ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

C. GUICHARD

Sur les systèmes orthogonaux et les systèmes cycliques

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 14 (1897), p. 467-516

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1897_3_14__467_0>

SUR LES

SYSTÈMES ORTHOGONAUX

ET LES

SYSTÈMES CYCLIQUES,

PAR M. C. GUICHARD,

PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND.

PREMIÈRE PARTIE.

INTRODUCTION.

La première Partie de ce travail contient l'exposé des propriétés générales des systèmes orthogonaux et des systèmes cycliques. La seconde Partie sera consacrée aux applications et à l'étude des cas particuliers.

Quoique le but final de ce Mémoire soit d'arriver à des propriétés relatives à l'espace ordinaire, j'ai été obligé d'introduire dès le début des considérations relatives à l'espace à n dimensions; la première Partie de mon travail roule presque entièrement sur des propriétés de l'hyperespace. J'espère que ceux qui me liront penseront, avec moi, que le détour n'a pas été inutile; qu'il n'y a pas là seulement un jeu d'esprit, mais que ces considérations expliquent et relient entre elles, d'une façon logique, certaines propriétés de notre espace.

Les éléments introduits dépendent toujours de deux variables. Ce sont les *réseaux* et les *congruences*.

Un point de l'espace à n dimensions décrit un réseau si ses n coordonnées sont solutions de l'équation

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial v} = P \frac{\partial \theta}{\partial u} + Q \frac{\partial \theta}{\partial v}.$$

Nous réservons le nom de *congruences* aux systèmes doublement infinis de droites qui touchent deux séries de courbes, comme cela a lieu dans l'espace ordinaire.

J'appelle réseau O un réseau dont les deux tangentes sont rectangulaires; congruence O, une congruence formée par des droites normales à un réseau O.

J'appelle réseau C, un réseau qui a le même ds^2 qu'un réseau de l'espace à trois dimensions; enfin une congruence C est une congruence harmonique à un réseau O. (La définition des réseaux et congruences harmoniques est donnée au n° 6.)

Les réseaux p, C; p, O de l'espace à n dimensions sont respectivement les projections de réseaux C; O de l'espace à $n+p-1$ dimensions.

On définit de même les congruences pC et pO. J'établis dans cette première Partie les relations générales qui existent entre ces divers éléments.

Le premier Chapitre contient les propriétés générales des réseaux et congruences. Beaucoup des propriétés énoncées sont connues dans le cas de l'espace ordinaire; d'autres sont nouvelles. J'ai cru devoir les présenter, d'abord parce qu'il était nécessaire de démontrer qu'elles sont vraies pour l'espace à n dimensions; ensuite pour les réunir en un corps de doctrines. J'espère avoir simplifié cette théorie et introduit une terminologie qui facilite les raisonnements géométriques.

Le deuxième Chapitre est consacré aux réseaux et congruences O. Le troisième aux réseaux et congruences C. Le lien entre ces deux théories est l'existence d'un déterminant particulier, que j'appelle *déterminant orthogonal*. J'ai interprété ces déterminants successivement à trois points de vue différents. Enfin j'indique leur mode de formation de proche en proche.

Le dernier Chapitre est consacré aux réseaux et congruences pO ou pC.

CHAPITRE I.

RÉSEAUX ET CONGRUENCES DANS L'ESPACE A n DIMENSIONS.

SOMMAIRE.

1. Définitions relatives à l'espace à n dimensions. — 2. Réseaux. Réseaux parallèles. Réseaux-points. — 3. Congruences. — 4. Représentation sphérique d'une congruence. Congruences parallèles. — 5. Réseaux et congruences conjuguées. — 6. Réseaux et congruences harmoniques. — 7. Réseaux dérivés et dérivants. Congruences dérivées et dérivantes. — 8. Projections des réseaux et congruences. — 9. Propriétés spéciales relatives à l'espace à trois dimensions. Congruences parallèles à un réseau.

1. Un point dans l'espace à n dimensions est défini par un système de n nombres $x_1, x_2, \ldots, x_n$, qu'on appelle les *coordonnées* du point. Le point dont toutes les coordonnées sont nulles est le point *origine*. La distance d de deux points M et M′ dont les coordonnées sont $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ pour M et $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$ pour M′ est donnée par la formule

$$(1)\qquad d^2 = (x'_1 - x_1)^2 + \ldots + (x'_n - x_n)^2 = \sum_1^n (x'_i - x_i)^2.$$

Si les coordonnées d'un point M contiennent un paramètre variable au premier degré, c'est-à-dire si l'on a

$$(2)\qquad x_i = a_i + \lambda\alpha_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

on dira que ce point décrit une *droite;* les n quantités α_i sont les paramètres directeurs de la droite; quand la droite est donnée, ces paramètres directeurs sont déterminés à un facteur constant près.

Deux droites sont dites *parallèles* si leurs paramètres directeurs sont proportionnels.

Elles seront dites *perpendiculaires* si la somme des produits des paramètres directeurs correspondants est nulle.

Il est clair que par deux points passe une droite et une seule; que par un point on peut mener une parallèle à une droite et une seule, etc.

Si les coordonnées d'un point contiennent deux paramètres variables au premier degré, c'est-à-dire si l'on a

$$(3) \qquad x_i = a_i + \lambda b_i + \mu c_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

on dira que ce point décrit un *plan*.

Un plan contient évidemment une infinité de droites; les paramètres directeurs de ces droites sont de la forme

$$\alpha_i = b_i + \rho c_i,$$

où ρ est arbitraire. Toute droite ayant de tels paramètres directeurs sera dite *parallèle* au plan.

Une droite est *perpendiculaire* à un plan si elle est perpendiculaire à toutes les droites du plan. La droite (2) et le plan (3) seront perpendiculaires si l'on a les deux conditions

$$(4) \qquad \sum_1^n \alpha_i b_i = 0, \qquad \sum_1^n \alpha_i c_i = 0.$$

Il est clair qu'un plan est défini soit par trois points, soit par deux droites qui se coupent, soit par un point et une droite.

2. Si les coordonnées $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ d'un point M sont fonctions d'un seul paramètre u, on dira que ce point décrit une *courbe;* la droite passant par M et dont les paramètres directeurs sont $\frac{dx_i}{du}$, est la *tangente* à la courbe en M.

Si les coordonnées $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ d'un point M sont fonctions de deux paramètres u et v, on dira que le point M décrit une *surface*. Si on laisse fixe l'une des variables u ou v, on aura une courbe tracée sur la surface; l'ensemble de toutes ces courbes forme ce que j'appelle un *système* de courbes. Par chaque point de la surface passent deux de ces courbes; les tangentes à ces courbes sont les tangentes du système; le plan formé par ces deux droites est le *plan tangent* à la surface ou au système. Toute droite, menée par M perpendiculairement à ce plan, est dite *normale* à la surface.

Je dirai que le système de courbes est un *réseau*, si les n coordonnées $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sont solutions d'une équation de la forme

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial v} = P \frac{\partial \theta}{\partial u} + Q \frac{\partial \theta}{\partial v}, \tag{5}$$

P et Q étant des fonctions de u et v.

Deux systèmes correspondants sont dits *parallèles* si les tangentes correspondantes sont parallèles. Soient $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $M'(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$ les deux points qui décrivent des systèmes parallèles. On devra avoir

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial x'_i}{\partial u} &= h \frac{\partial x_i}{\partial u} \\ \frac{\partial x'_i}{\partial v} &= l \frac{\partial x_i}{\partial v} \end{aligned} \right. \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{6}$$

En égalant les deux valeurs de $\frac{\partial^2 x'_i}{\partial u\, \partial v}$, on trouve que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont solutions de l'équation

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial v} = \frac{-\frac{\partial h}{\partial v}}{h - l} \frac{\partial \theta}{\partial u} + \frac{\frac{\partial l}{\partial u}}{h - l} \frac{\partial \theta}{\partial v}; \tag{7}$$

donc

Les seuls systèmes de courbes qui admettent des parallèles sont les réseaux.

Nous avons laissé de côté le cas où h et l seraient constants et égaux, dans ce cas la droite MM' passerait par un point fixe I et le rapport $\frac{IM}{IM'}$ serait constant. Les deux systèmes seraient *homothétiques*.

Réciproquement, *tout réseau est parallèle à une infinité d'autres*.

Supposons, en effet, que les coordonnées d'un réseau soient solutions de l'équation (5). Déterminons deux fonctions h et l par les équations

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial v} &= -P(h - l), \\ \frac{\partial l}{\partial u} &= Q(h - l). \end{aligned} \right. \tag{8}$$

Les équations (6), qui sont compatibles, définissent un réseau parallèle au réseau donné.

La résolution du système (8) est équivalente à celle de l'adjointe de (5).

Si l'on suppose que, dans les équations (8), les solutions h et l tendent vers zéro, les formules (6) montrent que la surface correspondante se rapprochera d'un point fixe. En passant à la limite, nous obtiendrons un réseau, que j'appelle le *réseau-point* parallèle au réseau donné. Ce réseau peut être défini ainsi : Soient MR, MS les tangentes du réseau donné; menons par un point fixe O (le point origine par exemple) des droites Or, Os parallèles à MR et à MS. A chaque système de valeurs de u et v, on fait correspondre un couple de deux droites Or, Os. C'est ce couple qui caractérise le réseau-point.

Ce couple de droites ne peut pas être choisi d'une façon arbitraire. Prenons sur Or et Os des points quelconques P et Q; soit $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ les coordonnées de P; $(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$ celles de Q. On aura

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} \xi_i &= \lambda\frac{\partial x_i}{\partial u} \\ \eta_i &= \mu\frac{\partial x_i}{\partial v} \end{aligned}\right. \qquad i = (1, 2, \ldots, n).$$

En tenant compte de l'équation (5) on en déduira des relations de la forme

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial \xi_i}{\partial v} &= A\xi_i + B\eta_i, \\ \frac{\partial \eta_i}{\partial u} &= C\xi_i + D\eta_i. \end{aligned}\right.$$

Ainsi quand v varie seul, les tangentes aux trajectoires de tous les points de Or se trouvent dans le plan Ors; il suffit d'ailleurs que cette propriété soit réalisée pour un point de Or pour qu'elle le soit pour tous les autres. Même résultat pour les points de Os quand u varie seul.

Ces deux conditions sont suffisantes. Supposons les conditions (10) satisfaites. Posons

$$(11)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial x_i}{\partial u} &= H\xi_i, \\ \frac{\partial x_i}{\partial v} &= L\eta_i. \end{aligned}\right.$$

Les conditions (11) seront compatibles si l'on a

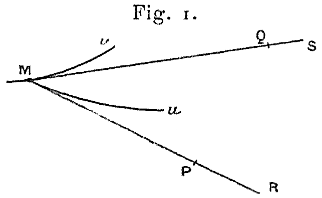
$$(12)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial v} = LC - HA, \\ \dfrac{\partial L}{\partial u} = HB - LD, \end{cases}$$

ce qui montre qu'il y aura une infinité de réseaux parallèles au réseau point.

La propriété qui vient d'être énoncée pour les réseaux points s'étend aux réseaux quelconques.

Soient, en effet, (M) un réseau (*fig.* 1); MR et HS les tangentes du

Fig. 1.



réseau quand u et v varient; prenons, suivant une loi quelconque, un point P sur MR. Les coordonnées du point P sont de la forme

$$X_i = x_i + h\frac{\partial x_i}{\partial u} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Différentiant et tenant compte de (5), on aura des relations de la forme

$$\frac{\partial X_i}{\partial v} = \alpha\frac{\partial x_i}{\partial u} + \beta\frac{\partial x_i}{\partial v} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

ce qui montre que la trajectoire de P, quand v varie seul, est dans le plan RMS; même conclusion pour la trajectoire d'un point quelconque Q de MS quand u varie seul.

3. Comme dans l'espace à trois dimensions, nous appellerons *surface développable* dans l'espace à n dimensions le système ∞^2 de points situé sur les tangentes à une courbe.

Nous réserverons le nom de *congruence* aux systèmes ∞^2 de droites qui peuvent se répartir en deux séries de développables.

Dans tout ce qui va suivre, sauf indication contraire, les paramètres u et v qui définiront la position d'une droite de la congruence sont ceux qui restent fixes, quand la droite décrit l'une ou l'autre développable.

En faisant cette hypothèse, il est facile de trouver les conditions auxquelles doit satisfaire la droite pour décrire une congruence.

On peut représenter la droite par les $(n-1)$ équations

$$x_i = a_i x_1 + p_i \qquad (i = 2, 3, \ldots, n). \tag{13}$$

Il faut que l'on puisse choisir x_1 de telle sorte que, si u varie seul, le point, dont les coordonnées $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sont données par la formule (13), décrive une courbe tangente à la droite.

Ceci exige que l'on ait

$$-x_1 = \frac{\frac{\partial p_2}{\partial u}}{\frac{\partial a_2}{\partial u}} = \frac{\frac{\partial p_3}{\partial u}}{\frac{\partial a_3}{\partial u}} = \ldots = \frac{\frac{\partial p_n}{\partial u}}{\frac{\partial a_n}{\partial u}}. \tag{14}$$

Ceci nous donne $n-2$ conditions entre les coordonnées de la droite; ces conditions étant remplies, les formules (13) et (14) donnent les coordonnées du point où la droite touche son enveloppe. Ce point sera aussi appelé *foyer* de la congruence.

En faisant varier v, on aurait un deuxième foyer et une deuxième série de conditions

$$-x'_1 = \frac{\frac{\partial p_2}{\partial v}}{\frac{\partial a_2}{\partial v}} = \ldots = \frac{\frac{\partial p_n}{\partial v}}{\frac{\partial a_n}{\partial v}}. \tag{15}$$

On voit qu'en somme il faut $2n-4$ conditions pour qu'une droite décrive une congruence; ce nombre se réduirait à $2n-6$ si l'on ne spécifiait pas les paramètres des droites de la congruence.

Les surfaces décrites par les foyers sont les *focales* de la congruence; les plans tangents à ces surfaces en sont les *plans focaux;* aux développables de la congruence correspondent des réseaux sur les focales. Inversement les tangentes à une série de courbes d'un réseau forment une congruence. Je n'insiste pas davantage sur ces propriétés, qui sont analogues aux propriétés bien connues relativement à l'espace à trois dimensions.

Interprétons maintenant les conditions (14) et (15). On en déduit facilement que les $n-1$ quantités $p_2, \ldots, p_n$ satisfont à une même équation de la forme

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial v} = \mathrm{P}\frac{\partial \theta}{\partial u} + \mathrm{Q}\frac{\partial \theta}{\partial v}. \tag{16}$$

Or ces quantités $p_2, \ldots, p_n$ sont les coordonnées du point d'intersection de la droite de la congruence avec l'hyperplan $x_1 = 0$. Par un changement de coordonnées cet hyperplan peut devenir un hyperplan quelconque. Donc :

La trace de la droite d'une congruence sur un hyperplan quelconque décrit un réseau.

Il résulte aussi des équations (14) et (15) que les $n-1$ quantités $a_2, \ldots, a_n$ satisfont à une autre équation aux dérivées partielles de la forme (16); remarquons maintenant que les paramètres directeurs de la droite sont : $1, a_2, \ldots, a_n$; ces paramètres satisfont donc à une même équation de Laplace; il en sera de même si l'on multiplie ces paramètres par un même facteur. Donc :

Les paramètres directeurs $\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \ldots, \mathrm{X}_n$ *d'une droite d'une congruence satisfont à une équation de la forme*

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial v} = \mathrm{P}\frac{\partial \theta}{\partial u} + \mathrm{Q}\frac{\partial \theta}{\partial v} + \mathrm{R}\theta. \tag{17}$$

Cette propriété peut être transformée facilement. Prenons sur chaque droite de la congruence, d'une façon absolument arbitraire, deux points A et B dont les coordonnées homogènes sont respectivement $x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}$ et $y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}$. Posons

$$\mathrm{X}_{ik} = \begin{vmatrix} x_i & x_k \\ y_i & y_k \end{vmatrix}. \tag{18}$$

Les paramètres directeurs de la droite sont

$$\mathrm{X}_{1,n+1} \quad \mathrm{X}_{2,n+1}, \quad \ldots, \quad \mathrm{X}_{n,n+1},$$

et satisfont à une équation de Laplace E_{n+1}. Comme rien ne distingue les diverses coordonnées, on peut dire les n quantités

$$X_{ik}, \qquad k \gtrless i \qquad (k = 1, \ldots, n+1)$$

satisfont à une même équation de Laplace E_i.

Il est inutile, pour le but que nous poursuivons, de rechercher les relations qui existent entre ces diverses équations.

Il reste à caractériser les systèmes de courbes décrits par les points d'une droite de la congruence. Soit $P(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ un point de la droite; les coordonnées du foyer F seront de la forme

$$z_i = y_i + \lambda X_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{19}$$

Pour que ce point soit foyer il faut que

$$\frac{\partial z_i}{\partial u} = h X_i, \tag{20}$$

ce qui donne

$$h X_i = \frac{\partial y_i}{\partial u} + \lambda \frac{\partial X_i}{\partial u} + \frac{\partial \lambda}{\partial u} X_i,$$

ou bien

$$\frac{\partial y_i}{\partial u} = -\lambda \frac{\partial X_i}{\partial u} + \left(h - \frac{\partial \lambda}{\partial u}\right) X_i,$$

expression qui est de la forme

$$\frac{\partial y_i}{\partial u} = A \frac{\partial X_i}{\partial u} + B X_i.$$

On peut raisonner de même pour le second foyer.

On voit en somme que le système (P) décrit par un point de la congruence est tel que l'on ait

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial y_i}{\partial u} &= A \frac{\partial X_i}{\partial u} + B X_i, \\ \frac{\partial y_i}{\partial v} &= C \frac{\partial X_i}{\partial v} + D X_i. \end{aligned} \right. \tag{21}$$

Égalons les deux valeurs de $\frac{\partial^2 y_i}{\partial u \partial v}$ et tenons compte de l'équation

(17), on aura

$$
(22)\qquad \begin{cases} AP + \dfrac{\partial A}{\partial v} = CP + D, \\[2mm] AQ + \ B \ = CQ + \dfrac{\partial C}{\partial u}, \\[2mm] AR + \dfrac{\partial B}{\partial v} = CR + \dfrac{\partial D}{\partial u}. \end{cases}
$$

Réciproquement, si les conditions (17), (21), (22) sont satisfaites, la droite, dont les paramètres directeurs sont X_i, menée par le point P de coordonnées y_i, décrit une congruence.

Dans le cas particulier où R est nul, on a

$$
(23)\qquad \frac{\partial B}{\partial v} = \frac{\partial D}{\partial u};
$$

cette remarque nous sera utile plus tard.

4. Soient (C) une congruence; C une droite de cette congruence; menons par l'origine une droite C′ parallèle à C; nous obtenons ainsi un système de droite (C′) dépendant de deux paramètres. Un tel système est appelé la *représentation sphérique* de la congruence (C).

Ce système (C′) n'est pas un système quelconque doublement infini de droites passant par l'origine.

En effet, soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$ les cosinus directeurs de C qui satisfont à l'équation (17). Il existe sur C′ un point A ayant pour coordonnées $X_1, \ldots, X_n$. Soit alors θ une solution quelconque de (17). Posons

$$
\xi_i = \frac{X_i}{\theta}.
$$

Le point ρ de coordonnées $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ décrira un réseau; ce point est d'ailleurs situé sur la droite C′. Donc :

Sur les droites de la représentation sphérique, il existe une infinité de points qui décrivent des réseaux.

Inversement :

Le système des droites qui joignent l'origine aux points d'un réseau est la représentation sphérique d'une infinité de congruences.

Nous pouvons dire aussi pour simplifier que chacun de ces réseaux est la représentation sphérique de la congruence.

Deux congruences sont dites *parallèles,* lorsque les développables se correspondent et que les droites correspondantes sont parallèles.

Deux congruences parallèles ont même représentation sphérique.

Il est clair que si l'on connaît une congruence, on a par cela même une représentation sphérique. La recherche des congruences parallèles à une congruence donnée est donc identique à celle des congruences qui ont une représentation sphérique donnée.

Donnons-nous alors les quantités $X_1, \ldots, X_n$ qui satisfont à l'équation (17). Déterminons un système quelconque de courbes (P) décrite par un point P de la congruence cherchée. Il faudra déterminer quatre fonctions A, B, C, D satisfaisant aux trois équations (22); puis les équations (21) donneront les coordonnées du système (P) à l'aide de quadratures.

Supposons, en particulier, que l'on prenne pour système inconnu (P) le système décrit par le point milieu des foyers, système que nous appellerons le *système central.* Il faudra poser (19)

$$A = -\lambda, \qquad C = \lambda.$$

Les deux premières équations (22) donnent

$$B = \frac{\partial \lambda}{\partial u} + 2\lambda Q, \qquad D = -\frac{\partial \lambda}{\partial v} - 2\lambda P. \tag{24}$$

La troisième équation (22) donne ensuite

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial u\, \partial v} + P\frac{\partial \lambda}{\partial u} + Q\frac{\partial \lambda}{\partial v} + \lambda\left(\frac{\partial P}{\partial u} + \frac{\partial Q}{\partial v} - R\right) = 0. \tag{25}$$

La résolution de cette équation permet d'obtenir toutes les congruences qui ont une représentation sphérique donnée.

5. Un réseau et une congruence sont dits *conjugués,* si le point qui décrit le réseau se trouve sur la droite qui décrit la congruence et si les courbes du réseau correspondent aux développables de la congruence. (Nous excluons de cette définition les réseaux focaux.)

Nous savons déjà (n° 3) que les traces d'une congruence sur un hyperplan décrivent un réseau; ce réseau est évidemment conjugué à la congruence.

De même les droites qui joignent un point fixe aux points d'un réseau décrivent une congruence conjuguée au réseau.

La théorie des réseaux et congruences conjugués repose sur les trois propositions suivantes :

1° *Chaque congruence est conjuguée à une série de réseaux parallèles à l'un quelconque des réseaux de la représentation sphérique.*

En effet, soit $A(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ un réseau de la représentation sphérique. Les n fonctions $\xi_1, \ldots, \xi_n$ sont solutions de l'équation

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \, \partial v} = P \frac{\partial \theta}{\partial u} + Q \frac{\partial \theta}{\partial v}.$$

Prenons sur la congruence un système quelconque $P(y_1, \ldots, y_n)_i$, on aura (21)

$$(26) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial y_i}{\partial u} &= A \frac{\partial \xi_i}{\partial u} + B \xi_i, \\ \frac{\partial y_i}{\partial v} &= C \frac{\partial \xi_i}{\partial v} + D \xi_i, \end{aligned} \right.$$

avec la condition (23),

$$\frac{\partial B}{\partial v} = \frac{\partial D}{\partial u}.$$

Ce qui permet de poser

$$B = \frac{\partial \rho}{\partial u}, \qquad D = \frac{\partial \rho}{\partial v},$$

ρ étant déterminé à une constante près. Prenons alors sur la droite de la congruence un point M ayant pour coordonnées

$$x_i = y_i - \rho \xi_i,$$

on aura

$$(27) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial x_i}{\partial u} &= (A - \rho) \frac{\partial \xi_i}{\partial u}, \\ \frac{\partial x_i}{\partial v} &= (C - \rho) \frac{\partial \xi_i}{\partial v}. \end{aligned} \right.$$

Le système (M) étant parallèle à (A) est un réseau (n° 1). En faisant varier la constante qui entre dans ρ, on obtient une série de réseaux conjugués parallèles à (A). Soient M et M′ deux de ces réseaux; les projections de MM′ sur les axes sont

$$K\xi_1, \quad K\xi_2, \quad \ldots, \quad K\xi_n.$$

et par conséquent

$$MM' = K.OA,$$

K étant une constante.

2° *On obtient ainsi tous les réseaux conjugués à la congruence.*

Cherchons en effet dans quel cas le système (P) défini par les équations (21) est un réseau; d'abord, P n'étant pas placé à l'un des foyers, A et C sont différents de zéro. On pourra d'abord multiplier toutes les quantités X_i, par un même facteur λ, de façon à faire disparaître le coefficient B : il suffit pour cela que l'on ait

$$B\lambda = A\frac{\partial \lambda}{\partial u}.$$

Ce qui détermine λ à un facteur près qui est fonction de v. On a donc

$$(28)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial y_i}{\partial u} &= A\frac{\partial X_i}{\partial u} \\ \frac{\partial y_i}{\partial v} &= C\frac{\partial X_i}{\partial v} + DX_i \end{aligned}\right. \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Les conditions (22) deviennent ici

$$(29)\qquad \left\{\begin{aligned} AP + \frac{\partial A}{\partial v} &= CP + D, \\ AQ &= CQ + \frac{\partial C}{\partial u}, \\ AR &= CR + \frac{\partial D}{\partial u}. \end{aligned}\right.$$

Il faudra que l'on puisse trouver P_1 et Q_1 tel que

$$(30)\qquad \frac{\partial^2 y_i}{\partial u\,\partial v} = P_1\frac{\partial y_i}{\partial u} + Q_1\frac{\partial y_i}{\partial v}.$$

On trouve

$$P_1 = P + \frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial v}, \qquad Q_1 = \frac{AQ}{C}.$$

Égalons dans les deux membres de (30) le coefficient de X_i. On aura

$$AR = \frac{AQ}{C} D$$

ou

$$CR = DQ. \tag{31}$$

L'équation (31) peut être satisfaite de plusieurs manières différentes :

I. En posant

$$R = 0, \qquad D = 0.$$

Les équations (28) deviennent

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial y_i}{\partial u} &= A \frac{\partial X_i}{\partial u}, \\ \frac{\partial y_i}{\partial v} &= C \frac{\partial X_i}{\partial v}. \end{aligned} \right. \tag{28'}$$

Ce qui montre que le réseau (P) est parallèle au réseau (X_i) de la représentation sphérique.

II. En posant

$$R = 0, \qquad Q = 0.$$

Les équations (29) donnent alors

$$\frac{\partial C}{\partial u} = 0, \qquad \frac{\partial D}{\partial u} = 0;$$

C et D et par conséquent $\frac{D}{C}$ est fonction de v seul; nous retomberons sur cette propriété dans le cas général.

III. Laissons de côté les hypothèses I et II. On déduit de (29)

$$R \frac{\partial C}{\partial u} = Q \frac{\partial D}{\partial u}. \tag{32}$$

Les équations (31) et (32) donnent

$$\frac{1}{C} \frac{\partial C}{\partial u} = \frac{1}{D} \frac{\partial D}{\partial u}.$$

Le rapport $\frac{D}{C}$ est fonction de v seul, on pourra alors multiplier les quantités X_i par une même fonction de v seul, de façon à ramener les équations (28) à la forme (28'); ce qui démontre le théorème.

3° *Les droites qui joignent deux réseaux parallèles décrivent une congruence conjuguée par rapport à ces réseaux.* (RIBEAUCOUR.)

Soient $(M)(x_1, \ldots, x_n)$ et $N(y_1, \ldots, y_n)$ deux réseaux parallèles. On aura

$$(33)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial y_i}{\partial u} = h\dfrac{\partial x_i}{\partial u} \\[2ex] \dfrac{\partial y_i}{\partial v} = l\dfrac{\partial x_i}{\partial v} \end{cases} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Un point quelconque de la droite MN a pour coordonnées

$$z_i = x_i + \lambda(y_i - x_i),$$

d'où

$$\frac{\partial z_i}{\partial u} = \frac{\partial x_i}{\partial u}(1 + \lambda h - \lambda) + \frac{\partial \lambda}{\partial u}(y_i - x_i),$$

$$\frac{\partial z_i}{\partial v} = \frac{\partial x_i}{\partial v}(1 + \lambda l - \lambda) + \frac{\partial \lambda}{\partial v}(y_i - x_i).$$

En prenant $\lambda = \frac{1}{1-h}$ on a le premier foyer, puis on obtient le second en prenant $\lambda = \frac{1}{1-l}$, ce qui montre que la droite MN décrit une congruence rapportée à ses développables.

Des trois propriétés qui viennent d'être établies découlent les conséquences suivantes :

On obtient toutes les congruences conjuguées à un réseau en joignant les points de ce réseau à ceux d'un réseau parallèle.

La représentation sphérique d'une congruence conjuguée à un réseau est un réseau parallèle au réseau donné.

Donc :

Si deux réseaux sont parallèles, toute congruence conjuguée à l'un est parallèle à une congruence conjuguée à l'autre.

De même,

Si deux congruences sont parallèles, tout réseau conjugué à l'une est parallèle à un réseau conjugué à l'autre.

Enfin on démontre facilement la propriété suivante, qui, dans le cas de l'espace à trois dimensions, est due à Ribeaucour :

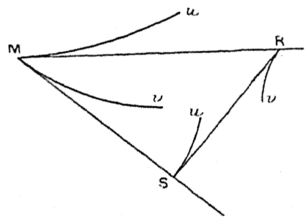
Pour que le système central soit un réseau, il faut et il suffit que l'équation à laquelle satisfont les paramètres directeurs soit à invariants égaux.

Les coordonnées de ce réseau satisfont aussi à une équation à invariants égaux.

Nous donnerons le nom de *congruences de Ribeaucour* à ces congruences spéciales.

6. Un réseau et une congruence sont dits *harmoniques* lorsque les foyers de la congruence sont sur les tangentes du réseau. Le système a alors la disposition indiquée par la *fig.* 2 où nous indiquons sur

Fig. 2.



chaque courbe le paramètre qui varie quand on se déplace sur cette courbe.

Déterminons d'abord toutes les congruences harmoniques à un réseau. Soient $(x_1, \ldots, x_n)$ les coordonnées d'un point M du réseau qui satisfont à l'équation

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \, \partial v} = P \frac{\partial \theta}{\partial u} + Q \frac{\partial \theta}{\partial v}. \tag{34}$$

Les coordonnées des points $R(X_1, \ldots, X_n)$ et $S(Y_1, \ldots, Y_n)$ sont de la forme

$$X_i = x_i - h \frac{\partial x_i}{\partial u},$$

$$Y_i = x_i - l \frac{\partial x_i}{\partial v}.$$

En tenant compte de l'équation (34) on trouve

$$\frac{\partial X_i}{\partial v} = \frac{\partial x_i}{\partial u}\left(-\frac{\partial h}{\partial v} - hP\right) + \frac{\partial x_i}{\partial v}(1 - hQ).$$

Écrivons que la courbe décrite est tangente à RS. On aura

$$-l\frac{\partial h}{\partial v} - hlP + h - h^2 Q = 0$$

ou bien

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{h}\right) - P\frac{1}{h} - Q\frac{1}{l} + \frac{1}{hl} = 0. \tag{35}$$

On aurait de même pour le point S

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{l}\right) - P\left(\frac{1}{h}\right) - Q\frac{1}{l} + \frac{1}{hl} = 0. \tag{36}$$

La comparaison des équations (35) et (36) donne

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{h}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{l}\right),$$

ce qui permet de poser

$$\frac{1}{h} = \frac{1}{\varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial u}, \qquad \frac{1}{l} = \frac{1}{\varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial v}.$$

L'une ou l'autre des équations (35) et (36) donne

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u\, \partial v} = P\frac{\partial \varphi}{\partial u} + Q\frac{\partial \varphi}{\partial v}.$$

On arrive donc au résultat suivant (DARBOUX, *Leçons*) :

Pour obtenir les congruences harmoniques au réseau (M) *on prend une solution quelconque* θ *de l'équation* (34); *les coordonnées des foyers de la congruence cherchée sont*

$$X_i = x_i - \frac{\theta}{\frac{\partial \theta}{\partial u}}\frac{\partial x_i}{\partial u}, \tag{R}$$

$$Y_i = x_i - \frac{\theta}{\frac{\partial \theta}{\partial v}}\frac{\partial x_i}{\partial v}. \tag{S}$$

Si deux réseaux (pouvant appartenir à des espaces quelconques dont le nombre de dimensions n'est pas forcément le même), correspondent à la même équation de Laplace (34), ces réseaux seront appelés *correspondants*. Les congruences harmoniques qui correspondent à une même solution θ seront appelées *congruences harmoniques correspondantes*.

Les paramètres directeurs $(Z_1, \ldots, Z_n)$ de la droite RS sont

$$Z_i = \frac{\partial\theta}{\partial v}\frac{\partial x_i}{\partial u} - \frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{\partial x_i}{\partial v}. \tag{37}$$

Il est facile de former l'équation à laquelle satisfont les paramètres directeurs $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$. En tenant compte de l'équation (34) et de celles que l'on en déduit par différentiation on trouve

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Z_i}{\partial u} &= \frac{\partial\theta}{\partial v}\frac{\partial^2 x_i}{\partial u^2} - \left(\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} + Q\frac{\partial\theta}{\partial u}\right)\frac{\partial x_i}{\partial v} + Q\frac{\partial\theta}{\partial v}\frac{\partial x_i}{\partial u},\\
\frac{\partial Z_i}{\partial v} &= -\frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{\partial^2 x_i}{\partial v^2} + \left(\frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} + P\frac{\partial\theta}{dv}\right)\frac{\partial x_i}{\partial u} - P\frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{\partial x_i}{\partial v},\\
\frac{\partial^2 Z_i}{\partial u\,\partial v} &= \frac{\partial^2 x_i}{\partial u^2}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} + P\frac{\partial\theta}{\partial v}\right) - \frac{\partial^2 x_i}{\partial v^2}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} + Q\frac{\partial\theta}{\partial u}\right)\\
&\quad + \frac{\partial x_i}{\partial u}\left[Q\frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} + \left(\frac{\partial P}{\partial u} + \frac{\partial Q}{\partial v} + 2PQ\right)\frac{\partial\theta}{\partial v}\right]\\
&\quad - \frac{\partial x_i}{\partial v}\left[P\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} + \left(\frac{\partial P}{\partial u} + \frac{\partial Q}{\partial v} + 2PQ\right)\frac{\partial\theta}{\partial u}\right].
\end{aligned}$$

On voit alors que $Z_1, \ldots, Z_n$ sont solutions de l'équation

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial u\,\partial v} = P_1\frac{\partial Z}{\partial u} + Q_1\frac{\partial Z}{\partial v} + R_1 Z,$$

où l'on pose

$$P_1 = P + \frac{\dfrac{\partial^2\theta}{\partial v^2}}{\dfrac{\partial\theta}{\partial v}}.$$

$$Q_1 = Q + \frac{\dfrac{\partial^2\theta}{\partial u^2}}{\dfrac{\partial\theta}{\partial u}},$$

$$R_1 = \frac{\partial P}{\partial u} + \frac{\partial Q}{\partial v} + PQ - P_1 Q_1;$$

donc :

Les paramètres directeurs de deux congruences harmoniques correspondantes satisfont à la même équation de Laplace.

L'expression de Z_i donne immédiatement le théorème suivant :

Si deux réseaux sont parallèles, toute congruence harmonique à l'un est parallèle à une congruence harmonique à l'autre.

Le théorème subsiste, évidemment comme cas limite, dans le cas où l'un des deux réseaux est un réseau point. On peut aussi le vérifier facilement par un calcul direct.

Si l'on augmente θ d'une constante, la droite RS se déplace parallèlement à elle-même; on obtient ainsi une *série* de congruences harmoniques parallèles.

Si l'on prend la solution $\theta = x_1$, on trouve

$$X_1 = 0, \qquad Y_1 = 0.$$

Les points R et S sont les traces des tangentes du réseau sur l'hyperplan $x_1 = 0$; en faisant un changement de coordonnées on en déduit :

L'intersection du plan tangent (d'un réseau) avec un hyperplan quelconque décrit une congruence harmonique au réseau.

Si deux réseaux sont *correspondants*, à l'intersection de l'un avec un hyperplan correspond sur l'autre une congruence harmonique.

Les coordonnées X_i de R peuvent s'écrire sous la forme suivante

$$X_i = \frac{\theta \dfrac{\partial x_i}{\partial u} - x_i \dfrac{\partial \theta}{\partial u}}{\theta^2} \times \left(- \frac{\theta^2}{\dfrac{\partial \theta}{\partial u}} \right).$$

Si l'on pose alors

$$x'_i = \frac{x_i}{\theta}, \qquad x'_{n+1} = \frac{1}{\theta},$$

on aura

$$X_i = \frac{\dfrac{\partial x'_i}{\partial u}}{\dfrac{\partial x'_{n+1}}{\partial u}};$$

de même

$$Y_i = \frac{\dfrac{\partial x'_i}{\partial v}}{\dfrac{\partial x'_{n+1}}{\partial v}}.$$

Alors les coordonnées homogènes des points M, R, S sont

$$(\mathrm{M}) \qquad x'_1, \quad \ldots, \quad x'_n, \quad x'_{n+1},$$

$$(\mathrm{R}) \qquad \frac{\partial x'_1}{\partial u}, \quad \ldots, \quad \ldots, \quad \frac{\partial x'_{n+1}}{\partial u},$$

$$(\mathrm{S}) \qquad \frac{\partial x'_1}{\partial v}, \quad \ldots, \quad \ldots, \quad \frac{\partial x'_{n+1}}{\partial v}.$$

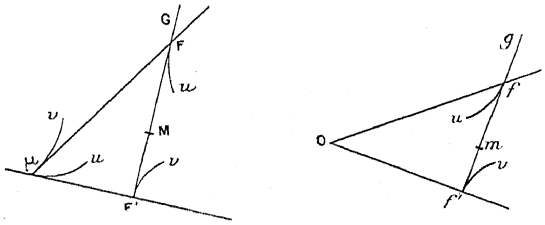
Les fonctions $x'_1, \ldots, x'_{n+1}$ satisfont d'ailleurs à une équation de la forme (34).

Cherchons maintenant les réseaux harmoniques à une congruence donnée. Soient (g) une congruence, f et f' ses foyers; joignons un point fixe O aux foyers; on obtient ainsi un système de droites Of, Of'. Quand u varie seul, la trajectoire de f est tangente à ff' et par conséquent située dans le plan Off'. Même conclusion pour la trajectoire de f' quand v varie seul; donc (n° 2):

Les droites qui joignent un point fixe aux foyers d'une congruence forment un réseau point harmonique à la congruence.

Soient maintenant (G) une congruence quelconque, F et F′ ses foyers, μ un réseau harmonique (*fig.* 3).

Fig. 3.



Soit O le réseau point parallèle à μ; il existe une congruence (g) harmonique à O et parallèle à (G).

Soient f et f' ses foyers. La figure $\mu FF'$ est semblable à Off'. Donc :

Tout réseau harmonique d'une congruence est parallèle au réseau point qui est harmonique à l'une des congruences parallèles à la congruence donnée.

Il reste à démontrer que la construction précédente, appliquée à l'une quelconque des congruences (g) parallèles à (G), donne bien un réseau harmonique à (G).

Soient $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ les coordonnées d'un réseau (A) qui sert de représentation sphérique à (g) et à (G). Ces quantités satisfont à l'équation

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u\,\partial v} = P\frac{\partial \theta}{\partial u} + Q\frac{\partial \theta}{\partial v}. \tag{38}$$

Prenons sur g et G des points $m(x_1, \ldots, x_n)$, $M(X_1, \ldots, X_n)$ qui décrivent des réseaux parallèles à (A). On aura

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial x_i}{\partial u} &= h\frac{\partial \xi_i}{\partial u}, & \frac{\partial X_i}{\partial u} &= H\frac{\partial \xi_i}{\partial u},\\ \frac{\partial x_i}{\partial v} &= l\frac{\partial \xi_i}{\partial v}, & \frac{\partial X_i}{\partial v} &= L\frac{\partial \xi_i}{\partial v}, \end{aligned}\right. \tag{39}$$

avec les conditions

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial v} &= -P(h-l), & \frac{\partial H}{\partial v} &= -P(H-L),\\ \frac{\partial l}{\partial u} &= Q(h-l), & \frac{\partial L}{\partial u} &= Q(H-L). \end{aligned}\right. \tag{40}$$

Les coordonnées des foyers f, f', F, F' sont

$$(f) \qquad y_i = x_i - h\xi_i,$$
$$(f') \qquad z_i = x_i - l\xi_i,$$
$$(F) \qquad Y_i = X_i - H\xi_i,$$
$$(F') \qquad Z_i = X_i - L\xi_i.$$

En différentiant et en tenant compte des conditions (40), on a

$$\frac{\partial y_i}{\partial v} = (l-h)\left(\frac{\partial \xi_i}{\partial v} - P\xi_i\right), \qquad \frac{\partial Y_i}{\partial v} = (L-H)\left(\frac{\partial \xi_i}{\partial v} - P\xi_i\right),$$
$$\frac{\partial z_i}{\partial u} = (h-l)\left(\frac{\partial \xi_i}{\partial u} - Q\xi_i\right), \qquad \frac{\partial Z_i}{\partial u} = (H-L)\left(\frac{\partial \xi_i}{\partial u} - Q\xi_i\right).$$

ou bien, en posant

$$\lambda = -\frac{\mathrm{H}-\mathrm{L}}{h-l},$$

on aura

$$(41)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial \mathrm{Y}_i}{\partial v} &= \lambda \frac{\partial y_i}{\partial v},\\ \frac{\partial \mathrm{Z}_i}{\partial u} &= \lambda \frac{\partial z_i}{\partial u}. \end{aligned}\right.$$

Prenons alors le point μ, dont les coordonnées $(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n)$ sont

$$\zeta_i = \mathrm{Y}_i - \lambda y_i = \mathrm{Z}_i - \lambda z_i,$$

on aura

$$(42)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial \zeta_i}{\partial v} &= -y_i \frac{\partial \lambda}{\partial v},\\ \frac{\partial \zeta_i}{\partial u} &= -z_i \frac{\partial \lambda}{\partial u}. \end{aligned}\right.$$

Ces équations montrent que le point μ décrit un réseau harmonique à (G). On voit que la recherche des réseaux harmoniques à une congruence est identique à celle des congruences parallèles à la congruence donnée. Il résulte de tout ce qui précède la proposition suivante :

Si deux congruences sont parallèles, tout réseau harmonique à l'une est parallèle à un réseau harmonique à l'autre.

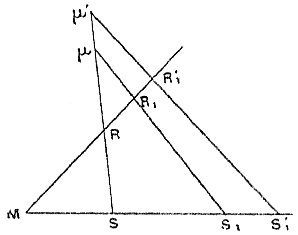
7. Soit (M) un réseau, μ un point du plan tangent au réseau; si le point μ décrit un réseau (μ), nous dirons que le réseau (μ) est *dérivé* du réseau (M), et aussi que le réseau (M) est le réseau *dérivant* de (μ). Les réseaux dérivants peuvent être définis comme l'enveloppe de plans passant par les points du réseau dérivé, ces plans étant choisis de telle sorte qu'ils enveloppent un réseau. On voit, d'après cela, que, dans l'espace à trois dimensions, les deux problèmes de la recherche des réseaux dérivés et dérivants sont polaires réciproques l'un de l'autre.

Si deux congruences (G) *et* (G_1) *sont harmoniques à un même réseau* (M), *le point de rencontre* (μ) *de* G *et* G_1 *décrit un réseau dérivé de* M (*fig.* 4).

Nous donnerons de ce théorème deux démonstrations, l'une géométrique, l'autre analytique.

1° Soient R, S les foyers de (G), (R_1, S_1) ceux de (G_1); il existe une congruence R'_1, S'_1 harmonique à M et parallèle à (G_1); soit μ' le

Fig. 4.



point de rencontre de R, S et R'_1, S'_1; quand u varie seul, le point μ décrit une courbe dont la tangente est l'intersection des plans focaux de R, S et R_1, S_1; de même, la tangente à la trajectoire de μ' est l'intersection des plans focaux de R, S et R'_1, S'_1; ces tangentes sont donc parallèles; même conclusion quand v varie seul. Les systèmes de courbes (μ) et (μ') étant parallèles sont des réseaux; ce qui démontre le théorème.

2° Soient θ et θ_1 les solutions correspondantes aux congruences R, S et R_1, S_1. Les coordonnées d'un point quelconque u du plan tangent à M sont de la forme

$$X'_i = x_i + \lambda\frac{\partial x_i}{\partial u} + \mu\frac{\partial x_i}{\partial v}. \tag{43}$$

Pour que ce point se trouve sur les droites R, S et R_1, S_1, il faut que l'on ait

$$\left\{\begin{aligned} 0 &= \theta + \lambda\frac{\partial\theta}{\partial u} + \mu\frac{\partial\theta}{\partial v}, \\ 0 &= \theta_1 + \lambda\frac{\partial\theta_1}{\partial v} + \mu\frac{\partial\theta_1}{\partial v}. \end{aligned}\right. \tag{44}$$

Les expressions (43) sont des expressions que M. Darboux appelle des *expressions* (m, n). (*Leçons sur les systèmes orthogonaux, etc.*, t. I.)

Ces expressions s'annulent pour deux solutions particulières θ et θ_1 de l'équation (34); donc, les quantités x'_i satisfont aussi à une équation de la même forme.

Cette démonstration met immédiatement en évidence le résultat suivant :

Le théorème précédent permet d'obtenir tous les réseaux dérivés de (M).

Si l'on prend la congruence harmonique correspondant à la solution $\theta + K\theta_1$, où K est une constante quelconque, on voit que cette congruence passe par μ. En faisant varier la constante K, on obtient une *série concourante* de ~~réseaux~~ congruences harmoniques.

Il est évident que :

Tout réseau conjugué d'une congruence harmonique à (M) *est dérivé de* (M).

Inversement, de ce qui précède résulte :

Tout réseau dérivé de (M) *est conjugué à une série concourante de congruences harmoniques à* (M).

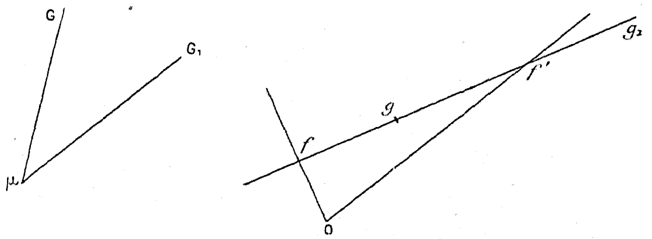
Passons à la recherche des réseaux dérivants un réseau donné. On peut déjà énoncer le résultat suivant :

Tout réseau (M) *dérivant* (μ) *est harmonique à deux congruences conjuguées à* (μ).

Inversement :

Si (G) *et* (G_1) *sont deux congruences conjuguées par rapport au réseau* (μ), *le plan* G, G_1 *enveloppe un réseau* (M), *qui est évidemment réseau dérivant* (μ).

Fig. 5.

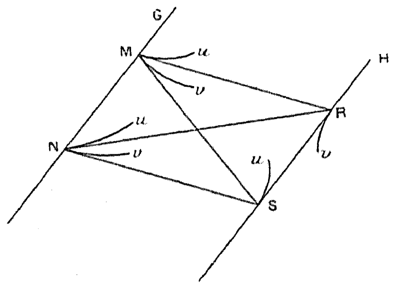


En effet, soit g un réseau de la représentation sphérique de (G) parallèle à (μ); menons par g une droite gg_1 parallèle à G_1; cette droite décrit une congruence (n° 5); soient f et f' ses foyers; le plan G, G_1 étant parallèle au plan Off' enveloppe un réseau harmonique à (G_1) (n° 6); ce réseau est de même harmonique à (G), ce qui démontre le théorème.

Une congruence (G) sera dite *dérivée* d'une congruence (H), si (G) est conjuguée à l'un quelconque des réseaux harmoniques à (H). Nous dirons aussi que (G) est une congruence *dérivant* (H).

THÉORÈME. — *Les droites qui joignent deux réseaux* (M) *et* (N), *harmoniques à une congruence* (H), *forment une congruence* (G) *dérivée de* (H) (*fig.* 6).

Fig. 6.



Ce théorème peut être démontré géométriquement et analytiquement :

1° Quand u varie seul, les plans tangents aux surfaces réglées décrites par G en M et N sont le plan GR, donc G décrit une développable; même conclusion quand v varie seul; donc G engendre une congruence conjuguée aux réseaux (M) et (N).

2° On peut choisir les coordonnées homogènes $(x_1, \ldots, x_{n+1})$ de M de façon que celles de R et S soient (n° 6)

$$(\mathrm{R}) \qquad \frac{\partial x_1}{\partial u}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial x_n}{\partial u}, \quad \frac{\partial x_{n+1}}{\partial u},$$

$$(\mathrm{S}) \qquad \frac{\partial x_1}{\partial v}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial x_n}{\partial v}, \quad \frac{\partial x_{n+1}}{\partial v}.$$

De même, on peut choisir les coordonnées homogènes de

$$\mathrm{N}(y_1, \ldots, y_n, y_{n+1})$$

de telle sorte que celles de R et S soient

$$\text{(R)}\qquad \frac{\partial y_1}{\partial u},\quad \ldots,\quad \frac{\partial y_n}{\partial u},\quad \frac{\partial y_{n+1}}{\partial u},$$

$$\text{(S)}\qquad \frac{\partial y_1}{\partial v},\quad \ldots,\quad \frac{\partial y_n}{\partial v},\quad \frac{\partial y_{n+1}}{\partial v}.$$

On aura donc

$$(45)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial y_i}{\partial u} &= h\frac{\partial x_i}{\partial u} \\ \frac{\partial y_i}{\partial v} &= l\frac{\partial x_i}{\partial v} \end{aligned}\right. \qquad (i = 1, 2, \ldots, n, n+1).$$

Un point quelconque de la droite MN a pour coordonnées homogènes

$$z_i = y_i + \lambda x_i,$$

d'où

$$(46)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial z_i}{\partial u} &= x_i\frac{\partial \lambda}{\partial u} + (\lambda + h)\frac{\partial x_i}{\partial u}, \\ \frac{\partial z_i}{\partial v} &= x_i\frac{\partial \lambda}{\partial v} + (\lambda + l)\frac{\partial x_i}{\partial v}. \end{aligned}\right.$$

On obtient les deux foyers de la congruence en faisant successivement $\lambda = -h$, $\lambda = -l$.

Si maintenant on suppose λ constant, le point (z_i) décrit un réseau harmonique à (H). Il existe donc, sur la congruence dérivée (G), une *série* de réseaux conjugués à (G) et harmoniques à H.

On démontre facilement que le théorème précédent permet d'obtenir toutes les congruences dérivées de (H).

Théorème. — *Si* (M) *et* (N) *sont deux réseaux conjugués à la congruence* (G), *la droite d'intersection de ces deux réseaux décrit une congruence* H *dérivant* (G).

Soient R et S (*fig.* 6) les points d'intersection des tangentes des réseaux (M) et (N). Quand v varie seul, la tangente à la trajectoire de R est dans les plans tangents aux réseaux (M) et (N) (n° 2); c'est donc la droite RS; même résultat pour S quand u varie seul. H décrit donc une congruence qui, évidemment, est une congruence dérivant (G).

On montre facilement que ce théorème permet d'obtenir toutes les congruences dérivant une congruence donnée.

Enfin, il résulte de ce qui précède les conséquences suivantes :

Si deux réseaux sont parallèles, chaque réseau dérivé de l'un est parallèle à un réseau dérivé de l'autre.

Même résultat pour les réseaux dérivants.

Si deux congruences sont parallèles, chaque congruence dérivée de l'une est parallèle à une congruence dérivée de l'autre.

Même résultat pour les congruences dérivant.

8. Nous aurons souvent à projeter des figures sur un hyperplan, ce qui permet de passer d'un espace à n dimensions à un espace à $n-1$; on peut aussi faire l'inverse. On peut toujours supposer que l'hyperplan sur lequel on projette ait pour équation $x_n = 0$; si alors x_1, x_2, ..., x_n sont les coordonnées d'un point M de l'espace à n, le point m, qui, dans l'espace à $n-1$, a pour coordonnées x_1, x_2, ..., x_{n-1} est appelé *la projection* de M.

Il est clair que la projection d'un réseau est un réseau. Inversement, si un réseau est donné dans l'espace à $n-1$, on aura le réseau projetant en prenant pour x_n une solution quelconque de l'équation à laquelle satisfont x_1, ..., x_{n-1}.

Les équations de condition (14) et (15) (n° 3) montrent immédiatement que la projection d'une congruence est une congruence. Les projections des foyers sont les foyers de la projection.

Supposons qu'inversement on veuille trouver la congruence projetante d'une congruence donnée. Dans les formules (13) (n° 2), on connaît a_1, ..., a_{n-1}, p_2, ..., p_{n-1}; il reste à déterminer a_n et p_n. On prendra pour a_n l'une quelconque des solutions de l'équation à laquelle satisfont a_2, ..., a_{n-1}; puis, les égalités

$$\frac{\frac{\partial p_n}{\partial u}}{\frac{\partial a_n}{\partial u}} = \frac{\frac{\partial p_{n-1}}{\partial u}}{\frac{\partial a_{n-1}}{\partial u}},$$

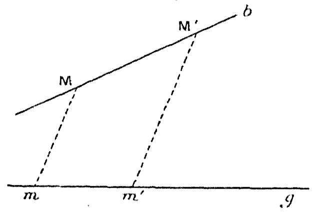
$$\frac{\frac{\partial p_n}{\partial v}}{\frac{\partial a_n}{\partial v}} = \frac{\frac{\partial p_{n-1}}{\partial v}}{\frac{\partial a_{n-1}}{\partial v}}$$

donneront p_n par une quadrature.

Si un réseau et une congruence sont conjugués, il en est de même de leurs projections.

Inversement, soient (g) une congruence conjuguée au réseau (m) (*fig.* 7), G l'une quelconque des projetantes de (g); le point M de G

Fig. 7.



qui se projette en m décrit un réseau. En effet, il existe sur g un point m' qui décrit un réseau parallèle à M, soit M' le point projetant m'. Quand u varie seul, par exemple, les trajectoires de M et M' sont dans l'un des plans focaux, leurs projections sont parallèles, donc ces tangentes sont parallèles. Les systèmes (M) et (M') étant parallèles sont des réseaux.

De même, si (M) est l'un quelconque des réseaux projetant (m), il existe des congruences (G) conjuguées à (M) et se projetant suivant (g). Tout revient à déterminer le réseau (M') parallèle à M. Soient alors $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les coordonnées de M; $y_1, y_2, \ldots, y_n$ celles de M'. Il faut déterminer y_n. On a déjà

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial y_i}{\partial u} &= h\frac{\partial x_i}{\partial u}\\ \frac{\partial y_i}{\partial v} &= l\frac{\partial x_i}{\partial v}\end{aligned}\right\} \qquad (i=1, 2, \ldots, n-1).$$

On déterminera y_n par les équations

$$\frac{\partial y_n}{\partial u} = h\frac{\partial x_n}{\partial u},$$

$$\frac{\partial y_n}{\partial v} = l\frac{\partial x_n}{\partial v}.$$

Ces équations sont compatibles parce que x_n satisfait à la même équation de Laplace que $x_1, \ldots, x_{n-1}$; elles déterminent y_n à une constante près. Il y a une infinité de congruences satisfaisantes (G).

Les formules qui donnent les coordonnées X_i, Y_i des foyers R, S d'une congruence harmonique à un réseau montrent immédiatement les résultats suivants :

Si un réseau et une congruence sont harmoniques, il en est de même de leurs projections.

Si le réseau (m) et la congruence (g) sont conjugués et si (M) est l'un quelconque des projetants de m, la droite G du plan du réseau qui se projette suivant g décrit une congruence harmonique à (M).

Si l'on se donnait (g) et (G), il existerait une infinité de réseaux (M) harmoniques à (G) et se projetant en m. Il suffit de déterminer la coordonnée x_n de M; soient X_n et Y_n les coordonnées correspondantes des foyers de G. On aura

$$x_n - \frac{\theta}{\frac{\partial\theta}{\partial u}}\frac{\partial x_n}{\partial u} = X_n,$$

$$x_n - \frac{\theta}{\frac{\partial\theta}{\partial v}}\frac{\partial x_n}{\partial v} = Y_n.$$

Ces équations sont compatibles, si G se projette suivant g. La solution générale est de la forme

$$x_n = (x_n)_0 + K\theta,$$

K étant une constante arbitraire, ce qui donne une infinité de réseaux (M) satisfaisants.

On pourrait donner des résultats analogues pour les réseaux ou congruences dérivés ou dérivants.

9. Nous terminerons ce Chapitre par des propriétés qui ne s'appliquent qu'à l'espace à trois dimensions. Nous dirons que

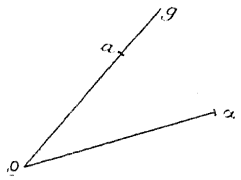
Un réseau et une congruence sont parallèles si la droite de la congruence est perpendiculaire au plan du réseau.

Soient (M) un réseau et (G) une congruence parallèles (*fig.* 8).

Menons par un point fixe O, une droite Og parallèle à G; soit a un point Og qui décrit un réseau (a); prenons la polaire réciproque de la surface (a) par rapport à une sphère ayant son centre en O; soit (α)

cette polaire réciproque; le plan tangent à α est normal à (g), le réseau (α) est donc parallèle à (M). Inversement, la polaire réciproque d'un réseau quelconque (α) parallèle à (M) est un réseau de la droite Og; la droite $O\alpha$ est d'ailleurs perpendiculaire au plan tangent en (a).

Fig. 8.

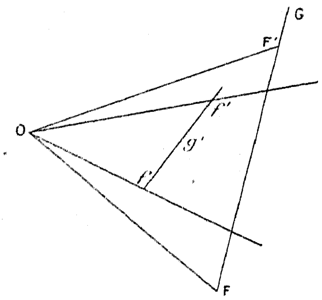


Remarquons, d'autre part, que les congruences conjuguées à (M) sont parallèles aux droites $O\alpha$; que les réseaux conjugués à (G) sont parallèles aux réseaux (a); donc

Si un réseau et une congruence sont parallèles, toute congruence conjuguée au réseau est parallèle à un réseau conjugué à la congruence et inversement.

Soit maintenant G′ une congruence quelconque parallèle à (G); g' sa polaire réciproque; à g' correspond un réseau point (μ) dont le

Fig. 9.



plan est perpendiculaire à (G′); c'est donc le réseau point de (M). Inversement, si (g') est l'une quelconque des congruences harmoniques à (μ), sa polaire réciproque (G′) est parallèle à G. A cette congruence G′ correspond un réseau point (N′) formé par le plan OG′; ce plan est perpendiculaire à g'. Cela posé, remarquons que les congruences harmoniques à (M) sont parallèles aux congruences (g'); que les réseaux harmoniques à (G) sont parallèles aux réseaux points (N'). Donc :

Si une congruence et un réseau sont parallèles, toute congruence harmonique au réseau est parallèle à un réseau harmonique à la congruence et inversement.

On obtiendrait des théorèmes analogues pour les réseaux et congruences dérivés ou dérivants.

CHAPITRE II.

RÉSEAUX ET CONGRUENCES O.

SOMMAIRE.

10. Système de rotation dans l'espace à n dimensions. — 11. Déterminants orthogonaux. — 12. Propriété des éléments d'une colonne. — 13. Réseaux O. — 14. Congruences O et HO. — 15. Projection stéréographique des réseaux O.

10. Prenons un déterminant Δ à n^2 éléments, qui sont les coefficients d'une substitution orthogonale dans l'espace à n dimensions,

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1^1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ x_2^1 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \dots & \cdot\cdot \\ x_n^1 & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix}. \tag{1}$$

Les éléments de ce déterminant vérifient les relations

$$\sum_{i=1}^{i=n} (x_k^i)^2 = 1, \qquad \sum_{i=1}^{i=n} (x_k^i)(x_{k'}^i) = 0 \qquad (k \gtrless k'), \tag{2}$$

d'où l'on déduit, comme l'on sait, les relations

$$\sum^{i=n} (x_i^k)^2 = 1, \qquad \sum^{i=n} (x_i^k x_i^{k'}) = 0 \qquad (k \gtrless k'). \tag{3}$$

Le déterminant Δ est égal à ± 1. Supposons de plus que les éléments de ce déterminant soient fonctions de deux variables u et v. On pourra exprimer les dérivées des éléments d'une même colonne, en fonction linéaire et homogène de cette colonne, les coefficients ne dépendant pas de la colonne; on aura par conséquent des équations de la forme

$$(4)\qquad \frac{\partial x_k^i}{\partial u} = \sum_{l=1}^{l=n} p_{kl} x_l^i \qquad (k = 1, 2, \ldots, n); \ (i = 1, 2, \ldots, n)$$

et

$$(5)\qquad \frac{\partial x_k^i}{\partial v} = \sum_{l=1}^{l=n} q_{kl} x_l^i.$$

Des équations (3), (4), (5) on déduit

$$(6)\qquad \begin{cases} p_{kk} = \sum_i x_k^i \dfrac{\partial x_k^i}{\partial u}, & q_{kk} = \sum_i x_k^i \dfrac{\partial x_k^i}{\partial v}, \\ p_{kl} = \sum_i x_l^i \dfrac{\partial x_k^i}{\partial u}, & q_{kl} = \sum_i x_l^i \dfrac{\partial x_k^i}{\partial v}. \end{cases}$$

En différentiant les équations (3) on en déduit

$$(7)\qquad \begin{cases} p_{kk} = 0, & q_{kk} = 0, \\ p_{kl} = -p_{lk}, & q_{kl} = -q_{lk}. \end{cases}$$

Ces quantités p_{kl}, q_{kl}, ainsi définies, sont ce que nous appelons les *rotations* du déterminant (1). Elles sont analogues aux quantités introduites par M. Darboux dans le cas des déterminants à trois lignes.

Si l'on différentie les équations (4) par rapport à v, et si l'on remplace dans le second membre les valeurs de $\frac{\partial x_l^i}{\partial v}$ par leur expression donnée par les formules (5), on voit que $\frac{\partial^2 x_k^i}{\partial u \partial v}$ s'exprime en fonction linéaire et homogène de $x_1^i, x_2^i \ldots, x_n^i$, les coefficients étant indépendants de i. Si l'on différentie au contraire les équations (5) par rapport à u on obtiendra une nouvelle expression analogue pour $\frac{\partial^2 x_k^i}{\partial u \partial v}$. Ces deux expressions doivent être identiques, puisqu'il ne peut pas exister une même relation linéaire et homogène entre les éléments des colonnes de Δ. En écrivant ces identités nous obtenons les relations nécessaires qui doivent exister entre les rotations. Nous supposerons toujours que ces conditions sont satisfaites.

On peut alors se proposer de déterminer les éléments de Δ connaissant les rotations. Les éléments $x_1^i, x_2^i, \ldots, x_n^i$ d'une même colonne satisfont aux systèmes

$$\text{(8)} \qquad \frac{\partial x_k}{\partial u} = \sum_l p_{kl} x_l$$

$$\text{(9)} \qquad \frac{\partial x_k}{\partial v} = \sum_l q_{kl} x_l \qquad (k = 1, 2, \ldots, n); \; (l = 1, 2, \ldots, n).$$

Ces deux systèmes forment un système complet. Pour l'intégrer, on intégrera d'abord le système (8) dans lequel on donne à v une valeur particulière quelconque; la solution générale contiendra, d'une façon linéaire, n constantes; on pourra prendre pour ces constantes des fonctions de v telles que le système (9) soit satisfait.

On reconnaît, comme dans le cas de l'espace à trois dimensions, que toute solution des systèmes (8) et (9) est telle que

$$\sum_k x_k^2 = \text{const.}$$

Si $x_1, x_2, \ldots, x_n$; $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ sont deux solutions de ces systèmes, on a aussi

$$\sum_k x_k x'_k = \text{const.}$$

On en déduit que la solution la plus générale du problème posé se déduit d'une solution particulière, en effectuant sur les éléments de Δ une même substitution orthogonale à coefficients constants; c'est-à-dire que si x_k^i, $x_k'^i$ sont deux systèmes de solutions, on aura

$$x_k'^l = \alpha_l^1 x_k^1 + \alpha_l^2 x_k^2 + \ldots + \alpha_l^n x_k^n.$$

Nous donnerons le nom d'*opération différentielle d'ordre* $n-2$ à la résolution complète des systèmes (8) et (9) ou, ce qui revient au même, à la détermination des éléments de Δ connaissant les rotations. Si l'on connaît une solution particulière des systèmes (8) et (9) ou, ce qui est la même chose, les éléments d'une colonne de Δ, on pourra ramener le problème à un autre analogue dans l'espace à $n-1$ dimensions; ainsi de suite; de sorte que le problème s'achève par quadratures quand l'on en connaît $n-2$ solutions distinctes.

11. Nous allons prendre une forme spéciale du déterminant (1). Considérons un déterminant à $(n+2)$ lignes; l'élément de la ligne de rang k et de la colonne de rang i sera désigné par x_k^i si $k \leqq n$; les éléments de la $(n+1)^{\text{ième}}$ ligne seront désignés par $\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^{n+2}$; enfin ceux de la dernière par $\eta^1, \eta^2, \ldots, \eta^{n+2}$. Nous mettons ainsi en évidence les deux dernières lignes qui jouent un rôle spécial. Nous supposons bien entendu toujours que les éléments de ce déterminant sont les coefficients d'une substitution orthogonale. Soit

$$(10) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} x_1^1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n & x_1^{n+1} & x_1^{n+2} \\ x_2^1 & x_2^2 & \ldots & x_2^n & x_2^{n+1} & x_2^{n+2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_n^1 & x_n^2 & \ldots & x_n^n & x_n^{n+1} & x_n^{n+2} \\ \xi^1 & \xi^2 & \ldots & \xi^n & \xi^{n+1} & \xi^{n+2} \\ \eta^1 & \eta^2 & \ldots & \eta^n & \eta^{n+1} & \eta^{n+2} \end{vmatrix}$$

ce déterminant. Nous supposerons en outre que l'on ait

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_k^i}{\partial u} &= a_k \xi^i \\ \frac{\partial x_k^i}{\partial v} &= b_k \eta^i \end{aligned} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n); (i = 1, 2, \ldots, n);$$

ce qui revient à dire que toutes les rotations p_{kl} sont nulles, sauf $p_{k,n+1}$ qui est égal à a_k; de même, toutes les rotations q_{kl} sont nulles, sauf $q_{k,n+2}$ qui est égal à b_k. Il résulte de là que $\frac{\partial \eta_i}{\partial u}$ ne contient aucune des quantités $x_1^i, x_2^i, \ldots, x_n^i$; il en est de même de $\frac{\partial \xi_i}{\partial v}$. On pourra donc poser aussi

$$\frac{\partial \eta_i}{\partial u} = m \xi_i, \qquad \frac{\partial \xi_i}{\partial v} = n \eta_i.$$

Il ne reste plus que les $2n+2$ rotations a_k, b_k, m et n. On a alors les formules suivantes

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial x_k^i}{\partial u} = a_k \xi^i, && \frac{\partial \xi_i}{\partial u} = -\sum_k a_k x_k^i - m\eta^i, && \frac{\partial \eta^i}{\partial u} = m\xi_i, \\ &\frac{\partial x_k^i}{\partial v} = b_k \eta^i, && \frac{\partial \xi_i}{\partial v} = n\eta_i, && \frac{\partial \eta_i}{\partial v} = -\sum_k b_k x_k^i - n\xi^i. \end{aligned}\right.$$

Pour que ce système (11) puisse exister, il faut que toutes les relations qui existent dans le cas général puissent ici être satisfaites; or on trouve, en différentiant,

$$\frac{\partial^2 x_k^i}{\partial u\,\partial v} = \frac{\partial a_k}{\partial v}\xi^i + a_k n\eta^i = \frac{\partial b_k}{\partial u}\eta^i + b_k m\xi^i,$$

$$\frac{\partial^2 \xi^i}{\partial u\,\partial v} = -\sum_k\left(\frac{\partial a_k}{\partial v} - m b_k\right)x_k^i - \sum a_k b_k \eta^i - \frac{\partial m}{\partial v}\eta^i + mn\xi^i = \frac{\partial n}{\partial u}\eta^i + mn\xi^i,$$

$$\frac{\partial^2 \eta^i}{\partial u\,\partial v} = \frac{\partial m}{\partial v}\xi_i + mn\eta^i = -\sum\left(\frac{\partial b_k}{\partial u} - n a_k\right)x_k^i - \frac{\partial n}{\partial u}\xi_i - \sum a_k b_k \xi^i + mn\eta^i.$$

On arrive donc aux $2n+1$ relations suivantes

$$(12)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial a_k}{\partial v} = m b_k, \\ &\frac{\partial b_k}{\partial u} = n a_k, \end{aligned}\right. \qquad \frac{\partial m}{\partial v} + \frac{\partial n}{\partial u} + \sum a_k b_k = 0.$$

Inversement, si les relations (12) sont satisfaites, les éléments de Δ sont déterminés, à une substitution orthogonale à coefficients constants près, effectuée sur les éléments des lignes. Un déterminant jouissant des propriétés qui viennent d'être indiquées est appelé *déterminant orthogonal dans l'espace à $n+2$ dimensions*.

D'un tel déterminant on peut en déduire une infinité d'autres. Considérons en effet la matrice

$$\left|\begin{matrix} x_1^1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n & x_1^{n+1} & x_1^{n+2} \\ x_2^1 & x_2^2 & \ldots & x_2^n & x_2^{n+1} & x_2^{n+2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_n^1 & x_n^2 & \ldots & x_n^n & x_n^{n+1} & x_n^{n+2} \end{matrix}\right|.$$

Effectuons sur les éléments des colonnes une même substitution orthogonale à coefficients constants; c'est-à-dire posons

$$x'^i_k = \alpha^1_k x^i_1 + \alpha^2_k x^i_2 + \ldots + \alpha^n_k x^i_n \qquad (k = 1, 2, \ldots, n;\ i = 1, 2, \ldots, n, n+1, n+2).$$

où les α sont les coefficients d'une substitution orthogonale à coefficients constants; le déterminant obtenu en remplaçant, dans Δ, x^i_k par x'^i_k jouit des mêmes propriétés que Δ; les quantités m et n sont restées les mêmes, mais a_k, b_k sont remplacés par a'_k, b'_k donnés par les formules

$$(13)\qquad \begin{cases} a'_k = \alpha^1_k a_1 + \alpha^2_k a_2 + \ldots + \alpha^n_k a_n, \\ b'_k = \alpha^1_k b_1 + \alpha^2_k b_2 + \ldots + \alpha^n_k b_n. \end{cases}$$

Tous les déterminants orthogonaux ainsi obtenus seront dits *équivalents*. Si deux déterminants sont équivalents, les quantités m, n,

$$\Sigma a^2_k, \quad \Sigma b^2_k, \quad \Sigma a_k b_k$$

sont les mêmes. Ces quantités sont les *invariants* du déterminant orthogonal.

Nous allons montrer que ces déterminants équivalents sont définis quand on en connaît les deux dernières lignes.

Supposons que l'on connaisse les fonctions $\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^{n+2}, \eta^1, \eta^2, \ldots, \eta^{n+2}$ satisfaisant aux relations

$$(14)\qquad \sum_1^{n+2} (\xi^i)^2 = 1, \qquad \sum_1^{n+2} (\eta^i)^2 = 1, \qquad \sum_1^{n+2} (\xi^i)(\eta^i) = 0$$

et

$$(15)\qquad \frac{\partial \xi^i}{\partial v} = n\eta^i, \qquad \frac{\partial \eta^i}{\partial u} = m\xi^i;$$

adjoignons aux $2(n+2)$ fonctions ξ, η, un système quelconque de $n(n+2)$ fonctions X^i_k de u et v telles que le déterminant

$$(16)\qquad \Delta' = \begin{vmatrix} X^1_1 & X^2_1 & \ldots & X^n_1 & X^{n+1}_1 & X^{n+2}_1 \\ X^1_2 & X^2_2 & \ldots & X^n_2 & X^{n+1}_2 & X^{n+2}_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ X^1_n & X^2_n & \ldots & X^n_n & X^{n+1}_n & X^{n+2}_n \\ \xi^1 & \xi^2 & \ldots & \xi^n & \xi^{n+1} & \xi^{n+2} \\ \eta^1 & \eta^2 & \ldots & \eta^n & \eta^{n+1} & \eta^{n+2} \end{vmatrix},$$

soit le déterminant d'une substitution orthogonale. Partageons les rotations de ce déterminant en trois groupes : 1° les rotations P_{kl}, Q_{kl} qui sont les coefficients de X_l^i dans $\frac{\partial X_k^i}{\partial u}$, $\frac{\partial X_k^i}{\partial v}$; 2° les rotations m et n qui sont données par les formules (15); 3° puisque $\frac{\partial \eta^i}{\partial u}$ ne contient pas $X_1^i, X_2^i, \ldots, X_n^i$, il en résulte que $\frac{\partial X_k^i}{\partial u}$ ne doit pas contenir η^i, il peut contenir ξ^i; nous désignerons le coefficient de ξ^i par A_k; de même, $\frac{\partial X_k^i}{\partial v}$ ne contient pas ξ^i, mais il contient η^i, soit B_k le coefficient de η^i; les quantités A_k, B_k forment le troisième groupe de rotations. On aura par conséquent les formules

$$(17)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial X_k^i}{\partial u} = \Sigma P_{kl} X_l^i + A_k \xi^i, \\ \dfrac{\partial X_k^i}{\partial v} = \Sigma Q_{kl} X_l^i + B_k \eta^i, \\ \dfrac{\partial \xi^i}{\partial u} = -\Sigma A_k X_k^i - m\eta^i, \qquad \dfrac{\partial \xi^i}{\partial v} = n\eta^i, \\ \dfrac{\partial \eta^i}{\partial u} = m\xi^i, \qquad \dfrac{\partial \eta^i}{\partial v} = -\Sigma B_k X_k^i - n\xi^i. \end{cases}$$

Si l'on différentie la première des équations (17) on voit que le coefficient de X_l^i, dans $\frac{\partial^2 X_k^i}{\partial u\, \partial v}$, ne dépend pas des quantités A_k, B_k, m, n; même résultat en différentiant la seconde. Il en résulte que les fonctions P_{kl}, Q_{kl} sont des rotations dans l'espace à n dimensions.

Ce point étant acquis, posons

$$(17\ bis)\quad x_k^i = y_1^k X_1^i + y_2^k X_2^i + \ldots + y_n^k X_n^i \qquad (k = 1, 2, \ldots, n);\ (i = 1, 2, \ldots, n+2),$$

où les fonctions y_l^k sont les coefficients d'une substitution orthogonale. Cherchons à déterminer ces fonctions de telle sorte que le déterminant obtenu en remplaçant dans Δ', X_i^k par x_i^k soit orthogonal. Il faut et il suffit pour cela, que les dérivées $\frac{\partial x_k^i}{\partial u}$, $\frac{\partial x_k^i}{\partial v}$ ne contiennent plus les fonctions $X_1^i, X_2^i, \ldots, X_n^i$, ce qui exige que l'on ait

$$(18)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial y_l^k}{\partial u} + y_1^k P_{1l} + y_2^k P_{2l} + \ldots + y_n^k P_{nl} = 0, \\ \dfrac{\partial y_l^k}{\partial v} + y_1^k Q_{1l} + y_2^k Q_{2l} + \ldots + y_n^k Q_{nl} = 0. \end{cases}$$

Les formules (18) montrent que les rotations dans le système y_i^k sont précisément les quantités P_{kl}. D'après la remarque faite plus haut, ces équations (18) sont compatibles et par suite il sera possible par la substitution (17) de ramener Δ' à un déterminant orthogonal. Les fonctions inconnues y_i^k données par les équations (18) sont définies à une substitution orthogonale près à coefficients constants. Il en résulte que tous les déterminants orthogonaux déduits de Δ' sont équivalents.

La détermination de ces déterminants orthogonaux exige par conséquent une opération différentielle d'ordre $n-2$.

Considérons le point A_k qui a pour coordonnées $x_k^1, x_k^2, \ldots, x_k^{n+2}$. Ce point est situé sur l'hypersphère

$$(x^1)^2+(x^2)^2+\ldots+(x^{n+2})^2=1.$$

Les coordonnées de ce point satisfont à l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial v}=\frac{1}{a_k}\frac{\partial a_k}{\partial v}\frac{\partial \theta}{\partial u}+\frac{1}{b_k}\frac{\partial b_k}{\partial u}\frac{\partial \theta}{\partial v}, \tag{19}$$

le point A_k décrit donc un réseau; les tangentes à ce réseau ont pour cosinus directeurs les quantités (ξ) et (η); ces tangentes sont rectangulaires. Nous appellerons ce réseau un *réseau* OS.

Considérons d'une manière générale le point A dont les coordonnées sont

$$X^i=\alpha_1 x_1^i+\alpha_2 x_2^i+\ldots+\alpha_n x_n^i \qquad (i=1, 2, \ldots, n+2),$$

où les α sont des constantes dont la somme des carrés égale l'unité. Ce point A décrit un réseau OS parallèle aux réseaux A_k; on voit qu'il n'existe pas d'autres réseaux OS parallèles à ceux-là.

Si l'on suppose que

$$\alpha_1^2+\alpha_2^2+\ldots+\alpha_n^2=0,$$

le point A décrit un réseau parallèle aux précédents et situé sur l'hypercône

$$(X^1)^2+(X^2)^2+\ldots+(X^{n+2})^2=0.$$

La connaissance d'un réseau OS détermine les quantités ξ et η et une autre ligne d'un déterminant équivalent à Δ; un tel réseau permet d'obtenir un déterminant orthogonal par une opération d'ordre $n-3$.

12. Considérons les éléments d'une colonne quelconque de Δ; soient

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_n, \quad \xi, \quad \eta,$$

les éléments de cette colonne où nous supprimons l'indice supérieur. On a

$$\frac{\partial x_k}{\partial u} = a_k \xi,$$

$$\frac{\partial x_k}{\partial v} = b_k \eta.$$

On voit facilement que

$$\frac{\partial^2 x_k}{\partial u\, \partial v} = a_k \frac{\partial \xi}{\partial v} + b_k \frac{\partial \eta}{\partial u}.$$

On en déduit que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont solutions de l'équation

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial v} = \frac{1}{\xi} \frac{\partial \xi}{\partial v} \frac{\partial \theta}{\partial u} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial u} \frac{\partial \theta}{\partial v}, \tag{20}$$

si l'on sait d'avance que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont solution d'une équation de Laplace écrite sous la forme

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial v} = \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial v} \frac{\partial \theta}{\partial u} + \frac{1}{l} \frac{\partial l}{\partial u} \frac{\partial \theta}{\partial v}. \tag{21}$$

On devra avoir, en comparant (20) et (21),

$$\xi = hU, \qquad \eta = lV, \tag{22}$$

U étant fonction de u seul, V de v seul. Et par suite on aura

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 1 - h^2 U^2 - l^2 V^2. \tag{23}$$

Réciproquement, si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ satisfont à l'équation (21) et si la relation (23) est satisfaite, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ seront les n premiers termes d'une colonne de Δ. On déterminera ξ et η par les formules (22), de sorte qu'on aura bien la relation

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 + \xi^2 + \eta^2 = 1. \tag{24}$$

Ensuite, on déterminera les rotations par les formules

$$(25)\qquad \begin{cases} a_k = \dfrac{1}{\xi}\dfrac{\partial x_k}{\partial u}, & m = \dfrac{1}{\xi}\dfrac{\partial \eta}{\partial u}, \\ b_k = \dfrac{1}{\eta}\dfrac{\partial x_k}{\partial v}, & n = \dfrac{1}{\eta}\dfrac{\partial \xi}{\partial v}. \end{cases}$$

Il faut vérifier que les relations (12) sont satisfaites. Or les relations

$$(26)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial a_k}{\partial v} = m b_k, \\ \dfrac{\partial b_k}{\partial u} = n a_k \end{cases}$$

reviennent à écrire que x_k est solution de (21).

Ensuite, on déduit de (24) et (25)

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \xi}{\partial u} = -\Sigma a_k x_k - m\eta, && \frac{\partial \eta}{\partial u} = m\xi, \\ &\frac{\partial \xi}{\partial v} = n\eta, && \frac{\partial \eta}{\partial v} = -\Sigma b_k x_k - n\xi. \end{aligned}$$

En égalant les deux valeurs de $\dfrac{\partial^2 \xi}{\partial u\, \partial v}$ et en tenant compte des équations (26) qui sont déjà satisfaites, on trouve

$$\frac{\partial m}{\partial v} + \frac{\partial n}{\partial u} + \Sigma a_k b_k = 0.$$

Donc :

Pour que n quantités $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *soient les n premiers termes d'une colonne d'un déterminant orthogonal, il faut et il suffit que ces fonctions soient solutions d'une équation de la forme* (21) *et que la relation* (23) *soit satisfaite.*

13. Un réseau est dit *orthogonal* si les tangentes aux courbes du réseau sont perpendiculaires. Si, dans l'espace à $(n+2)$ dimensions, $X^1, X^2, \ldots, X^{n+2}$ sont les coordonnées du réseau, on aura les conditions

$$(27)\qquad \sum^{n+2} \frac{\partial X^i}{\partial u}\frac{\partial X^i}{\partial v} = 0.$$

Il y a lieu, toutefois, de faire une distinction. Introduisons les quantités

$$(28)\qquad E = \sum_1^{n+2} \left(\frac{\partial X_i}{\partial u}\right)^2, \qquad G = \sum_1^{n+2} \left(\frac{\partial X_i}{\partial v}\right)^2.$$

Si aucune des quantités E, G n'est nulle, on a un réseau auquel nous donnons le nom de *réseau* O; si l'une des quantités E ou G est nulle, on a un réseau spécial que nous étudions à la fin de ce Chapitre; enfin, si E et G sont tous deux nuls, on a un réseau que nous étudions au Chapitre suivant sous le nom de *réseau nul*.

Il est clair que les réseaux parallèles aux réseaux OS du n° 11 sont des réseaux O. Déterminons d'abord ces réseaux; si X^1, X^2, ..., X^{n+2} sont les coordonnées du réseau, on devra avoir

$$(29)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial X^i}{\partial u} = h\xi^i, \\ \dfrac{\partial X^i}{\partial v} = l\eta^i. \end{cases}$$

Écrivons que ces deux équations sont compatibles; on aura, en tenant compte des formules (11),

$$(30)\qquad \frac{\partial^2 X^i}{\partial u\,\partial v} = \frac{\partial h}{\partial v}\xi^i + hn\eta^i = \frac{\partial l}{\partial u}\eta^i + lm\xi^i.$$

On devra donc avoir

$$(31)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial h}{\partial v} = lm, \\ \dfrac{\partial l}{\partial u} = hn. \end{cases}$$

La résolution du système (31) permet de déterminer, à l'aide de quadratures, tous les réseaux parallèles à un réseau donné OS.

Si les équations (31) sont satisfaites, on peut écrire la valeur de $\dfrac{\partial^2 X^i}{\partial u\,\partial v}$ sous l'une ou l'autre des deux formes

$$(32)\qquad \frac{\partial^2 X^i}{\partial u\,\partial v} = \frac{\partial h}{\partial v}\xi^i + \frac{\partial l}{\partial u}\eta^i = h\frac{\partial \xi^i}{\partial v} + l\frac{\partial \eta_i}{\partial u}.$$

Ce qui montre que X^i satisfait aux deux équations

$$\frac{\partial^2 X}{\partial u\, \partial v} = \frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial u} + \frac{1}{l}\frac{\partial l}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v}, \tag{33}$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial v} = \frac{1}{\xi^i}\frac{\partial \xi^i}{\partial v}\frac{\partial \theta}{\partial u} + \frac{1}{\eta^i}\frac{\partial \eta^i}{\partial u}\frac{\partial \theta}{\partial v}. \tag{34}$$

L'équation (33) est celle à laquelle satisfont les coordonnées du réseau. Elle admet la solution λ, telle que

$$2\lambda = \sum_{1}^{n+2} (X^i)^2. \tag{35}$$

Ce résultat est d'ailleurs équivalent à la condition (27).

L'équation (34) admet comme solutions les n quantités x_k^i (n° 12) $(k=1, 2, \dots, n)$. On peut donc dire : les coordonnées de même rang de tous les réseaux parallèles à un réseau OS satisfont à une même équation de Laplace.

Au lieu de résoudre le système (31), on peut opérer ainsi; posons

$$X^i = \sum_{k=1}^{k=h} p_k x_k^i + q\xi^i + r\eta^i, \tag{36}$$

$p_1, p_2, \ldots, p_n, q, r$ étant $n+2$ fonctions inconnues que nous déterminerons de façon que $\frac{\partial X^i}{\partial u}$, $\frac{\partial X^i}{\partial v}$ aient la forme (29). Différentions l'équation (36) en tenant compte des équations (11). On aura

$$\frac{\partial X^i}{\partial u} = \sum_{k=1}^{k=h} x_k^i\left(\frac{\partial p_k}{\partial u} - a_k q\right) + \xi^i\left(\sum_k a_k p_k + \frac{\partial q}{\partial u} + mr\right) + \eta^i\left(\frac{\partial r}{\partial u} - qm\right),$$

$$\frac{\partial X^i}{\partial v} = \sum_k x_k^i\left(\frac{\partial p_k}{\partial v} - b_k r\right) + \xi^i\left(\frac{\partial q}{\partial v} - nr\right) + \eta^i\left(\sum_k b_k p_k + nq + \frac{\partial r}{\partial v}\right).$$

On devra donc avoir les conditions

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial p_k}{\partial u} &= a_k q, & \frac{\partial q}{\partial v} &= nr, \\ \frac{\partial p_k}{\partial v} &= b_k r, & \frac{\partial r}{\partial u} &= mq. \end{aligned}\right. \tag{37}$$

On aura ensuite

$$(38)\qquad \left\{\begin{aligned} h &= \sum_{1}^{h} a_k p_k + \frac{\partial q}{\partial u} + mr,\\ l &= \sum_{1}^{h} b_k p_k + \frac{\partial r}{\partial v} + nq. \end{aligned}\right.$$

Si les deux dernières équations (37) sont satisfaites, les équations qui donnent les n quantités p_k sont compatibles. On trouve, en effet, en différentiant, que les deux valeurs $\frac{\partial^2 p_k}{\partial u\,\partial v}$ sont égales. On a

$$\frac{\partial^2 p_k}{\partial u\,\partial v} = a_k nr + b_k mq,$$

ce qui peut s'écrire sous l'une ou l'autre des formes suivantes :

$$\frac{\partial^2 p_k}{\partial u\,dv} = a_k \frac{\partial q}{\partial v} + b_k \frac{\partial r}{\partial u} = q\frac{\partial a_k}{\partial v} + r\frac{\partial b_k}{\partial u};$$

ce qui montre que p_k satisfait aux deux équations

$$(39)\qquad \frac{\partial^2 p_k}{\partial u\,\partial v} = \frac{1}{a_k}\frac{\partial a_k}{\partial v}\frac{\partial p_k}{\partial u} + \frac{1}{b_k}\frac{d b_k}{\partial u}\frac{\partial p_k}{\partial v}.$$

$$(40)\qquad \frac{\partial^2 p_k}{\partial u\,\partial v} = \frac{1}{q}\frac{\partial q}{\partial v}\frac{\partial p_k}{\partial u} + \frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial u}\frac{\partial p_k}{\partial v}.$$

L'équation (39) admet comme solutions $x_k^1, \ldots, x_k^{n+2}$; c'est l'équation du réseau OS décrit par A_k. Si l'on connaît une solution p_k de cette équation, les valeurs

$$q = \frac{1}{a_k}\frac{\partial p_k}{\partial u}, \qquad r = \frac{1}{b_k}\frac{\partial p_k}{\partial v}$$

satisfont aux deux dernières équations (37) et, par conséquent, le problème s'achèvera à l'aide de quadratures. On voit que, à des quadratures près, l'intégration des équations de Laplace qui correspondent aux divers réseaux A_k est un problème identique. L'intégration de l'équation (33) se ramène de même à celle de l'équation (39), à chaque solution p de (39) correspond une solution X de (33) par les formules

$$\frac{1}{h}\frac{\partial X}{\partial u}=\frac{1}{a_k}\frac{\partial p}{\partial u},$$
$$\frac{1}{l}\frac{\partial X}{\partial v}=\frac{1}{b_k}\frac{\partial p}{\partial v}.$$

L'équation (40) admet comme solutions $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Nous allons montrer qu'elle admet aussi comme solution λ. Il résulte, en effet, des formules (35) et (36) que l'on a

$$2\lambda=\sum_1^k p_k^2+q^2+r^2.$$

En différentiant et en tenant compte des équations (37) et (38), on aura

$$(41)\qquad \left\{\begin{aligned}\frac{\partial\lambda}{\partial u}&=qh,\\ \frac{\partial\lambda}{\partial v}&=lr;\end{aligned}\right.$$

d'où

$$\frac{\partial^2\lambda}{\partial u\,\partial v}=hrn+qlm=q\frac{\partial h}{\partial v}+r\frac{\partial l}{\partial u}=h\frac{\partial q}{\partial v}+l\frac{\partial r}{\partial u},$$

ce qui montre que λ satisfait aux équations (33) et (40).

Nous allons montrer que, réciproquement, la méthode de formation précédente donne tous les réseaux O. Prenons, en effet, un tel réseau; soient $X^1, X^2, \ldots, X^{n+2}$ les coordonnées d'un point du réseau; soient $\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^{n+2}$ les paramètres directeurs de la tangente à la courbe de paramètre v; soient, de même, $\eta^1, \eta^2, \ldots, \eta^{n+2}$ les paramètres directeurs de l'autre tangente du réseau. Comme les courbes du réseau ne sont pas de longueur nulle, on peut supposer que

$$(42)\qquad \sum_1^{n+2}(\xi^i)^2=1,\qquad \sum_1^{n+2}(\eta^i)^2=1.$$

Le réseau étant O, on aura aussi

$$(43)\qquad \sum^{n+2}(\xi^i)(\eta^i)=0.$$

On aura ensuite

$$\frac{\partial X^i}{\partial u} = h\xi^i,$$

$$\frac{\partial X^i}{\partial v} = l\eta^i,$$

et, par suite,

$$(44) \qquad \frac{\partial^2 X^i}{\partial u\, \partial v} = \frac{\partial h}{\partial v}\xi^i + h\frac{\partial \xi^i}{\partial v} = \frac{\partial l}{\partial u}\eta^i + l\frac{\partial \eta^i}{\partial u}.$$

Le point décrivant un réseau, on doit avoir des relations de la forme

$$\frac{\partial^2 X^i}{\partial u\, \partial v} = P\frac{\partial X^i}{\partial u} + Q\frac{\partial X^i}{\partial v} = P h\xi^i + Q\eta^i l.$$

On a donc les équations

$$(45) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial h}{\partial v}\xi^i + h\dfrac{\partial \xi^i}{\partial v} = P h\xi^i + Q l\eta^i, \\[2mm] \dfrac{\partial l}{\partial u}\eta^i + l\dfrac{\partial \eta^i}{\partial u} = P h\xi^i + Q l\eta^i. \end{cases}$$

Multiplions les premières équations (45) par ξ^i, puis faisons la somme; on trouve

$$\frac{\partial h}{\partial v} = P h;$$

de même, on aura

$$\frac{\partial l}{\partial u} = Q l.$$

On en déduit

$$(46) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \xi^i}{\partial v} = \dfrac{1}{h}\dfrac{\partial l}{\partial u}\eta^i, \\[2mm] \dfrac{\partial \eta^i}{\partial u} = \dfrac{1}{l}\dfrac{\partial h}{\partial v}\xi^i. \end{cases}$$

Les équations (42), (45) et (46) prouvent (n° 11) que les quantités ξ, η sont les deux dernières lignes d'un déterminant orthogonal, ce qui établit notre réciproque.

Il résulte de là :

Tout réseau O *a des parallèles sur l'hypersphère ou sur l'hypercône isotrope* (*pour* $n > 5$).

14. Menons, par chaque point M d'un réseau O, une droite L perpendiculaire aux deux tangentes du réseau. Ses paramètres directeurs $y_1, y_2, \ldots, y_{n+2}$ sont

$$y_i = \alpha_1 x_1^i + \alpha_2 x_2^i + \ldots + \alpha_n x_n^i; \tag{47}$$

différentions et tenons compte des formules (11), on aura

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial y_i}{\partial u} &= \mathrm{A}\xi^i + z_i, \\ \frac{\partial y_i}{\partial v} &= \mathrm{B}\eta^i + t_i, \end{aligned}\right. \tag{48}$$

où l'on a posé

$$z_i = x_1^i \frac{\partial \alpha_1}{\partial u} + x_2^i \frac{\partial \alpha_2}{\partial u} + \ldots + x_n^i \frac{\partial \alpha_n}{\partial u},$$

$$t_i = x_1^i \frac{\partial \alpha_1}{\partial v} + x_2^i \frac{\partial \alpha_2}{\partial v} + \ldots + x_n^i \frac{\partial \alpha_n}{\partial v}.$$

Cherchons si cette droite L peut décrire une congruence; un point quelconque P de cette droite L a pour coordonnées

$$\mathrm{Y}^i = \mathrm{X}^i + \lambda y_i;$$

d'où, en différentiant, on trouve

$$\frac{\partial \mathrm{Y}^i}{\partial u} = \xi^i(h + \lambda \mathrm{A}) + \frac{\partial \lambda}{\partial u} y_i + \lambda z_i.$$

Pour que P décrive une courbe tangente à L quand u varie, il faut d'abord choisir λ tel que

$$h + \lambda \mathrm{A} = 0;$$

il faudra ensuite que la direction qui a pour paramètres directeurs les quantités z_i soit parallèle à L, c'est-à-dire

$$\frac{1}{\alpha_1}\frac{\partial \alpha_1}{\partial u} = \frac{1}{\alpha_2}\frac{\partial \alpha_2}{\partial u} = \ldots = \frac{1}{\alpha_n}\frac{\partial \alpha_n}{\partial u}.$$

Les rapports de deux quantités α sont indépendantes de u; on voit de même qu'ils doivent être indépendants de v. En divisant par un facteur convenable, on réduit ces quantités à des constantes; c'est ce que nous supposerons dorénavant. Les droites ainsi définies sont les normales du réseau. On voit que les normales d'un réseau dépendent de $n-1$ constantes arbitraires.

La normale sera dite *isotrope* si

$$\alpha_1^2+\alpha_2^2+\ldots+\alpha_n^2=0;$$

dans le cas contraire, on pourra supposer

$$\alpha_1^2+\alpha_2^2+\ldots+\alpha_n^2=1.$$

Le point de l'hypersphère dont les coordonnées sont $y_1, y_2, \ldots, y_{n+2}$ décrit un réseau OS du déterminant Δ (n° 11).

Nous appellerons *congruence* O la congruence décrite par une normale à un réseau. La représentation sphérique d'une telle congruence est un réseau OS. Dans ce cas, les quantités z_i, t_i sont nulles; on aura donc

$$(49)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial Y^i}{\partial u}&=(h+\lambda A)\xi^i+\frac{\partial\lambda}{\partial u}y^i,\\ \frac{\partial Y^i}{\partial v}&=(l+\lambda B)\eta^i+\frac{\partial\lambda}{\partial v}y^i;\end{aligned}\right.$$

λ est la distance MP; si λ est constant, le point P décrit un réseau parallèle à M. On a, sur chaque normale, une série de surfaces parallèles équidistantes.

Les foyers de la congruence s'obtiennent en prenant pour λ les valeurs $-\frac{h}{A}$ et $-\frac{l}{B}$. Ces foyers sont des *centres de courbure* du réseau M; les plans focaux sont rectangulaires : ce sont des *plans principaux* du réseau M. Nous appellerons encore *géodésiques* les courbes des surfaces focales tangentes à L.

Pour qu'une congruence soit O, il faut et il suffit, d'après ce qui précède, que ses cosinus directeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$, liés par la relation

$$x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2=1,$$

satisfassent à une équation de la forme

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v}=P\frac{\partial\theta}{\partial u}+Q\frac{\partial\theta}{\partial v}.$$

Cette condition est équivalente à la suivante :

Pour qu'une congruence soit O, *il faut et il suffit que l'équation de Laplace, à laquelle satisfont ses paramètres directeurs* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *admette comme solution* $\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$.

Nous donnerons le nom de *congruence* HO à la congruence décrite par une droite isotrope; *tous les réseaux conjugués à une congruence* HO *sont des réseaux* O. Il suffit de le vérifier sur la représentation sphérique; soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les coordonnées d'un réseau de la représentation sphérique. On aura

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 0,$$

d'où l'on déduit

$$\frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial v} + \ldots + \frac{\partial x_n}{\partial u}\frac{\partial x_n}{\partial v} = 0.$$

La projection d'une congruence HO *sur un hyperplan quelconque est une congruence* O.

Projetons sur l'hyperplan $x_n = 0$, les paramètres directeurs de la projection sont $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$; l'équation à laquelle satisfont ces paramètres admet la solution

$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n-1}^2} = i x_n.$$

15. Considérons un réseau O dans l'espace à n dimensions; les coordonnées X$_1$, X$_2$, ..., X$_n$ et l'expression

$$\rho = X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2$$

satisfont à l'équation

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial v} = P\frac{\partial \theta}{\partial u} + Q\frac{\partial \theta}{\partial v}. \tag{50}$$

Faisons une projection stéréographique, nous obtenons sur l'hypersphère à $(n+1)$ dimensions le point

$$x_1 = \frac{4X_1}{4+\rho}, \qquad x_i = \frac{4X_i}{4+\rho}, \qquad x_{n+1} = \frac{4-\rho}{4+\rho}, \tag{51}$$

d'où l'on déduit, inversement,

$$(52)\qquad X_1 = \frac{2x_1}{1+x_{n+1}},\qquad X_i = \frac{2x_i}{1+x_{n+1}},\qquad \rho = 4\frac{1-x_{n+1}}{1+x_{n+1}}.$$

Les quantités $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ satisferont à l'équation

$$(53)\qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v} = P_1\frac{\partial\varphi}{\partial u} + Q_1\frac{\partial\varphi}{\partial v},$$

qui se déduit de l'équation (50) en divisant toutes les solutions par $4+\rho$.

On fait ainsi correspondre à chaque réseau O de l'espace à n un réseau OS de l'espace à $n+1$, et inversement. Les équations (50) et (53) étant équivalentes, on voit que si l'on connaît deux réseaux parallèles O de l'espace à n, on pourra déterminer, en outre, dans l'espace à $n+1$, un réseau O parallèle au réseau OS. On a là un mode de formation successive des déterminants Δ.

Dans le déterminant Δ, qui correspond à ce réseau OS de l'espace à $n+1$, on connaît, outre les deux dernières lignes, une autre ligne dont les éléments sont $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$. Pour le déterminer, il faudra effectuer une opération différentielle d'ordre $n-4$. On peut l'éviter si l'on connaît les normales du réseau O de l'espace à n. Il suffit de remarquer qu'une normale isotrope de O se transforme en une normale isotrope au réseau (x) et la direction qui a pour cosinus directeurs $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$.

FIN DU TOME XIV DE LA TROISIÈME SÉRIE.