$$\Sigma A_p W_p.$$

C'est ce que je vais faire, en supposant connu le principe de Dirichlet.

59. Supposons que la fonction Φ possède des dérivées partielles de tous les ordres par rapport à u et v.

Appelons U la fonction, harmonique à la fois dans T et dans T', qui prend sur S les valeurs Φ. Il est clair, d'après les hypothèses faites sur Φ et sur S, que les dérivées $\frac{dU}{dn_i}$ et $\frac{dU'}{dn_e}$ existent, sont continues et ont, par rapport à u et v, des dérivées partielles des divers ordres. Formons alors les coefficients

$$A_p = \int_{(S)} \Phi V_p \, d\sigma.$$

On peut écrire

$$A_p = \int_{(S)} U V_p \, d\sigma = -\frac{1}{\xi_p} \int_{(S)} U \left(\frac{dV_p}{dn_i} + \frac{dV'_p}{dn_e} \right) d\sigma = -\frac{1}{\xi_p} \int_{(S)} V_p \left(\frac{dU}{dn_i} + \frac{dU'}{dn_e} \right) d\sigma,$$

en tenant compte de la relation

$$\frac{dV_p}{dn_i} + \frac{dV'_p}{dn_e} + \xi_p V_p = 0,$$

et en appliquant la formule de Green. Posons

$$\Phi_1 = -\left(\frac{dU}{dn_i} + \frac{dU'}{dn_e} \right).$$

On a

$$A_p = \frac{1}{\xi_p} \int_{(S)} \Phi_1 V_p \, d\sigma.$$

Appelons maintenant U_1 la fonction, harmonique à la fois dans T et dans T', qui prend sur S les valeurs Φ_1. Soit

$$\Phi_2 = -\left(\frac{dU_1}{dn_i} + \frac{dU'_1}{dn_e} \right).$$

On trouve, par un calcul semblable au précédent,

$$A_p = \frac{1}{\xi_p^2} \int_{(S)} \Phi_2 V_p \, d\sigma.$$

Rien n'empêche de continuer ainsi indéfiniment. Les fonctions successives Φ_n ont toujours des dérivées par rapport à u et v. Soit, en général,

$$A_p = \frac{1}{\xi_p^n} \int_{(S)} \Phi_n V_p \, d\sigma.$$

Les hypothèses faites sur S et Φ nous permettent d'affirmer que $|\Phi_n|$ a une limite supérieure assignable α_n; d'où

$$|A_p| < \frac{\alpha_n \sqrt{S}}{\xi_p^n},$$

en vertu de l'inégalité de Schwarz. Le terme

$$A_p W_p$$

est alors de l'ordre de grandeur de

$$\frac{1}{\xi_p^{n-2}},$$

au plus, c'est-à-dire encore de l'ordre de grandeur de

$$\left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{n-2}{2}}.$$

Prenons $n = 5$. *On voit que la série*

$$\Sigma A_p W_p$$

est absolument et uniformément convergente.

Remarquons que le terme général de cette série est infiniment petit d'ordre supérieur à tout nombre entier et positif donné. La série

$$\Sigma A_p \xi_p^\alpha W_p$$

est donc, elle aussi, absolument et uniformément convergente, quel que soit le nombre positif α.

La série

$$\Sigma A_p V_p$$

est absolument et uniformément convergente; donc, d'après le théorème du n° 58, elle a Φ pour somme. Alors, on peut écrire évidemment

$$U = \Sigma A_p W_p,$$

en vertu du théorème de Harnack.

Ainsi, *la fonction, harmonique dans* T *et dans* T', *qui prend sur* S *les valeurs* Φ, *peut être développée en série de fonctions harmoniques simples,* *qui sont les fonctions harmoniques fondamentales.* Nous obtenons de la sorte une expression analytique de la fonction qui résout le problème de Dirichlet, et il est bon de remarquer que le même développement est valable pour les problèmes intérieur et extérieur.

Posons maintenant

$$\mu = \Sigma A_p \xi_p V_p.$$

La nouvelle série est encore absolument et uniformément convergente. Or, on a

$$W_p = \frac{1}{4\pi}\int_{(S)} \xi_p V_p \frac{d\sigma}{r}.$$

Donc

$$U = \frac{1}{4\pi}\int_{(S)} \mu \frac{d\sigma}{r}.$$

La fonction U, *solution du problème de Dirichlet tant intérieur qu'extérieur, se présente sous la forme du potentiel newtonien d'une simple couche de matière attirante répandue sur la surface* S.

60. Il est facile de généraliser les résultats que nous venons d'obtenir. Conservons les hypothèses relatives à S, mais supposons seulement, désormais, que la fonction Φ soit continue, sans qu'elle ait forcément des dérivées.

Proposons-nous de construire un potentiel newtonien W de simple couche, défini pour toute valeur positive du paramètre t qu'on peut regarder comme représentant le temps, vérifiant en tout point de S et pour toute valeur positive de t la relation

$$\frac{dV}{dn_i} + \frac{dV'}{dn_e} = \frac{\partial V}{\partial t},$$

et se réduisant sur S pour $t = 0$ à Φ.

Soit

$$\Phi = \Sigma A_p V_p.$$

On a évidemment

$$W = \Sigma A_p W_p e^{-\xi_p t},$$

et cela suppose seulement que Φ a des dérivées de tous les ordres, d'après ce que nous avons vu plus haut.

Pour passer de ce cas particulier au cas général où la fonction Φ est supposée simplement continue, un lemme nous est nécessaire.

Soit

$$|\Phi| < \alpha.$$

Je dis que l'on a

$$|W| < \alpha.$$

En effet, posons

$$\tau = \alpha - W, \qquad \theta = \alpha + W.$$

Les fonctions τ et θ sont harmoniques dans T et dans T' pour toute valeur positive du temps t. A l'infini, ces fonctions prennent la valeur positive constante α. Sur S, pour $t > 0$, on a

$$\frac{d\tau}{dn_i} + \frac{d\tau'}{dn_e} = \frac{\partial \tau}{\partial t}, \qquad \frac{d\theta}{dn_i} + \frac{d\theta'}{dn_e} = \frac{\partial \theta}{\partial t},$$

et pour $t = 0$,

$$\tau \geqq 0, \qquad \theta \geqq 0.$$

Je dis alors que ni τ ni θ ne peuvent prendre de valeurs négatives. En effet, lorsque t va en croissant à partir de o, τ et θ varient en chaque point de l'espace à partir d'une valeur positive, qui est au point choisi celle de l'une des deux fonctions harmoniques prenant sur S les valeurs positives $\alpha - \Phi$ et $\alpha + \Phi$. Si donc τ ou θ venait à prendre des valeurs négatives, il y aurait un certain point de l'espace en lequel, à un certain instant positif, τ ou θ aurait un minimum négatif encore décroissant. Ce ne pourrait être ni dans T ni dans T', à cause d'une propriété bien connue des fonctions harmoniques. Ce ne serait pas davantage à l'infini où τ et θ conservent une valeur constante et positive. Ce serait par conséquent en un point de S. En ce point, on aurait

$$\frac{d\tau}{dn_i} + \frac{d\tau'}{dn_e} \geqq 0, \qquad \frac{\partial \tau}{\partial t} < 0$$

ou bien

$$\frac{d\theta}{dn_i} + \frac{d\theta'}{dn_e} \geqq 0, \qquad \frac{\partial \theta}{\partial t} < 0,$$

à l'instant t considéré. Mais cela est incompatible avec les équations écrites plus haut. Donc

$$\tau > 0, \qquad \theta > 0$$

et, par suite,

$$|W| < \alpha.$$

La proposition annoncée est établie.

Revenons alors à notre problème. Concevons la fonction continue Φ développée en série absolument et uniformément convergente

$$\Phi = \Sigma P_i,$$

P_i représentant les valeurs prises sur S par un certain polynome entier en x, y, z. Nous avons vu (nº 20) que cela est possible et que l'on peut s'arranger de façon que

$$|P_i| < \varepsilon_i,$$

le nombre positif ε_i étant le terme général d'une série convergente. Appelons enfin $W^{(i)}$ la solution de notre problème auxiliaire quand on prend $\Phi = P_i$.

Le polynome P_i a, par rapport à u et v, sur S, des dérivées continues de tous les ordres. On peut donc calculer $W^{(i)}$. Soit

$$A_{p,i} = \int_{(S)} P_i V_p \, d\sigma.$$

On a

$$W^{(i)} = \Sigma_p A_{p,i} W_p e^{-\xi_p t}.$$

Mais l'inégalité

$$|P_i| < \varepsilon_i$$

entraine, en vertu du lemme de tout à l'heure,

$$|W^{(i)}| < \varepsilon_i.$$

Donc, la série

$$\Sigma_i W^{(i)}$$

est absolument et uniformément convergente dans tout l'espace et pour toute valeur *positive ou nulle* de t. Soit W sa somme : c'est une fonction continue dans tout l'espace pour toute valeur positive ou nulle de t et cette fonction s'annule à l'infini.

Soit

$$A_p = \int_{(S)} \Phi V_p \, d\sigma.$$

La série

$$\Sigma_p A_p W_p e^{-\xi_p t}$$

est absolument et uniformément convergente pour $t > 0$. Or, on a

$$A_p = \Sigma_i A_{p,i}.$$

Donc la série précédente peut s'écrire

$$\Sigma_p \Sigma_i A_{p,i} e^{-\xi_p t} W_p,$$

ou, comme cette série double est absolument convergente

$$\Sigma_i \Sigma_p A_{p,i} e^{-\xi_p t} W_p = \Sigma_i (\Sigma_p A_{p,i} e^{-\xi_p t} W_p),$$

c'est-à-dire enfin

$$\Sigma_i W^{(i)}.$$

On a donc

$$W = \Sigma_p A_p W_p e^{-\xi_p t}.$$

Donc, la fonction W est un potentiel newtonien de simple couche vérifiant sur S la relation

$$\frac{dV}{dn_i} + \frac{dV'}{dn_e} = \frac{\partial V}{\partial t}.$$

Cela résulte de ce que l'on a

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\Sigma A_p \xi_p W_p e^{-\xi_p t},$$

la nouvelle série étant encore absolument et uniformément convergente pour $t > 0$, et de ce que, par suite, on peut écrire dans la même hypothèse

$$W = -\frac{1}{4\pi} \int_{(S)} \frac{\partial V}{\partial t} \frac{d\sigma}{r},$$

comme le montre une discussion bien simple.

Cela posé, on a aussi

$$W = \Sigma W^{(i)}.$$

Comme cette série est absolument et uniformément convergente pour toute valeur *positive ou nulle* de t, on voit que W se réduit sur S pour $t = 0$ à Φ.

La fonction W *est donc la solution de notre problème auxiliaire. Bien que la série*

$$W = \Sigma A_p W_p e^{-\xi_p t}$$

ne soit valable que pour $t > 0$, on est cependant assuré que W *tend vers* Φ *sur* S *lorsque t tend vers zéro, sous la seule condition que la fonction* Φ *soit continue.*

Tirons tout de suite de là une première conséquence. Supposons que la série

$$\Sigma A_p W_p$$

soit convergente : nous ne supposons plus qu'elle le soit *uniformément*. Posons

$$S_n = A_1 W_1 + A_2 W_2 + \ldots + A_n W_n.$$

Soit ρ_n la plus grande des quantités

$$|S_{n+1} - S_n|, \quad |S_{n+2} - S_n|, \quad \ldots, \quad |S_{n+h} - S_n|, \quad \ldots.$$

Posons

$$R_n = A_{n+1} W_{n+1} e^{-\xi_{n+1} t} + \ldots.$$

Un théorème bien connu, dû à Abel, nous permet, puisque les nombres ξ_n croissent avec leur indice, d'écrire

$$|R_n| < \rho_n e^{-\xi_n t}.$$

On a donc

$$|R_n| < \rho_n,$$

pour *t positif ou nul*. Mais ρ_n tend vers zéro, par hypothèse, quand n augmente indéfiniment. Donc la série

$$W = \Sigma A_p W_p e^{-\xi_p t}$$

converge uniformément par rapport à t, pourvu que t soit *positif ou nul*. On conclut alors de là que

$$\Phi = \Sigma A_p V_p.$$

Ainsi la série étudiée a Φ *pour somme pourvu qu'elle soit convergente, même si cette convergence n'est pas uniforme.*

61. Reprenons la fonction

$$W^{(i)} = \Sigma_p A_{p,i} W_p e^{-\xi_p t},$$

qui, sur S, se réduit à P_i pour $t = 0$. On a évidemment

$$\frac{\partial W^{(i)}}{\partial t} = -\Sigma_p \xi_p A_{p,i} W_p e^{-\xi_p t}.$$

Appelons U_i la fonction harmonique qui prend sur S les mêmes valeurs que P_i. La série

$$\Sigma \xi_p A_{p,i} W_p$$

est convergente, puisque P_i a sur S des dérivées de tous les ordres. Donc $\frac{\partial W^{(i)}}{\partial t}$ se réduit sur S pour $t = 0$ à $\frac{dU_i}{dn_i} + \frac{dU'_i}{dn_e}$. Soit β_i une limite supérieure du module de cette fonction. D'après un lemme établi plus haut, on a

$$\left|\frac{\partial W^{(i)}}{\partial t}\right| < \beta_i$$

pour $t \geqq 0$. Or

$$W^{(i)}(x, y, z, t) - W^{(i)}(x, y, z, 0) = t \frac{\partial W^{(i)}}{\partial t}(x, y, z, t'),$$

t' étant compris entre 0 et t, d'après la formule des accroissements finis. On déduit de là

$$|W^{(i)} - U_i| < \varepsilon,$$

si l'on prend

$$0 < t < \frac{\varepsilon}{\beta_i}.$$

En résumé, lorsque t tend vers zéro, $W^{(i)}$ tend *uniformément* vers U_i. Cela posé, on a, sur S

$$V - U = \Sigma V^{(i)} - \Sigma P_i = S(V^{(i)} - P_i) + R(V^{(i)}) - R(P_i),$$

en appelant U la fonction harmonique qui prend sur S les valeurs Φ et en désignant par les caractéristiques S et R la somme des n premiers termes et le reste correspondant dans les séries considérées. On peut prendre n assez grand pour que l'on ait, quels que soient (x, y, z) sur S,

$$|R(P_i)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Cela entraîne

$$|R(V^{(i)})| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Maintenant, quand t tend vers zéro, d'après ce que nous venons de voir, n étant à présent fixé, $S(V^{(i)})$ tend uniformément vers $S(P_i)$. Donc, on peut prendre t assez petit pour que

$$|S(V^{(i)}) - S(P_i)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

On a alors

$$|V - \Phi| < \varepsilon$$

et, par suite,

$$|W - U| < \varepsilon.$$

Donc W tend *uniformément* vers U lorsque t tend vers zéro.

Cela posé, soit (x, y, z) un point intérieur à T. Soit (x', y', z') un point de S, centre de gravité de $d\sigma$. Posons

$$\begin{aligned} r^2 &= (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2, \\ W_p &= W_p(x, y, z), \\ V_p &= V_p(x', y', z'). \end{aligned}$$

Cherchons le développement de $\frac{1}{r}$ en série procédant suivant les fonctions fondamentales, (x', y', z') étant les variables. Soit

$$\frac{1}{r} = \Sigma A_p V_p.$$

Nous savons que ce développement est possible (n° 59). On a

$$A_p = \int_{(S)} \frac{1}{r} V_p \, d\sigma = \frac{4\pi}{\xi_p} W_p,$$

d'où

$$\frac{1}{r} = 4\pi \Sigma \frac{W_p V_p}{\xi_p}.$$

D'autre part, on peut écrire (n° 59)

$$|A_p| < \frac{A}{\xi_p^{\alpha+1}},$$

quel que soit l'entier positif α. Dans cette formule, A dépend de α et de x, y, z : cette quantité reste finie tant que le point (x, y, z) reste à l'intérieur de T. On déduit de là

$$|W_p| < \frac{B}{\xi_p^\alpha},$$

B étant une nouvelle quantité analogue à A. Fixons α supérieur à 4. Alors B ne dépend plus ni de α ni de p, mais seulement de (x, y, z). Soit T_1 un domaine quelconque contenu dans T : la fonction $B(x, y, z)$ a dans T_1 une limite supérieure C.

Appelons Φ une fonction continue quelconque de (u, v). Posons

$$A_p = \int_{(S)} \Phi V_p \, d\sigma.$$

La série

$$\Sigma A_p W_p$$

est absolument et uniformément convergente dans T_1, en vertu de ce qui précède. Mais T_1 est quelconque dans T. Donc, si l'on écrit

$$U = \Sigma A_p W_p,$$

U est une fonction harmonique dans T.

Prenons maintenant

$$W = \Sigma A_p W_p e^{-\xi_p t}.$$

Nous savons que, lorsque t tend vers zéro, W tend uniformément vers la fonction, harmonique dans T, qui prend sur S les valeurs Φ. Plaçons-nous dans T_1. Il est clair que W tend alors aussi vers U. *Donc la fonction*

$$U = \Sigma A_p W_p$$

est la fonction, harmonique dans T, *qui prend sur* S *les valeurs* Φ.

On verrait de même que *la fonction*

$$U' = \Sigma A_p W'_p$$

est la fonction harmonique dans T', *qui prend sur* S *les valeurs* Φ.

La solution générale du problème de Dirichlet est ainsi obtenue, conformément aux idées de Lamé, par une série de solutions simples. Il ne peut du reste exister qu'un seul développement de cette forme.

En raison de ce que nous venons de voir, je conviens d'écrire

$$\Phi = \Sigma A_p V_p,$$

même si la fonction Φ est simplement continue : il est clair, en effet, que cette série, bien que divergente, peut être maniée, au point de vue du calcul algébrique ou du calcul intégral, comme une série absolument et uniformément convergente.

Je termine par une remarque. On a

$$|W_p| < \frac{C}{\xi_p^\alpha}$$

dans T_1. Reprenons la série

$$U = \Sigma A_p W_p.$$

Soit D(U) une dérivée quelconque de U. Les théorèmes classiques sur les fonctions harmoniques nous apprennent que l'on a

$$|D(W_p)| < \frac{C'}{\xi_p^\alpha},$$

C' étant une constante, dans un domaine T_2 tout entier intérieur à T_1. On conclut aisément de là

$$D(U) = \Sigma A_p D(W_p).$$

D'où l'on voit que *l'on peut obtenir les dérivées successives de la fonction* U *par dérivation terme à terme de la série qui représente cette fonction*. Cette proposition est d'ailleurs vraie pour tout domaine T_2 contenu dans T et pour tout domaine T'_2 contenu dans T'.

IV. — Diverses classes de fonctions fondamentales. — La classe principale. Propriétés particulières des fonctions de cette classe. — Applications: la méthode de Neumann et la méthode de M. Robin.

62. Je me propose tout d'abord de généraliser la notion des fonctions harmoniques fondamentales.

Ces fonctions se réduisent, quand certaines conditions sont remplies, aux fonctions appelées aussi *fondamentales* par M. Poincaré et signalées par ce géomètre à la fin de son Mémoire *sur la méthode de Neumann et le problème de Dirichlet* (1).

(1) H. Poincaré, *Acta mathematica*, 1896, Chap. VI et VII.

J'aurai à prouver cette identité. J'en déduirai enfin la solution des problèmes proposés par M. Poincaré à l'endroit que j'ai cité.

Je me bornerai, pour simplifier, à considérer le cas où la surface S est formée d'une seule nappe continue. On constatera plus d'une fois l'inutilité de cette hypothèse et la généralité des conclusions obtenues. J'ajoute que, lorsque cette hypothèse paraîtra jouer un rôle effectif dans les raisonnements, ce rôle ne sera jamais essentiel : quelques modifications, dont la possibilité ne fait aucun doute, aux lemmes que j'utilise permettraient certainement de traiter le cas général.

63. Soit φ une fonction donnée, définie et continue en tout point de S, vérifiant la double inégalité

$$\alpha < \varphi < \beta$$

où α, β sont deux constantes positives.

Il existe un ensemble dénombrable de nombres positifs, qui croissent indéfiniment avec leur indice :

$$\xi_1, \quad \xi_2, \quad \xi_3, \quad \ldots, \quad \xi_p, \quad \ldots$$

auxquels correspondent des potentiels newtoniens de simples couches portées par S :

$$W_1, \quad W_2, \quad W_3, \quad \ldots, \quad W_p, \quad \ldots$$

qui jouissent des propriétés suivantes :

$$\frac{dV_p}{dn_i} + \frac{dV'_p}{dn_e} + \xi_p \varphi V_p = 0,$$

$$\int_{(S)} \varphi V_p^2 \, d\sigma = 1,$$

$$\int_{(S)} \varphi V_p V_q \, d\sigma = 0 \qquad \text{si } p \neq q,$$

$$\xi_p = J_p + J'_p.$$

Pour établir l'existence de ces nouvelles fonctions W_p, il faudrait suivre une marche *exactement pareille* à celle des Chapitres précédents. Je n'insisterai pas sur ce point, qui est évident, et je me contenterai aussi d'affirmer que les nouvelles fonctions fondamentales, comme les anciennes pour lesquelles on avait $\varphi = 1$, peuvent servir à former des séries qui représentent la solution du problème de Dirichlet. *D'une façon générale, tout ce qui a été démontré pour les anciennes fonctions W_p est encore vrai des nouvelles, sauf l'introduction de φ où il faut; et, sauf de minimes changements dans les calculs, on le prouverait de la même manière, grâce aux inégalités que la fonction φ est supposée vérifier.*

A chaque fonction φ choisie, correspond une classe de fonctions harmoniques fondamentales attachées à la surface S. Si l'on prend la fonction φ proportionnelle à la densité de la couche électrique qui serait en équilibre sur la surface S supposée conductrice, on a ce que nous nommerons la *classe principale*. C'est cette classe que nous allons étudier.

64. Dans le cas de la sphère, la densité de la distribution naturelle de l'électricité est constante. Les fonctions de la classe principale correspondent alors à l'hypothèse $\varphi = 1$. Soit X_p une fonction sphérique fondamentale d'ordre n. Supposons le rayon de la sphère égal à l'unité de longueur et considérons la fonction W_p qui coïncide avec $\rho^n X_p$ à l'intérieur de la sphère et avec $\frac{1}{\rho^{n+1}} X_p$ à l'extérieur. Je dis que W_p est une fonction harmonique fondamentale de l'espèce que nous étudions. En effet, on a

$$\frac{dV_p}{dn_i} = -\frac{\partial V_p}{\partial \rho}, \qquad \frac{dV'_p}{dn_e} = \frac{\partial V'_p}{\partial \rho}.$$

Or

$$\frac{\partial V'_p}{\partial \rho} - \frac{\partial V_p}{\partial \rho} = -(2n+1)X_p.$$

Par suite

$$\frac{dV_p}{dn_i} + \frac{dV'_p}{dn_e} + (2n+1)V_p = 0.$$

D'où

$$\xi_p = 2n+1,$$

et l'on sait que les autres relations requises sont aussi vérifiées. *Ainsi* *les fonctions harmoniques fondamentales de la classe principale coïncident dans le cas de la sphère avec les fonctions de Laplace.*

Considérons maintenant l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

La densité de l'électricité en équilibre sur cet ellipsoïde est proportionnelle en chaque point à

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}},$$

c'est-à-dire à l'inverse de la distance normale de l'ellipsoïde considéré à l'ellipsoïde homofocal infiniment voisin.

Passons en coordonnées elliptiques (λ, μ, ν), l'équation $\lambda=\lambda_0$ représentant l'ellipsoïde donné.

On sait que Lamé a défini des fonctions

$$L(\lambda), \quad M(\mu), \quad N(\nu),$$

telles que le produit LMN soit harmonique à l'intérieur de l'ellipsoïde.

Liouville a prouvé l'existence d'une autre fonction $L'(\lambda)$ telle que le produit

$$L'MN$$

prenne sur l'ellipsoïde la même valeur que LMN, soit à l'extérieur du même ellipsoïde une fonction harmonique et se comporte à l'infini comme un potentiel newtonien. La fonction qui coïncide avec LMN à l'intérieur de l'ellipsoïde et avec L'MN à l'extérieur est alors le potentiel d'une couche simple de matière attirante répandue à la surface de l'ellipsoïde. Il y a d'ailleurs un ensemble dénombrable de pareilles fonctions, que j'appellerai W_p; ces fonctions sont connues sous le nom de *fonctions de Lamé*.

Comparons à l'ellipsoïde donné λ_0 les deux ellipsoïdes homofocaux infiniment voisins $\lambda_0+d\lambda$ et $\lambda_0-d\lambda$, $d\lambda$ étant une constante. Soit dn la distance normale entre deux points correspondants pris l'un sur l'ellipsoïde donné et l'autre sur un ellipsoïde homofocal infiniment voisin. Il est clair que dn est proportionnel à

$$\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}},$$

comme le montre d'ailleurs un calcul facile.

Cela posé, on a

$$\frac{dV_p}{dn_i}=-\frac{d\lambda}{dn_i}\frac{\partial V_p}{\partial\lambda},\qquad \frac{\partial V'_p}{dn_e}=\frac{d\lambda}{dn_e}\frac{\partial V'_p}{\partial\lambda},$$

d'où

$$\frac{dV_p}{dn_i}=-\frac{d\lambda}{dn_i}\frac{dL(\lambda_0)}{d\lambda}M(\mu)N(\nu),$$
$$\frac{dV'_p}{dn_e}=+\frac{d\lambda}{dn_e}\frac{dL'(\lambda_0)}{d\lambda}M(\mu)N(\nu).$$

Or

$$V_p=L(\lambda_0)M(\mu)N(\nu)=L'(\lambda_0)M(\mu)N(\nu).$$

On voit par là que l'on peut écrire

$$\frac{dV_p}{dn_i}+\frac{dV'_p}{dn_e}+\xi_p\varphi V_p=0,$$

en posant

$$\varphi=\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}},$$

et ξ_p étant une constante, car

$$\frac{d\lambda}{dn_i},\quad\frac{d\lambda}{dn_e}$$

sont, d'après nos remarques, des quantités inversement proportionnelles à la distance normale de l'ellipsoïde λ_0 à l'ellipsoïde homofocal infiniment voisin.

D'autre part, les autres relations que doivent vérifier les fonctions harmoniques fondamentales sont, comme on sait, vérifiées ici.

Les fonctions de la classe principale se réduisent donc dans le cas de l'ellipsoïde aux fonctions de Lamé.

Ainsi nos fonctions harmoniques fondamentales, quand il s'agit de la classe principale, sont des généralisations des fonctions de Laplace et des fonctions de Lamé, dont on connaissait déjà l'application à la résolution du problème de Dirichlet [1].

65. Voici, d'une façon précise, comment nous choisirons la fonction φ dans le cas de la classe principale. Soit P la fonction, harmonique dans T', qui prend sur S la valeur 1; c'est le potentiel newtonien dû à l'action d'une simple couche de matière attirante répandue sur S, l'attraction étant nulle en tout point de T. Nous prendrons

$$\varphi = -\frac{dP}{dn_e}.$$

Nous avons vu que cette expression admet une limite supérieure finie et une limite inférieure non nulle.

Dans ce cas, on a évidemment

$$\xi_1 = 1, \qquad W_1 = kP,$$

k étant une certaine constante choisie de façon que

$$\int_{(S)} \varphi V_1^2 \, d\sigma = 1.$$

La première fonction fondamentale est alors le potentiel d'une couche électrique en équilibre sur S.

On a, en général,

$$W_p = \frac{\xi_p}{4\pi} \int_{(S)} \frac{\varphi V_p}{r} \, d\sigma$$

et

$$\int_{(S)} \varphi V_p V_q \, d\sigma = 0.$$

Faisons $q = 1$. *Il vient*

$$\int_{(S)} \varphi V_p \, d\sigma = 0,$$

pour toutes les valeurs de p à partir de $p = 2$. Donc la masse totale qui engendre le potentiel W_p est nulle.

---

(1) On peut faire la même remarque au sujet des *fonctions toroïdales* de M. Neumann, étudiées par M. Hicks (*Philosophical Transactions*, 1881) et par M. Boulgakoff (*L'Éclairage électrique*, 1897).

Posons encore

$$J_{p,q} = \int_{(T)} \sum \frac{\partial W_p}{\partial x} \frac{\partial W_q}{\partial x} d\tau,$$

$$J'_{p,q} = \int_{(T')} \sum \frac{\partial W'_p}{\partial x'} \frac{\partial W'_q}{\partial x'} d\tau'.$$

La formule de Green permet d'écrire

$$J_{p,q} + J'_{p,q} = -\int_{(S)} V_p \left(\frac{dV_q}{dn_i} + \frac{dV'_q}{dn_e} \right) d\sigma,$$

d'où

$$J_{p,q} + J'_{p,q} = \xi_q \int_{(S)} \varphi V_p V_q \, d\sigma,$$

d'après la définition de V_q. Finalement

$$J_{p,q} + J'_{p,q} = 0,$$

pourvu que p et q soient différents.

66. On a

$$\int_{(S)} \frac{dP}{dn_e} V_p V_q \, d\sigma = 0.$$

Si α est un entier positif quelconque, on peut écrire l'égalité précédente sous la forme

$$\alpha \int_{(S)} P^{\alpha-1} \frac{dP}{dn_e} V_p V_q \, d\sigma = \int_{(S)} \frac{d(P^\alpha)}{dn_e} V_p V_q \, d\sigma = 0.$$

Or, la formule de Green donne

$$\int_{(S)} \frac{d(P^\alpha)}{dn_e} V_p V_q \, d\sigma = \int_{(S)} P^\alpha \frac{d(V'_p V'_q)}{dn_e} d\sigma$$
$$+ \int_{(T')} P^\alpha \Delta(W'_p W'_q) \, d\tau' - \int_{(T')} W'_p W'_q \Delta(P^\alpha) \, d\tau'.$$

D'où

$$\int_{(S)} \left(V_p \frac{dV'_q}{dn_e} + V_q \frac{dV'_p}{dn_e} \right) d\sigma + 2 \int_{(T')} P^\alpha \sum \frac{\partial W'_p}{\partial x'} \frac{\partial W'_q}{\partial x'} d\tau'$$
$$- \alpha(\alpha - 1) \int_{(T')} W'_p W'_q P^{\alpha-2} \sum \left(\frac{\partial P}{\partial x'} \right)^2 d\tau' = 0,$$

en tenant compte des relations

$$P_S = 1, \qquad \Delta P = 0, \qquad \Delta W_p = 0, \qquad \Delta W_q = 0, \qquad \int_{(S)} \varphi V_p V_q \, d\sigma = 0.$$

Or

$$J'_{p,q} = -\int_{(S)} V_p \frac{dV'_q}{dn_e} d\sigma = -\int_{(S)} V_q \frac{dV'_p}{dn_e} d\sigma,$$

en vertu de la formule de Green. Donc

$$2 J'_{p,q} = 2 \int_{(T')} P^\alpha \sum \frac{\partial W'_p}{\partial x'} \frac{\partial W'_q}{\partial x'} d\tau' - \alpha(\alpha - 1) \int_{(T')} P^{\alpha-2} W'_p W'_q \sum \left(\frac{\partial P}{\partial x'}\right)^2 d\tau'.$$

Cette égalité a lieu, *quel que soit* α. On peut donc faire croître α indéfiniment et écrire

$$2 J'_{p,q} = \lim 2 \int_{(T')} P^\alpha \sum \frac{\partial W'_p}{\partial x'} \frac{\partial W'_q}{\partial x'} d\tau' - \lim \alpha(\alpha - 1) \int_{(T')} P^{\alpha-2} W'_p W'_q \sum \left(\frac{\partial P}{\partial x'}\right)^2 d\tau'.$$

Calculons chacun des termes du second membre.

D'abord (n° 41), on peut assigner une constante positive N, telle que

$$\left| \sum \frac{\partial W'_p}{\partial x'} \frac{\partial W'_q}{\partial x'} \right| < N \qquad \text{dans } T'.$$

Le module du premier terme est donc moindre que

$$2 N \int_{(T')} P^\alpha \, d\tau'.$$

Comme P est inférieur ou au plus égal à 1, il est clair que cette expression tend vers zéro, quand α augmente indéfiniment.

Évaluons maintenant la limite du second terme. Partageons T' en deux parties, l'une T'_1 comprise entre les deux surfaces :

$$S \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad P = 1,$$
$$S' \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad P = 1 - \frac{1}{\sqrt[4]{\alpha^3}},$$

l'autre T'_2 s'étendant depuis S' jusqu'à l'infini. On peut supposer α assez grand et, par suite, S' assez voisine de S, pour que le domaine T'_1

soit contenu dans la portion de l'espace où les surfaces de niveau P = const. et les lignes de force sont bien régulières.

Posons

$$H = \alpha(\alpha - 1)\int_{(T'_2)} P^{\alpha-2}\, W'_p\, W'_q \sum\left(\frac{\partial P}{\partial x'}\right)^2 d\tau'.$$

On a manifestement

$$|H| < A\alpha^2\left(1 - \frac{1}{\sqrt[4]{\alpha^3}}\right)^{\alpha-2},$$

A étant une certaine constante indépendante de α. On voit par là que H tend aussi vers zéro.

Finalement, on a

$$2\,J'_{p,q} = -\lim\alpha(\alpha - 1)\int_{(T'_1)} P^{\alpha-2}\, W'_p\, W'_q \sum\left(\frac{\partial P}{\partial x'}\right)^2 d\tau'.$$

Considérons les surfaces équipotentielles P = const. et leurs trajectoires orthogonales. Soient $d\sigma$ un élément d'une surface de niveau, ds un élément d'une ligne de force.

Comptons les arcs s dans le sens des potentiels P décroissants. On peut écrire

$$\sum\left(\frac{\partial P}{\partial x'}\right)^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial s}\right)^2, \qquad d\tau' = d\sigma\, ds;$$

d'où

$$2\,J'_{p,q} = -\lim\alpha(\alpha - 1)\int_{(s)}\int_{(\sigma)} P^{\alpha-2}\, W'_p\, W'_q \left(\frac{\partial P}{\partial s}\right)^2 d\sigma\, ds.$$

Or

$$ds = \frac{1}{\dfrac{\partial P}{\partial s}}\, dP.$$

D'où

$$2\,J'_{p,q} = -\lim\alpha(\alpha - 1)\int_{P=1}^{P=1-\frac{1}{\sqrt[4]{\alpha^3}}}\int_{(\Sigma)} P^{\alpha-2}\, W'_p\, W'_q \frac{\partial P}{\partial s}\, d\sigma\, dP,$$

Σ désignant une des surfaces de niveau.

Posons

$$F(P) = \int_{(\Sigma)} W'_p\, W'_q \frac{\partial P}{\partial s}\, d\sigma.$$

Il vient

$$2J'_{p,q} = \lim \alpha(\alpha - 1) \int_{P=1-\frac{1}{\sqrt[4]{\alpha^3}}}^{P=1} P^{\alpha-2} F(P)\, dP.$$

Soit P′ une valeur de P comprise entre 1 et $1 - \frac{1}{\sqrt[4]{\alpha^3}}$. On a

$$F(P) = F(1) + (P - 1)\frac{dF(1)}{dP} + \frac{(P-1)^2}{2}\frac{d^2F(P')}{dP^2},$$

d'après la formule de Taylor limitée au troisième terme.

La relation

$$\int_{(S)} \varphi V_p V_q\, d\sigma = 0$$

nous donne

$$F(1) = 0.$$

Calculons $\frac{dF(P)}{dP}$. Soient P le paramètre qui correspond à la surface Σ et $P + dP$ celui qui correspond à une surface Σ' voisine de Σ. Si dP est positif, Σ' est plus rapproché de S que Σ. On a

$$F(P) = \int_{(\Sigma)} (W'_p W'_q)_\Sigma \left(\frac{\partial P}{\partial s}\right)_\Sigma d\sigma,$$

$$F(P + dP) = \int_{(\Sigma')} (W'_p W'_q)_{\Sigma'} \left(\frac{\partial P}{\partial s}\right)_{\Sigma'} d\sigma',$$

les indices indiquant que l'on prend les valeurs des fonctions qu'ils affectent en un point de Σ ou de Σ'. Or la propriété caractéristique des tubes de force nous donne

$$\left(\frac{\partial P}{\partial s}\right)_\Sigma d\sigma = \left(\frac{\partial P}{\partial s}\right)_{\Sigma'} d\sigma',$$

d'où

$$\frac{F(P+dP) - F(P)}{dP} = \int_{(\Sigma)} \frac{(W'_p W'_q)_{\Sigma'} - (W'_p W'_q)_\Sigma}{dP}\left(\frac{\partial P}{\partial s}\right)_\Sigma d\sigma,$$

c'est-à-dire

$$\frac{F(P+dP) - F(P)}{dP} = \int_{(\Sigma)} \frac{(W'_p W'_q)_{\Sigma'} - (W'_p W'_q)_\Sigma}{ds}\, d\sigma.$$

On conclut de là

$$\frac{d\,F(P)}{dP} = -\int_{(\Sigma)} \frac{d(W'_p W'_q)}{dn_e}\, d\sigma,$$

et, par suite,

$$\frac{d\,F(1)}{dP} = 2\,J'_{p,q}.$$

On peut calculer de même bien aisément $\frac{d^2F}{dP^2}$:

$$\frac{d^2F}{dP^2} = 2\int_{(\Sigma)} \frac{1}{\frac{\partial P}{\partial s}} \sum \frac{\partial W'_p}{\partial x'}\,\frac{\partial W'_q}{\partial x'}\, d\sigma.$$

D'où l'on tire qu'il existe une limite supérieure A de $\left|\frac{d^2F}{dP^2}\right|$.

Finalement, on a

$$F(P) = -2(1-P)J'_{p,q} + \frac{(1-P)^2}{2}\,\frac{d^2F(P')}{dP^2},$$

d'où

$$4J'_{p,q}\left[1 + \operatorname{Lim}\alpha(\alpha-1)\int_{P=1-\frac{1}{\sqrt[4]{\alpha^3}}}^{P=1} P^{\alpha-2}(1-P)\,dP\right]$$

$$= \operatorname{Lim}\alpha(\alpha-1)\int_{P=1-\frac{1}{\sqrt[4]{\alpha^3}}}^{P=1} P^{\alpha-2}(1-P)^2\,\frac{d^2F(P')}{dP^2}\,dP.$$

Calculons chacune des limites.

La valeur absolue du second membre est moindre que

$$\alpha^2 A\,\frac{1}{\sqrt{\alpha^3}}\,\frac{1}{\sqrt[4]{\alpha^3}} = A\,\frac{\alpha^2}{\sqrt[4]{\alpha^9}} = A\,\frac{1}{\alpha^{\frac{1}{4}}}.$$

Ce second membre tend donc vers zéro.

Maintenant, on a

$$\alpha(\alpha-1)\int_{P=1-\frac{1}{\sqrt[4]{\alpha^3}}}^{P=1} P^{\alpha-2}(1-P)\,dP > 0.$$

La quantité entre crochets dans le premier membre est donc supérieure à 1. Mais le premier membre doit tendre vers zéro, puisqu'il en est ainsi du second. On a donc

$$J'_{p,q} = 0.$$

Or

$$J_{p,q} + J'_{p,q} = 0.$$

Donc

$$J_{p,q} = 0.$$

Ainsi, les deux quantités $J_{p,q}$ et $J'_{p,q}$ sont séparément nulles.

De ce théorème vont résulter plusieurs conséquences. Je vais les exposer rapidement [1], en conduisant d'abord les calculs, pour abréger, comme si toutes les séries qui se rencontreront étaient absolument et uniformément convergentes. Je dirai en terminant (n° 71) comment les résultats que j'obtiendrai ainsi sont cependant rigoureux. D'ailleurs les remarques faites à la fin du n° 61 suffisent à elles seules pour justifier ce qui suit.

67. Formons l'expression

$$\frac{dV_p}{dn_i} - \lambda \frac{dV'_p}{dn_e},$$

λ étant une certaine constante laissée indéterminée pour le moment. Soit φ la quantité $-\frac{dP}{dn_e}$. Écrivons le développement en série :

$$\frac{1}{\varphi}\left(\frac{dV_p}{dn_i} - \lambda \frac{dV'_p}{dn_e}\right) = \sum B_q V_q.$$

On a

$$B_q = \lambda J'_{p,q} - J_{p,q},$$

d'où

$$B_q = 0,$$

quel que soit λ, pourvu que q soit distinct de p.

(1) *Voir* H. POINCARÉ, *Sur la méthode de Neumann et le problème de Dirichlet* (*Acta mathematica*, 1896).

Choisissons maintenant λ de façon que B_p soit nul. On doit prendre

$$J_{2p} - \lambda J'_{2p} = 0,$$

d'où

$$\lambda = \lambda_p = \frac{J_{2p}}{J'_{2p}},$$

et λ_p est bien déterminé, car J'_{2p} n'est nul pour aucune valeur de p.

Tous les calculs précédents sont légitimes. En effet, φ ne s'annule jamais et l'expression étudiée, étant continue, est bien développable en série de la forme voulue (n° 61).

Finalement, posons

$$\lambda_p = \frac{J_{2p}}{J'_{2p}}.$$

On a

$$\frac{dV_p}{dn_i} - \lambda_p \frac{dV'_p}{dn_e} = 0$$

sur S.

Il est clair qu'on peut, en multipliant chaque fonction W_p par un facteur convenable, s'arranger de façon que

$$J'_{2p} = 1.$$

On a alors

$$\lambda_p = J_{2p}.$$

Tous les λ_p sont réels et positifs.

On a manifestement $\lambda_1 = 0$. Mais aucun autre nombre λ_p de rang déterminé n'est nul ou infini.

Cela posé, la formule de Green donne

$$2J'_{2p} = \int_{(S)} \varphi V_p^2 \, d\sigma + 2\int_{(T')} P \, \Sigma \left(\frac{\partial W'_p}{\partial x'}\right)^2 d\tau',$$

d'où

$$J'_{2p} > \tfrac{1}{2} I_{2p}, \qquad \lambda_p < 2\xi_p.$$

D'autre part, les raisonnements du Chapitre II permettent, pour $p \geqq 2$, d'assigner une limite inférieure non nulle à toutes les quantités $\frac{J_{2p}}{I_{2p}}$. Donc λ_p est au moins de l'ordre de $\frac{1}{\xi_p}$.

Dans le cas où la surface S est *simplement connexe,* M. Poincaré a montré (*loc. cit.*) que les λ_p sont nécessairement tous compris entre deux nombres positifs déterminés. Cette proposition est bien probablement générale; mais je n'aurai pas à m'en servir.

Enfin l'application des procédés du Calcul des variations à l'étude du rapport $\frac{J}{J'}$ conduit à penser que les λ_p forment une suite croissante. Toutefois, je ne me préoccuperai pas de transformer cet aperçu en démonstration rigoureuse, les inégalités établies ci-dessus devant me suffire.

En résumé, les fonctions signalées par M. Poincaré au Chapitre VI (n° 1) de son *Mémoire sur la méthode de Neumann et le problème de Dirichlet* coïncident avec les fonctions harmoniques fondamentales de la classe principale. Leur existence est donc prouvée et leurs propriétés sont connues. Voyons-en rapidement quelques applications.

68. Soit Φ une fonction continue arbitraire des coordonnées (u, v) d'un point de S. Nous savons (n° 61) que l'on peut développer Φ en série procédant suivant les fonctions fondamentales et maniable comme une série absolument et uniformément convergente. On a

$$\Phi = \Sigma A_p V_p$$

avec

$$A_p \int_{(S)} \varphi V_p^2 \, d\sigma = \int_{(S)} \varphi \Phi V_p \, d\sigma.$$

Cette série représente en réalité la fonction harmonique qui se réduit à Φ sur S.

Le calcul des coefficients A_p peut encore être conduit d'une autre façon. Multiplions par $\frac{dV'_p}{dn_e}$ et intégrons. En tenant compte des relations

$$J_{2p} = \lambda_p J'_{2p}, \qquad J'_{p,q} = 0,$$

il vient

$$A_p = -\int_{(S)} \Phi \frac{dV'_p}{dn_e} \, d\sigma,$$

si les fonctions W_p ont été multipliées par des facteurs tels que l'on ait $J'_{2p} = 1$: c'est ce que montre d'ailleurs l'égalité évidente

$$\frac{dV'_p}{dn_e} + \frac{\xi_p}{1+\lambda_p}\varphi V_p = 0.$$

La série

$$\Sigma A_p W_p$$

représente un potentiel de simple couche qui prend sur S les valeurs Φ.

Soit maintenant W un potentiel de double couche. On sait que l'on a

$$V - V' \neq 0, \qquad \frac{dV}{dn_i} + \frac{dV'}{dn_e} = 0.$$

Cette fois, il faudra deux séries distinctes pour représenter W. L'une sera valable dans T, l'autre dans T'.

Posons

$$W = \Sigma A_p W_p, \qquad W' = \Sigma A'_p W'_p.$$

On en déduit

$$\frac{dV}{dn_i} = \sum A_p \frac{dV_p}{dn_i}, \qquad \frac{dV'}{dn_e} = \sum A'_p \frac{dV'_p}{dn_e}.$$

En effet, $\frac{dV}{dn_i}$ par exemple étant une fonction continue de (u, v), on peut écrire

$$\frac{1}{\varphi}\frac{dV}{dn_i} = \sum B_p V_p.$$

On a

$$B_p = \frac{\int_{(S)} \frac{dV}{dn_i} V_p\, d\sigma}{\int_{(S)} \varphi V_p^2\, d\sigma} = \frac{\int_{(S)} V \frac{dV_p}{dn_i}\, d\sigma}{\int_{(S)} \varphi V_p^2\, d\sigma}.$$

Or

$$\frac{dV_p}{dn_i} + \frac{\xi_p \lambda_p}{1+\lambda_p}\varphi V_p = 0,$$

d'où

$$B_p = \frac{-\int_{(S)} \varphi V V_p\, d\sigma}{\int_{(S)} \varphi V_p^2\, d\sigma} \frac{\xi_p \lambda_p}{1+\lambda_p},$$

c'est-à-dire

$$B_p = -\frac{\xi_p \lambda_p}{1+\lambda_p} A_p.$$

Par conséquent

$$\frac{dV}{dn_i} = \sum B_p \varphi V_p = \sum A_p \frac{dV_p}{dn_i}.$$

On établirait de même l'égalité

$$\frac{dV'}{dn_e} = \sum A'_p \frac{dV'_p}{dn_e}.$$

Chacune des équations précédentes est *purement symbolique*, car les séries du second membre peuvent être divergentes; ces équations expriment seulement la possibilité du développement de $\frac{1}{\varphi}\frac{dV}{dn_i}$ et de $\frac{1}{\varphi}\frac{dV'}{dn_e}$ suivant les fonctions fondamentales, d'après les formules

$$\frac{1}{\varphi}\frac{dV}{dn_i} = -\sum \frac{\xi_p \lambda_p}{1+\lambda_p} A_p V_p,$$

$$\frac{1}{\varphi}\frac{dV'}{dn_e} = -\sum \frac{\xi_p}{1+\lambda_p} A'_p V'_p,$$

entendues au sens du n° 61. Toutes les séries qui viennent d'être écrites sont d'ailleurs visiblement maniables comme des séries absolument et uniformément convergentes.

Mais on a

$$\frac{dV_p}{dn_i} = \lambda_p \frac{dV'_p}{dn_e}, \qquad \frac{dV}{dn_i} + \frac{dV'}{dn_e} = 0,$$

d'où

$$\Sigma(A_p \lambda_p + A'_p)\frac{dV'_p}{dn_e} = 0.$$

La nouvelle série est encore semblable à une série absolument et uniformément convergente. On peut donc intégrer terme à terme, après multiplication par V_p. On trouve ainsi

$$A_p \lambda_p + A'_p = 0.$$

Donc

$$W = \Sigma A_p W_p, \qquad W' = -\Sigma A_p \lambda_p W'_p.$$

Telle est la représentation d'un potentiel de double couche. Cela suppose évidemment (pour assurer la légitimité des développements en séries) que la surface S est régulière et que la densité de la double couche présente certains caractères de continuité sur lesquels je n'insiste pas. En outre, dans tout ce qui précède, je raisonne sur les fonctions W_p telles que $J'_{2p} = 1$.

Proposons-nous de voir que la méthode de Neumann pour la solution du problème de Dirichlet réussit quel que soit l'ordre de connexion de S. La démonstration classique ne vaut que pour les surfaces *convexes* (¹). M. Poincaré l'a étendue aux surfaces *simplement connexes* (²). Je vais faire voir qu'elle est *générale*. Nous obtiendrons ainsi une nouvelle expression analytique de la fonction harmonique W qui prend sur S les valeurs Φ. Ce ne sera plus par un potentiel de simple couche, mais par un potentiel de double couche. Mais il est clair que nous ne pouvons pas nous servir de cette expression pour démontrer le principe de Dirichlet, c'est-à-dire l'existence de W.

Soit λ une constante. Cherchons une double couche portée par S dont le potentiel W satisfasse à la condition

$$V - V' = \lambda(V + V') + 2\Phi. \tag{1}$$

Nous donnerons à ce problème le nom de *Problème de Neumann*. Si l'on fait

$$\lambda = 1,$$

on a

$$V' = -\Phi,$$

et le problème extérieur de Dirichlet est résolu. Si l'on fait

$$\lambda = -1,$$

on a

$$V = \Phi,$$

et c'est le problème intérieur de Dirichlet qui est résolu.

(¹) H. Poincaré, *Théorie du potentiel newtonien*, Chap. VIII.

(²) H. Poincaré, *Sur la méthode de Neumann et le problème de Dirichlet* (*Acta mathematica*, 1896).

Posons, conformément aux remarques faites plus haut :

$$\begin{aligned}\Phi &= \Sigma A_p W_p,\\ W &= \Sigma B_p W_p,\\ W' &= -\Sigma B_p \lambda_p W'_p.\end{aligned}$$

La condition (1) nous donne

$$B_p = \frac{2A_p}{1+\lambda_p-\lambda(1-\lambda_p)};$$

d'où

$$W = 2\Sigma \frac{A_p}{1+\lambda_p-\lambda(1-\lambda_p)} W_p,$$

$$W' = -2\Sigma \frac{A_p\lambda_p}{1+\lambda_p-\lambda(1-\lambda_p)} W'_p,$$

et le problème de Neumann est ainsi résolu (n° 71).

Les λ_p sont positifs, sauf λ_1 qui est nul. On peut donc toujours faire $\lambda = -1$; les coefficients B_p restent finis. On a alors

$$W = \Sigma A_p W_p, \qquad W' = -\Sigma A_p \lambda_p W'_p.$$

Le problème de Dirichlet intérieur peut toujours être résolu au moyen d'un potentiel de double couche.

Il n'en est plus de même pour le problème extérieur. Faisons $\lambda = 1$. Il vient

$$W = \sum \frac{A_p}{\lambda_p} W_p, \qquad W' = -\Sigma A_p W'_p.$$

On voit qu'une condition est nécessaire :

$$A_1 = 0.$$

Cela équivaut à

$$\int_{(S)} \varphi \Phi \, d\sigma = 0.$$

Dans ce cas seulement, le problème de Dirichlet extérieur peut être résolu par un potentiel de double couche.

Cela posé, la méthode de Neumann consiste à développer la solution du problème de Neumann en série ordonnée suivant les puissances de λ

$$W = \Sigma \lambda^q W^{(q)}.$$

On constate aisément alors que les $W^{(q)}$ sont des potentiels de doubles couches; la densité de la double couche qui correspond à $W^{(0)}$ est $\frac{1}{2\pi}\Phi$, celle de la double couche qui correspond à $W^{(q+1)}$ est

$$\frac{1}{2\pi}\frac{V_i^{(q)}+V_e^{(q)}}{2}.$$

Les $W^{(q)}$ sont donc faciles à former de proche en proche. Tout revient à étudier la convergence, pour $\lambda = \pm 1$, de la série précédente dite *série de Neumann*.

On a

$$\frac{1}{1+\lambda_p-\lambda(1-\lambda_p)} = \sum \frac{(1-\lambda_p)^q}{(1+\lambda_p)^{q+1}}\lambda^q,$$

d'où

$$W_i^{(q)} = \sum_p \left(\frac{1-\lambda_p}{1+\lambda_p}\right)^q \frac{2A_p W_p}{1+\lambda_p},$$

à l'intérieur et

$$W_e^{(q)} = -\sum_p \left(\frac{1-\lambda_p}{1+\lambda_p}\right)^q \frac{2A_p\lambda_p W_p}{1+\lambda_p}$$

à l'extérieur.

Faisons

$$\lambda = -1.$$

Étudions la série

$$\Sigma(-1)^q W_i^{(q)}.$$

Faisons aussi

$$\lambda = +1$$

et étudions la série

$$\Sigma W_e^{(q)}.$$

Si l'on a

$$\int_{(S)} \varphi\Phi\, d\sigma = 0,$$

le terme en λ_1 n'existe nulle part. Toutes les quantités

$$\frac{1-\lambda_p}{1+\lambda_p}$$

sont inférieures à 1 à partir de $p = 2$. Il n'y a alors aucune difficulté, comme on le voit, en considérant la série double absolument convergente

$$\sum \sum \left| \frac{1-\lambda_p}{1+\lambda_p} \right|^q \frac{2 \mid A_p W_p \mid}{1+\lambda_p}.$$

Dans ce cas, la méthode de Neumann donne la solution du problème de Dirichlet, quelle que soit la forme de la surface S.

Supposons maintenant que Φ ne vérifie pas la condition précédente. Posons

$$\Phi = \Phi' + C.$$

Supposons que

$$\int_{(S)} \varphi \Phi' \, d\sigma = 0.$$

Alors

$$C = \int_{(S)} \varphi \Phi \, d\sigma.$$

Posons

$$W = W + W'$$

avec

$$V_i - V_e = \lambda (V_i + V_e) + 2\Phi', \qquad V'_i - V'_e = \lambda (V'_i + V'_e) + 2C.$$

On peut calculer W par la méthode de Neumann, et c'est un potentiel de double couche. Quant à W', c'est évidemment le potentiel d'une simple couche en équilibre électrique sur S. Il est clair que W' peut être regardé dans T comme le potentiel d'une double couche homogène.

Voici, finalement, les conclusions que nous pouvons formuler :

Pour le problème intérieur, la solution W *peut toujours être regardée comme un potentiel de double couche.*

Pour le problème extérieur, la solution W *peut toujours être regardée comme la somme d'un potentiel de double couche et d'un potentiel de simple couche, ce dernier étant dû à une couche d'électricité distribuée de façon à être en équilibre sur* S.

Si l'on a

$$\int_{(S)} \varphi \Phi \, d\sigma = 0,$$

la méthode de Neumann est applicable.

On voit, par l'exemple qui précède, que la considération des fonctions harmoniques fondamentales attachées à une surface fermée peut être de quelque utilité dans la théorie du principe de Dirichlet. Nous allons voir maintenant qu'elle peut conduire à la résolution de certains problèmes autres que le problème de Dirichlet.

69. Voici le problème que nous allons chercher à résoudre : *trouver une fonction* W, *harmonique à la fois dans* T *et dans* T', *qui vérifie soit la relation*

$$\frac{dV}{dn_i} = \Phi,$$

soit la relation

$$\frac{dV'}{dn_e} = \Phi,$$

en tout point de S. La fonction inconnue W devra être, en outre, un potentiel de simple couche.

Ici encore, la solution est depuis longtemps connue si la surface S est *convexe*. M. Poincaré a traité le cas d'une surface *simplement connexe* quelconque. Par un procédé plus rapide, je vais résoudre le même problème pour une surface S dont l'ordre de connexion est arbitraire.

Reprenons les fonctions fondamentales W_p, en supposant que l'on ait

$$J'_{2p} = 1.$$

On a

$$\frac{dV_p}{dn_i} + \frac{dV'_p}{dn_e} + \xi_p \varphi V_p = 0$$

et

$$\frac{dV_p}{dn_i} = \lambda_p \frac{dV'_p}{dn_e},$$

d'où

$$\frac{dV'_p}{dn_e} + \frac{\xi_p}{1+\lambda_p} \varphi V_p = 0,$$

en tout point de S.

Soit Φ une fonction continue arbitraire de (u, v). On sait que φ jouit de la même propriété et ne s'annule jamais. On peut donc écrire

$$\frac{1}{\varphi}\Phi = \Sigma A'_p V_p,$$

ou bien

$$\Phi = \Sigma A_p \frac{dV'_p}{dn_e},$$

en posant

$$A_p = -\frac{1+\lambda_p}{\xi_p} A'_p.$$

La convergence est, de plus, *absolue et uniforme*, au sens du n° 61.

Multiplions par V_p et intégrons. Il vient

$$A_p = -\int_{(S)} V_p \Phi \, d\sigma.$$

Le calcul des A_p est immédiat.

Cherchons alors une simple couche portée par S dont le potentiel W vérifie la relation

$$(1) \qquad \frac{dV}{dn_i} + \frac{dV'}{dn_e} = \lambda \left(\frac{dV}{dn_i} - \frac{dV'}{dn_e} \right) + 2\Phi.$$

Soit

$$W = \Sigma B_p W_p.$$

Il vient

$$\frac{dV}{dn_i} = \sum B_p \frac{dV_p}{dn_i}, \qquad \frac{dV'_p}{dn_e} = \sum B_p \frac{dV'_p}{dn_e}.$$

On peut écrire

$$\frac{dV}{dn_i} = \sum B_p \lambda_p \frac{dV'_p}{dn_e}.$$

La relation (1) donne alors

$$B_p = \frac{2A_p}{1+\lambda_p + \lambda(1-\lambda_p)}$$

et le problème proposé est résolu. On a

$$W = 2\sum \frac{A_p}{1+\lambda_p+\lambda(1-\lambda_p)} W_p,$$

évidemment; la vérification ne présente aucune difficulté (n° 71).

Les λ_p sont positifs. On peut toujours faire

$$\lambda = +1.$$

Les coefficients B_p restent finis, même dans ce cas. On a

$$W = \Sigma A_p W_p,$$

d'où

$$\frac{dV'}{dn_e} = \Phi$$

et il n'y a aucune condition de possibilité.

Faisons maintenant

$$\lambda = -1.$$

Puisque λ_1 est nul, le coefficient B_1 ne reste fini que si A_1 est nul aussi. On a alors

$$W = \sum \frac{A_p}{\lambda_p} W_p,$$

d'où

$$\frac{dV}{dn_i} = \sum \frac{A_p}{\lambda_p} \frac{dV_p}{dn_i} = \sum A_p \frac{dV'_p}{dn_e},$$

c'est-à-dire

$$\frac{dV}{dn_i} = \Phi.$$

Mais il y a une condition de possibilité

$$A_1 = 0,$$

c'est-à-dire

$$\int_{(S)} \Phi \, d\sigma = 0,$$

puisque V_1 est constant sur S.

Notre problème est donc résolu dans tous les cas. Il est facile de s'expliquer la condition de possibilité rencontrée pour le problème intérieur. Ce problème consiste à déterminer l'équilibre calorifique quand on connaît d'avance le flux de chaleur à la surface du corps. Il ne peut évidemment y avoir équilibre que si la somme totale des flux périphériques est nulle.

Revenons, pour terminer, au cas où λ a une valeur quelconque et écrivons

$$W = \Sigma \lambda^q W^{(q)}.$$

On a

$$\frac{1}{1 + \lambda_p + \lambda(1 - \lambda_p)} = \sum_q (-1)^q \frac{\lambda^q (1 - \lambda_p)^q}{(1 + \lambda_p)^{q+1}},$$

d'où

$$(-1)^q W^{(q)} = \sum_p \frac{2A_p}{1+\lambda_p} \left(\frac{1-\lambda_p}{1+\lambda_p}\right)^q W_p.$$

Il n'y a, à tout cela, aucune difficulté.

Faisons grandir q indéfiniment. Comme λ_p est positif, le rapport

$$\left(\frac{1-\lambda_p}{1+\lambda_p}\right)^q$$

tend vers zéro, pour toute valeur de p à partir de $p = 2$. Comme λ_1 est nul, on a

$$\frac{1-\lambda_1}{1+\lambda_1} = 1.$$

Donc

$$\operatorname{Lim} (-1)^q W^{(q)} = 2A_1 W_1.$$

On voit que $(-1)^q W^{(q)}$ tend vers le potentiel de l'électricité en équilibre sur S. *C'est là le principe de la méthode de M. Robin.*

70. Je veux donner encore une application des fonctions fondamentales.

La théorie du Magnétisme conduit à poser le problème suivant :

Trouver une fonction V *jouissant des propriétés de continuité fondamentales dans* T *et dans* T', *se comportant à l'infini à la façon d'un potentiel, harmonique dans* T *et dans* T', *vérifiant la relation*

$$\frac{dV}{dn_i} + h \frac{dV'}{dn_e} = \Phi \tag{1}$$

en tout point de S, Φ *étant une fonction donnée et* h *une constante positive.*

Posons

$$\Phi = \sum A_p \frac{dV'_p}{dn_e}$$

et

$$V = \Sigma B_p W_p.$$

Il vient, d'après la relation (1),

$$B_p \lambda_p + h B_p = A_p, \qquad \text{d'où} \qquad B_p = \frac{A_p}{h+\lambda_p}$$

et, par suite,

$$V = \sum \frac{A_p}{h + \lambda_p} W_p.$$

Notre problème est ainsi résolu.

Cela permet de résoudre un problème, analogue au précédent, sauf que V est, dans T, solution de l'équation

$$\Delta V + \varphi = 0,$$

φ étant une fonction donnée. On pose, en effet,

$$V = \frac{1}{4\pi} \int_{(T)} \frac{\varphi}{r} d\tau + U,$$

et U est alors déterminé comme ci-dessus.

J'arrêterai là les exemples d'applications des fonctions fondamentales : on voit que ces fonctions sont aptes à servir dans une multitude de circonstances que l'on rencontre en Physique mathématique.

71. Une remarque pour finir : tous les calculs précédents sont légitimes si Φ a, par rapport à u et v, des dérivées continues de tous les ordres [1]. Il est probable que le théorème du n° 61 permettrait de les faire encore, bien qu'avec un peu plus de difficulté, lorsque Φ est une fonction simplement continue. Mais je me limite au cas simple.

Considérons, par exemple, le dernier problème traité (n° 70) et vérifions que nous en avons bien obtenu la solution.

Posons donc

$$A_p = -\int_{(S)} \Phi V_p \, d\sigma, \qquad V = \sum \frac{A_p}{h + \lambda_p} W_p.$$

On peut affirmer la continuité de V, $\frac{dV}{dn_i}$ et $\frac{dV'}{dn_e}$. Nous savons déjà, par les inégalités établies aux n^{os} 59 et 61, que V est une fonction harmonique dans T et dans T', se comportant à l'infini comme un potentiel newtonien. Tout revient à voir quelle relation est satisfaite en chaque point de S.

---

(1) En effet, on voit (n° 59) que $\xi_p^\alpha \,|\, A_p W_p \,|$ tend alors vers zéro, quel que soit l'entier positif α.

Considérons les fonctions harmoniques

$$A, \quad B, \quad C,$$

prenant respectivement sur S les valeurs

$$\frac{1}{\varphi}\frac{dV}{dn_i}, \quad \frac{1}{\varphi}\frac{dV'}{dn_e}, \quad \frac{1}{\varphi}\Phi.$$

Soit

$$A = \Sigma \alpha_p W_p.$$

On a

$$\alpha_p = \frac{\int_{(S)} \frac{dV}{dn_i} V_p d\sigma}{\int_{(S)} \varphi V_p^2 d\sigma} = \frac{\int_{(S)} V \frac{dV_p}{dn_i} d\sigma}{\int_{(S)} \varphi V_p^2 d\sigma}.$$

Or

$$\frac{dV_p}{dn_i} + \frac{\xi_p \lambda_p}{1 + \lambda_p} \varphi V_p = 0,$$

d'où

$$\alpha_p = -\frac{\xi_p \lambda_p}{1 + \lambda_p} \frac{\int_{(S)} \varphi V V_p d\sigma}{\int_{(S)} \varphi V_p^2 d\sigma}.$$

Mais

$$\frac{\int_{(S)} \varphi V V_p d\sigma}{\int_{(S)} \varphi V_p^2 d\sigma} = \frac{A_p}{h + \lambda_p}.$$

Donc

$$\alpha_p = -\frac{A_p}{h + \lambda_p} \frac{\xi_p \lambda_p}{1 + \lambda_p}.$$

Finalement, on constate que l'on a

$$A = -\sum \frac{A_p}{h + \lambda_p} \frac{\xi_p \lambda_p}{1 + \lambda_p} W_p,$$

$$B = -\sum \frac{A_p}{h + \lambda_p} \frac{\xi_p}{1 + \lambda_p} W_p,$$

$$C = -\sum A_p \frac{\xi_p}{1 + \lambda_p} W_p.$$

Cela posé, la fonction harmonique

$$A + hB - C$$

prend sur S les valeurs

$$\frac{1}{\varphi}\left(\frac{dV}{dn_i} + h\frac{dV'}{dn_e} - \Phi\right).$$

On obtient évidemment son développement en série en ajoutant terme à terme les séries précédentes. Or, on a

$$\frac{A_p}{h+\lambda_p}\,\frac{\xi_p\lambda_p}{1+\lambda_p} + h\,\frac{A_p}{h+\lambda_p}\,\frac{\xi_p}{1+\lambda_p} - A_p\,\frac{\xi_p}{1+\lambda_p} = 0.$$

Donc

$$A + hB - C = 0.$$

Par suite,

$$\frac{dV}{dn_i} + h\frac{dV'}{dn_e} - \Phi = 0.$$

C'est ce que nous voulions prouver.

Pour tous les autres problèmes résolus dans les pages précédentes, la vérification se ferait d'une manière aussi simple.

Je rappelle, en terminant, les deux hypothèses que nous avons faites dans tout ce Chapitre :

1° La surface S est formée d'une seule nappe régulière, qui peut être d'un ordre de connexion quelconque.

2° La fonction Φ possède, par rapport à u et v, des dérivées de tous les ordres.

Il est bien clair que ces hypothèses ne sont pas indispensables ; des généralisations seraient sans doute faciles ; mais je ne m'en suis pas occupé. Je dois cependant faire remarquer que toutes les démonstrations contenues dans ce Chapitre subsistent si la surface S est formée de plusieurs nappes extérieures les unes aux autres, le domaine T' étant alors connexe. C'est le cas le plus intéressant au point de vue de la Physique.

TROISIÈME PARTIE.

LE REFROIDISSEMENT DES CORPS SOLIDES ET LE PROBLÈME DE FOURIER.

I. — Énoncé du problème de Fourier. — Réduction du cas général à un cas simple. — Solution pour une sphère et pour deux sphères concentriques.

72. Le *problème des températures variables*, auquel nous donnerons plus spécialement le nom de *problème de Fourier*, se rapporte au refroidissement d'un corps solide, homogène, isotrope et athermane, isolé dans l'espace, primitivement chargé de chaleur suivant une loi de distribution donnée, puis abandonné à lui-même, tous les points de sa surface étant portés à des températures que l'on suppose connues d'avance pour chaque instant.

Les seuls travaux que l'on puisse citer sur cette matière sont dus à M. Poincaré [1]. Ils sont relatifs à la méthode des solutions simples; mais on n'a pas réussi jusqu'à présent à obtenir par cette voie une réponse précise à notre question.

Je suivrai une marche toute différente. Au lieu d'éliminer des calculs la variable t qui représente le temps et de ramener ainsi l'intégration cherchée au développement d'une fonction de (x, y, z) en série d'une certaine forme, je démontrerai directement l'existence d'une solution du problème de Fourier, comme il a été fait pour le problème de Dirichlet généralisé. Les séries que M. Poincaré considérait *a priori*, ne seront d'ailleurs pas rejetées pour cela : elles se retrouveront à la fin, et leurs propriétés résulteront du théorème d'existence établi d'abord.

73. Voyons comment il convient de poser le problème de Fourier, au point de vue de l'Analyse.

---

[1] H. Poincaré, *American Journal*, 1890. — *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, 1894. — *Théorie analytique de la propagation de la chaleur*. Paris, Carré, 1895.

Je prends les notations (x, y, z, t, V) pour désigner les variables indépendantes et la fonction inconnue.

Considérons un domaine connexe T limité par une surface fermée S qui peut être composée de plusieurs nappes entièrement séparées. Je ferai sur S les mêmes hypothèses que pour le problème de Dirichlet généralisé.

Soit Φ une fonction donnée, définie et continue en tout point de S et pour toute valeur positive de t. Soit, de même, $\varphi(x, y, z)$ une fonction donnée, définie et continue en tout point de T. Diverses hypothèses doivent être faites sur Φ : elles seront expliquées plus loin.

Cela posé, la fonction V des quatre variables indépendantes (x, y, z, t) doit remplir les conditions suivantes :

1° En tout point du domaine T et pour toute valeur positive de t, la fonction V sera uniforme, finie et continue ainsi que ses dérivées partielles du premier ordre par rapport à t et des deux premiers ordres par rapport à (x, y, z).

2° En tout point de T et pour toute valeur positive de t, on aura

$$\Delta V = \frac{\partial V}{\partial t}.$$

3° Soit M_0 un point de S. Appelons $\Phi_{M_0}(t_0)$ la valeur de Φ en M_0 à l'instant t_0. Soit M un point de T. Appelons $V_M(t)$ la valeur de V en M à l'instant t. Enfin imaginons un chemin continu C allant de M en M_0 sans jamais sortir de T. Quand le point (x, y, z) décrit C, $V_M(t_0)$ aura pour limite $\Phi_{M_0}(t_0)$, quels que soient le point M_0, le chemin C et l'instant t_0 $(t_0 > 0)$.

4° Soit φ_M la valeur de φ en M. Lorsque t tend vers zéro, $V_M(t)$ tendra vers φ_M, quel que soit le point M envisagé dans T (M non situé sur S).

Je me propose de montrer qu'il existe toujours une fonction remplissant ces diverses conditions.

Voyons d'abord que le problème proposé comporte au plus une solution.

En effet, supposons qu'il y ait deux solutions distinctes V_1 et V_2 et posons

$$V = V_1 - V_2.$$

La fonction V jouit des propriétés suivantes :

1° Elle remplit les conditions de continuité prescrites;

2° Elle est solution de l'équation aux dérivées partielles;

3° Elle se réduit à zéro sur S;

4° Elle se réduit à zéro pour $t = 0$.

Je dis qu'une telle fonction est identiquement nulle.

En effet, je vais montrer que, nulle à l'origine des temps, elle ne peut ultérieurement devenir positive ou négative en aucun point.

Supposons par exemple qu'elle arrive à prendre des valeurs négatives. Ce ne sera pas sur S où elle reste nulle. Il y aura donc pour elle, à un certain instant positif et en un certain point intérieur à T, un minimum négatif encore décroissant. Or, en un tel point, d'après le raisonnement du n° 11, on aurait

$$\Delta V \geqq 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial t} < 0.$$

Par suite, contrairement à l'hypothèse, l'équation aux dérivées partielles ne pourrait pas être satisfaite au point et à l'instant considérés. Donc la fonction V ne peut pas devenir négative.

On verrait de même qu'elle ne peut pas devenir positive. On a donc

$$V \equiv 0, \qquad V_1 \equiv V_2,$$

et la proposition énoncée est établie.

Ainsi le problème de Fourier ne comporte sûrement pas plus d'une solution.

74. Je me propose maintenant de montrer que le problème de Fourier, dans les termes où il a été posé, comporte toujours effectivement une solution. D'après ce que nous venons de voir, il suffira de prouver que l'on peut dans tous les cas construire une fonction remplissant les conditions prescrites, quel que soit le procédé employé pour faire cette construction.

Je commencerai par ramener le cas général où les températures périphériques données sont variables avec le temps au cas simple où elles sont constamment nulles.

Reprenons les notations du numéro précédent et posons

$$V = U + W$$

avec

$$\Delta U = 0 \qquad \text{dans } T,$$
$$U_S = \Phi \qquad \text{sur } S.$$

Sachant résoudre le problème de Dirichlet, nous savons calculer U et, par suite, nous sommes ramenés au calcul de W.

La fonction U, harmonique dans T, est holomorphe en (x, y, z) dans tout domaine T′ intérieur à T. Elle dépend de t comme d'un paramètre et, si $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$ existe et est une fonction continue sur S pour $t \geqq 0$, la dérivée $\frac{\partial U}{\partial t}$ est la fonction harmonique qui prend sur S les valeurs $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$. Il en est de même pour les dérivées successives de U par rapport à t. Lorsque t tend vers zéro, supposons que $\Phi(x, y, z, t)$ tende vers $\Phi_0(x, y, z)$: il est clair que U tend alors vers la fonction harmonique U_0 qui prend sur S les valeurs Φ_0. Enfin admettons que Φ soit une fonction périodique de t ou bien ait, lorsque t augmente indéfiniment par valeurs positives, une limite Φ_∞ continue sur S : alors U est une fonction périodique de t avec la même période que Φ ou bien a pour t infini une limite U_∞ qui est la fonction harmonique prenant sur S les valeurs Φ_∞.

Dans chacun de ces cas, on a

$$\left|\begin{array}{ll} \Delta W = \dfrac{\partial W}{\partial t} + \dfrac{\partial U}{\partial t} & \text{dans } T, \\ W_S = 0 & \text{sur } S, \\ W_0 = \varphi - U_0 & \text{pour } t = 0. \end{array}\right.$$

On est ainsi ramené à considérer le refroidissement d'un corps solide lorsque les températures périphériques données sont constamment nulles, mais qu'il y a à l'intérieur du corps des sources de chaleur connues.

Changeons de notation. Nous avons à résoudre le problème suivant :

$$\left|\begin{array}{ll} \Delta V = \dfrac{\partial V}{\partial t} + f(x, y, z, t) & \text{dans } T, \\ V_S = 0 & \text{sur } S, \\ V_0 = \varphi & \text{pour } t = 0. \end{array}\right.$$

On se borne à supposer la fonction φ continue. Quant aux hypothèses relatives à f, nous les indiquerons plus loin.

75. Occupons-nous donc du refroidissement d'un corps solide par communication dans le cas où il y a des sources calorifiques intérieures.

On verrait, comme plus haut, que ce problème ne comporte qu'une seule solution.

Nous examinerons plusieurs cas. Le premier sera celui où la fonction $f(x, y, z, t)$ est périodique en t. Le second sera celui où $f(x, y, z, t)$ tend, pour t infini, vers une limite $f_\infty(x, y, z)$ continue et munie de dérivées partielles du premier ordre également continues. Je suis très loin de penser que ces deux cas soient les seuls abordables; mais je ne m'occupe d'abord que de ceux-là, parce que ce seront les seuls à me servir.

Voyons, pour commencer, ce qui arrive si f ne dépend pas de t et si l'on a par conséquent

$$f = f_\infty$$

pour toute valeur de t.

Posons

$$V = U + W,$$

avec

$$\Delta U = f_\infty \quad \text{dans T,}$$
$$U_S = 0 \quad \text{sur S,}$$

U ne dépendant que de (x, y, z). Sachant construire la fonction de Green, on sait calculer U, vu les hypothèses faites sur f_∞.

Il vient ensuite

$$\Delta W = \frac{\partial W}{\partial t} \quad \text{dans T,}$$
$$W_S = 0 \quad \text{sur S,}$$
$$W_0 = \varphi - U \quad \text{pour } t = 0.$$

On est ainsi ramené au cas où il n'y a plus de sources calorifiques intérieures.

Procédons de même dans le cas général où f tend vers f_∞. Il vient

$$\Delta W = \frac{\partial W}{\partial t} + f - f_\infty \quad \text{dans T,}$$
$$W_S = 0 \quad \text{sur S,}$$
$$W_0 = \varphi - U \quad \text{pour } t = 0.$$

Nous sommes alors ramenés au cas où la fonction qui joue le rôle de f tend vers zéro pour lorsque t augmente indéfiniment.

Finalement, nous nous bornerons à considérer deux cas :

1° f est une fonction périodique de t;

2° f tend vers zéro quand t croît indéfiniment.

On déduit de là sans peine la solution du cas général.

Notre but sera, dans chacun de ces cas, de construire une fonction qui vérifie l'équation aux dérivées partielles, qui s'annule sur S et qui reste finie et continue pour $t = 0$. Il faudra ensuite résoudre le problème du refroidissement pour le cas simple où les températures périphériques données sont constamment nulles et où il n'y a pas de sources calorifiques intérieures. C'est ce qui fera l'objet du Chapitre suivant.

76. Pour aller plus loin, un lemme va nous être nécessaire.

Cherchons deux fonctions α et β de (x, y, z) qui jouissent dans T des propriétés de continuité fondamentales, qui s'annulent sur S et qui vérifient les relations

$$\Delta\alpha - \lambda\beta = A, \qquad \Delta\beta + \lambda\alpha = B,$$

λ étant une constante positive et les lettres A et B désignant des fonctions continues ainsi que leurs dérivées partielles du premier ordre.

Supposons qu'il y ait deux systèmes de solutions distinctes (α_1, β_1) et (α_2, β_2). Posons

$$\alpha = \alpha_1 - \alpha_2, \qquad \beta = \beta_1 - \beta_2.$$

On a

$$\int_{(T)} (\beta\,\Delta\alpha - \alpha\,\Delta\beta)\,d\tau = \int_{(S)} \left(\beta\frac{d\alpha}{dn} - \alpha\frac{d\beta}{dn}\right) d\sigma = 0,$$

d'où

$$\int_{(T)} (\alpha^2 + \beta^2)\,d\tau = 0,$$

car

$$\Delta\alpha - \lambda\beta = 0, \qquad \Delta\beta + \lambda\alpha = 0.$$

On conclut de là

$$\alpha = 0, \qquad \beta = 0.$$

Donc il n'y a qu'une solution possible.

Voyons maintenant qu'il y a toujours effectivement une solution. J'emploierai pour cela la méthode des approximations successives de M. Picard et la méthode du prolongement analytique, que j'ai exposées dans la première Partie de ce Mémoire. N'ayant rien de bien nouveau à dire ici, je me contenterai de signaler les points à changer dans l'analyse déjà faite à propos d'une seule équation, et je passerai un peu vite sur les détails du calcul.

Posons

$$\alpha = \Sigma\lambda^p \alpha_p, \qquad \beta = \Sigma\lambda^p \beta_p.$$

Il vient

$$\begin{array}{ll}
\Delta\alpha_0 = A, & \Delta\beta_0 = \quad B, \\
\Delta\alpha_1 = \beta_0, & \Delta\beta_1 = -\alpha_0, \\
\dots\dots\dots, & \dots\dots\dots\dots, \\
\Delta\alpha_p = \beta_{p-1}, & \Delta\beta_p = -\alpha_{p-1}, \\
\dots\dots\dots\dots, & \dots\dots\dots\dots\dots,
\end{array}$$

les α_p et β_p s'annulant tous sur S.

Connaissant l'existence et les propriétés de la fonction de Green, nous savons faire de proche en proche ces approximations et former les séries définies plus haut.

Posons

$$\frac{1}{4\pi}\int_{(T)} G\, d\tau < g,$$

g étant une constante positive convenable.

Soit i l'unité imaginaire ordinaire. Soit

$$|A + Bi| < M,$$

d'où

$$|A| < M, \qquad |B| < M.$$

Par suite

$$\begin{array}{lllll}
|\alpha_0| < Mg, & |\alpha_1| < Mg^2, & \dots, & |\alpha_p| < Mg^{p+1}, & \dots, \\
|\beta_0| < Mg, & |\beta_1| < Mg^2, & \dots, & |\beta_p| < Mg^{p+1}, & \dots,
\end{array}$$

d'après un lemme rappelé au n° 15.

Les séries

$$\Sigma\lambda^p \alpha_p, \quad \Sigma\lambda^p \beta_p$$

sont donc absolument et uniformément convergentes, pourvu que l'on ait

$$\lambda g < 1.$$

Un théorème tout à fait analogue au théorème de Harnack généralisé démontré au n° 19 et une discussion semblable à celle du n° 17 montrent alors que les sommes α et β des séries précédentes sont des fonctions continues vérifiant les relations

$$\alpha = -\frac{1}{4\pi}\int_{(T)}(\lambda\beta + A)G\,d\tau, \qquad \beta = \frac{1}{4\pi}\int_{(T)}(\lambda\alpha - B)G\,d\tau.$$

Notre problème est donc résolu si λg est inférieur à 1.

Cherchons maintenant une limite supérieure de $|\alpha|$ et de $|\beta|$ indépendante de λ.

Posons

$$U = \alpha + \beta i,$$

i étant l'unité imaginaire. Il vient

$$\begin{aligned} &\Delta U + i\lambda U = A + Bi \qquad &&\text{dans T,}\\ &U_S = 0 &&\text{sur S.}\end{aligned}$$

Posons

$$r^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2$$

(x, y, z) et (x', y', z') étant deux points de T. La fonction

$$h = \frac{e^{-r\sqrt{-i\lambda}}}{r}$$

vérifie la relation

$$\Delta h + i\lambda h = 0.$$

Soit alors

$$U_0 = -\frac{1}{4\pi}\int_{(T)}(A' + B'i)\frac{e^{-r\sqrt{-i\lambda}}}{r}\,d\tau',$$

A' et B' désignant les valeurs de A et B au centre de gravité (x', y', z') de $d\tau'$. Il est clair que U_0 jouit de toutes les propriétés d'un potentiel newtonien de volume attirant. Mais, au lieu de l'équation de Poisson, on a

$$\Delta U_0 + i\lambda U_0 = A + Bi,$$

comme le montre une discussion bien facile [1]. D'ailleurs U_0 est une fonction continue dans tout l'espace, et même à la traversée de S. Enfin on a

$$\left|\frac{e^{-r\sqrt{-i\lambda}}}{r}\right| < \frac{1}{r}.$$

Mais

$$\frac{1}{4\pi}\int_{(T)} \frac{1}{r}\, d\tau' < g,$$

d'après la façon dont le nombre g a été défini (n° 12). Donc

$$|U_0| < Mg.$$

En effet, on a

$$\sqrt{-i} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i),$$

d'où

$$e^{-r\sqrt{-i\lambda}} = e^{-r\sqrt{\lambda}\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)} = e^{-r\frac{\sqrt{2\lambda}}{2}}\left(\cos\frac{r\sqrt{2\lambda}}{2} + i\sin\frac{r\sqrt{2\lambda}}{2}\right)$$

et enfin

$$\left|e^{-r\sqrt{-i\lambda}}\right| < 1,$$

comme il le fallait.

Posons maintenant

$$U = U_0 + U_1.$$

On a

$$\left|\begin{array}{ll} \Delta U_1 + i\lambda_1 U_1 = 0 & \text{dans T,} \\ U_1 = -U_0 & \text{sur S.} \end{array}\right.$$

Je dis que le module de U_1 ne peut pas avoir de maximum en un point intérieur à T. En effet, soit

$$\begin{aligned} U_1 &= a + bi, \\ U'_1 &= a - bi, \\ H &= U_1 U'_1 = a^2 + b^2. \end{aligned}$$

On a, dans T,

$$\begin{aligned} \Delta U_1 + i\lambda U_1 &= 0, \\ \Delta U'_1 - i\lambda U'_1 &= 0, \end{aligned}$$

---

[1] H. Poincaré, *Théorie mathématique de la Lumière*, t. I, Chap. IV, p. 103.

car on déduit U'_1 de U_1 en changeant i en $-i$. D'autre part

$$\Delta H = U_1 \Delta U'_1 + U'_1 \Delta U_1 + 2\sum \frac{\partial U_1}{\partial x}\frac{\partial U'_1}{\partial x}.$$

Cela peut s'écrire

$$\Delta H = 2\sum\left[\left(\frac{\partial a}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial b}{\partial x}\right)^2\right] \geqq 0.$$

Cette inégalité montre que H ne peut pas avoir de maximum dans T : c'est ce qu'indique en effet la formule de Kirchhoff appliquée aux fonctions H et $\frac{1}{r}$ dans une petite sphère ayant le point (x, y, z) pour centre.

Le module de U_1 ne peut donc pas non plus avoir de maximum dans T. L'inégalité

$$|U_0| < Mg$$

entraîne donc celle-ci

$$|U_1| < Mg.$$

Finalement on a

$$|U| < 2Mg$$

et, par conséquent,

$$|\alpha| < 2Mg, \qquad |\beta| < 2Mg.$$

Notre but est atteint.

Cela posé, il n'y a plus aucun obstacle à employer la méthode du prolongement analytique. Soit λ_0 une valeur de λ telle que

$$\lambda_0 g < 1.$$

Posons

$$\lambda = \lambda_0 + \lambda_1, \qquad \alpha = \Sigma\lambda_1^p \alpha_p, \qquad \beta = \Sigma\lambda_1^p \beta_p.$$

Il vient

$$\begin{array}{lll} \Delta\alpha_p = \lambda_0\beta_p + \beta_{p-1}, & \Delta\beta_p = -\lambda_0\alpha_p - \alpha_{p-1} & \text{dans T}, \\ \alpha_p = 0, & \beta_p = 0, & \text{sur S}, \end{array}$$

et, à cause de la valeur choisie pour λ_0, on sait faire ces approximations.

Le lemme précédent donne ensuite

$$|\alpha_p| < M.(2g)^{p+1}, \qquad |\beta_p| < M.(2g)^{p+1},$$

et le problème est donc résolu pour les valeurs de λ_1 vérifiant l'inégalité

$$\lambda_1 < \frac{1}{2g}.$$

Nous avons donc la solution cherchée, après deux opérations, pour

$$0 < \lambda < \frac{3}{2g}.$$

On arrive ainsi de proche en proche aux conditions de possibilité suivantes

$$0 < \lambda < \frac{n}{2g},$$

n étant un entier positif quelconque.

Finalement notre problème auxiliaire est résolu pour toute valeur positive de λ. La forme même des équations montre d'ailleurs qu'on pourrait aussi bien le résoudre pour les valeurs négatives de λ.

En résumé, si λ est réel, il est possible de calculer α et β et de leur assigner une limite supérieure commune indépendante de λ.

On remarquera que les seules hypothèses nécessaires pour A et B sont la continuité de ces fonctions dans T et celle de leurs dérivées du premier ordre dans tout domaine T' intérieur à T.

77. Revenons maintenant à notre problème :

$$\left|\begin{array}{ll} \Delta V = \dfrac{\partial V}{\partial t} + f & \text{dans } T, \\ V_S = 0 & \text{sur } S, \\ V_0 = \varphi & \text{pour } t = 0. \end{array}\right.$$

Les considérations précédentes nous ont mis en mesure de le résoudre.

Occupons-nous d'abord du cas où les sources de chaleur données sont périodiques. Nous ne réduirons pas la généralité de la solution en supposant que la période soit 2π, car l'unité de temps est arbitraire.

La fonction f sera uniforme, finie et continue en tout point (x, y, z) de T et pour toute valeur de t. Elle admettra 2π pour période par rapport à t. Enfin elle possédera par rapport à (x, y, z) des dérivées du premier ordre continues au moins dans tout domaine T′ intérieur à T.

La fonction f aura, par rapport à t, des dérivées de tous les ordres qui jouiront des mêmes propriétés.

Posons

$$f = \tfrac{1}{2}A_0 + \sum_1^\infty A_n \cos nt + \sum_1^\infty B_n \sin nt$$

avec

$$A_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x, y, z, \tau)\, d\tau,$$

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x, y, z, \tau) \cos n\tau\, d\tau,$$

$$B_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x, y, z, \tau) \sin n\tau\, d\tau.$$

Nous sommes dans des circonstances où ce développement en série trigonométrique est légitime.

Il est clair que les fonctions A_n, B_n sont continues dans T et qu'elles possèdent des dérivées partielles du premier ordre continues dans tout domaine T′ intérieur à T. En effet, on a le droit de différentier sous le signe d'intégration dans les expressions précédentes.

A cause de la périodicité supposée, des intégrations par parties permettent, comme on sait, si p est un entier positif donné, d'assigner un nombre positif M tel que l'on ait, quel que soit n,

$$|A_n| < \frac{M}{n^p}, \qquad |B_n| < \frac{M}{n^p}.$$

La série f est donc absolument et uniformément convergente ainsi que toutes les séries dérivées en t.

Soit maintenant

$$V = \tfrac{1}{2}\alpha_0 + \sum_1^\infty \alpha_n \cos nt + \sum_1^\infty \beta_n \sin nt,$$

les α_n, β_n étant des fonctions de (x, y, z) que nous allons déterminer.

Un calcul immédiat donne

$$\Delta\alpha_0 = A_0$$

et

$$\Delta\alpha_n - n\beta_n = A_n, \qquad \Delta\beta_n + n\alpha_n = B_n.$$

Assujettissons les fonctions α_n et β_n à s'annuler toutes sur S. Alors le lemme vu plus haut permet de calculer ces fonctions sans difficulté.

D'après une remarque faite au nº 76, on a

$$|\alpha_n| < 2g\frac{M}{n^p}, \qquad |\beta_n| < 2g\frac{M}{n^p}.$$

Donc la série V est absolument et uniformément convergente ainsi que les séries obtenues en dérivant terme à terme par rapport à t. On conclut de là que

$$V, \quad \frac{\partial V}{\partial t}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}, \quad \dots$$

sont des fonctions continues dans T. Tout cela est immédiat et je n'y insiste pas.

Une discussion bien simple, et déjà faite plusieurs fois dans des circonstances analogues, permet d'écrire

$$V = -\frac{1}{4\pi}\int_{(T)}\left(\frac{\partial V'}{\partial t} + f'\right) G\, d\tau',$$

G étant la fonction de Green de pôle (x, y, z) et l'accent désignant le remplacement de (x, y, z) dans les fonctions qu'il affecte par les coordonnées (x', y', z') du centre de gravité de $d\tau'$.

Comme $\frac{\partial V'}{\partial t}$ et f' sont des fonctions continues de (x', y', z'), la formule précédente nous apprend que les dérivées

$$\frac{\partial V}{\partial x}, \quad \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \frac{\partial V}{\partial z}$$

existent et sont continues dans tout domaine T' intérieur à T.

On a encore

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -\frac{1}{4\pi}\int_{(T)}\left(\frac{\partial^2 V'}{\partial t^2} + \frac{\partial f'}{\partial t}\right) G\, d\tau.$$

Donc

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x\, \partial t}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial y\, \partial t}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial z\, \partial t}$$

existent et sont continues.

Revenons alors à l'expression de V. La fonction $\frac{\partial V'}{\partial t} + f'$ a des dérivées continues du premier ordre en (x', y', z'). Donc, en vertu d'une proposition bien connue, rappelée du reste au n° 15, V a des dérivées du second ordre continues dans tout domaine T' intérieur à T.

On déduit de là les relations

$$\left|\begin{array}{ll} \Delta V = \frac{\partial V}{\partial t} + f & \text{dans T,} \\ V_S = 0 & \text{sur S.} \end{array}\right.$$

Voyons maintenant ce qui se passe pour $t = 0$.

La série

$$\frac{1}{2}\alpha_0 + \sum_1^\infty \alpha_n$$

est absolument et uniformément convergente. Donc V se réduit à une fonction continue φ_1 pour $t = 0$.

Finalement, on a

$$\begin{array}{ll} \Delta V = \frac{\partial V}{\partial t} + f & \text{dans T,} \\ V_S = 0 & \text{sur S,} \\ V_0 = \varphi_1 & \text{pour } t = 0. \end{array}$$

Nous n'avons donc pas résolu exactement le problème que nous avions en vue : la condition initiale n'est pas satisfaite. Mais supposons que nous sachions construire une fonction W vérifiant les relations

$$\begin{array}{ll} \Delta W = \frac{\partial W}{\partial t} & \text{dans T,} \\ W_S = 0 & \text{sur S,} \\ W_0 = \varphi - \varphi_1 & \text{pour } t = 0. \end{array}$$

La fonction

$$U = V + W$$

sera la solution cherchée.

Nous aurons donc ramené le cas où il y a des sources de chaleur périodiques à l'intérieur du corps au cas où il n'y en a pas, les températures périphériques étant toujours constamment nulles. C'était là notre but. Le cas auquel nous sommes ramenés sera étudié dans la suite. Il nous suffit, pour l'instant, de noter qu'il n'y a plus que lui à considérer.

Nous avons vu les hypothèses qu'il est nécessaire de faire au sujet de la fonction donnée f. On en conclut que, dans le cas des températures périphériques variables, si la fonction Φ du n° 74 est périodique en t, il suffit de la supposer continue en (x, y, z) sur S et munie de dérivées partielles de tous les ordres par rapport à t.

L'existence des dérivées partielles de tous les ordres par rapport à t n'est même pas indispensable. On verra facilement qu'il suffit de supposer l'existence et la continuité de

$$\frac{\partial f}{\partial t}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial t^3}, \quad \frac{\partial^4 f}{\partial t^4},$$

pour pouvoir faire les raisonnements qui précèdent.

78. Lorsque les sources calorifiques intérieures ne sont pas périodiques, la résolution du problème qui nous occupe résulte des propriétés de l'intégrale définie connue sous le nom d'*intégrale de Fourier*.

L'étude de cette intégrale célèbre a été faite avec une entière rigueur par M. Poincaré dans son Ouvrage sur la théorie de la chaleur (¹). Je pourrais donc passer rapidement sur les discussions qui vont suivre : on en trouverait le détail dans le travail que je viens de citer.

Soit à construire une fonction continue V telle que l'on ait

$$\Delta V = \frac{\partial V}{\partial t} + f \qquad \text{dans T,}$$

$$V_S = 0 \qquad \text{sur S.}$$

(¹) H. Poincaré, *Théorie de la chaleur*, Chap. VI et VII.

Je néglige à dessein la condition initiale : il suffirait de refaire ici la remarque par laquelle j'ai terminé le numéro précédent, et la conclusion serait la même.

Comme je l'ai déjà dit, je puis me borner à considérer le cas où f tend vers zéro lorsque t augmente indéfiniment par valeurs positives.

La fonction f n'est définie que pour $t \geqq 0$. Mais je puis toujours en compléter la définition, d'une façon d'ailleurs quelconque, de façon qu'elle ait encore un sens pour $t < 0$. J'appellerai encore f la fonction prolongée. Il est clair que ce prolongement peut être réalisé de telle manière que la fonction f soit continue pour toute valeur de t et même pour $t = 0$ et qu'elle s'annule pour t infini positif ou négatif, ainsi que ses dérivées partielles par rapport à t jusqu'à un ordre quelconque donné à l'avance.

Voyons maintenant les hypothèses qu'il faut faire sur f. D'abord cette fonction, regardée comme dépendant de (x, y, z), sera uniforme, finie et continue dans T et elle aura dans tout domaine T′ intérieur à T des dérivées partielles du premier ordre également continues. Regardée maintenant comme dépendant de t, la fonction f sera continue pour toute valeur de t. Enfin, t_0 et M étant deux nombres positifs convenablement choisis, on aura

$$|f| < \frac{M}{|t|^p}, \qquad \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| < \frac{M}{|t|^p}, \qquad \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| < \frac{M}{|t|^p}, \qquad \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right| < \frac{M}{|t|^p},$$

pour

$$|t| > t_0,$$

p étant un nombre positif supérieur à 1.

Quant aux dérivées successives de f par rapport à t, elles existeront au moins jusqu'au quatrième ordre et jouiront des mêmes propriétés que f.

Cela posé, soit

$$A(x, y, z, q) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y, z, \tau) \cos q\tau \, d\tau,$$

$$B(x, y, z, q) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y, z, \tau) \sin q\tau \, d\tau.$$

Chacune de ces intégrales a évidemment un sens, et même est absolument et uniformément convergente : les fonctions A et B sont donc continues dans T. Si le point (x, y, z) est intérieur à T, les intégrales

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z, \tau)\cos q\tau\, d\tau,$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z, \tau)\sin q\tau\, d\tau$$

ont un sens et sont absolument et uniformément convergentes. On conclut de là qu'elles ont pour valeurs

$$\frac{\partial A}{\partial x}, \quad \frac{\partial B}{\partial x}.$$

Donc A et B ont, par rapport à (x, y, z), des dérivées du premier ordre continues.

Nous sommes dans des conditions où, malgré la présence des limites infinies, on peut intégrer par parties. On trouve sans peine ainsi

$$A = \frac{1}{\pi q}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial \tau}(x, y, z, \tau)\sin q\tau\, d\tau,$$

$$B = -\frac{1}{\pi q}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial \tau}(x, y, z, \tau)\cos q\tau\, d\tau.$$

Après quatre opérations de ce genre, il vient

$$A = \frac{1}{\pi q^4}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^4 f}{\partial \tau^4}(x, y, z, \tau)\cos q\tau\, d\tau,$$

$$B = \frac{1}{\pi q^4}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^4 f}{\partial \tau^4}(x, y, z, \tau)\sin q\tau\, d\tau.$$

Chacune des intégrales précédentes est absolument et uniformément convergente. Il est donc bien clair que l'on peut assigner un nombre N tel que

$$|A| < \frac{N}{q^4}, \qquad |B| < \frac{N}{q^4},$$

si grand que soit .

Cela posé, on sait que l'on a

$$f(x, y, z, t) = \int_0^\infty [A(x, y, z, q) \cos qt + B(x, y, z, q) \sin qt] \, dq.$$

Telle est en effet l'intégrale de Fourier. J'ajoute que cette intégrale est ici absolument et uniformément convergente.

Prenons maintenant

$$V(x, y, z, t) = \int_0^\infty [\alpha(x, y, z, q) \cos qt + \beta(x, y, z, q) \sin qt] \, dq,$$

avec

$$\Delta\alpha - q\beta = A,$$
$$\Delta\beta + q\alpha = B,$$

dans T, et

$$\alpha = 0, \qquad \beta = 0,$$

sur S. Nous savons calculer α et β et, pour $q > q_0$, on a, en vertu d'un lemme vu plus haut :

$$|\alpha| < 2\frac{N}{q^4} g, \qquad |\beta| < 2\frac{N}{q^4} g.$$

L'intégrale V est donc absolument et uniformément convergente : elle définit une fonction continue dans T, pour $t > 0$, et s'annulant sur S quel que soit t.

Les intégrales

$$\int_0^\infty (-\alpha q \sin qt + \beta q \cos qt) \, dq,$$

$$\int_0^\infty - q^2(\alpha \cos qt + \beta \sin qt) \, dq$$

sont, elles aussi, absolument et uniformément convergentes. Elles représentent alors respectivement les dérivées

$$\frac{\partial V}{\partial t}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial t^2},$$

qui existent donc et sont continues.

Cela étant, on a

$$\alpha = -\frac{1}{4\pi}\int_{(T)}(q\beta' + A')\,G\,d\tau', \qquad \beta = \frac{1}{4\pi}\int_{(T)}(q\alpha' - B')\,G\,d\tau',$$

d'où

$$V = -\frac{1}{4\pi}\int_0^\infty dq\int_{(T)}[-(q\alpha' - B')\sin qt + (q\beta' + A')\cos qt]\,G\,d\tau'.$$

Mais, les intégrales étant absolument et uniformément convergentes, on peut intervertir l'ordre des intégrations. Donc

$$V = -\frac{1}{4\pi}\int_{(T)} G\int_0^\infty[-(q\alpha' - B')\sin qt + (q\beta' + A')\cos qt]\,dq\,d\tau'.$$

Or, on a

$$\int_0^\infty (A'\cos qt + B'\sin qt)\,dq = f',$$

$$\int_0^\infty (-\alpha' q\sin qt + \beta' q\cos t)\,dq = \frac{\partial V'}{\partial t}.$$

Par suite

$$V = -\frac{1}{4\pi}\int_{(T)}\left(\frac{\partial V'}{\partial t} + f'\right)G\,d\tau'.$$

On trouverait de même

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -\frac{1}{4\pi}\int_{(T)}\left(\frac{\partial^2 V'}{\partial t^2} + \frac{\partial f'}{\partial t}\right)G\,d\tau'.$$

On peut alors achever la discussion comme à propos des sources périodiques. *La conclusion est que* V *remplit bien toutes les conditions prescrites.*

Ici encore nous sommes donc ramenés au cas simple où les températures périphériques et les sources intérieures sont simultanément nulles.

Revenons, pour terminer, sur le cas où les températures périphériques sont variables. On voit les hypothèses qu'il convient de faire sur la fonction Φ du n° 74. Cette fonction sera continue sur S. De plus elle aura par rapport à t des dérivées des cinq premiers ordres. Enfin Φ et ses dérivées tendront vers zéro, lorsque t augmentera indéfiniment, de la façon que nous venons d'indiquer dans le présent numéro au sujet de f.

79. Pour compléter ce que je viens de dire sur le problème de Fourier quand il y a des sources calorifiques intérieures, je traiterai encore le cas suivant :

$$\left|\begin{array}{ll} \Delta V = \dfrac{\partial V}{\partial t} + f & \text{dans } T, \\ V_S = 0 & \text{sur } S, \\ V_0 = 0 & \text{pour } t = 0, \end{array}\right.$$

la fonction f étant *holomorphe en* t.

Aucune hypothèse n'est plus nécessaire ici, quant à l'allure de la fonction f pour les grandes valeurs de t.

Posons

$$V = \Sigma V_n, \qquad f = \Sigma \alpha_n(x, y, z)\, t^n.$$

La série f, entière en t, est supposée convergente pour toute valeur de t. Les coefficients α_n sont des fonctions continues dans T et ces fonctions sont munies de dérivées partielles du premier ordre continues dans tout domaine T′ intérieur à T.

On a

$$\left|\begin{array}{ll} \Delta V_n = \dfrac{\partial V_n}{\partial t} + \alpha_n t^n & \text{dans } T, \\ V_n = 0 & \text{sur } S, \\ V_n = 0 & \text{pour } t = 0. \end{array}\right.$$

Je dis que l'on peut construire les fonctions V_n.

Soit, en effet, une fonction H telle que

$$\left|\begin{array}{ll} \Delta H = \alpha_n & \text{dans } T, \\ H_S = 0 & \text{sur } S. \end{array}\right.$$

Posons

$$V_n = t^n H + U_n.$$

Il vient

$$\left|\begin{array}{ll} \Delta U_n = \dfrac{\partial U_n}{\partial t} + n t^{n-1} H & \text{dans } T, \\ U_n = 0 & \text{sur } S, \\ U_n = 0 & \text{pour } t = 0. \end{array}\right.$$

L'équation qui définit U_n est de même forme que celle qui définit V_n, mais l'exposant de t est diminué d'une unité. Donc, après un nombre limité d'opérations analogues à celle que nous venons de faire, on sera ramené au *problème de Fourier réduit* pour lequel il n'y a plus de sources intérieures. On conclut de là (*voir* Chap. II) qu'il est possible de calculer V_n.

Soit ε un nombre positif donné à l'avance aussi petit qu'on veut. Prenons un nombre positif quelconque t_0. Par hypothèse, on peut choisir n assez grand pour que l'on ait

$$|\alpha_n t^n + \alpha_{n+1} t^{n+1} + \ldots + \alpha_{n+p} t^{n+p}| < \varepsilon,$$

quel que soit p, dès que $|t|$ est inférieur à t_0. Posons

$$\begin{aligned} S_{n,p} &= \alpha_n t^n + \ldots + \alpha_{n+p} t^{n+p}, \\ \Sigma_{n,p} &= V_n \quad + \ldots + V_{n+p}. \end{aligned}$$

On a

$$\left| \begin{array}{ll} \Delta\Sigma_{n,p} = \dfrac{\partial \Sigma_{n,p}}{\partial t} + S_{n,p} & \text{dans T,} \\ \Sigma_{n,p} = 0 & \text{sur S,} \\ \Sigma_{n,p} = 0 & \text{pour } t = 0. \end{array} \right.$$

Construisons une fonction L telle que

$$\left| \begin{array}{ll} \Delta L + \varepsilon = 0 & \text{dans T,} \\ L_S = 0 & \text{sur S.} \end{array} \right.$$

Posons

$$\tau_n = L - \Sigma_{n,p}, \qquad \theta_n = L + \Sigma_{n,p}.$$

Il vient

$$\begin{array}{lll} \Delta\tau_n = \dfrac{\partial \tau_n}{\partial t} - (\varepsilon + S_{n,p}), & \Delta\theta_n = \dfrac{\partial \theta_n}{\partial t} - (\varepsilon - S_{n,p}) & \text{dans T,} \\ \tau_n = 0, & \theta_n = 0 & \text{sur S,} \\ \tau_n \geqq 0, & \theta_n \geqq 0 & \text{pour } t = 0. \end{array}$$

Un raisonnement déjà fait au n° 73 montre que les fonctions τ_n et θ_n sont certainement positives pour $|t| < t_0$; en effet, elles ne peuvent pas avoir de minimum négatif encore décroissant dans cet intervalle. La fonction L étant positive et inférieure à εg (g désignant la même constante qu'au n° 17), on a donc

$$|\Sigma_{n,p}| < \varepsilon g.$$

On conclut de là que la série

$$V = \Sigma V_n$$

est uniformément convergente.

Cela posé, il est clair que V est une fonction continue, s'annulant pour $t = 0$ et se réduisant à zéro sur S.

Formons maintenant la fonction V'_n telle que

$$\left|\begin{array}{ll} \Delta V'_n = \dfrac{\partial V'_n}{\partial t} + n\alpha_n t^{n-1} & \text{dans T,} \\ V'_n = 0 & \text{sur S,} \\ V'_n = 0 & \text{pour } t = 0. \end{array}\right.$$

On vérifie aisément que l'on a

$$V_n = \int_0^t V'_n(x, y, z, \tau)\, d\tau,$$

d'où

$$V'_n = \frac{\partial V_n}{\partial t}.$$

En raisonnant alors comme ci-dessus, on voit que la série

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \sum \frac{\partial V'_n}{\partial t}$$

est uniformément convergente.

On peut achever les calculs comme au nº 78 et l'on parvient ainsi à montrer que V est bien la solution de notre problème.

Finalement, nous savons ramener, pour le problème de Fourier, le cas où la fonction f est holomorphe en t au cas où elle est nulle. *J'ajoute que l'on peut bien facilement étendre cette conclusion, sous certaines réserves évidentes, au cas général où f est une série de fonctions entières en t ou une intégrale définie portant sur une fonction entière de t qui dépend d'un paramètre.*

La même proposition est encore vraie si f est seulement *holomorphe pour toute valeur positive de t* : on le voit en effectuant, par la même méthode, le prolongement analytique simultané de V et de f, qui sont ainsi représentés l'un et l'autre par une suite de séries valables chacune dans un certain intervalle.

80. Je ne considérerai plus désormais que le *problème de Fourier réduit*

$$\left|\begin{array}{ll} \Delta V = \dfrac{\partial V}{\partial t} & \text{dans T,} \\ V_S = 0 & \text{sur S,} \\ V_0 = \varphi & \text{pour } t = 0. \end{array}\right.$$

Pour clore ce Chapitre, je rappellerai la solution de ce problème réduit, dans deux cas particuliers.

La méthode classique des solutions simples et des développements en séries permet de résoudre facilement le problème de Fourier réduit, dans les deux cas où la surface S est constituée par une sphère unique ou par deux sphères concentriques. Le problème du refroidissement peut alors être considéré comme complètement résolu dans chacun de ces cas. J'ajoute que la même conclusion est encore vraie si l'on suppose la présence de deux variables ponctuelles x et y seulement, c'est-à-dire si l'on étudie le mouvement de la chaleur dans une plaque; les cas traités sont alors ceux du cercle et de la couronne circulaire, et les procédés suivis sont les mêmes.

Les solutions auxquelles je fais allusion sont liées à la théorie des fonctions de Bessel et à l'étude d'une équation différentielle célèbre, connue aussi sous le nom de Bessel qui la rencontra en Mécanique céleste à peu près dans le même temps que Fourier la rencontrait dans la Théorie de la chaleur.

Ces solutions ont été obtenues par M. Poincaré (¹). Je me contenterai de les citer, à cause des longueurs où m'entraînerait leur exposé. La méthode suivie par M. Poincaré est une extension de la méthode fondée par Cauchy sur le théorème des résidus pour obtenir, au moyen de séries procédant suivant certaines fonctions simples, des représentations analytiques explicites de fonctions arbitraires.

M. Poincaré ne s'occupe, il est vrai, que des cas de la sphère ou du cercle, et il suppose qu'il y a *rayonnement* sur le bord. Mais l'extension aux cas de la couche sphérique ou de la couronne circulaire est

(¹) H. Poincaré, *Théorie analytique de la propagation de la chaleur*. Paris, Carré, 1895, Chap. XVII et XVIII. — *Voir* aussi Jordan, *Traité d'Analyse*, t. III, Chap. III, § 4.

immédiate, ainsi que le remplacement de l'hypothèse du rayonnement par celle de la communication : c'est à peine s'il faut faire quelques modifications insignifiantes aux calculs.

Je signalerai, pour finir, certains résultats que l'on peut déduire de l'analyse de M. Poincaré.

Posons

$$J_n(x) = \int_{-1}^{+1} (1-z^2)^n \cos zx\, dz.$$

On a

$$\frac{d^2 J_n}{dx^2} + \frac{2(n+1)}{x}\frac{dJ_n}{dx} + J_n = 0,$$

et J_n est une fonction entière de x.

M. Poincaré a montré qu'une fonction arbitraire de x peut toujours être mise sous la forme

$$\Sigma A_q J_n(qx),$$

les A_q étant des constantes. Dans cette formule, on suppose x compris entre 0 et 1 et l'on désigne par q un élément d'un certain ensemble dénombrable de nombres positifs tels que $J_n(q) = 0$.

Cherchons alors une fonction continue $J(\rho, t)$ telle que

$$\left|\begin{array}{ll} \dfrac{\partial^2 J}{\partial \rho^2} + \dfrac{2(n+1)}{\rho}\dfrac{\partial J}{\partial \rho} = \dfrac{\partial J}{\partial t} & \text{pour } \rho < 1,\ t > 0, \\ J = 1 & \text{pour } \rho = 1, \text{ quel que soit } t, \\ J = 0 & \text{pour } t = 0, \text{ quel que soit } \rho. \end{array}\right.$$

Soit

$$1 = \Sigma A_q J_n(q\rho).$$

On a

$$J = 1 - \Sigma A_q J_n(q\rho) e^{-q^2 t}.$$

Posons maintenant

$$\varphi(\rho, t) = \alpha(0) J(\rho, t) + \int_0^t J(\rho, t-\lambda)\alpha'(\lambda)\, d\lambda,$$

α' désignant la dérivée de α. On vérifie aisément les relations

$$\left|\begin{array}{ll} \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial\rho^2}+\dfrac{2(n+1)}{\rho}\dfrac{\partial\varphi}{\partial\rho}=\dfrac{\partial\varphi}{\partial t} & \text{pour } \rho<1,\ t>0, \\ \varphi=\alpha(t) & \text{pour } \rho=1, \text{ quel que soit } t, \\ \varphi=0 & \text{pour } t=0, \text{ quel que soit } \rho. \end{array}\right.$$

Si donc on écrit

$$V_n=\varphi\Pi_n,$$

Π_n étant un polynome sphérique fondamental d'ordre n, on a, T désignant le domaine intérieur à une sphère S de rayon 1,

$$\left|\begin{array}{ll} \Delta V_n=\dfrac{\partial V_n}{\partial t} & \text{dans T}, \\ V_n=\alpha(t)Y_n & \text{sur S}, \\ V_n=0 & \text{pour } t=0. \end{array}\right.$$

Au moyen de séries procédant suivant des fonctions analogues à V_n, *on peut ainsi résoudre le problème de Fourier, dans le cas de la sphère, quelle que soit la fonction périphérique donnée* Φ.

Sans insister davantage, ce qui demanderait de trop longs développements, je fais remarquer que la méthode précédente, déduite immédiatement des travaux de M. Poincaré, permet, par exemple, de résoudre le problème de Fourier lorsque Φ présente, pour $t=0$, le long d'un contour formé d'un nombre limité d'arcs de cercle, *des discontinuités par sauts brusques*. J'aurai bientôt à faire usage de cette remarque.

A l'aide des fonctions harmoniques fondamentales, il est possible d'étendre les considérations qui précèdent au cas d'un corps de forme quelconque, ce qui donne une nouvelle solution du problème traité au n° 74.

II. — Rappel des fonctions fondamentales de M. Poincaré. — Théorème de M. Poincaré. — Extension du théorème de Harnack au cas de l'équation de Fourier. — La méthode du balayage.

81. Notre but, en ce Chapitre, est de résoudre le problème de Fourier réduit

$$\Delta V = \frac{\partial V}{\partial t} \quad \text{dans T,}$$

$$V_S = 0 \quad \text{sur S,}$$

$$V_0 = \varphi \quad \text{pour } t = 0,$$

la surface S étant supposée régulière, mais composée d'une ou plusieurs nappes séparées d'un ordre de connexion quelconque, et la fonction initiale φ étant supposée simplement continue en tout point du domaine T.

Nous devons commencer par établir quelques lemmes préliminaires, dont le premier est emprunté aux travaux de M. Poincaré [1] et se rapporte à certaines fonctions que j'appellerai *les fonctions fondamentales attachées au domaine* T.

Je rappelle les propriétés les plus importantes des fonctions fondamentales de M. Poincaré.

A chaque domaine connexe T, limité par une frontière S régulière, est attachée une suite illimitée de constantes positives

$$\xi_1, \quad \xi_2, \quad \xi_3, \quad \ldots, \quad \xi_p \quad \ldots$$

qui vont en croissant, ou du moins qui ne décroissent jamais, quand l'indice augmente, et qui sont telles que ξ_p soit au moins de l'ordre de grandeur de $\sqrt[3]{p^2}$.

A chaque nombre ξ_p, correspond une fonction U_p jouissant des propriétés de continuité fondamentales.

---

(1) H. Poincaré, *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, 1894, et *American Journal of Mathematics*, 1890. *Voir* aussi : H. Poincaré, *Théorie de la chaleur*, Chap. XIV et XV.

On a

$$\Delta U_p + \xi_p U_p = 0 \qquad \text{dans T,}$$
$$U_p = 0 \qquad \text{sur S,}$$
$$\int_{(T)} U_p^2 \, d\tau = 1,$$
$$\int_{(T)} U_p U_q \, d\tau = 0 \qquad \text{si } p \neq q,$$
$$\xi_p = \int_{(T)} \sum \left(\frac{\partial U_p}{\partial x}\right)^2 d\tau.$$

On déduit de là

$$U_p = \frac{\xi_p}{4\pi} \int_{(T)} U'_p G \, d\tau',$$

G étant la fonction de Green, et, par suite,

$$|U_p| < M\xi_p,$$

M étant un nombre positif qui ne dépend pas d'autre chose que du domaine T.

Il résulte de l'expression trouvée ci-dessus pour U_p et d'un théorème démontré par M. Picard [1] que U_p est, en chaque point de T, une fonction holomorphe de (x, y, z).

Un raisonnement tout semblable à celui du n° 23 montre aisément que les dérivées

$$\frac{\partial U_p}{\partial x}, \quad \frac{\partial U_p}{\partial y}, \quad \frac{\partial U_p}{\partial z}$$

restent finies et continues même sur le bord du domaine T, lorsque la surface S est régulière.

Soit $F(x, y, z)$ une fonction jouissant des propriétés de continuité fondamentales et restant continue même sur S ainsi que ses dérivées du premier ordre. Supposons que l'on ait

$$\int_{(T)} F U_p \, d\tau = 0$$

pour toutes les valeurs de p depuis 1 jusqu'à n inclusivement.

---

[1] E. Picard, *Sur la détermination des intégrales de certaines équations aux dérivées partielles du second ordre par leurs valeurs le long d'un contour fermé* (*Journal de l'École Polytechnique*, LX[e] Cahier).

Posons

$$A = \int_{(T)} \sum \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 d\tau,$$

$$B = \int_{(T)} F^2 \, d\tau.$$

Si F est assujettie à s'annuler sur S, le rapport

$$\frac{A}{B}$$

est minimum pour

$$F = U_{n+1}.$$

D'ailleurs, sa valeur est, dans ce cas,

$$\xi_{n+1}.$$

On a donc

$$\frac{A}{B} \geqq \xi_{n+1},$$

quelle que soit la fonction F.

Ces diverses propositions sont bien connues et il n'y a pas lieu d'y insister.

Nous allons en déduire un important théorème indiqué pour la première fois par M. Poincaré.

Considérons une fonction V présentant les caractères de continuité définis à propos de l'énoncé du problème de Fourier et vérifiant les relations

$$\Delta V = \frac{\partial V}{\partial t} \qquad \text{dans } T,$$

$$V_S = 0 \qquad \text{sur } S,$$

$$V_0 = \varphi \qquad \text{pour } t = 0.$$

Supposons qu'une telle fonction existe.

En refaisant encore ici le raisonnement du n° 23, on constate aisément l'existence et la continuité, *même sur* S, des dérivées

$$\frac{\partial V}{\partial x}, \qquad \frac{\partial V}{\partial y}, \qquad \frac{\partial V}{\partial z},$$

au moins pour $t > t_0$, t_0 étant un nombre positif aussi petit d'ailleurs que l'on voudra.

Posons

$$A_p = \int_{(T)} \varphi U_p \, d\tau$$

et

$$V = A_1 U_1 e^{-\xi_1 t} + \ldots + A_n U_n e^{-\xi_n t} + R_n,$$

la fonction R_n étant définie par cette égalité.

On a évidemment

$$\Delta R_n = \frac{\partial R_n}{\partial t} \qquad \text{dans T,}$$

$$R_n = 0 \qquad \text{sur S,}$$

quel que soit n.

Cela posé, la série

$$\Sigma A_p U_p e^{-\xi_p t}$$

est absolument et uniformément convergente pour $t > t_0$, ainsi que les séries dérivées. Sa somme est une fonction continue. Donc R_n tend uniformément vers une limite R, qui est une fonction continue, lorsque n augmente indéfiniment, pourvu que t reste supérieur à t_0.

J'ajoute que R_n se réduit à une fonction continue quand t tend vers zéro, pourvu que n soit fini.

On a

$$J_p = \int_{(T)} V U_p \, d\tau = A_p e^{-\xi_p t} + \int_{(T)} R_n U_p \, d\tau,$$

tant que p ne dépasse pas n.

D'autre part, J_p est une fonction de t, et l'on peut écrire

$$\frac{dJ_p}{dt} = \int_{(T)} \frac{\partial V}{\partial t} U_p \, d\tau = \int_{(T)} U_p \Delta V \, d\tau,$$

en tenant compte de l'équation

$$\Delta V = \frac{\partial V}{\partial t}.$$

La formule de Green est ici applicable, d'après les remarques faites sur les dérivées premières de U_p et de V. Jointe aux relations

$$U_p = 0, \qquad V = 0 \qquad \text{sur S,}$$

elle donne

$$\frac{dJ_p}{dt} = \int_{(T)} V\,\Delta U_p\,d\tau = -\xi_p \int_{(T)} V\,U_p\,d\tau,$$

d'où

$$\frac{dJ_p}{dt} + \xi_p J_p = 0.$$

Posons

$$J_p^0 = \int_{(T)} \varphi\,U_p\,d\tau = A_p.$$

C'est la valeur de J_p pour $t = 0$. On a

$$J_p = A_p e^{-\xi_p t}.$$

Donc

$$\int_{(T)} R_n U_p\,d\tau = 0,$$

pour $p \leqq n$.

Posons maintenant

$$B_n = \int_{(T)} R_n^2\,d\tau,$$

$$A_n = \int_{(T)} \sum \left(\frac{\partial R_n}{\partial x}\right)^2 d\tau.$$

On a

$$\frac{dB_n}{dt} = 2\int_{(T)} R_n \frac{\partial R_n}{\partial t}\,d\tau = 2\int_{(T)} R_n\,\Delta R_n\,d\tau = -2\int_{(T)} \sum \left(\frac{\partial R_n}{\partial x}\right)^2 d\tau,$$

et toutes ces transformations, basées sur des relations vérifiées par R_n, ainsi que sur la formule de Green, sont légitimes, car il est clair que les dérivées premières de R_n restent continues, même sur S.

Nous avons

$$\frac{dB_n}{dt} + 2A_n = 0.$$

Or, d'après un lemme rappelé plus haut, les égalités

$$\int_{(T)} R_n U_p\,d\tau = 0, \qquad \text{pour } p \leqq n,$$

entraînent l'inégalité

$$\frac{A_n}{B_n} > \xi_{n+1}.$$

Donc

$$\frac{dB_n}{dt} < -2\xi_{n+1} B_n$$

et, par suite,

$$B_n < B_n^0 \, e^{-2\xi_{n+1} t}.$$

Or, on a

$$\varphi = A_1 U_1 + A_2 U_2 + \ldots + A_n U_n^0 + R_n^0,$$

d'où

$$\int_{(T)} \varphi^2 \, d\tau = A_1^2 + A_2^2 + \ldots + A_n^2 + \int_{(T)} (R_n^0)^2 \, d\tau.$$

Par conséquent,

$$B_n^0 = \int_{(T)} (R_n^0)^2 \, d\tau < \int_{(T)} \varphi^2 \, d\tau < N,$$

N étant un nombre assignable qui ne dépend que de φ et de T.

Finalement, on a

$$B_n < N \, e^{-2\xi_{n+1} t}.$$

Donc, si $t > t_0$, B_n tend uniformément vers zéro quand n augmente indéfiniment. Mais B_n tend aussi vers

$$\int_{(T)} R^2 \, d\tau.$$

Donc

$$\int_{(T)} R^2 \, d\tau = 0.$$

Comme R est une fonction bien déterminée et continue, on conclut de là

$$R = 0.$$

Ainsi R_n tend uniformément vers zéro quand n croît au delà de toute limite.

De tout ce qui précède, résulte l'égalité

$$V = A_1 U_1 \, e^{-\xi_1 t} + \ldots + A_n U_n \, e^{-\xi_n t} + \ldots$$

pour

$$t > t_0.$$

On voit que V *peut s'exprimer par la série de solutions simples que la* *méthode classique d'intégration amènerait à considérer. Mais la série n'est valable que pour* $t > 0$, *et, de plus, on ne peut se servir du théorème précédent que si l'on est assuré d'avance de l'existence d'une fonction* V *résolvant le problème de Fourier.*

Ce théorème, que je désignerai par le nom de *théorème de M. Poincaré,* nous servira plus loin.

82. Je vais donner tout de suite une application du théorème de M. Poincaré en démontrant un second théorème, qui sera la généralisation du théorème de Harnack relatif aux fonctions harmoniques.

Soit $\varphi(x, y, z)$ une fonction continue donnée. On sait seulement que cette fonction est continue, mais elle peut n'avoir pas de dérivées. Nous avons vu (n° 20) que l'on peut toujours écrire

$$\varphi = \Sigma \mathrm{P}_i,$$

les P_i étant des polynomes entiers en (x, y, z) qui vérifient respectivement les inégalités

$$|\mathrm{P}_i| < \varepsilon_i,$$

où ε_i désigne un nombre positif qui forme le terme général d'une série convergente.

Considérons les fonctions V_i qui satisfont aux équations

$$\left|\begin{array}{ll} \Delta \mathrm{V}_i = \dfrac{\partial \mathrm{V}_i}{\partial t} & \text{dans T,} \\ \mathrm{V}_i = 0 & \text{sur S,} \\ \mathrm{V}_i = \mathrm{P}_i & \text{pour } t = 0. \end{array}\right.$$

Étudions la série $\Sigma \mathrm{V}_i$.

Un lemme nous est nécessaire. Je dis que, si une fonction continue V vérifie les relations

$$\begin{array}{ll} \Delta \mathrm{V} = \dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial t} & \text{dans T,} \\ \mathrm{V_S} = 0 & \text{sur S,} \\ \mathrm{V}_0 = \varphi & \text{pour } t = 0, \end{array}$$

et si l'on a

$$|\varphi| < \alpha,$$

on a aussi

$$|V| < \alpha.$$

En effet, posons

$$\tau = \alpha - V, \qquad \theta = \alpha + V,$$

il vient

$$\Delta\tau = \frac{\partial\tau}{\partial t}, \qquad \Delta\theta = \frac{\partial\theta}{\partial t} \qquad \text{dans T,}$$

$$\tau_S > 0, \qquad \theta_S > 0, \qquad \text{sur S,}$$

$$\tau_0 > 0, \qquad \theta_0 > 0 \qquad \text{pour } t = 0.$$

En aucun point de T, il ne peut exister pour τ ou T de minimum négatif encore décroissant. Cela ne peut non plus arriver sur S ou pour $t = 0$. Donc, ni τ ni θ ne peuvent prendre de valeurs négatives dans la suite des temps. Donc on a

$$\tau > 0, \qquad \theta > 0,$$

et, par suite,

$$|V| < \alpha.$$

C'est ce que nous voulions démontrer.

Revenons alors aux fonctions V_i. On tire du lemme précédent les inégalités

$$|V_i| < \varepsilon_i.$$

Donc la série

$$V = \Sigma V_i$$

est absolument et uniformément convergente, quels que soient le point (x, y, z) dans T ou sur S et l'instant t positif ou nul. Donc V est une fonction continue qui s'annule sur S et se réduit à φ pour $t = 0$.

Supposons maintenant $t > t_0$, t_0 étant un nombre positif quelconque. Soit

$$A_{p,i} = \int_{(T)} P_i U_p \, d\tau.$$

On a

$$V_i = \Sigma_p A_{p,i} U_p e^{-\xi_p t}.$$

La série double

$$\Sigma_p \Sigma_i A_{p,i} U_p e^{-\xi_p t}$$

est évidemment convergente. La convergence est absolue et uniforme pour $t > t_0$. On peut donc écrire

$$V = \Sigma V_i = \Sigma_i (\Sigma_p A_{p,i} U_p e^{-\xi_p t})$$

et, en changeant l'ordre des sommations,

$$V = \Sigma_p (\Sigma_i A_{p,i}) U_p e^{-\xi_p t}.$$

Or

$$\Sigma_i A_{p,i} = \int_{(T)} U_p \Sigma P_i \, d\tau = \int_{(T)} U_p \varphi \, d\tau = A_p,$$

d'où

$$V = \Sigma A_p U_p e^{-\xi_p t}.$$

On conclut immédiatement de là l'équation

$$\Delta V = \frac{\partial V}{\partial t},$$

en différentiant terme à terme, ce qui est permis (n° 90).

Ainsi, la fonction V est solution de l'équation de Fourier, s'annule sur S et se réduit à φ pour $t = 0$.

On peut donc énoncer le théorème suivant : *Si l'on prouve l'existence d'une solution du problème de Fourier dans le cas où la fonction initiale est un polynome, on pourra affirmer l'existence d'une solution dans le cas le plus général.* Je me bornerai donc désormais au cas où φ est un polynome.

Je me suis appuyé, à un moment, sur ce fait que la série double

$$\Sigma\Sigma A_{p,i} U_p e^{-\xi_p t}$$

est absolument et uniformément convergente. En effet, soit

$$t > t_0 > 0.$$

L'inégalité de Schwarz donne

$$A_{p,i}^2 < \int_{(T)} P_i^2 \, d\tau \int_{(T)} U_i^2 \, d\tau.$$

Donc

$$|A_{p,i}| < \varepsilon_i \sqrt{T}.$$

Maintenant, on a

$$|U_p| < M\xi_p$$

et

$$e^{-\xi_p t} < e^{-\xi_p t_0}.$$

D'autre part

$$\xi_p\, e^{-\xi_p t_0} < \frac{L}{\xi_p^3},$$

L étant un nombre assignable, car

$$\xi_p^4\, e^{-\xi_p t_0}$$

tend vers zéro quand p augmente indéfiniment. Enfin

$$\xi_p > N\sqrt[3]{p^2}.$$

On voit par là que la série proposée a ses termes plus petits en valeur absolue que ceux de la série

$$\sum\sum \varepsilon_i \sqrt{T}\, M \frac{L}{N} \frac{1}{p^2},$$

qu'on peut écrire

$$\frac{ML\sqrt{T}}{N} \sum\sum \frac{\varepsilon_i}{p^2}.$$

Or la série

$$\sum\sum \frac{\varepsilon_i}{p^2} = \sum \varepsilon_i \sum \frac{1}{p^2}$$

est convergente et ses termes sont des constantes positives. Notre proposition est donc établie.

Cette dernière remarque étant faite, tout est prêt pour la démonstration rigoureuse de l'existence d'une solution du problème de Fourier réduit, lorsque φ est un polynome.

83. J'emploierai une méthode imitée de celle du *balayage*. Les considérations contenues dans la première Partie de ce Mémoire faciliteront beaucoup notre tâche en nous permettant de passer rapidement sur certaines discussions.

Envisageons le domaine T limité par la surface fermée S. Soit Σ une sphère comprenant à son intérieur toute la surface S. Désignons par Θ

le domaine intérieur à Σ et par $d\sigma'$ un élément de Σ ayant pour coordonnées (x', y', z').

Soit ρ' une fonction quelconque, continue et positive en tout point (x', y', z') de Σ. Posons

$$\alpha \leqq \frac{\pi}{4R},$$

R étant le rayon de la sphère Σ. Considérons la fonction

$$W_0(x, y, z, t) = \int_{(\Sigma)} \rho' e^{-\alpha^2 t} \frac{\cos \alpha r}{r} d\sigma',$$

$$r^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2.$$

On a

$$\Delta W_0 = \frac{\partial W_0}{\partial t}$$

en tout point de Θ. En outre, il est clair que W_0 est holomorphe dans le même domaine. Enfin, on voit que la fonction W_0 est positive à l'intérieur de Σ et que l'on peut choisir ρ' de façon que

$$\varphi(x, y, z) < W_0(x, y, z, 0)$$

en tout point de Θ.

Je suppose la fonction donnée φ positive ou nulle dans tout le domaine Θ. Cette fonction est, en outre, un polynome entier en (x, y, z). Nous verrons plus loin quelles généralisations sont possibles.

Reprenons maintenant les sphères Ω_i définies au début du n° 22 et considérons-les l'une après l'autre, en adoptant le même ordre de succession qu'à propos des équations du régime permanent.

Ces sphères Ω_i vont me servir à faire, à partir de la fonction W_0, une série d'opérations semblables à celles que j'ai appelées au n° 22 des *balayages*.

Déterminons une fonction continue U_0 jouissant des propriétés suivantes :

$$\left| \begin{array}{lll} \Delta U_0 = \dfrac{\partial U_0}{\partial t} & & \text{dans } \Omega_1, \\ U_0 = W_0 & & \text{sur } \Omega_1, \\ U_0 = W_0 - \varphi & & \text{pour } t = 0. \end{array} \right.$$

D'après ce que nous avons vu dans le Chapitre I de cette troisième Partie, nous pouvons calculer U_0.

Je dis que cette fonction U_0 est positive. En effet, elle est positive pour $t = 0$ et elle reste positive sur Ω_1 dans toute la suite des temps. Si donc elle devenait quelque part négative, il y aurait certainement pour elle, à un instant déterminé et en un point intérieur à Ω_1, un minimum négatif pour lequel $\frac{\partial U_0}{\partial t}$ serait négatif. Or cela est impossible. Donc

$$U_0 > 0.$$

Posons maintenant

$$\Theta_0 = W_0 - U_0.$$

On a

$$\left|\begin{array}{ll} \Delta\Theta_0 - \dfrac{\partial\Theta_0}{\partial t} = 0 & \text{dans } \Omega_1, \\ \Theta_0 = 0 & \text{sur } \Omega_1, \\ \Theta_0 = \varphi & \text{pour } t = 0. \end{array}\right.$$

On conclut de là, toujours par le même procédé, employé déjà, pour montrer que le problème de Fourier n'a qu'une seule solution, l'inégalité

$$\Theta_0 > 0.$$

Donc

$$0 < U_0 < W_0.$$

Un raisonnement identique à celui du nº 23 montre l'existence et la continuité de la dérivée $\frac{d\Theta_0}{dn_i}$ en tout point de Ω_1 pour $t > 0$. Puisque Θ_0 s'annule sur Ω_1 et ne prend que des valeurs positives à l'intérieur de cette sphère, on a

$$\frac{d\Theta_0}{dn_i} \geqq 0$$

sur Ω_1, pour $t > 0$.

Concevons maintenant une fonction W_1 qui coïncide avec W_0 à l'extérieur de Ω_1 et avec U_0 à l'intérieur. On a

$$W_1 > 0, \qquad W_1 \leqq W_0.$$

Sur Ω_1, pour $t > 0$, la relation

$$-\frac{d\Theta_0}{dn_i} = \frac{dW_1}{dn_i} + \frac{dW_1}{dn_e} \leqq 0$$

est vérifiée. Enfin, il est clair que la fonction W_1 est continue dans tout l'espace pour $t > 0$ et que, pour $t = 0$, elle se réduit à W_0 à l'extérieur de Ω_1 et à $W_0 - \varphi$ à l'intérieur.

J'ajoute que la double inégalité

$$0 < W_1 \leqq W_0$$

montre que, si β est un nombre positif inférieur à α, le produit

$$e^{\beta^2 t} W_1$$

tend uniformément vers zéro quand t augmente indéfiniment par valeurs positives.

Prenons maintenant la fonction W_1 et la sphère Ω_2. Supposons, pour fixer les idées, que la sphère Ω_2 coupe la sphère Ω_1. Alors la sphère Ω_2 est divisée en deux régions, l'une (1) extérieure à Ω_1, l'autre (2) intérieure à Ω_1.

On a

$$\left|\begin{array}{ll} \Delta W_1 = \dfrac{\partial W_1}{\partial t} & \text{dans (1)}, \\ \Delta W_1 = \dfrac{\partial W_1}{dt} & \text{dans (2)}, \\ \dfrac{dW_1}{dn_i} + \dfrac{dW_1}{dn_e} \leqq 0 & \text{sur la portion de } \Omega_1 \text{ située dans } \Omega_2. \end{array}\right.$$

Déterminons une fonction continue U_1 jouissant des propriétés suivantes :

$$\left|\begin{array}{ll} \Delta U_1 = \dfrac{\partial U_1}{\partial t} & \text{dans } \Omega_2, \\ U_1 = W_1 & \text{sur } \Omega_2, \\ U_1 = W_0 - \varphi & \text{pour } t = 0. \end{array}\right.$$

Cette fonction, devant satisfaire aux conditions de continuité fondamentales, vérifiera, en tout point de la portion de Ω_1 intérieure à Ω_2, la relation

$$\frac{dU_1}{dn_i}+\frac{dU_1}{dn_e}=0.$$

En vertu des lemmes rappelés au nº 80, on peut affirmer que la fonction U_1 existe.

Cela posé, on a évidemment

$$U_1>0.$$

Écrivons

$$\Theta_1=W_1-U_1.$$

Il vient

$$\left|\begin{array}{ll} \Delta\Theta_1-\dfrac{\partial\Theta_1}{\partial t}=0 & \text{dans (1)}, \\ \Delta\Theta_1-\dfrac{\partial\Theta_1}{\partial t}=0 & \text{dans (2)}, \\ \dfrac{d\Theta_1}{dn_i}+\dfrac{d\Theta_1}{dn_e}\leqq 0 & \text{sur la portion de } \Omega_1 \text{ située dans } \Omega_2. \end{array}\right.$$

Enfin on a

$$\begin{array}{ll} \Theta_1=0 & \text{sur } \Omega_2, \\ \Theta_1=0 & \text{pour } t=0, \text{ dans (2)}, \\ \Theta_1=\varphi & \text{pour } t=0, \text{ dans (1)}. \end{array}$$

Je dis que la fonction Θ_1 est positive.

En effet, soient

$d\omega_1$ un élément de Ω_1;
x', y', z' les coordonnées du centre de gravité de $d\omega_1$;
r la distance du point courant (x, y, z) au point (x', y', z').

Posons

$$\lambda=\frac{1}{4\pi}\int_{(\Omega_1)}\frac{d\omega_1}{r}.$$

On a, en tout point de Ω_1,

$$\frac{d\lambda}{dn_i}+\frac{d\lambda}{dn_e}=-1.$$

De plus, λ est le potentiel newtonien d'une couche homogène de matière attirante répandue sur Ω_1; c'est une fonction toujours positive et holomorphe en tout point de l'espace non situé sur Ω_1. Il suffit de faire voir évidemment que la fonction τ_1, définie par l'égalité

$$\lambda\tau_1 = \Theta_1,$$

est positive; il en sera alors de même de Θ_1.

On a

$$\left|\begin{array}{ll}
\lambda\,\Delta\tau_1 + 2\sum \dfrac{\partial\lambda}{\partial x}\dfrac{\partial\tau_1}{\partial x} - \lambda\dfrac{\partial\tau_1}{\partial t} = 0 & \text{dans (1)},\\[2ex]
\lambda\,\Delta\tau_1 + 2\sum \dfrac{\partial\lambda}{\partial x}\dfrac{\partial\tau_1}{\partial x} - \lambda\dfrac{\partial\tau_1}{\partial t} = 0 & \text{dans (2)},\\[2ex]
\lambda\left(\dfrac{d\tau_1}{dn_i} + \dfrac{d\tau_1}{dn_e}\right) - \tau_1 \leqq 0 & \text{sur la portion de } \Omega_1 \text{ située dans } \Omega_2,\\[2ex]
\tau_1 = 0 & \text{sur } \Omega_2,\\
\tau_1 = 0 & \text{pour } t = 0, \text{ dans (2)},\\
\tau_1 = \dfrac{1}{\lambda}\varphi & \text{pour } t = 0, \text{ dans (1)}.
\end{array}\right.$$

La fonction τ_1 est positive ou nulle pour $t = 0$ et elle reste toujours nulle sur Ω_2. Si donc elle devenait négative, il y aurait pour elle, à un instant positif déterminé et en un point intérieur à Ω_2, un minimum négatif pour lequel $\dfrac{\partial\tau_1}{\partial t}$ serait négatif. Cela ne peut avoir lieu ni dans la région (1), ni dans la région (2), en vertu d'un raisonnement déjà fait plusieurs fois; on aurait alors en effet

$$\lambda > 0, \qquad \Delta\tau_1 \leqq 0, \qquad \sum \frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{\partial\tau_1}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial\tau_1}{\partial t} < 0,$$

et, par conséquent, les équations prescrites ne seraient pas vérifiées. La chose ne peut pas davantage se produire en un point de la portion de Ω_1 intérieure à Ω_2. Cela impliquerait en effet

$$\lambda > 0, \qquad \frac{d\tau_1}{dn_i} \geqq 0, \qquad \frac{d\tau_1}{dn_e} \geqq 0, \qquad \tau_1 < 0,$$

et l'équation prescrite serait impossible. On conclut de là que l'on a

$$\tau_1 > 0$$

et, par suite,

$$\Theta_1 > 0.$$

Notre proposition est établie.

L'inégalité précédente peut s'écrire

$$0 < U_1 < W_1.$$

Concevons alors une fonction W_2 qui coïncide avec W_1 à l'extérieur de Ω_2 et avec U_1 à l'intérieur. On a

$$W_2 > 0, \qquad W_2 \leqq W_1.$$

J'ajoute que la fonction W_2 est continue dans tout l'espace pour $t > 0$ et qu'elle coïncide, pour $t = 0$, avec $W_0 - \varphi$ dans une région de l'espace et avec W_0 dans l'autre.

Les inégalités que nous venons d'écrire montrent encore que le produit

$$e^{\beta^2 t} W_2$$

tend vers zéro quand t augmente indéfiniment par valeurs positives.

Enfin on prouverait encore ici l'existence et la continuité sur Ω_2 de $\frac{d\Theta_1}{dn_i}$; la marche à suivre serait la même que pour les équations du régime permanent. On a

$$\frac{d\Theta_1}{dn_i} \geqq 0,$$

d'où

$$\frac{dW_2}{dn_i} + \frac{dW_2}{dn_e} \leqq 0$$

sur Ω_2 et sur la portion de Ω_1 extérieure à Ω_2.

La fonction W_2 présente donc exactement les mêmes caractères que présentait tout à l'heure la fonction W_1. On en déduira une nouvelle fonction W_3 qui sera liée à W_2 comme W_2 l'est à W_1. On voit apparaître nettement l'analogie de ces *balayages* successifs avec ceux que nous avons considérés à propos du problème de Dirichlet généralisé.

Continuons de la sorte en prenant successivement toutes les sphères Ω_i dans l'ordre indiqué. Nous aurons toujours les mêmes opérations à effectuer. Nous construirons donc une suite indéfinie de fonctions

$$W_0, \quad W_1, \quad W_2, \quad \ldots, \quad W_K, \quad \ldots,$$

satisfaisant aux inégalités suivantes :

$$W_K > 0, \qquad W_{K+1} \leqq W_K.$$

Il est clair que cette suite est convergente : soit W sa limite.

Nous allons maintenant étudier la fonction $W(x, y, z, t)$, qui vient d'être définie pour tout point du domaine T et pour toute valeur positive du temps.

84. D'abord W a une valeur bien définie et unique en tout point (x, y, z) de T et pour toute valeur positive de t : c'est une fonction *uniforme* de (x, y, z, t).

Cette fonction est *finie*, car on a

$$W \leqq W_0$$

pour chaque système de valeurs de (x, y, z, t).

Je dis que la fonction W n'est pas identiquement nulle. En effet, soit Γ une fonction continue jouissant des propriétés suivantes :

$$\left|\begin{array}{ll} \Delta\Gamma = \dfrac{\partial\Gamma}{\partial t} & \text{dans } \Theta, \\ \Gamma = W_0 & \text{sur } \Sigma, \\ \Gamma = W_0 - \varphi & \text{pour } t = 0. \end{array}\right.$$

Un raisonnement déjà fait plusieurs fois montre que l'on a

$$W_K \geqq \Gamma,$$

quel que soit K. D'où

$$W_0 \geqq W \geqq \Gamma.$$

Or, on a

$$\Gamma > 0,$$

l'égalité étant exclue. Donc W ne s'annule pas.

Les inégalités

$$W_K > W \geqq \Gamma$$

montrent immédiatement que W se réduit, pour $t = 0$, à la même fonction de (x, y, z) que $W_0 - \varphi$.

Les inégalités

$$W_0 > W > 0$$

donnent

$$e^{\beta^2 t} W_0 > e^{\beta^2 t} W > 0.$$

On en conclut que le produit

$$e^{\beta^2 t} W$$

tend uniformément vers zéro quand t augmente au delà de toute limite par valeurs positives.

Soit M un point de S. Construisons une sphère Σ_M tangente à S en M et extérieure à T : cela est possible en raison des hypothèses faites sur S. Soit Σ'_M une autre sphère concentrique à Σ_M et contenant à son intérieur tout le domaine T. Nous pouvons supposer que la sphère Σ ait été prise assez grande pour contenir à son intérieur toutes les sphères, telles que Σ'_M, correspondant aux divers points de S. Déterminons alors la fonction continue Ω qui jouit des propriétés suivantes, en appelant D_M l'espace compris entre Σ_M et Σ'_M :

$$\left|\begin{array}{ll} \Delta\Omega = \dfrac{\partial\Omega}{\partial t} & \text{dans } D_M, \\ \Omega = W_0 & \text{sur } \Sigma_M \text{ et } \Sigma'_M, \\ \Omega = W_0 - \varphi & \text{pour } t = 0. \end{array}\right.$$

Sachant résoudre le problème de Fourier pour le cas d'une couche sphérique, nous savons calculer Ω. On a

$$W_0 > W_K > \Omega,$$

quel que soit K. D'où

$$W_0 > W \geqq \Omega.$$

Or, quand le point (x, y, z) tend vers le point M, t étant positif, W_0 et Ω tendent vers la valeur qu'a W_0 en M. Donc il en est de même pour W. Donc W prend sur S les mêmes valeurs que W_0 pour $t > 0$.

Je dis maintenant que la fonction $W(x, y, z, t)$ est solution de l'équation de Fourier

$$\Delta W = \frac{\partial W}{\partial t}.$$

Avant de le démontrer, je vais établir quelques lemmes.

85. Parmi les sphères Ω_i, considérons-en une en particulier : soit Ω_α cette sphère, d'ailleurs quelconque. Supposons qu'elle ait été considérée dans la recherche de W aux opérations numérotées :

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \alpha_3, \quad \ldots, \quad \alpha_n, \quad \ldots.$$

D'après l'ordre assigné aux sphères Ω_i pour les balayages successifs, les opérations dont je viens de parler sont certainement en nombre infini. Ces opérations donnent naissance, respectivement, aux fonctions

$$W_{\alpha_1}, \quad W_{\alpha_2}, \quad W_{\alpha_3}, \quad \ldots, \quad W_{\alpha_n}, \quad \ldots,$$

qui forment une suite convergente de termes positifs et décroissants ayant W pour limite. Il est clair que l'on a

$$\Delta W_{\alpha_n} = \frac{\partial W_{\alpha_n}}{\partial t} \qquad \text{dans } \Omega_\alpha$$

pour toutes les valeurs de l'indice n. Considérons alors la série

$$(W_{\alpha_1} - W_{\alpha_2}) + (W_{\alpha_2} - W_{\alpha_3}) + \ldots + (W_{\alpha_n} - W_{\alpha_{n+1}}) + \ldots.$$

Tous ses termes sont positifs; elle est convergente et sa somme est $W_{\alpha_1} - W$. Je vais démontrer qu'elle est uniformément convergente. Alors il sera établi que W est une fonction continue dans Ω_α pour toute valeur positive de t.

Posons

$$U_n = W_{\alpha_n} - W_{\alpha_{n+1}}.$$

On a

$$\left|\begin{array}{ll} \Delta U_n = \dfrac{\partial U_n}{\partial t} & \text{dans } \Omega_\alpha, \\ U_n > 0 & \text{sur } \Omega_\alpha, \\ U_n = 0 & \text{pour } t = 0. \end{array}\right.$$

Nous pouvons évidemment concevoir une série de fonctions Φ_n ne dépendant que de (x, y, z), définies et continues en tout point de Ω_α, positives et telles que l'on ait

$$\Phi_n > U_n \qquad \text{sur } \Omega_\alpha, \text{ quel que soit } t.$$

Supposons en outre, comme il est permis, que la série $\Sigma\Phi_n$ soit convergente. Construisons alors les fonctions H_n harmoniques dans Ω_α

et prenant sur cette sphère les valeurs Φ_n. Chacune des fonctions H_n est positive et, en vertu du théorème de Harnack, la série ΣH_n est uniformément convergente dans tout domaine intérieur à Ω_α. Cela étant, on constate aisément que la différence $H_n - U_n$ est positive pour toute valeur de l'indice n : cette différence, en effet, est une solution de l'équation de Fourier qui reste positive sur Ω_α quel que soit t et qui se réduit à H_n pour $t = 0$.

On conclut de là que la série ΣU_n est uniformément convergente dans toute sphère Ω'_α intérieure à Ω_α.

Donc W *est une fonction de* (x, y, z, t) *continue, pour toute valeur de* t, *dans une sphère* Ω_α *quelconque et, par suite, dans tout le domaine* T.

Posons maintenant

$$I = \int_t^\infty W_0(x, y, z, \tau)\, d\tau = \frac{1}{\alpha^2} W_0(x, y, z, t).$$

Considérons l'intégrale

$$J = \int_t^\infty W(x, y, z, \tau)\, d\tau.$$

Je dis que, malgré la présence d'une limite d'intégration infinie, cette intégrale a un sens.

En effet, puisque W est une fonction continue, il est clair d'abord que c'est une fonction intégrable. Ensuite, on a

$$0 < W < W_0,$$

d'où, l étant un nombre positif,

$$\int_t^l W\, d\tau < \int_t^l W_0\, d\tau < \int_t^{+\infty} W_0\, d\tau.$$

Ainsi, l'expression

$$\int_t^l W\, d\tau,$$

qui va en croissant avec l, ne dépasse pas une limite assignable : elle a donc une limite et, par conséquent, J a un sens. Nous avons, par conséquent, construit une fonction $J(x, y, z, t)$, définie et continue en tout point de T et pour toute valeur non négative de t, positive, allant en décroissant lorsque t augmente et tendant vers zéro lorsque t croît au delà de toute limite. Enfin, on a manifestement

$$\frac{\partial J}{\partial t} = -W,$$

car nous sommes dans des conditions où l'on peut appliquer la règle relative à la dérivation des intégrales.

Soit

$$W_{\alpha_n} - W_{\alpha_{n+1}} = U_n.$$

Reprenons la série

$$W_{\alpha_1} - W = \Sigma(W_{\alpha_n} - W_{\alpha_{n+1}}) = \Sigma U_n.$$

Chaque fonction U_n remplit, à l'intérieur de la sphère Ω_α, les conditions suivantes :

$$\left|\begin{array}{ll} \Delta U_n = \dfrac{\partial U_n}{\partial t} & \text{dans } \Omega_\alpha, \\ U_n = 0 & \text{pour } t = 0, \\ e^{\beta^2 t} U_n = 0 & \text{pour } t = +\infty. \end{array}\right.$$

L'intégrale

$$\int_t^\infty U_n \, d\tau$$

a un sens pour toute valeur de n. On a

$$\int_t^\infty \sum_1^p U_n \, d\tau = \sum_1^p \int_t^\infty U_n \, d\tau,$$

quel que soit p. Or

$$\sum U_n = \sum_1^p U_n + R_p,$$

et R_p tend uniformément vers zéro quand p augmente indéfiniment. Mais

$$\int_t^l R_p \, d\tau < \int_t^l (W_{\alpha_1} - W) \, d\tau < J_{\alpha_1} - J.$$

Donc, l'intégrale

$$\int_t^\infty R_p\, d\tau$$

a un sens. D'ailleurs, à cause de la convergence uniforme de R_p vers zéro, cette intégrale tend vers zéro. Finalement

$$J_{\alpha_1} - J = \sum \int_t^\infty U_n(x, y, z, t)\, d\tau = \Sigma V_n.$$

On a ainsi un développement de J en série.

Dans l'intégrale V_n, les conditions pour que l'on puisse différentier sous le signe d'intégration, malgré la présence d'une limite infinie, sont évidemment remplies; d'où

$$\frac{\partial V_n}{\partial t} = - U_n$$

et

$$\Delta V_n = \int_t^\infty \Delta U_n\, d\tau = \int_t^\infty \frac{\partial U_n}{\partial \tau}\, d\tau = - U_n(x, y, z, t).$$

On conclut de là

$$\Delta V_n = \frac{\partial V_n}{\partial t} \qquad \text{dans } \Omega_\alpha.$$

Remarquons que la série

$$\sum \frac{\partial V_n}{\partial t},$$

qui coïncide terme à terme, au signe près, avec la série

$$\Sigma U_n,$$

est uniformément convergente. Sa somme est donc

$$\frac{\partial J_{\alpha_1}}{\partial t} - \frac{\partial J}{\partial t}.$$

Tirons de là quelques conséquences :

Soit G la fonction de Green relative à une sphère Ω'_α contenue dans Ω_α et au point (x, y, z) situé à l'intérieur de Ω'_α. Appliquons la formule de Kirchhoff aux fonctions V_n et G. Il vient immédiatement

$$4\pi V_n(x, y, z, t) = \int_{(\Omega'_\alpha)} \frac{dG}{dn_i} V_n \, d\sigma - \int_{(\Omega'_\alpha)} G \frac{\partial V_n}{\partial t} d\tau,$$

en appelant $d\sigma$ et $d\tau$ un élément de la surface et du volume de Ω'_α. Cela posé, les séries

$$\sum V_n, \qquad \sum \frac{\partial V_n}{\partial t}$$

sont uniformément convergentes dans Ω'_α. D'autre part, pour un point (x, y, z) quelconque intérieur à Ω'_α, on peut assigner des limites supérieures aux intégrales positives :

$$\int_{(\Omega'_\alpha)} \frac{dG}{dn_i} d\sigma, \qquad \int_{(\Omega'_\alpha)} G \, d\tau.$$

On conclut immédiatement de là

$$4\pi (J_{\alpha_1} - J) = \int_{(\Omega'_\alpha)} \frac{dG}{dn_i} (J_{\alpha_1} - J) \, d\sigma - \int_{(\Omega'_\alpha)} G \frac{\partial (J_{\alpha_1} - J)}{\partial t} d\tau,$$

grâce à une discussion très simple déjà faite bien des fois. Or, on a

$$4\pi J_{\alpha_1} = \int_{(\Omega'_\alpha)} \frac{dG}{dn_i} J_{\alpha_1} \, d\sigma - \int_{(\Omega'_\alpha)} G \frac{\partial J_{\alpha_1}}{\partial t} d\tau.$$

Donc

$$4\pi J = \int_{(\Omega'_\alpha)} \frac{dG}{dn_i} J \, d\sigma - \int_{(\Omega'_\alpha)} G \frac{\partial J}{\partial t} d\tau.$$

Il est visible, sur cette expression de J, d'après les propriétés connues de G, que J a, en tout point intérieur à Ω'_α, des dérivées partielles du premier ordre :

$$\frac{\partial J}{\partial x}, \quad \frac{\partial J}{\partial y}, \quad \frac{\partial J}{\partial z}$$

qui sont continues. En vertu des mêmes formules, on voit que ces dérivées peuvent être obtenues en différentiant la série ΣV_n terme à terme.

Considérons maintenant la fonction

$$J' = \int_t^\infty J(x, y, z, \tau)\, d\tau.$$

On peut refaire pour J′ tous les raisonnements que l'on a faits pour J. On a

$$J'_{\alpha_1} - J' = \sum \int_t^\infty V_n\, d\tau = \sum V'_n.$$

Cette fonction J′ jouit évidemment des mêmes propriétés que la fonction J. En particulier, il est clair que les dérivées

$$\frac{\partial J'}{\partial x}, \quad \frac{\partial J'}{\partial y}, \quad \frac{\partial J'}{\partial z}, \quad \frac{\partial J'}{\partial t}$$

et

$$\frac{\partial^2 J'}{\partial x\, \partial t}, \quad \frac{\partial^2 J'}{\partial y\, \partial t}, \quad \frac{\partial^2 J'}{\partial z\, \partial t}, \quad \frac{\partial^2 J'}{\partial t^2}$$

existent et sont continues à l'intérieur de Ω'_α. Ces dérivées peuvent être obtenues en différentiant la série

$$\Sigma V'_n,$$

terme à terme. De plus, on a

$$4\pi J' = \int_{(\Omega'_\alpha)} \frac{dG}{dn_i} J'\, d\sigma - \int_{(\Omega'_\alpha)} G \frac{\partial J'}{\partial t}\, d\tau,$$

et

$$4\pi \frac{\partial J'}{\partial t} = \int_{(\Omega'_\alpha)} \frac{dG}{dn_i} \frac{\partial J'}{\partial t}\, d\sigma - \int_{(\Omega'_\alpha)} G \frac{\partial^2 J'}{\partial t^2}\, d\tau.$$

A cause de l'existence des dérivées

$$\frac{\partial^2 J'}{\partial x\, \partial t}, \quad \frac{\partial^2 J'}{\partial y\, \partial t}, \quad \frac{\partial^2 J'}{\partial z\, \partial t},$$

on voit que la fonction J′ possède à l'intérieur de Ω'_α, des dérivées partielles continues des deux premiers ordres que l'on peut obtenir en différentiant terme à terme la série $\Sigma V'_n$. Or, on a

$$\Delta V'_n = \frac{\partial V'_n}{\partial t}.$$

On conclut de là que l'on a

$$\Delta J' = \frac{\partial J'}{\partial t},$$

et cela pouvait se voir aussi, grâce aux expressions de J' et de $\frac{\partial J}{\partial t}$ par des intégrales définies, en refaisant une fois de plus une discussion que nous connaissons bien.

L'équation de Fourier est vérifiée par J' à l'intérieur de la sphère Ω'_α. Mais celle-ci est quelconque. Donc, cela a lieu en tout point du domaine T.

Nous allons maintenant redescendre de la fonction J' à la fonction W.

86. On constate aisément, d'après les remarques des paragraphes précédents, que l'on a

$$\left|\begin{array}{ll} \Delta J' = \dfrac{\partial J'}{\partial t} & \text{dans T,} \\ J' = \dfrac{1}{\alpha^4} W_0 & \text{sur S.} \end{array}\right.$$

Enfin, appelons J'_0 la valeur de J' pour $t = 0$. C'est

$$J'_0 = \int_0^\infty J(x, y, z, \tau)\, d\tau.$$

C'est donc une fonction continue de (x, y, z).

On a

$$W_0 = e^{-\alpha^2 t}\Phi,$$

Φ ne dépendant que de (x, y, z). Posons

$$H = e^{-\alpha^2 t} K,$$

K ne dépendant aussi que de (x, y, z). Supposons que l'on ait choisi K de façon que

$$\left|\begin{array}{ll} \Delta K + \alpha^2 K = 0 & \text{dans T,} \\ K = \Phi & \text{sur S.} \end{array}\right.$$

Cela est possible, d'après la première Partie de ce Mémoire, si, comme rien ne s'y oppose, on a pris α assez petit. Prenons alors

$$\psi = J'_0 - \frac{1}{\alpha^4} K$$

et

$$U = J' - \frac{1}{\alpha^4} H.$$

Il vient

$$\left| \begin{array}{ll} \Delta U = \dfrac{\partial U}{\partial t} & \text{dans } T, \\ U = 0 & \text{sur } S, \\ U = \psi & \text{pour } t = 0, \end{array} \right.$$

car on a

$$\left| \begin{array}{ll} \Delta H = \dfrac{\partial H}{\partial t} & \text{dans } T, \\ H = W_0 & \text{sur } S, \\ H = K & \text{pour } t = 0. \end{array} \right.$$

C'est de là que nous allons conclure cet important théorème que *les dérivées successives de* J' *par rapport à t vérifient l'équation de Fourier.*

Il est clair d'abord que la dérivée

$$\frac{\partial^2 H}{\partial t^2},$$

qui est égale à $\alpha^4 H$, existe et vérifie l'équation de Fourier.

Cela posé, reprenons les fonctions fondamentales U_p et les nombres caractéristiques correspondants ξ_p de M. Poincaré. D'après un théorème démontré plus haut, si l'on pose

$$A_p = \int_{(T)} \psi U_p \, d\tau,$$

on a

$$U = \Sigma A_p U_p e^{-\xi_p t}.$$

On conclut de là sans peine que la dérivée

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$$

existe et satisfait à l'équation de Fourier.

Finalement, la fonction

$$W = \frac{\partial^2 J'}{\partial t^2}$$

remplit dans T *toutes les conditions de continuité prescrites par l'énoncé du problème de Fourier et vérifie dans le même domaine l'équation aux dérivées partielles du refroidissement*

$$\Delta W = \frac{\partial W}{\partial t},$$

pourvu que t soit positif.

En résumé, la méthode du balayage nous a permis de construire une fonction $W(x, y, z, t)$ remplissant les conditions de continuité imposées et jouissant des propriétés suivantes :

$$\left|\begin{array}{ll} \Delta W = \dfrac{\partial W}{\partial t} & \text{dans T,} \\ W = W_0 & \text{sur S,} \\ W = W_0 - \varphi & \text{pour } t = 0, \\ e^{\beta^2 t} W = 0 & \text{pour } t = +\infty. \end{array}\right.$$

C'est de là que nous allons déduire très rapidement la solution complète du problème de Fourier.

87. Posons

$$V = W_0 - W.$$

On a

$$\left|\begin{array}{ll} \Delta V = \dfrac{\partial V}{\partial t} & \text{dans T, pour } t > 0, \\ V_S = 0 & \text{sur S, pour } t > 0, \\ V_0 = \varphi & \text{dans T, pour } t = 0, \\ \lim e^{\beta^2 t} V = 0 & \text{quand } t \text{ croît indéfiniment par valeurs positives.} \end{array}\right.$$

En outre, les propriétés de continuité imposées par l'énoncé sont assurées.

La fonction V *est donc la solution du problème de Fourier réduit.*

Nous avons supposé la fonction φ holomorphe et positive en tout point de T. Voyons maintenant comment il est possible de se débarrasser de ces hypothèses restrictives.

88. D'abord, le théorème analogue à celui de Harnack, que nous avons démontré au n° 82, permet de passer du cas que nous venons de traiter à celui où la fonction φ, toujours positive ou nulle, n'est plus que continue dans T.

Abordons enfin le cas général. La fonction φ est alors simplement définie et continue dans T, son signe est quelconque.

Commençons par prolonger la fonction φ, d'une manière d'ailleurs arbitraire, de façon qu'elle soit continue dans toute la sphère Θ. Cela fait, posons

$$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2,$$

avec

$$\varphi_1 \geqq 0, \qquad \varphi_2 \geqq 0.$$

Construisons, par la méthode du balayage, à l'aide de φ_1 et φ_2, les deux fonctions V_1 et V_2 qui résolvent le problème de Fourier quand les valeurs initiales données sont respectivement φ_1 et φ_2. Soit enfin

$$V = V_1 - V_2.$$

La fonction V est la solution cherchée.

89. Le théorème d'existence que nous venons d'établir est susceptible de plusieurs généralisations. J'indique brièvement les deux principales.

On peut supposer que le domaine T présente à sa frontière S certaines singularités. Sur ce point, je n'ai qu'à renvoyer à l'étude analogue faite pour le problème de Dirichlet généralisé.

Voyons, pour finir, ce qui arrive si le nombre des variables ponctuelles indépendantes n'est pas égal à *trois*. Raisonnons sur le cas de *deux* variables. Tous les calculs restent les mêmes. Mais la définition de W_0 ne subsiste plus. Bien que l'on puisse refaire ici la remarque du n° 25, je préfère procéder directement.

Partons d'une fonction continue U qui vérifie les relations

$$\begin{aligned} \Delta U + \alpha^2 U &= 0 \qquad \text{dans } \Theta, \\ U &= 1 \qquad \text{sur } \Sigma. \end{aligned}$$

Si α est assez petit, on peut construire U. Posons alors

$$W_0 = e^{-\alpha^2 t} U.$$

La nouvelle fonction W_0 jouit des mêmes propriétés que l'ancienne et, cette fois, sa définition n'implique aucune restriction quant au nombre des variables.

III. — Forme analytique de la solution du problème de Fourier. — Lois du refroidissement. — Représentation des fonctions arbitraires par des séries procédant suivant les fonctions fondamentales de M. Poincaré. — Application au problème des membranes vibrantes.

90. Reprenons la fonction qui résout le problème de Fourier, c'est-à-dire la fonction V qui possède les propriétés suivantes :

$$\left|\begin{array}{ll} \Delta V = \dfrac{\partial V}{\partial t} & \text{dans T}, \\ V_S = 0 & \text{sur S}, \\ V_0 = \varphi & \text{pour } t = 0. \end{array}\right.$$

D'après le théorème de M. Poincaré, démontré au début du Chapitre précédent, nous pouvons écrire

$$V = \Sigma A_p U_p e^{-\xi_p t},$$

les U_p étant les fonctions fondamentales dont les ξ_p sont les nombres caractéristiques et les constantes A_p étant définies par les quadratures que l'on sait.

Nous obtenons ainsi *a posteriori*, en nous basant sur l'existence de V prouvée directement, l'expression explicite de cette fonction par une série de solutions simples. Mais la série n'est valable que pour $t > 0$.

La série obtenue en dérivant n fois par rapport à t est

$$(-1)^n \Sigma A_p U_p \xi_p^n e^{-\xi_p t}.$$

On a

$$|A_p| < A, \qquad |U_p| < B\xi_p, \qquad \xi_p > C\sqrt[3]{p^2},$$

A, B, C étant des constantes positives convenables qui ne dépendent pas de p, mais seulement de φ et du domaine T. La série précédente sera absolument et uniformément convergente pour $t > t_0 > 0$ si la série numérique

$$\Sigma \xi_p^{n+1} e^{-\xi_p t_0}$$

est elle-même convergente. Or, le produit

$$p^2 \xi_p^{n+1} e^{-\xi_p t_0}$$

tend vers zéro quand p augmente indéfiniment. En effet, il est positif et inférieur à

$$\frac{1}{C^3} \xi_p^{n+4} e^{-\xi_p t_0}.$$

Mais on sait que

$$\xi_p^{n+4} e^{-\xi_p t_0}$$

tend vers zéro quand ξ_p et, par suite, p augmentent au delà de toute limite. *Donc* V *a par rapport à* t, *pour* $t > 0$, *des dérivées partielles continues de tous les ordres, qu'on peut obtenir en dérivant la série* V *terme à terme.*

Étudions maintenant les dérivées de V par rapport à (x, y, z). Soit T′ un domaine contenu dans T. Considérons la série

$$\sum A_p \frac{\partial U_p}{\partial x} e^{-\xi_p t}.$$

On a

$$U_p = \frac{\xi_p}{4\pi} \int_{(T)} U'_p G \, d\tau'$$

et

$$\frac{\partial U_p}{\partial x} = \frac{\xi_p}{4\pi} \int_{(T)} U'_p \frac{\partial G}{\partial x} d\tau'.$$

Mais on peut assigner une limite supérieure L à

$$\int_{(T)} \left| \frac{\partial G}{\partial x} \right| d\tau',$$

tant que le point (x, y, z) reste dans T′. On a alors

$$\left| \frac{\partial U_p}{\partial x} \right| < \frac{\xi_p}{4\pi} B \xi_p L.$$

Or, la série

$$\Sigma \xi_p^2 e^{-\xi_p t_0}$$

est convergente. Donc, pour $t > t_0$, t_0 étant un nombre positif quelconque, la série

$$\sum A_p \frac{\partial U_p}{\partial x} e^{-\xi_p t}$$

est absolument et uniformément convergente dans T'. *Ainsi la fonction* V *a par rapport à* x, *en tout point intérieur à* T, *une dérivée première continue, qu'on peut obtenir en dérivant la série* V *terme à terme.*

En procédant de la même façon et en faisant usage au besoin d'une transformation classique dans la théorie du potentiel newtonien, on verrait aisément que le même théorème subsiste pour une dérivée quelconque de V par rapport à (x, y, z).

On peut aller plus loin et montrer que V est, pour $t > 0$, une fonction *holomorphe* de (x, y, z, t). En effet, écrivons par exemple

$$V = \sum_p \sum_\alpha (-1)^\alpha A_p U_p e^{-\xi_p t_0} \xi_p^\alpha \frac{(t-t_0)^\alpha}{\alpha!}.$$

Cette série double est absolument et uniformément convergente lorsque $|t - t_0|$ est assez petit. D'où l'on conclut que V peut être développé en série ordonnée suivant les puissances entières de $t - t_0$. Mais je n'insisterai pas sur ce théorème qui n'appartient pas à l'ordre des questions traitées en ce Mémoire [1].

Pour $t = 0$, V n'est évidemment pas une fonction holomorphe de (x, y, z), puisque V se réduit alors à la fonction *arbitraire* φ.

Enfin, pour $t = 0$, V n'est pas non plus, du moins en général, une fonction holomorphe de t. C'est ce que je vais montrer en cherchant comment se comportent les dérivées de V par rapport à t lorsque t tend vers zéro.

91. Supposons la fonction φ finie et continue dans T ainsi que ses dérivées partielles des deux premiers ordres. Supposons en outre que φ s'annule sur S.

Cherchons la fonction U qui jouit des propriétés suivantes :

$$\left|\begin{array}{ll} \Delta U = \dfrac{\partial U}{\partial t} & \text{dans T,} \\ U_S = 0 & \text{sur S,} \\ U_0 = \Delta\varphi & \text{pour } t = 0. \end{array}\right.$$

On a

$$U = \Sigma B_p U_p e^{-\xi_p t}.$$

---

(1) H. POINCARÉ, *Théorie de la chaleur*, Chap. V.

On peut écrire

$$B_p = \int_{(T)} \Delta\varphi\, U_p\, d\tau = \int_{(T)} \varphi\, \Delta U_p\, d\tau = -\xi_p \int_{(T)} \varphi\, U_p\, d\tau,$$

si l'on applique la formule de Green et si l'on tient compte de ce fait que φ et U_p s'annulent sur S. On a donc

$$B_p = -\xi_p A_p;$$

d'où

$$U = \frac{\partial V}{\partial t}.$$

On voit donc que $\frac{\partial V}{\partial t}$ se réduit à $\Delta\varphi$ pour $t = 0$. Alors il est clair que l'inégalité

$$|\Delta\varphi| < \beta$$

entraîne celle-ci :

$$\left|\frac{\partial V}{\partial t}\right| < \beta,$$

valable pour toute valeur positive ou nulle de t.

De même, si φ a des dérivées des quatre premiers ordres et si φ et $\Delta\varphi$ s'annulent sur S, on constate aisément que $\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$ se réduit à $\Delta\Delta\varphi$ pour $t = 0$. Dans ce cas, on peut assigner à $\left|\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}\right|$ une limite supérieure valable pour $t \geqq 0$.

Rien n'empêche de continuer ainsi indéfiniment. Une importante conséquence peut être tirée de la première de ces propositions.

Plaçons-nous en un point fixe M de T. On a, par la formule des accroissements finis

$$V - \varphi = t \frac{\partial V}{\partial t'},$$

t' étant un nombre positif compris entre 0 et t, d'où

$$|V - \varphi| < t\beta,$$

β ne dépendant pas de t ni du point M. On aura donc

$$|V - \varphi| < \varepsilon,$$

ε étant un nombre positif donné à l'avance aussi petit que l'on voudra, dès qu'on aura

$$o < t < \frac{\varepsilon}{\beta}.$$

On voit que V *tend uniformément vers* φ *quand* t *tend vers zéro.*

92. Revenons maintenant au cas général. On a

$$V = \Sigma A_p U_p e^{-\xi_p t}.$$

Supposons que la série

$$\Sigma A_p U_p$$

soit convergente. Posons

$$S_n^0 = A_1 U_1 + \ldots + A_n U_n.$$

Soit S_n la somme des n premiers termes et R_n le reste correspondant de la série V. Comme les nombres ξ_p vont en croissant et, par suite, les quantités $e^{-\xi_p t}$ en décroissant avec p, on a, en vertu d'un théorème bien connu dû à Abel,

$$|R_n| < e^{-\xi_n t} \rho_n,$$

ρ_n désignant la plus grande des quantités

$$|S_{n+1}^0 - S_n^0|, \quad |S_{n+2}^0 - S_n^0|, \quad \ldots, \quad |S_{n+p}^0 - S_n^0|, \quad \ldots$$

On a donc

$$|R_n| < \rho_n$$

pour $t \geqq o$. Mais ρ_n tend vers zéro, par hypothèse, quand n augmente indéfiniment. Donc, la série V converge uniformément par rapport à t, tant que t n'est pas négatif, c'est-à-dire reste positif ou nul. Donc, *la série*

$$\Sigma A_p U_p$$

a φ *pour somme, pourvu qu'elle soit convergente.*

Le problème de la représentation d'une fonction arbitraire par une série procédant suivant les fonctions U_p est donc ramené au problème de la convergence de la série en question.

Cherchons donc les caractères de convergence de la série

$$\Sigma A_p U_p.$$

On a

$$A_p = \int_{(T)} \varphi U_p \, d\tau.$$

Supposons que la fonction φ jouisse des propriétés suivantes :

1° $\qquad \varphi = 0 \qquad$ sur S;

2° $\qquad \Delta\varphi = 0 \qquad$ sur S;

3° $\qquad \Delta\Delta\varphi \qquad$ existe et est continu.

On peut alors écrire, en appliquant deux fois la formule de Green,

$$A_p = \int_{(T)} \varphi U_p \, d\tau = -\frac{1}{\xi_p} \int_{(T)} U_p \Delta\varphi \, d\tau = \frac{1}{\xi_p^2} \int_{(T)} U_p \Delta\Delta\varphi \, d\tau.$$

On tire de là, en faisant usage de l'inégalité de Schwarz,

$$A_p^2 \xi_p^4 < \int_{(T)} (\Delta\Delta\varphi)^2 \, d\tau,$$

d'où l'on voit que l'on a

$$|A_p| < \frac{M}{\xi_p^2},$$

M étant une constante assignable.

Cela posé, écrivons

$$\left| \begin{aligned} \varphi &= A_1 U_1 + \ldots + A_n U_n + R_n^0, \\ \Delta\varphi &= -A_1\xi_1 U_1 - \ldots - A_n\xi_n U_n + \Delta R_n^0, \\ \Delta\Delta\varphi &= A_1\xi_1^2 U_1 + \ldots + A_n\xi_n^2 U_n + \Delta\Delta R_n^0. \end{aligned} \right.$$

Je rappelle que l'on a

$$\int_{(T)} U_p^2 \, d\tau = 1, \qquad \int_{(T)} U_p U_q \, d\tau = 0.$$

Multiplions les deux membres de la troisième équation du groupe écrit ci-dessus par

$$\frac{1}{\xi_q^2} U_q,$$

q étant compris entre 1 et n, et intégrons. Il vient

$$\int_{(T)} U_q \Delta\Delta R_n^0 \, d\tau = 0,$$

égalité vraie tant que q n'est pas supérieur à n. Élevons maintenant au carré les deux membres de la même équation et intégrons. On voit que l'on a

$$\int_{(T)} (\Delta\Delta\varphi)^2\, d\tau = A_1^2\xi_1^4 + \ldots + A_n^2\xi_n^4 + \int_{(T)} (\Delta\Delta R_n^0)^2\, d\tau.$$

On déduit de là que la somme

$$A_1^2\xi_1^4 + \ldots + A_n^2\xi_n^4,$$

qui va toujours en croissant quand n augmente, reste inférieure à un nombre fixe

$$\int_{(T)} (\Delta\Delta\varphi)^2\, d\tau.$$

Donc elle tend vers une limite pour n infini. Donc, la série

$$\Sigma A_n^2\xi_n^4$$

est convergente.

Cela posé, je considère la série

$$\Sigma A_n U_n.$$

Il y a des termes pour lesquels on a

$$|A_{n'}| \leqq \frac{1}{\xi_{n'}^3}$$

et d'autres termes pour lesquels on a

$$|A_{n''}| > \frac{1}{\xi_{n''}^3}.$$

Prenons d'abord la série

$$\Sigma A_{n''} U_{n''}.$$

On a

$$|A_{n''} U_{n''}| < |A_{n''}| N\xi_{n''} < A_{n''}^2 N\xi_{n''}^4.$$

Or, la série

$$N.\Sigma A_{n''}^2\xi_{n''}^4$$

est évidemment convergente. Donc, la série

$$\Sigma A_{n''} U_{n''}$$

est absolument et uniformément convergente. Prenons maintenant la série

$$\Sigma \mathrm{A}_{n'} \mathrm{U}_{n'}.$$

On a

$$|\mathrm{A}_{n'} \mathrm{U}_{n'}| < \mathrm{N} \frac{1}{\xi_{n'}^2}.$$

Or, on sait que

$$\xi_n > \mathrm{M} \sqrt[3]{n^2},$$

d'où

$$|\mathrm{A}_{n'} \mathrm{U}_{n'}| < \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{M}^2} \frac{1}{(n')^{\frac{4}{3}}}.$$

Donc, la série

$$\Sigma \mathrm{A}_{n'} \mathrm{U}_{n'}$$

est absolument et uniformément convergente. *En résumé, la série*

$$\Sigma \mathrm{A}_n \mathrm{U}_n$$

est absolument et uniformément convergente et, par suite, a φ *pour somme.*

En définitive, notre problème est résolu pour le cas où φ remplit les conditions indiquées. Plusieurs remarques découlent de là, que j'indiquerai sommairement.

D'abord supposons que les conditions restent les mêmes, sauf que φ et $\Delta\varphi$ ne s'annulent plus sur S. On peut toujours supposer que la fonction φ soit prolongée en dehors d'un domaine T' quelconque intérieur à T, de façon à présenter les caractères de continuité voulus. Soit ψ la fonction ainsi prolongée. On suppose que ψ et $\Delta\psi$ s'annulent sur S. On a

$$\psi = \Sigma \mathrm{A}'_n \mathrm{U}_n$$

avec

$$\mathrm{A}'_n = \int_{(\mathrm{T})} \psi . \mathrm{U}_n \, d\tau.$$

Comme la fonction ψ coïncide avec φ dans T', on voit que la série peut servir à représenter φ dans un domaine intérieur à T, mais aussi peu différent qu'on veut de T.

Supposons maintenant que l'on ait seulement

$$\varphi_{\mathrm{S}} = 0, \qquad \Delta\varphi \text{ continu.}$$

Soit

$$V = \Sigma A_p U_p e^{-\xi_p t}.$$

On sait que V tend uniformément vers φ. Donc, si $t \leqq t_0$, t_0 étant un nombre positif assignable, on a

$$| V - \varphi | < \varepsilon.$$

Ainsi, la série

$$\Sigma A_p U_p e^{-\xi_p t_0} = \Sigma B_p U_p$$

représente φ avec telle approximation que l'on veut.

Choisissons t_0 de façon que

$$| V - \varphi | < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Soit R_n le reste de la série

$$\Sigma A_p U_p e^{-\xi_p t_0}.$$

On peut prendre n assez grand, une fois t_0 fixé, pour que

$$| R_n | < \frac{\varepsilon}{2}.$$

On a alors

$$\left| \varphi - \sum_1^n B_p U_p \right| < \varepsilon.$$

On voit par là que, *bien que l'on ne sache pas si la fonction φ est développable en série procédant suivant les fonctions U_p, on peut représenter cette fonction avec telle approximation que l'on veut par une somme d'un nombre fini de termes de la forme $B_p U_p$, les B_p étant des constantes.*

Ajoutons qu'une fonction quelconque φ possédant des dérivées continues des quatre premiers ordres peut, quelle que soit son allure sur S, être développée en série de la forme

$$\Sigma A_p W_p + \Sigma B_p \int_{(T)} W'_p G \, d\tau' + \Sigma C_p U_p,$$

W_p désignant une fonction harmonique fondamentale.

93. Les propositions que je viens d'établir au sujet des séries de la forme

$$\Sigma A_p U_p$$

et des intégrales de l'équation de Fourier trouvent leur application dans plusieurs questions de Physique mathématique, entre lesquelles je citerai seulement ici *le problème des membranes vibrantes.*

On connaît l'équation aux dérivées partielles qui régit les petites oscillations transversales d'une membrane élastique tendue. Appelons C le contour formé par le cadre auquel est attaché le bord de la membrane, A l'aire plane limitée par C, (x, y) les coordonnées d'un point de la membrane quand celle-ci est dans son plan d'équilibre naturel, z la cote du point (x, y) à l'instant t. On a

$$\Delta z = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}.$$

Le problème d'intégration correspondant consiste à construire une fonction continue $z(x, y, t)$, vérifiant l'équation précédente en tout point de A, s'annulant sur C quel que soit t, et telle que z et $\frac{\partial z}{\partial t}$ se réduisent, pour $t = 0$, à des fonctions continues données d'avance $\varphi(x, y)$ et $\psi(x, y)$.

Les fonctions φ et ψ seront supposées continues dans A ainsi que leurs dérivées des deux premiers ordres. De plus, elles s'annuleront toutes deux sur C. La première représente l'état originel de déformation et la seconde l'impulsion primitive de la membrane. Cela explique les hypothèses que je viens de faire.

Quant à l'intégrale z que nous cherchons, elle devra aussi être continue ainsi que ses dérivées des deux premiers ordres tant par rapport à x ou y que par rapport à t, et cela en tout point de A et pour toute valeur positive ou négative de t.

Le problème des membranes vibrantes n'a de sens précis, au moins au point de vue analytique, que si l'on fait ces diverses hypothèses. En effet, on sait combien les équations de l'Élasticité sont différentes des équations de la Chaleur; dans ce dernier cas, il peut exister une ligne le long de laquelle les dérivées de φ n'ont pas la même valeur de part et d'autre, cela n'empêche pas l'intégrale qui se réduit à φ pour

$t = 0$ d'être holomorphe en tout point pour $t > 0$; dans le premier cas, au contraire, les discontinuités originelles se conservent; si, pour $t = 0$, φ ou ψ présentait le caractère que je viens de dire, il en serait de même à tout instant pour l'intégrale correspondante et alors le problème d'intégration ne serait bien défini que si l'on connaissait *a priori*, pour toute valeur de t, la forme et la position de la ligne considérée, en même temps que la nature de la discontinuité éprouvée par z quand on traverse cette ligne.

Je dis que le problème des membranes vibrantes comporte au plus une solution. Supposons, en effet, qu'il en admette deux distinctes z_1 et z_2. Soit z leur différence. Cette fonction z remplira les conditions de continuité prescrites, sera solution de l'équation, s'annulera sur C quel que soit t et se réduira à 0 pour $t = 0$, ainsi que $\frac{\partial z}{\partial t}$. La fonction z sera donc nulle à l'origine des temps. Je dis qu'elle ne pourra pas commencer par prendre des valeurs positives. En effet, si cela avait lieu, ce ne serait pas sur C où z reste nul, ce serait donc en un point de A. Il y aurait alors un point de A où, pour un instant déterminé, z aurait un maximum positif encore croissant. On aurait en ce point et à cet instant

$$\Delta z \leqq 0, \qquad \frac{\partial z}{\partial t} > 0.$$

Mais $\frac{\partial z}{\partial t}$ part de zéro; d'où, à l'instant considéré,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} > 0,$$

car $\frac{\partial z}{\partial t}$ ne peut arriver à une valeur positive qu'en croissant. Cela est incompatible avec l'équation

$$\Delta z = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

qui doit être vérifiée au point et à l'instant considérés. Donc, z ne peut pas commencer à prendre des valeurs positives. On verrait de même que z ne peut pas commencer à prendre des valeurs négatives. Donc z reste nul; d'où

$$z_1 \equiv z_2,$$

et la proposition annoncée est établie.

Je vais m'occuper maintenant de la recherche effective de l'unique intégrale possible. Je remarque pour cela que tout ce qui a été dit plus haut, au sujet du problème de Fourier et des fonctions fondamentales de M. Poincaré, est encore vrai quand il n'y a plus que deux variables indépendantes x et y.

Soit U_i une fonction fondamentale et ξ_i^2 le nombre caractéristique correspondant.

Cela étant, posons

$$a_i = \int_{(A)} \varphi U_i \, d\omega,$$

$$b_i = \int_{(A)} \psi U_i \, d\omega,$$

$d\omega$ étant un élément de l'aire A. Considérons la fonction

$$z = \sum \left(a_i \cos \xi_i t + \frac{b_i}{\xi_i} \sin \xi_i t \right) U_i e^{-\xi_i^2 \theta},$$

θ étant un paramètre. C'est une fonction de (x, y, z, t, θ) qui, pour $\theta > 0$, a des dérivées de tous les ordres qu'on peut obtenir en différentiant terme à terme. On a

$$\Delta z = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \qquad \text{dans A},$$

$$z = 0 \qquad \text{sur C},$$

tant que θ est positif. Pour $t = 0$, z et $\frac{\partial z}{\partial t}$ se réduisent à deux fonctions $U(x, y, \theta)$, $V(x, y, \theta)$, qui s'annulent sur C, qui vérifient les équations

$$\Delta U = \frac{\partial U}{\partial \theta}, \qquad \Delta V = \frac{\partial V}{\partial \theta},$$

et qui, lorsque θ tend vers zéro, tendent uniformément vers φ et ψ.

On peut imaginer une suite convergente de valeurs de θ ayant zéro pour limite. Si θ_j est un terme de cette suite, la fonction z_j correspondante s'annule sur C et vérifie l'équation des membranes. Enfin, pour $t = 0$, z_j et $\frac{\partial z_j}{\partial t}$ se réduisent respectivement à U_j et V_j qui diffèrent aussi peu que l'on veut de φ et ψ, pourvu que θ_j soit suffisamment petit. J'ajoute que, si ε est un nombre positif donné à l'avance aussi petit qu'on voudra, on peut réaliser les inégalités

$$|U_j - \varphi| < \varepsilon, \qquad |V_j - \psi| < \varepsilon,$$

pourvu que θ_j soit assez petit.

Le problème des membranes vibrantes peut donc être regardé comme résolu au point de vue physique, en ce sens que l'on possède un moyen effectif de former une fonction continue z qui remplit toutes les conditions prescrites, sauf que z et $\frac{\partial z}{\partial t}$, au lieu de se réduire rigoureusement pour $t = 0$ à des fonctions données, en approchent seulement autant qu'on veut, l'approximation étant d'ailleurs uniforme.

On peut arriver au même résultat par une autre voie. Pour simplifier l'écriture, bien que l'on puisse se placer dans des conditions plus générales, je me bornerai au cas d'une membrane originairement déformée sans impulsion initiale, c'est-à-dire au cas où la fonction ψ est identiquement nulle.

Soit

$$\left|\varphi - \sum_1^n B_i U_i\right| < \varepsilon.$$

Prenons

$$z = \sum_1^n B_i U_i \cos \xi_i t.$$

La fonction z résout le problème des membranes vibrantes avec telle approximation que l'on veut. La généralisation est immédiate.

94. Les considérations qui précèdent peuvent s'étendre à beaucoup d'autres équations. Prenons, par exemple, l'équation des membranes quand on tient compte d'une résistance de l'air proportionnelle à la vitesse vibratoire

$$\Delta z = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial z}{\partial t}.$$

C'est l'équation bien connue sous le nom d'*équation des télégraphistes*. Les raisonnements que nous venons de faire permettent de résoudre, au sujet de cette équation, un problème d'intégration identique à celui qui nous a occupé pour le cas des membranes vibrantes. Il n'y a aucune modification à faire, et je n'ai pas besoin d'ajouter que l'on peut supposer trois variables indépendantes au lieu de deux.

95. Je dirai quelques mots, pour finir, de l'équation générale de Fourier

$$\Delta V + a\frac{\partial V}{\partial x} + b\frac{\partial V}{\partial y} + c\frac{\partial V}{\partial z} = f(x, y, z, V) + \varphi(x, y, z, t) + \psi(x, y, z)\frac{\partial V}{\partial t}.$$

Mais, à cause de la moindre importance du sujet et dans un but d'abréviation, je me bornerai à un court aperçu et je passerai sous silence toutes les discussions minutieuses qu'une complète rigueur exigerait. Il me semble d'ailleurs que les rapides indications suivantes peuvent suffire pour montrer comment se ferait l'étude de l'équation en question.

Nous avons vu, dans l'*Introduction*, quel est l'énoncé du problème général de Fourier. Les hypothèses relatives aux coefficients sont les mêmes, *mutatis mutandis*, que pour les équations du régime permanent. On a encore

$$a\,dx + b\,dy + c\,dz = d\mu.$$

Quant à ψ, c'est une fonction positive.

On verrait aisément, toujours par le procédé du n° 73, que le problème de Fourier comporte au plus une solution si f va en croissant avec V. C'est alors l'existence effective de cette solution qu'il faut prouver.

Commençons par le problème suivant :

$$\left|\begin{array}{ll} \Delta V = \psi\dfrac{\partial V}{\partial t} & \text{dans T,} \\ V_S = 0 & \text{sur S,} \\ V_0 = \varphi & \text{pour } t = 0. \end{array}\right.$$

Prenons les fonctions fondamentales U_p de M. Poincaré

$$\left|\begin{array}{ll} \Delta U_p + \xi_p \psi U_p = 0 & \text{dans T,} \\ U_p = 0 & \text{sur S,} \end{array}\right.$$

semblables à celles dont il a été déjà parlé, sauf l'introduction de ψ. Posons

$$A_p = \int_{(T)} \varphi \psi U_p \, d\tau.$$

Un raisonnement, fait par M. Poincaré dans son Mémoire de Palerme ([1]) pour le cas de $\psi = 1$, mais évidemment général, nous apprend que l'on a

$$\varphi = \Sigma A_p U_p,$$

pourvu que la série du second membre soit convergente. Or, cette série est absolument et uniformément convergente si l'on a

$$\varphi = 0, \qquad \Delta\varphi = 0 \qquad \text{sur S}$$

et si $\Delta\Delta\varphi$ est une fonction continue. Dans ce cas, la solution de notre problème est

$$V = \Sigma A_p U_p e^{-\xi_p t}.$$

Cela posé, si φ est quelconque, prenons la fonction W qui jouit des propriétés suivantes :

$$\left|\begin{array}{ll} \Delta W = \dfrac{\partial W}{\partial t} & \text{dans T,} \\ W_S = 0 & \text{sur S,} \\ W_0 = \varphi & \text{pour } t = 0. \end{array}\right.$$

Soit W_i ce que devient W quand on fait $t = t_i$, t_i étant un nombre positif. Les considérations qui précèdent permettent de résoudre notre problème et de calculer V si l'on prend

$$\varphi = W_i.$$

Désignons par V_i la fonction obtenue. On a

$$V_i = \Sigma A_{i,j} U_j e^{-\xi_j t},$$

en posant

$$A_{i,j} = \int_{(T)} W_i \psi U_j \, d\tau.$$

([1]) *Rendiconti*, 1894, § XIV.

Faisons maintenant tendre t_i vers zéro. Alors W_i tend vers φ et $A_{i,j}$ vers A_j :

$$A_j = \int_{(T)} \varphi \psi U_j \, d\tau.$$

D'ailleurs V_i tend en même temps vers une limite V, et l'on a

$$V = \Sigma A_j U_j e^{-\xi_j t},$$

comme le montre un raisonnement très simple, imité de celui que nous avons fait au n° 82. Notre problème est donc résolu dans le cas général. Nous avons là un nouvel exemple de l'utilité que peuvent présenter les théorèmes relatifs à la représentation approchée des fonctions par les fonctions fondamentales de M. Poincaré.

J'ajoute que le cas des températures périphériques variables et celui des sources calorifiques intérieures se traiteraient exactement de la même façon que lorsque ψ est égal à l'unité. Enfin, les diverses inégalités établies pour la solution du problème de Fourier dans le cas simple subsistent dans le cas général.

Abordons alors le cas général. Cherchons à résoudre le problème suivant :

$$\left|\begin{array}{ll} \Delta V + a\dfrac{\partial V}{\partial x} + b\dfrac{\partial V}{\partial y} + c\dfrac{\partial V}{\partial z} = f V + \varphi + \psi\dfrac{\partial V}{\partial t} & \text{dans T,} \\ V_S = 0 & \text{sur S,} \\ V_0 = 0 & \text{pour } t = 0. \end{array}\right.$$

Si l'on sait résoudre ce problème, il sera, en effet, possible de traiter le cas général où les températures périphériques et les températures initiales ne sont pas nulles.

La *méthode des approximations successives* de M. Picard donne la solution si T est assez petit.

Posons

$$V = e^{-\frac{\mu}{2}} U.$$

Il vient

$$\Delta U = \psi \frac{\partial U}{\partial t} + f_1 U + \varphi_1$$

avec

$$\varphi_1 = e^{\frac{\mu}{2}} \varphi,$$

$$f_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z}\right) + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4} + f.$$

Tout revient à calculer U. Or, remplaçons f_1 par λf_1 et développons U en série ordonnée suivant les puissances de λ

$$U = \Sigma \lambda^p U_p.$$

On a

$$\left|\begin{array}{lll} \Delta U_0 = \psi \dfrac{\partial U_0}{\partial t} + \varphi_1, & \Delta U_p = \psi \dfrac{\partial U_p}{\partial t} + f_1 U_{p-1} & \text{dans T,} \\ U_0 = 0, & U_p = 0 & \text{sur S,} \\ U_0 = 0, & U_p = 0 & \text{pour } t = 0. \end{array}\right.$$

On sait faire ces approximations. Soit

$$\left|\begin{array}{ll} |\varphi_1| < \alpha & \text{quel que soit } t, \\ \Delta H = -\alpha & \text{dans T,} \\ H_S = 0 & \text{sur S.} \end{array}\right.$$

On a

$$0 < H < \alpha g,$$

si l'on pose

$$\frac{1}{4\pi}\int_{(T)} G\, d\tau < g,$$

G étant la fonction de Green. On constate aisément que $H - U_0$ et $H + U_0$ sont positifs, d'où

$$|U_0| < \alpha g.$$

On trouve ainsi, en posant

$$|\varphi_1| < \alpha, \qquad |f_1| < \beta,$$

les inégalités

$$|U_0| < \alpha g, \qquad |U_1| < \alpha\beta g^2, \qquad |U_2| < \alpha\beta^2 g^3, \qquad \ldots.$$

La série U est donc absolument et uniformément convergente pour $\lambda\beta g < 1$. Ainsi, U existe et est une fonction continue, nulle sur S, quel que soit t, et nulle aussi dans T pour $t = 0$, si $\lambda = 1$, pourvu que le volume de T soit assez petit.

Posons maintenant

$$U'_p = \frac{\partial U_p}{\partial t},$$

il vient

$$\left|\begin{array}{lll} \Delta U'_0 = \psi \dfrac{\partial U'_0}{\partial t} + \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial t}, & \Delta U'_p = \psi \dfrac{\partial U'_p}{\partial t} + f_1 U'_{p-1}, & \text{dans T}, \\ U'_0 = 0, & U'_p = 0 & \text{sur S}, \\ U'_0 = -\dfrac{\varphi_1}{\psi}, & U'_p = -\dfrac{f_1}{\psi} U_{p-1} = 0 & \text{pour } t = 0. \end{array}\right.$$

Soit

$$\frac{1}{\psi} < \gamma, \qquad \left|\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}\right| < \alpha'.$$

On trouve aisément, de proche en proche,

$$|U'_p| < \beta^p g^p (\alpha\gamma + \alpha' g).$$

Donc $\dfrac{\partial U}{\partial t}$ est une fonction continue.

On peut alors écrire

$$U = -\frac{1}{4\pi} \int_{(T)} \left(\psi \frac{\partial U}{\partial t} + f_1 U + \varphi_1\right) G\, d\tau,$$

et il est facile de conclure de là que U est bien la solution cherchée.

Le problème est donc résolu si T est assez petit. Je répète que l'on peut bien aisément passer du cas simple considéré au cas où U ne s'annule ni sur S ni pour $t = 0$.

Pour passer du cas d'un petit domaine au cas d'un domaine de dimensions quelconques, toujours en supposant qu'il s'agisse d'une équation linéaire pour laquelle le coefficient f soit positif, on peut faire usage de la *méthode d'extension progressive* de M. Picard (n° 18). Il est facile de constater, en effet, que les lemmes fondamentaux subsistent. Considérons une intégrale V de l'équation homogène se réduisant à 0 pour $t = 0$. Soit M une limite supérieure du module de ses valeurs sur S, et soit A un point de T. On a

$$|V_A| < Mq,$$

q étant plus petit que 1. Cela posé, soit

$$V' = \frac{\partial V}{\partial t}.$$

On a

$$\left|\begin{array}{ll} \Delta V' + a\dfrac{\partial V'}{\partial x} + b\dfrac{\partial V'}{\partial y} + c\dfrac{\partial V'}{\partial z} = \psi\dfrac{\partial V'}{\partial t} + fV' & \text{dans T,} \\ V' = -\dfrac{f}{\psi}V = 0 & \text{pour } t = 0. \end{array}\right.$$

Soit M′ une limite supérieure du module de V′ sur S. Il vient

$$|V'_A| < M'q.$$

Ces inégalités permettent d'appliquer la méthode de M. Picard et de résoudre ainsi le *problème de Fourier généralisé*.

Je signale enfin la possibilité d'employer la *méthode du prolongement analytique* pour l'intégration de l'équation de Fourier non linéaire.

Ce dernier point, comme ceux qui précèdent, réclamerait, pour une rigueur complète, de plus amples explications; mais je ne donne les considérations contenues dans ce paragraphe qu'à titre d'aperçus. Je n'entreprendrai pas de les transformer en démonstrations véritables et mes recherches sont donc terminées.